

Тур В.В., доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе Брестского государственного технического университета, Беларусь

Марковский Д.М., аспирант Брестского государственного технического университета, Беларусь

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Оценка надежности строительных конструкций является в настоящее время одной из актуальных научно-технических проблем. Сложность подобных оценок связана не только с аспектами самих методов, но и с отсутствием единого методологического подхода, закрепленного в нормативных документах. Это особенно ощутимо в связи с изменением концепции надежности, принятой в новых нормах по проектированию железобетонных конструкций.

В статье описаны различные методики оценки надежности конструкций в контексте общей многоуровневой системы. Коротко проанализированы сами расчетные методы, определена их область применения. Представлен пример оценки надежности конструкции с использованием вероятностных методов, как аппроксимационных, так и точных, использование которых позволяет более обоснованно подойти к оценке технического состояния проектируемых или эксплуатируемых конструкций, исключив, в ряде случаев, чрезмерные экономические затраты.

PROBABILISTIC METHODS FOR ASSESSING THE RELIABILITY OF BUILDING STRUCTURES

The evaluation of the reliability of building structures is one of the scientific and engineering problems of current importance at present. Complexities of such evaluations are related not only to the features of the methods as such, but to the lack of unified methodological approach, which is assigned to the regulations. This is perceived more than usual as the result of reliability concept change in new codes for design of concrete structures.

Different methods for structural reliability assessing are described in the context of general multilevel assessment system. The methods of evaluation are briefly analyzed and the scopes of application are defined. Introduced example of assessing the reliability of structure using probabilistic methods both approximate and exact shows that such methods allows the approach to the performance evaluation of either projected or renewal buildings to make more justified. It is possible to exclude excessive costs in a number of cases with all this going on.

Введение

Надежностью конструктивной системы называют ее способность выполнять заданные при проектировании требования на протяжении всего расчетного срока службы¹. Обычно надежность системы или элемента выражается через вероятность его отказа (разрушения). Рассчитать надежность сложной системы – это значит определить ее показатели надежности по известным показателям надежности элементов [1].

Для определения вероятности отказа системы используются различные методы теории надежности. В основу таких расчетов положены расчетные модели систем. Информация о них, как правило, неполная, поэтому искомые показатели надежности следует рассматривать не как величины абсолютные, но как относительные. Однако всегда можно сделать сравнение показателей надежности для различных систем, при условии, что их оценка велась с использованием одного уровня предварительной информации об элементах системы и одних математических моделей.

Основные действия, выполняемые при анализе надежности систем:

1. Назначить целевой уровень надежности.
2. Идентифицировать значимые режимы обрушения².
3. Представить идентифицированные режимы обрушения в виде последовательно соединенных параллельных схем из отдельных элементов (если режим обрушения включает более одного элемента).
4. Сформулировать функции предельного состояния, соответствующие каждому из компонентов режима обрушения.
5. Идентифицировать стохастические переменные и детерминистические параметры в функциях предельного состояния. Указать типы распределений и статистические параметры для стохастических переменных, а также указать корреляционные зависимости между ними.
6. Оценить вероятность реализации каждого режима обрушения и обобщенную вероятность отказа системы.

¹В общем случае понятие технической надежности определяется, как свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонта и транспортирования

²*Режимом обрушения* называется любая комбинация элементов системы, последовательное или одновременное разрушение которых приводит к отказу системы [2]

7. Изменить проект, если в процессе проектирования надежность конструкций не удовлетворяет поставленным требованиям.

8. Оценить результаты расчета надежности путем выполнения анализа чувствительности.

Величины, входящие в функции предельного состояния и моделирующие поведение конструктивного элемента, называют базисными переменными и обозначают $X = (X_1, \dots, X_n)$, где n – число переменных. Типичными примерами базисных переменных являются нагрузки и воздействия, прочностные характеристики материалов, размеры сечений и т.д. Базисные переменные могут быть зависимыми и независимыми. Стохастический процесс может быть определен как случайная функция времени, так что для любой точки во времени значение стохастического процесса является случайной переменной.

Несовершенства (погрешности), предопределяющие изменчивость (стохастический характер) базисных переменных можно разделить на группы:

Физические несовершенства – связанные с природной изменчивостью физико-механических характеристик, например, изменчивость предела текучести стали, обусловленная изменчивостью (вариациями) технологического процесса и т.д.

Погрешности измерений – связанные с погрешностями определения, например, геометрических параметров.

Статистические погрешности – вызванные ограниченным количеством образцов, по которым оценивается величина показателя.

Погрешности (несовершенства) модели – погрешности, связанные с недостаточными знаниями или идеализацией, принятой при составлении математических моделей, или погрешности, связанные с выбором типа функций распределения вероятностей для стохастических переменных.

В общем случае, методы оценки надежности конструкций в соответствии с [3, 4] можно разделить на четыре уровня:

– **методы I уровня:** стохастические параметры моделируются только нормативными значениями. Этот подход принят в действующих нормах по проектированию конструкций в рамках концепции частных коэффициентов безопасности (метод предельных состояний);

– **методы II уровня:** стохастические параметры моделируют средними значениями, стандартными отклонениями и коэффициентами корреляции между переменными. Стохастические переменные при этом считаются нормально распределенными. Например, методом второго уровня является метод «индексов надежности»;

– **методы III уровня:** стохастические величины моделируются их совместными функциями распределения. Мерой надежности является в данном случае вероятность разрушения (отказа);

– **методы IV уровня:** в этих методах учитываются в качестве меры надежности последствия разрушения (экономический ущерб, потери) и риски, определяемые обычно, как произведение вероятности разрушения на экономические последствия от наступления нежелательного явления. При использовании таких методов можно подвести экономическую основу при сравнении различных проектов, принимая во внимание как несовершенства, так и затраты и прибыль.

Методы уровня I калибруются с использованием методов уровня II, методы уровня II с использованием методов уровня III и т.д.

Результатом оценки надежности некоторой конструкции по методу I уровня (методу частных коэффициентов) есть заключение о пригодности или непригодности конструкции к эксплуатации в рассматриваемых условиях. Также могут быть указаны в заключении фактические значения частных коэффициентов безопасности.

Результат оценки надежности по методам II и III уровня может выражаться через вероятность отказа p_f или соответствующий ей индекс надежности β . Методы IV уровня дают результат в единицах стоимости.

Далее мы уделим внимание методам уровней II и III, для которых основными методиками оценки надежности являются:

Методы надежности первого порядка (FORM – first order reliability methods): в рамках которых выполняют линеаризацию функции предельного состояния, и затем производят оценку надежности методами II и III уровней;

Методы надежности второго порядка (SORM – second order reliability methods): в рамках которых производят квадратичную аппроксимацию функции предельного состояния, и далее оценивают вероятность отказа для полученной квадратичной поверхности;

Симуляционные методы (методы статистических испытаний): при реализации которых генерируются массивы для каждой из стохастических переменных, по легальным расчетным зависимостям рассчитывается массив значений для характеристической функции и по относительному количеству случаев отказа производится оценка вероятности отказа.

На рис. 1 схематически показана классификация методов оценки надежности и их роль в контексте традиционного проекти-

рования конструкций по методу частных коэффициентов безопасности. Представленная схема, позаимствованная из EN 1990 [3], отображает вклад вероятностных методов в разработку положений нормативных документов, касающихся частных коэффициентов безопасности, и их имплицитное главенствующее положение в этом процессе.

Следует отметить, что калибровка частных коэффициентов безопасности – это не единственное применение вероятностных методов расчета. Использование описываемых методов на стадии проектирования дает возможность оптимизации проекта, как с позиций надежности, так и с позиций экономических затрат. При обследовании существующих конструкций вероятностные методы расчетов открывают обширные возможности для инженеров благодаря гибкости расчетных методик, способных учитывать изменения условий эксплуатации конструкций или предъявляемых к ним требований (см. статью [5]).

1. Методы оценки надежности конструкций II уровня

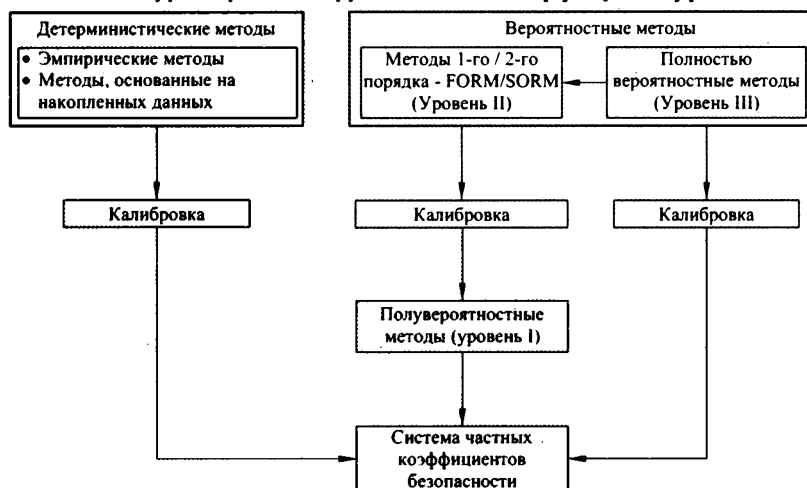


Рис. 1. Иерархическая взаимосвязь методов оценки надежности конструкций

(аппроксимационные)

Вероятность отказа конструктивного элемента при конкретном виде разрушения в общем случае выражается формулой:

$$p_f = \int_{g(x) \leq 0} f_x(x) dx. \quad (1.1)$$

где: $g(\bullet)$ – характеристическая функция (или функция отказа);

X – вектор базисных переменных;

x – вектор реализаций базисных переменных;

$f_X(x)$ – функция плотности вероятности для базисных переменных X в точке с координатами x .

Для решения уравнения (1.1) требуется производить интегрирование характеристической функции столько раз, сколько базисных переменных содержит вектор X . Сложность аналитических расчетов p_f непосредственным интегрированием вынуждает использовать приближительные аппроксимирующие методы. Рассмотренные в данной статье методы основаны на аппроксимации поверхности отказа в некоторой точке (называемой «расчетной точкой») поверхностями более простых форм, таких как, например, гиперплоскость или квадратичная поверхность. Методы, связанные с такими расчетами, называются методами II уровня, в которых многомерный интеграл (1.1) рассчитывается путем выполнения следующих операций:

- базисные переменные (вектор X) трансформируются в набор независимых нормальных случайных переменных, обозначаемых как вектор U . Операция трансформации далее обозначается как $U = T(X)$;

- характеристическая функция в нормированном u -пространстве $g(U)$ аппроксимируется линейной или квадратичной функцией, в результате чего получается поверхность отказа в форме гиперплоскости или квадратичной поверхности.

Это характерные операции для методов II уровня. Если производится линейная аппроксимация, такой метод относится к методам оценки надежности первого порядка (FORM) или методам линеаризации, если аппроксимация квадратичная – мы имеем дело с методом оценки надежности второго порядка (SORM).

1.1. Методы линеаризации (FORM)

В задачах оценки надежности важно разграничить переменные, которые следует рассматривать в процессе моделирования как стохастические, и детерминированные переменные. Стохастические переменные обозначаются $X = (X_1, \dots, X_n)$, где n переменных могут представлять физические несовершенства (нагрузки, сопротивления, геометрия), статистические несовершенства, неточности моделей. Переменные в векторе X называются базисными. Реализации базисных переменных обозначаются $x = (x_1, \dots, x_n)$, т.е. x – это точка в n -мерном пространстве базисных переменных. Совместная функция плотности распределения для переменных X

обозначается через $f_x(x)$. *Характеристической функцией* будем называть функцию $g(X)$, для которой условие $g(x) > 0$ означает, что значения x находятся в безопасной области ω_s , а условие $g(x) < 0$ говорит об отказовом состоянии и о том, что значения x находятся в области ω_f :

$$g(x) = \begin{cases} >0, & x \in \omega_s, \\ \leq 0, & x \in \omega_f, \end{cases} \quad (1.2)$$

Граница между двумя областями $g(X) = g(X_1, \dots, X_n) = 0$ называется *функцией предельного состояния* (рис. 2). Иначе эту функцию можно назвать *поверхностью отказа*¹. Часто в литературе характеристическая функция и функция предельного состояния отождествляются, но разделение было предложено Hurtado [6].

Важно подчеркнуть, что часто поверхность отказа не определяется единственной функцией предельного состояния, т.е. поверхность отказа можно описать несколькими функциями. Однако, по возможности, следует использовать дифференцируемые функции. При анализе надежности конструкций функции отказа обычно составляются по результатам анализа конструкций с позиций механики.

Характеристическая функция, когда ее аргументами являются стохастические переменные X , иногда называется *границей безопасности M* (или *функцией отказа*):

$$M = g(X),$$

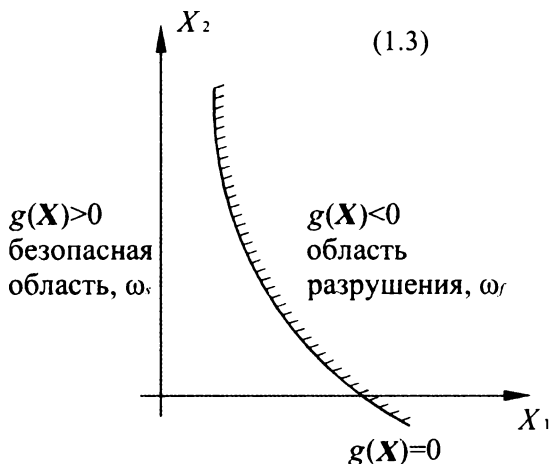


Рис. 2. Функция предельного состояния, безопасная область и область разрушения

¹(техн.) Отказ – событие, состоящее в нарушении работоспособности системы. В теории конструкций соответствует понятию предельного состояния.

где M – стохастическая переменная.

Тогда вероятность отказа элемента определяется:

$$p_f = P(M \leq 0) = P(g(X) \leq 0) = \int_{\omega_f} f_x(x) dx. \quad (1.4)$$

1.1.1. Анализ надежности для линейных границ безопасности

Граница безопасности, как линейная функция базисных переменных может быть в общем виде записана:

$$M = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \quad (1.5)$$

где: $a_0, a_1, \dots, a_n$ – константы.

Ожидаемое значение μ_M и стандартное отклонение σ_M :

$$\mu_M = a_0 + a_1 \mu_{X_1} + \dots + a_n \mu_{X_n} = a_0 + a^T \mu_X, \quad (1.6)$$

$$\sigma_M = \sqrt{a^T C a}, \quad (1.7)$$

где: C – ковариационная матрица для переменных X ;

$a = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ – вектор полиномиальных коэффициентов.

Если базисные переменные независимы, то стандартное отклонение определяется проще:

$$\sigma_M = \sqrt{a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + \dots + a_n^2 \sigma_{X_n}^2}. \quad (1.8)$$

Мерой надежности элемента служит индекс надежности β :

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}. \quad (1.9)$$

Такие преобразования выполняются по той причине, что, как правило, величина p_f в реальных расчетах довольно мала. Для более удобного сравнения малых величин вероятностей отказа принято эти значения выражать через индекс надежности β . По сути, величина β представляет количество стандартных отклонений σ_M между нулем и средним значением функции распределения случайной величины M (рис. 3). Поскольку площадь под кривой распределения равна единице, то площадь затемненной области представляет вероятность разрушения конструкции при планируемых (известных) нагрузках.

Рассмотрим классический пример линейной характеристической функции, когда имеется две базисные переменные: R – переменная, характеризующая несущую способность (сопротивление), и E – переменная эффектов от воздействий (нагрузок). Характеристическая функция (граница безопасности) записывается:

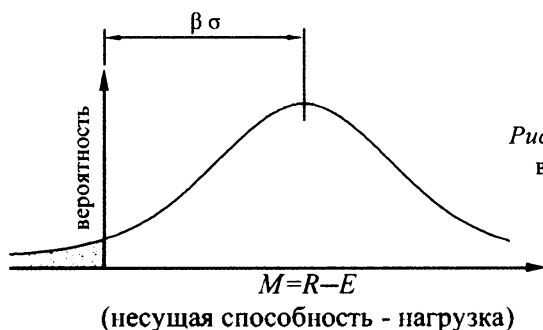


Рис. 3. Функция плотности вероятности величины $M = R - E$

$$g(R, E) = R - E = M,$$

а индекс надежности вычисляется по следующей зависимости:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}. \quad (1.10)$$

Тогда вероятность отказа элемента:

$$p_f = P(R - E \leq 0) = P(g(X) \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta), \quad (1.11)$$

где: Φ – функция Лапласа (функция нормированного нормального распределения).

Численные значения индекса надежности β , определяемого по формуле $\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$, и соответствующие вероятности разрушения p_f представлены в табл. 1.

Таблица 1

Соотношения между β и p_f

p_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
β	1,3	2,3	3,1	3,7	4,2	4,7	5,2

1.1.2. Геометрическая интерпретация индекса надежности

Представим рассматриваемую характеристическую функцию в виде:

$$g(X) = k_0 + k_R R + k_E E. \quad (1.12)$$

Введем нормализованные стохастические переменные U_R и U_E с нулевым математическим ожиданием и единичным стандартным отклонением:

$$U_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}, U_E = \frac{E - \mu_E}{\sigma_E}. \quad (1.13)$$

Тогда характеристическую функцию можно переписать:

$$g(U) = k_0 + k_R(\mu_R + \sigma_R U_R) + k_E(\mu_E + \sigma_E U_E), \quad (1.14)$$

или используя формулу для индекса надежности (1.10) сокращенно можно записать:

$$g(U) = \beta - \alpha_R U_R - \alpha_E U_E, \quad (1.15)$$

где:
$$\beta = \frac{k_0 + k_R \mu_R + k_E \mu_E}{\sqrt{k_R^2 \sigma_R^2 + k_E^2 \sigma_E^2}}, \quad \alpha_R = \frac{-k_R \sigma_R}{\sqrt{k_R^2 \sigma_R^2 + k_E^2 \sigma_E^2}}, \quad \alpha_E = \frac{-k_E \sigma_E}{\sqrt{k_R^2 \sigma_R^2 + k_E^2 \sigma_E^2}}.$$

Рассмотрим численный пример.

Характеристическая функция $g(X) = R - E$. При этом характеристики базисных переменных следующие:

для сопротивления $\mu_R = 10, \sigma_R = 2$;

для воздействий $\mu_E = 4, \sigma_E = 1,1$.

Найдем коэффициенты:

$$\beta = \frac{1 \cdot 10 - 1 \cdot 4}{\sqrt{1^2 \cdot 2^2 + 1^2 \cdot 1.1^2}} = 2.63,$$

$$\alpha_R = \frac{-1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 \cdot 2^2 + 1^2 \cdot 1.1^2}} = -0.876, \quad \alpha_E = \frac{1 \cdot 1.1}{\sqrt{1^2 \cdot 2^2 + 1^2 \cdot 1.1^2}} = 0.482.$$

То есть в нормированном пространстве характеристическая функция будет иметь вид:

$$g(U) = 2,63 + 0,876 U_R - 0,482 U_E.$$

На рис. 4 представлены графики функций предельного состояния

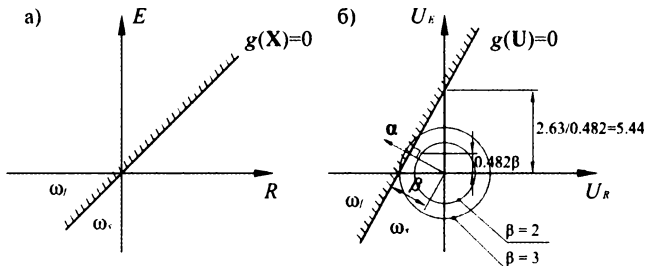


Рис. 4. Линейная функция предельного состояния в x -пространстве (а) переменных и в нормированном u -пространстве (б)

для данного примера. Индекс надежности для такого конструктивного элемента составляет $\beta = 2,63$, что соответствует вероятности отказа $p_f = \Phi(-\beta) = 0,0043$.

Можно заметить, что β представляет кратчайшее расстояние от начала координат до функции предельного состояния в нормированном пространстве переменных. При этом коэффициенты α_R и α_E являются направляющими косинусами единичного вектора α , нормального к поверхности отказа.

1.1.3. Анализ надежности для нелинейных характеристических функций

На практике чаще всего характеристические функции нелинейные и границы безопасности $M = g(X)$ поэтому имеют распределения, отличные от нормального. Чтобы приблизительно оценить индекс надежности требуется линеаризовать границу безопасности помощи разложения $g(X)$ в ряд Тейлора:

$$M \cong g(\mu_x) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X=\mu_x} (X_i - \mu_{X_i}). \quad (1.16)$$

Далее для определения индекса надежности следует применять зависимости (1.6)–(1.9). К тому же результату можно прийти, рассчитывая первый и второй моменты распределения величины M непосредственно, применяя следующие зависимости:

$$\mu_M \approx g(\mu_x), \quad (1.17)$$

$$\sigma_M^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X=\mu_x} \right)^2 \sigma_{X_i}^2. \quad (1.18)$$

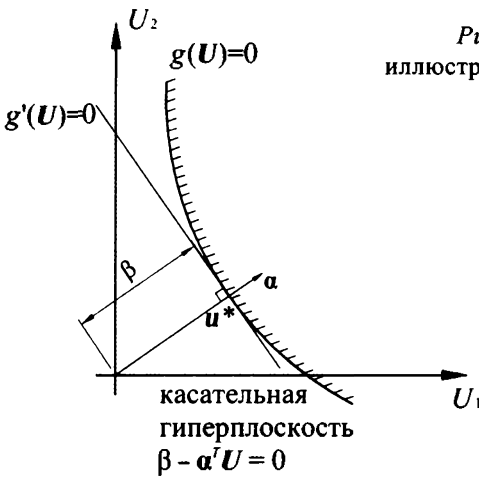
Этот метод еще иногда называют методом второго момента первого порядка (first-order second moment method).

В геометрическом смысле индекс надежности представляет кратчайшее расстояние от начала координат в нормированном пространстве до поверхности отказа (рис. 4, 5).

В случае нелинейной характеристической функции единичный вектор α определяется выражением:

$$\alpha = - \frac{\nabla g(u^*)}{\|\nabla g(u^*)\|}, \quad (1.19)$$

Рис. 5. Геометрическая иллюстрация индекса надежности β



где: $\nabla g(u^*)$ – градиент характеристической функции $g(U)$ в точке с координатами u^* ;

u^* – вектор координат расчетной точки;

$|\nabla g(u^*)|$ – модуль градиента характеристической функции $g(U)$ в точке u^* ;

Градиент $\nabla g(u^*)$ представляет собой вектор, координаты которого в точке $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ задаются равенством:

$$\nabla g(u^*) = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_n), \frac{\partial g}{\partial u_2}(u_1, \dots, u_n), \dots, \frac{\partial g}{\partial u_n}(u_1, \dots, u_n) \right). \quad (1.20)$$

При этом можно констатировать связь следующего вида:

$$u^* = \beta \alpha. \quad (1.21)$$

Следует отметить, что описанный метод линеаризации чувствителен к математической формулировке характеристической функции. При его применении важна скорее не правильность записи этой функции, а точность нахождения первых производных. Чтобы избежать ошибок, связанных с различными эквивалентными вариантами записи функций предельного состояния, можно решать т.н. инвариантную задачу, т.е. решать напрямую задачу оптимизации в нормированном u -пространстве (рис. 5), предложенную Hasofer & Lind [7]:

$$\beta = \min_{g(U)=0} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}. \quad (1.22)$$

В разделе 3 показана последовательность действий при решении данной оптимизационной задачи на численном примере.

1.2. Меры чувствительности

Чтобы характеризовать чувствительность индекса надежности к каждому из параметров и стохастических переменных используются 3 важные меры чувствительности:

α -вектор

Элементы α -вектора характеризуют значимость каждой из стохастических переменных. Линеаризованная граница безопасности записывается в виде $M = \beta - \alpha^T U$, откуда следует, что дисперсия этой переменной равна единице:

$$\sigma_M^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1. \quad (1.23)$$

Таким образом, коэффициент α_i^2 указывает для каждой из стохастических переменных долю неопределенности, связанную с U_i (и, соответственно, с X_i).

Коэффициент эластичности для надежности e_p

Коэффициент эластичности – это показатель, представляющий собой отношение относительного изменения одной величины и относительного изменения другой величины. Общая формула для определения:

$$e_p = \frac{d\beta}{dp} \frac{p}{\beta}, \quad (1.24)$$

где p – константа или параметр в характеристической функции (например, математическое ожидание какой-либо стохастической переменной или стандартное отклонение).

Из выражения (1.24) видно, что если параметр p изменится, например, на 1%, то индекс надежности β изменится на $e_p\%$. Если исследуемый параметр p входит в функцию отказа $g(U, p) = 0$, то выражение для определения коэффициента эластичности:

$$e_p = \frac{1}{|\nabla g(u^*)|} \frac{dh(u^*, p)}{dp} \frac{p}{\beta} \quad \text{или} \quad e_p = \frac{1}{|\nabla g(u^*)|} \frac{dg(x^*, p)}{dp} \frac{p}{\beta}, \quad (1.25)$$

где: u^* – вектор координат расчетной точки в нормированном u -пространстве;

$|\nabla g(u^*)|$ – модуль градиента характеристической функции $g(U)$ в точке u^* ;

x^* – вектор координат расчетной точки в x -пространстве.

Если исследуемый параметр p является статистическим параметром

распределения одной из базисных переменных X , которая соотносится с соответствующей нормированной переменной U функцией $U = T(X, p)$, то следует оценивать эластический коэффициент по формуле:

$$e_p = \frac{1}{\beta} (u^*)^T \frac{\partial T(x^*, p)}{\partial p} \frac{p}{\beta}. \quad (1.26)$$

Если для некоторого параметра p , например, $e_p = -2$, то это означает, что при увеличении p на 1% индекс надежности уменьшится приблизительно на 2%.

Коэффициент чувствительности к исключению переменных

Данный коэффициент является мерой чувствительности, относящейся к элементам единичного вектора α . Если считать стохастическую i -переменную детерминированной величиной, то относительное влияние этого на индекс надежности (т.е. степень изменения β) можно определить по формуле:

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}. \quad (1.27)$$

Можно заметить, что если $|\alpha_i| = 0,14$, то $\xi - 1 < 0,01$, т.е. ошибка индекса надежности составит менее 1%, если считать базисную переменную с номером i фиксированной.

Все вышеприведенные выводы справедливы для нормально распределенных базисных переменных, а также при отсутствии корреляции между ними. При использовании стохастических переменных, распределенных по законам, отличным от нормального, а также при наличии корреляционных зависимостей, указанные методики и коэффициенты чувствительности имеют более сложную форму и в данной статье не приводятся. В общем случае для решения такой задачи требуется трансформировать все переменные с законами распределения, отличными от нормального (Гаусовского), в нормально распределенные переменные и решать задачу далее по вышеописанной методике. Имеются различные методики трансформации, например, Rosenblatt, Nataf, Hermite. Более подробную информацию можно найти, например в [8].

1.3. Методы аппроксимации второго порядка (SORM)

Как отмечено в [7, р.83], методы первого порядка FORM дают приемлемые результаты, когда характеристическая функция не слиш-

ком нелинейная. Когда функция в нормированном u -пространстве значительно нелинейна, применимы методы оценки надежности второго порядка (SORM – Second order reliability methods), которые устанавливают аппроксимацию второго порядка поверхности отказа. Это дает более точные результаты по сравнению с методом FORM.

Результатом расчета по методу SORM является индекс надежности β , умноженный на корректирующий коэффициент, который находится на основе данных о вторых частных производных характеристической функции в расчетной точке. Доказано в [4], что при $\beta \rightarrow \infty$ результаты расчетов по методам первого и второго порядка стремятся к точному результату.

В общем случае уравнение функции отказа, аппроксимированной в расчетной точке u^* в нормированном u -пространстве:

$$g(U) \approx \nabla g(u^*)^T (U - u^*) + 1/2 (U - u^*)^T D (U - u^*) = 0, \quad (1.28)$$

где D – матрица, состоящая из частных производных второго порядка функции отказа в расчетной точке:

$$D_{ij} = \left. \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{U=u^*}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.29)$$

Координаты расчетной точки и соответствующий ей градиентный вектор в общем виде записываются:

$$u^* = \beta \alpha, \quad (1.30)$$

$$\nabla g(u^*) = - |\nabla g(u^*)| \alpha. \quad (1.31)$$

В этом методе функция отказа представляется в виде комбинации двух функций в нормированном u -пространстве: линейной и квадратичной. Как видно, решение уравнения (1.28) – это довольно сложный процесс, требующий значительных вычислений. Для практических целей используются приближенные решения. Breitung (1984) получил асимптотическое решение для вероятности отказа, выражаемой через индекс надежности, полученный методом первого порядка FORM:

$$p_f \approx \Phi(-\beta_1) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta_1 k_j)^{-1/2}, \quad (1.32)$$

где: β_1 – индекс надежности, полученный методом первого порядка (FORM);

n – размерность u -пространства;

k_j – главные кривизны поверхности отказа в расчетной точке
 $j = 1 \dots (n-1)$.

Приведенная формула дает хорошие результаты для больших значений β_j , но приводит к ошибкам, когда кривизны близки к $(1/\beta_j)$, т.е. при $k_j \approx (1/\beta_j)$ благодаря сингулярности в этой точке. Поэтому применяется также и другая форма асимптотического решения (Tvedt, 1990):

$$p_f \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \left(\beta_1 t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \tan^{-1}(-k_j t) \right) \frac{\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right)}{t \prod_{j=1}^{n-1} (1 + k_j^2 t^2)^{1/4}} dt. \quad (1.33)$$

Данная формула применима для малых значений β . Но рекомендуется [9] производить интерполяцию между результатами вычислений (1.32) и (1.33).

Применение методов второго порядка хотя и дает более точный результат, но во многих случаях практически не оправдано с позиции затрат времени. Особенно это касается железобетонных конструкций, при расчете которых, как правило, фигурирует большое количество базисных переменных, участвующих в нелинейных функциях предельного состояния. К тому же методы второго порядка дают приблизительную оценку надежности конструкции.

Более резонным здесь видится использование симуляционных методов, которые, с одной стороны, могут обеспечить достаточную точность, с другой – проще в использовании благодаря развитию электронно-вычислительных средств. Симуляционные методы потенциально могут достигать результатов высокой точности, это зависит от производительности компьютера, от затрачиваемого на расчеты времени. При этом существует несколько разновидностей симуляционных методов, которые появились в результате разного рода оптимизаций расчетных алгоритмов. Благодаря названным особенностям эти методы относятся к категории точных методов.

2. Методы оценки надежности конструкций III уровня (точные)

Симуляционные методы позволяют решать задачи со значительной нелинейностью характеристической функции или невозможностью ее дифференцировать, а также задачи, в которых характеристическая функция в нормированном n -пространстве может иметь более одной расчетной точки, т.е. более одного локального минимума функции. К тому же к достоинствам симуляционных методов

можно отнести и инвариантность относительно применяемых типов распределений для базисных переменных.

При реализации статистического моделирования для каждой из базисных переменных X генерируются массивы реализаций x размерности N . Симуляционные методы можно использовать прямо для оценки вероятности отказа p_r , при этом рассчитывается значение характеристической функции для всех реализаций x . В результате N_r значений попадает в область разрушения ω_r , а относительное количество таких событий N_r / N формирует вероятность отказа. Существует множество методов генерирования реализаций стохастических переменных, описанных в литературе, например:

- прямой метод Монте-Карло;
- направленная симуляция;
- адаптивная симуляция;
- метод Монте-Карло с исключением безопасных областей и др.

Далее мы рассмотрим прямой метод Монте-Карло, поскольку от него берут свое начало все симуляционные методы. Например, метод выборки по значимости (importance sampling method) представляет собой удачное сочетание метода линеаризации (FORM) с симуляционными процедурами.

Необходимым этапом во всех симуляционных методах является генерирование реализаций стохастических переменных с произвольным распределением вероятностей. В общем случае сначала генерируется случайная величина с равномерным распределением, а затем производится трансформация полученного массива значений в массив с заданным распределением. Большинство современных компьютерных математических программ позволяют генерировать массивы значений с заранее заданным типом распределения, поэтому мы не будем останавливаться в данной статье на технике трансформации, а перейдем к рассмотрению алгоритма оценки основных мер надежности и особенностей его применения.

Результатом статистических испытаний (симуляций), как правило, служит вероятность отказа конструкции – относительное количество отказов. В случае необходимости результатом может быть индекс надежности или гистограмма распределений характеристической функции, которую затем, например, можно аппроксимировать аналитической функцией распределения вероятностей. Для получения квантилей распределения несущей способности может быть получена функция или гистограмма распределения предельного усилия, воспринимаемого изделием. Входными параметрами при всех перечисленных задачах являются базисные переменные, каждая из которых принимается либо имеющей вероятност-

ный характер, либо равной детерминированному значению.

Существует несколько методов построения функции распределения предельного усилия. Для проведения статистических испытаний железобетонных изделий, как правило, применяется прямой метод симуляций Монте-Карло и аналитический метод.

Последовательность действий при построении функции распределения предельного усилия методом Монте-Карло следующая:

- генерируются массивы случайных чисел, удовлетворяющие установленным распределениям базисных переменных;

- определяется совокупность расчетных сочетаний случайных значений базисных переменных;

- для каждого расчетного сочетания по легальным расчетным зависимостям, содержащимся в нормативных документах, определяется соответствующая контролируемая характеристика свойства изделия (например, предельное усилие) или значение характеристической функции;

- строится гистограмма распределения контролируемого свойства изделия и при необходимости аппроксимируется некоторой аналитической функцией распределения;

- для нахождения вероятности отказа подсчитывается число сочетаний, приведших к значениям контролируемой характеристики ниже допустимого или к отрицательному значению характеристической функции.

В общем случае для нахождения вероятности отказа элемента, необходимо выполнить оценку выражения:

$$p_f = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\hat{x}_j)], \quad (2.1)$$

где: N – количество симуляций;

$\hat{x}_j$ – сочетание с номером j генерированных значений вектора базисных переменных $\mathbf{X}$;

$I[g(x)]$ – индикаторная функция, определяемая, как:

$$I[g(x)] = \begin{cases} 1 & \text{при } g(x) < 0 \text{ (область отказа)} \\ 0 & \text{при } g(x) \geq 0 \text{ (безопасная область)} \end{cases}$$

Стандартная ошибка вычисляется по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{p_f(1-p_f)}{N}}. \quad (2.2)$$

При этом согласно закону больших чисел при $N \rightarrow \infty$ распределение вероятностей для ошибки стремится к нормальному, что позволяет определять доверительные интервалы или квантили заданного уровня для ошибки.

Прямой метод Монте-Карло основывается на применении выражения (2.1), и при $N \rightarrow \infty$ его результат приближается к точному. Однако симуляции в большом объеме – обычно процесс, требующий значительных вычислительных затрат. Можно заметить, что коэффициент вариации для ошибки пропорционален

$$s = \sqrt{\frac{p_f(1-p_f)}{N}}. \text{ Это значит, что для оценки вероятности порядка}$$

10^{-6} при использовании прямого метода Монте-Карло потребуется 10^8 симуляций, при этом коэффициент вариации ошибки составит 10%. Из этого следует, что метод эффективен при оценке относительно больших вероятностей. Можно записать выражение для определения необходимого количества симуляций и его приближение для малых вероятностей отказа:

$$N \geq \frac{1}{V_{pf}^2} \left(\frac{1}{p_f} - 1 \right) \approx \frac{1}{V_{pf}^2} p_f^{-1}. \quad (2.3)$$

Аналитический метод построения функции распределения предельного усилия для изделия требует предварительного знания функций распределения базисных переменных. Общая формулировка задачи может быть записана в виде следующего выражения:

$$p_f = P(g(X) \leq 0) = \int_{\omega_f} f_x(x) dx. \quad (2.4)$$

Получение аналитического решения в большинстве случаев связано с большой трудоемкостью, которая, прежде всего, зависит от сложности функции предельного состояния и количества задействованных в ней базисных переменных. При этом с законами распределения аналитически можно выполнять без труда лишь простейшие арифметические операции (например, складывать или вычитать нормально распределенные переменные). Тем не менее,

решение может быть получено при ряде упрощений в расчетной модели путем замены случайных базисных переменных детерминированными значениями. Такой замене могут подвергаться переменные, вариации которых не вносят существенного вклада в вариации конечной функции. На практике детерминированными допускается принимать, например, значения следующих параметров: площади сечения арматуры, внешних геометрических размеров элемента.

3. Пример использования многоуровневой оценки надежности

В данном разделе мы рассмотрим практические аспекты применения многоуровневой оценки надежности конструкций на примере железобетонной балки с конкретными характеристиками. Последовательно будут рассмотрены уровни оценки, при этом расчеты в некоторых случаях будут производиться несколькими альтернативными методами. Поскольку целью данного раздела ставилось показать общую стратегию действий и принятия решений на каждом уровне, то для примера была выбрана задача с некоторыми допущениями в целях простоты. Это касается нормальных законов распределений базисных переменных, взаимной независимости всех параметров, количества стохастических переменных, равного трем. Итак, задача...

Требуется: оценить надежность однопролетной балки.

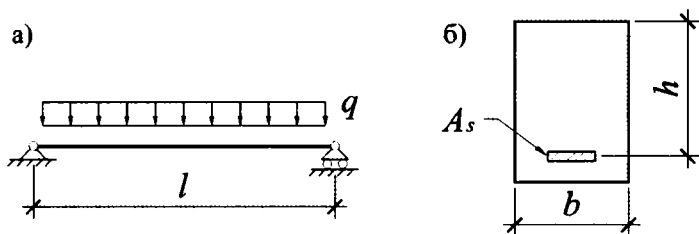


Рис. 6. Расчетная схема балки (а) и ее поперечное сечение (б)

Описание объекта: Балка на двух опорах подвергается действию равномерно распределенной нагрузки q . Расчетная схема балки и схема поперечного сечения представлены на рис. 6. Значения параметров приведены в табл. 2, где также указывается, считать в данной задаче каждый конкретный параметр имеющим детерминированное значение или же распределенным по некоторому закону.

Значения и типы распределений расчетных параметров балки

Переменная	Тип	Среднее значение μ	Стандартное отклонение σ	Коэффициент вариации V
b	det ^{*)}	120 мм	—	—
h	det	193 мм	—	—
A_s	det	254 мм ²	—	—
l	det	3,7 м	—	—
f_s (класс S500)	N ^{**)}	600 МПа	50 МПа	0,083
f_c	N	30 МПа	5 МПа	0,167
q	N	8000 Н/мп	1040 Н/мп	0,13

Примечание:

*) Тип det означает, что переменная имеет детерминированное значение;

**) Тип N означает, что переменная стохастическая и имеет нормальный закон распределения.

3.1 Оценка надежности в рамках методов уровня I

Повторимся, что при оценке надежности методами I уровня дается заключение, удовлетворяет ли конструкция предъявляемым к ней требованиям. Метод частных коэффициентов безопасности, заложенный в действующие нормы по проектированию, относится к этому уровню. В связи с этим произведем расчет балки по нормальным сечениям упрощенным деформационным методом согласно СНБ 5.03.01 [10].

Дано: класс арматуры S500: $f_{sk} = 500$ МПа, $f_{sd} = 450$ МПа, $\gamma_s = 1,1$; бетон с прочностными характеристиками: $f_{cm} = 30$ МПа, $f_{ck} = 30 - 1,645 \cdot 5 = 22$ МПа, $f_{cd} = 22/1,5 = 14,67$ МПа, $\gamma_c = 1,5$; нагрузка: среднее значение $q_m = 8$ кН/мп, расчетное $q_d = 10,4$ кН/мп, $\gamma_q = 1,3$.

Определяем относительную высоту сжатой зоны сечения при расчетных характеристиках:

$$\xi = \frac{f_{sd} A_s}{\omega_c \alpha f_{cd} b h} = \frac{450 \cdot 254}{0,81 \cdot 0,85 \cdot 16,7 \cdot 120 \cdot 193} = 0,489.$$

Это значение меньше предельного значения для области II на-

пряженно-деформированного состояния, поэтому $\omega_c = 0,81$, а расчетная несущая способность сечения рассчитывается по формуле:

$$M_{Rd} = \frac{f_{sd} A_s h}{1000} \left(1 - k_2 \frac{f_{sd} A_s}{\omega_c \alpha f_{cd} b h} \right) = 17570 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

При этом момент от расчетной нагрузки составляет:

$$M_{Ed} = \frac{q_d \cdot l^2}{8} = \frac{8000 \cdot 1,3 \cdot 3,7^2}{8} = 17797 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Поскольку $M_{Ed} > M_{Rd}$ то согласно требованиям СНБ 5.03.01 [10] указанную балку нельзя считать пригодной к эксплуатации в поставленных условиях.

3.2. Оценка надежности в рамках методов уровня II

При оценке надежности методами этого уровня производятся вычисления, основанные на аппроксимации функции предельного состояния некоторой линейной или квадратичной поверхностью. В данном разделе мы продемонстрируем применение линеаризационных методов (FORM).

Сформулируем функцию предельного состояния в общем виде. Для этого, пользуясь упрощенной методикой расчета по нормальным сечениям согласно СНБ 5.03.01 [10], определяем относительную высоту сжатой зоны сечения при средних характеристиках:

$$\xi = \frac{f_s A_s}{\omega_c \alpha f_{cd} b h} = \frac{600 \cdot 254}{0,81 \cdot 0,85 \cdot 30 \cdot 120 \cdot 193} = 0,319.$$

Это меньше предельного значения для области II напряженно-деформированного состояния, поэтому значение коэффициента оставляет $\omega_c = 0,81$, а характеристическую функцию можно записать в развернутом виде:

$$g(X) = \frac{f_s A_s h}{1000} \left(1 - k_2 \frac{f_s A_s}{\omega_c \alpha f_{cd} b h} \right) - \frac{q \cdot l^2}{8}, \quad (3.1)$$

при этом $\alpha = 0,85$, $k_2 = 0,416$.

Далее преобразуем функцию (3.1) с учетом констант:

$$g(f_s, f_{cd}, q) = 49,022 f_s - 0,325 \frac{f_s^2}{f_{cd}} - 1,711 q. \quad (3.2)$$

3.2.1. Прямой метод линеаризации

Поскольку функция (3.2) нелинейная, то для оценки надежности ее требуется линеаризовать, т.е. аппроксимировать в расчетной точке линейной функцией. Для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора по ф.(1.16).

$$M(f_s, f_c, q) = g(\mu_x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X=\mu_x} (X_i - \mu_{x_i}) = 36,03 f_s + 129,94 f_c - 1,71 q. \quad (3.3)$$

Среднее значение и стандартное отклонение линеаризованной функции $M(f_s, f_c, q)$ находим по ф.(1.6), (1.8) (все базисные переменные считаем взаимно независимыми):

$$\mu_M = M(\mu_{f_s}, \mu_{f_c}, \mu_q) = 11825,1$$

$$\sigma_M = \sqrt{36,03^2 \cdot 50^2 + 129,94^2 \cdot 5^2 + 1,71^2 \cdot 1040^2} = 2614,3.$$

По ф.(1.9) определяем индекс надежности:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{11825,1}{2614,3} = 4,25.$$

3.2.2. Метод наискорейшего спуска

Рассмотрим эту же задачу оценки надежности, но решение будем реализовывать, не прибегая к линеаризации характеристической функции $g(f_s, f_c, q)$, а решая оптимизационную задачу (1.22):

$$\beta = \min_{g(U)=0} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Для этого воспользуемся методом наискорейшего спуска, упоминаемым в [7], как алгоритм Шитковского.

Теоретические предпосылки метода:

Данный метод основывается на том, что в расчетной точке u^* поверхности отказа в нормированном пространстве должно выполняться соотношение:

$$u^* = \lambda \nabla g(u^*), \quad (3.4)$$

где λ – коэффициент пропорциональности, который минимизирует функцию $g(U)$.

Данный алгоритм итерационный, поэтому предположим, что точка с координатами u^0 близка к искомой точке u^* :

$$u^* = u^0 + \Delta u. \quad (3.5)$$

Для нахождения λ выполняется линейризация $g(U)$ в точке u^0 :

$$g(U^*) \approx g(u^0) + \nabla g(u^0)^T (U^* - u^0). \quad (3.6)$$

Преобразуем с учетом (3.4) и (3.5):

$$g(U^*) \approx g(u^0) + \nabla g(u^0)^T (U^* - u^0) \approx g(u^0) + \nabla g(u^0)^T (\lambda \nabla g(u^0) - u^0), \quad (3.7)$$

откуда находим λ при условии, что $g(u^*) = 0$:

$$\lambda = \frac{\nabla g(u^0)^T u^0 - g(u^0)}{\nabla g(u^0)^T \nabla g(u^0)}. \quad (3.8)$$

Практическая реализация метода:

Прежде чем применять данный алгоритм, трансформируем характеристическую функцию $g(X)$ (3.2) в нормированное пространство. Для этого стохастические переменные f_s, f_c, q нормализуются по правилам:

$$U_s = \frac{f_s - \mu_{f_s}}{\sigma_{f_s}} = \frac{f_s - 600}{50} \Rightarrow f_s = 50U_s + 600;$$

$$U_c = \frac{f_c - \mu_{f_c}}{\sigma_{f_c}} = \frac{f_c - 30}{5} \Rightarrow f_c = 5U_c + 30;$$

$$U_q = \frac{q - \mu_q}{\sigma_q} = \frac{q - 8000}{1040} \Rightarrow q = 1040U_q + 8000.$$

Тогда характеристическая функция в нормированном u -пространстве будет иметь вид:

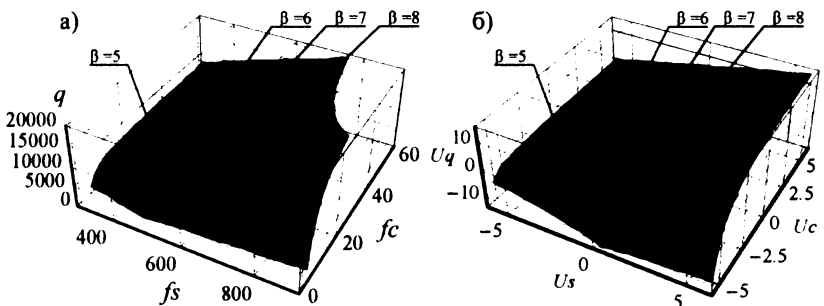


Рис. 7. Поверхность отказа в базисном x -пространстве (а) и нормированном u -пространстве (б)

$$g(U_s, U_c, U_q) = 49.022(600 + 50U_s) \left(1 - \frac{0.0066(600 + 50U_s)}{30 + 5U_c} \right) -$$

$$-1.711(8000 + 1040U_q) =$$

$$= 15723.2 - \frac{116944}{30 + 5U_c} - 1779.7U_q + 2451.1U_s - \frac{19490.7U_s}{30 + 5U_c} - \frac{812.1U_s^2}{30 + 5U_c} \quad (3.9)$$

Поверхности $g(X) = 0$ и $g(U) = 0$ показаны на рис. 7 вместе с линиями уровня, соответствующими определенным значениям β .

Теперь приступаем к минимизации суммы квадратов нормированных переменных при условии $g(U) = 0$. Предварительно находим частные производные характеристической функции по каждой из нормированных базисных переменных:

$$d_1 = \frac{\partial g(U)}{\partial U_s} = 2451,1 - \frac{19490,7}{30 + 5U_c} - \frac{1624,2U_s}{30 + 5U_c};$$

$$d_2 = \frac{\partial g(U)}{\partial U_c} = \frac{584720}{(30 + 5U_c)^2} + \frac{97453,4U_s}{(30 + 5U_c)^2} - \frac{4060,6U_s^2}{(30 + 5U_c)^2};$$

$$d_3 = \frac{\partial g(U)}{\partial U_q} = -1779,7;$$

Шаг 1: Задаем начальное приближение базисным нормированным переменным, которые одновременно являются координатами текущей расчетной точки в u -пространстве ($i = 0$):

$$u^i = \{u_s, u_c, u_q\}^i = \{1, 1, 1\}.$$

Шаг 2: Рассчитываем текущее значение индекса надежности:

$$\beta^i = \sqrt{\sum u^2} = 1,73.$$

Шаг 3: Определяем значения частных производных d_1, d_2, d_3 в текущей точке u^i :

$$d_1 = 1847,8; d_2 = 560,2; d_3 = -1779,7.$$

Данные значения являются элементами вектора-градиента функции $g(U)$ в точке u^i .

Шаг 4: Находим значение функции $g(U)$ в текущей точке:

$$g(u^i) = 12473,3.$$

Шаг 5: Находим сумму попарных произведений $\Sigma(d \cdot u)$:

$$\Sigma(d \cdot u) = 628,3.$$

Шаг 6: Находим сумму квадратов Σd^2 :

$$\Sigma d^2 = 6,89557 \cdot 10^6.$$

Шаг 7: Находим коэффициент λ :

Таблица 3

Расчет индекса надежности методом наискорейшего спуска

Итерации	0	1	2	3	4
u_s	1,00	-3,17	-3,28	-3,26	-3,25
u_c	1,00	-0,44	-0,68	-0,74	-0,77
u_q	1,00	3,06	3,01	3,02	3,03
β	1,732	4,429	4,504	4,505	4,505
d_1	1847,8	1935,1	1918,7	1910,8	1908,0
d_2	560,2	409,8	436,3	449,4	454,0
d_3	-1779,7	-1779,7	-1779,7	-1779,7	-1779,7
$g(u)$	12473,3	225,4	4,39	-1,94	-0,79
$\Sigma d u$	628,3	-11764,8	-11947,7	-11937,5	-11930,8
Σd^2	$6,8956 \cdot 10^6$	$7,0799 \cdot 10^6$	$7,0391 \cdot 10^6$	$7,0204 \cdot 10^6$	$7,0139 \cdot 10^6$
λ	$-1,718 \cdot 10^{-3}$	$-1,694 \cdot 10^{-3}$	$-1,698 \cdot 10^{-3}$	$-1,700 \cdot 10^{-3}$	

$$\lambda = \frac{\{d_1, d_2, d_3\}^T \{u_s^i, u_c^i, u_q^i\} - g(u^i)}{\{d_1, d_2, d_3\}^T \{d_1, d_2, d_3\}} = \frac{\Sigma(d \cdot u) - g(u^i)}{\Sigma d^2} = -0,00172.$$

Шаг 8: По зависимости (3.4) уточняем вектор координат расчетной точки:

$$u^{i+1} = \lambda \nabla g(u^i) = -0,00172 \cdot \{1847,8, 560,2, -1779,7\} = \{-3,174, -0,444, 3,057\}.$$

Шаг 9: Рассчитываем уточненное значение индекса надежности:

$$\beta^{i+1} = \sqrt{\Sigma (u^{i+1})^2} = 4,429.$$

Шаг 10: Если наблюдается сходимость β (например, если абсолютное приращение $|\beta^{i+1} - \beta^i| \leq 10^{-3}$), то процесс поиска можно прекратить, иначе следует принять $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.

В табл. 3 показаны промежуточные расчеты на каждой итерации приведенной схемы действий.

Таким образом, полученный индекс надежности составляет $\beta = 4,505$, а соответствующий ему единичный вектор в u -пространстве равен:

$$\alpha = u^*/\beta = \{-3,25, -0,77, 3,03\}/4,505 = \{-0,72, -0,17, 0,67\}. \quad (3.10)$$

Координаты расчетной точки в пространстве базисных переменных следующие:

$$\begin{aligned} \{f_s^*, f_c^*, q^*\} &= \{-50 \cdot 3,25 + 600, -5 \cdot 0,77 + 30, 1040 \cdot 3,03 + 8000\} = \\ &= \{437,6, 26,2, 11146,8\}. \end{aligned}$$

Меры чувствительности

1) α -вектор: $\alpha = \{-0,72, -0,17, 0,67\}$.

Элементы α -вектора характеризуют значимость каждой из стохастических переменных. Каждый коэффициент α_i^2 указывает для соответствующей стохастической переменной долю неопределенности, связанную с U_i (и, соответственно, с X_i). Таким образом, можно заключить, что одинаково значимое влияние на надежность балки оказывают вариации значений нагрузки q и прочности стали f_s . Вместе с тем вариации прочности бетона незначительно сказываются на значениях индекса надежности и вносят около 3% неопределенности (см. таблицу 4) при разрушении балки по растянутой арматуре.

2) Коэффициент эластичности для надежности e_p . Определим коэффициенты эластичности для параметров характеристической функции (3.1). Такие коэффициенты для базисных переменных или детерминированных параметров характеристической функции (3.1) находим с использованием ф.(1.25), например, для площади армирования A_s расчеты выглядят так:

$$e_{A_s} = \frac{1}{|\nabla g(u^*)|} \left[-19074,9 + 84,45 (1 - 4,36 \cdot 10^{-4} A_s) A_s \right]_{A_s=254} \frac{A_s}{\beta} = 1,40$$

где $|\nabla g(u^*)| = \sqrt{\sum d^2} = \sqrt{7,0139 \cdot 10^6} = 2649,6$.

Коэффициенты эластичности для остальных параметров характеристической функции приведены в табл. 4.

Для статистических параметров распределений базисных переменных будем находить коэффициент эластичности по ф.(1.26). Схема

расчетов на примере стандартного отклонения прочности стали σ_{fs} следующая:

$$e_{\sigma_{fs}} = \frac{1}{4,505} [-3,25 \quad -0,77 \quad 3,03] \times [0,065 \quad 0 \quad 0] \cdot \frac{50}{4,505} = -0,52,$$

$$\text{где } U_s = T(f_s, \sigma_{fs}) = \frac{f_s - \mu_{fs}}{\sigma_{fs}}; \quad \frac{\partial T(x^*, \sigma_{fs})}{\partial \sigma_{fs}} = \left[\frac{-(f_s^* - \mu_{fs}^s)}{\sigma_{fs}^2}, 0 \right].$$

Коэффициенты эластичности для некоторых других статистических параметров базисных переменных характеристической функции приведены в табл. 4. Отметим снова, что коэффициент эластичности показывает пропорциональность влияния изменения некоторого параметра на изменения индекса надежности. Можно заметить, что наибольшие значения этих коэффициентов получились:

- для базисных переменных f_s и q ;
- для детерминированных параметров h, l, A_s ;
- для статистических параметров распределений μ_{fs} .

Это означает, что к точности определения значений перечисленных параметров следует предъявлять повышенные требования, в то время как, например, погрешности определения ширины сечения, стандартного отклонения прочности бетона или арматуры не приведут к значимым погрешностям при оценке индекса надежности.

Таблица 4

Меры чувствительности для параметров характеристической функции $g(X)$

Параметр	α -вектор	Коэффициент эластичности		Коэффициент чувствительности к исключению
$f_s - N(\mu_{fs}, \sigma_{fs})$	$\alpha_s^2 = 0,52$	$e_{fs} = 1,40$	$\frac{e_{\mu_{fs}} = 1,92}{e_{\sigma_{fs}} = -0,52}$	$\xi_{fs} = 1,44$
$f_c - N(\mu_{fc}, \sigma_{fc})$	$\alpha_c^2 = 0,03$	$e_{fc} = 0,20$	$\frac{e_{\mu_{fc}} = 0,23}{e_{\sigma_{fc}} = -0,03}$	$\xi_{fs} = 1,014$
$q - N(\mu_q, \sigma_q)$	$\alpha_q^2 = 0,45$	$e_q = -1,60$	$\frac{e_{\mu_q} = -1,15}{e_{\sigma_q} = -0,45}$	$\xi_q = 1,35$
A_s	–	$e_{As} = 1,40$		–
b	–	$e_b = 0,32$		–
h	–	$e_h = 1,80$		–
l	–	$e_l = -3,20$		–

3) Коэффициент чувствительности к исключению переменных. Данный коэффициент рассчитывается только для базисных переменных и показывает, насколько изменится индекс надежности, если считать рассматриваемую переменную детерминированной величиной. Так, по ф. (1.27) определяем коэффициент чувствительности для базисной переменной прочности стали f_s :

$$\xi_{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1-0,52}} = 1,44.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты и для остальных базисных переменных (см. табл. 4). Можно заметить, что для параметра прочности бетона $\xi_{f_b} = 1,014$, и это означает, что если считать эту переменную детерминированной величиной, скажем – $f_c = 40$ МПа, то ошибка в определении индекса надежности составит около 1,4 %, но при этом существенно упростятся расчеты.

3.2. Оценка надежности полностью вероятностными методами (уровень III)

Произведем оценку надежности балки прямым методом Монте-Карло. Хотя он не отличается высокой эффективностью, относительно простая его реализация с помощью программных комплексов способствует широкому использованию такого рода симуля-

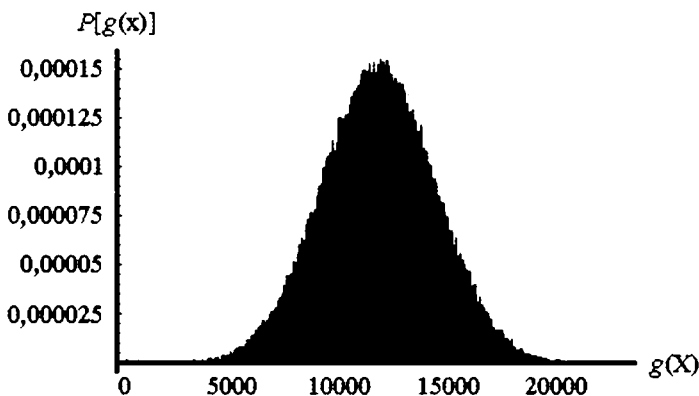


Рис. 8. Гистограмма значений запаса прочности при моделировании методом Монте-Карло

ций. К решению поставленной задачи мы придем двумя путями. В первом случае будем использовать характеристическую функцию (3.1), во втором случае будем производить расчет с учетом полной диаграммы деформирования бетона. Оба алгоритма реализованы

в пакете Mathematica.

3.2.1. Моделирование упрощенной характеристической функции

Метод Монте-Карло заключается в том, чтобы при помощи генераторов случайных чисел смоделировать массивы значений для каждой из трех базисных переменных (f_s, f_c, q), подчиняющиеся нормальным законам распределения вероятностей с заданными параметрами (табл. 2), затем рассчитать массив значений характеристической функции (3.1) и определить относительное количество отрицательных значений из этого массива. На рис. 8 показана гистограмма значений функции $g(X)$ при количестве симуляций 10^7 .

При этом расчетами было выявлено, что вероятность отказа составила $p_f = 10^{-5}$, что соответствует индексу надежности $\beta = 4,26$. В то же время функция распределения запаса прочности обладала следующими параметрами: $\mu_M = 11678,9$ МПа, $\sigma_M = 2630$ МПа. Поскольку применялись нормальные распределения прочностей и нагрузки, то можно определить индекс надежности $\beta = \mu_M / \sigma_M = 4,44$. Различие полученных значений β показывает, что выполненное количество симуляций 10^7 можно считать и недостаточным, если к вариациям ошибки определения p_f предъявляются более жесткие требования. В данном же случае, как было показано ранее (см ф.(2.3)), коэффициент вариации ошибки составляет 10%, чем можно объяснить эти различия. В качестве оценки индекса надежности примем среднее из двух полученных значений $\beta = 4,35$.

3.2.2. Моделирование с учетом полной диаграммы деформирования бетона

Использование (3.1) в качестве характеристической функции вносит в расчеты погрешности, связанные с тем, что эта функция составлялась для сечения со средними значениями всех параметров и соответствовала области II напряженно-деформированного состояния. Фактически сечение будет работать в этой области в большинстве случаев, но не всегда. Ожидается, что основные погрешности будут соответствовать хвостовым участкам функций распределений базисных переменных. Поэтому в идеале нужно для каждого из сочетаний сгенерированных реализаций переменных находить нейтральную ось сечения, а затем искать для него запас прочности. При этом следует учитывать полную диаграмму деформирования бетона для более точного представления картины распределения напряжений по сечению. Реализованный с учетом этих требований алгоритм дал следующие параметры функции распределения запаса

прочности: $\mu_M = 11791,7$ МПа, $\sigma_M = 2648,4$ МПа. Индекс надежности $\beta = \mu_M / \sigma_M = 4,45$.

Было произведено 10^5 симуляций, при этом вероятность отказа не определялась как относительное количество отказов, а определялся индекс надежности по правилу (1.9), поскольку невозможно определить вероятность отказа порядка 10^{-5} при выполненном количестве симуляций. Вместе с тем, поскольку использовались в задаче только нормальные распределения, было правомерным пользоваться правилом (1.9). Также следует отметить, что 10^5 симуляций дают достаточную точность параметров μ_M и σ_M .

Хотя, как было показано в табл. 4, влияние показателей прочности бетона на точность оценки индекса надежности весьма мало, косвенное влияние прослеживается через положение нейтральной оси, которое зависит от вида диаграммы деформирования и ее контрольных точек. Реализуя итерационный алгоритм поиска нейтраль-

Таблица 5

Результаты оценки надежности методами I – III уровней

	Метод	Заключение
Уровень I	Метод частных коэффициентов безопасности (СНБ 5.03.01 [10])	критерий $M_{Ed} = M_{Rd}$ не выполнен, балка не обладает достаточной надежностью
Уровень II	Метод линеаризации (FORM)	$\beta = 4,52$
	Метод наискорейшего спуска	$\beta = 4,51$
Уровень III	Симуляции Монте-Карло с учетом линейно-параболической диаграммы деформирования бетона	$\beta = 4,35$
	Симуляции Монте-Карло с учетом полной диаграммы деформирования бетона	$\beta = 4,45$

ной оси, описанный в [11], мы избегаемся от вносимой упрощенной диаграммой погрешности. Главным недостатком такого подхода является существенное увеличение времени расчетов, поскольку каждое сочетание реализаций базисных переменных требует решения отдельной задачи итерационного расчета несущей способности сечения.

Следует отметить, что необходимы дополнительные исследования на предмет того, можно ли применять упрощенные методы расчета сечений для построения функции предельного состояния в симуляционных методах, и какую потенциальную ошибку при этом могут внести упрощения.

3.3. Сравнение результатов

В табл. 5 даны заключения по результатам оценки надежности балки методами различных уровней. Можно заметить, что все методы дают близкие результаты.

Как следует из табл. 5, при расчете балки по методу частных коэффициентов безопасности не выполняется основной критерий метода и балку нельзя считать пригодной. Вместе с тем, полученные методами высших уровней индексы надежности согласно нормам ISO 2394 [12] и EN 1990 [3] относят данную конструкцию к классу надежности RC1 и к классу ответственности CC2 (пригодна к эксплуатации в таких сооружениях, в случае разрушения которых появятся средний уровень угрозы человеческой жизни и значительные экономические, социальные или экологические последствия).

Таким образом, сведения об индексе надежности позволяют применять дифференцированный подход к целевой ответственности и надежности конструкции, позволяя различать требования, предъявляемые к конструкциям в зависимости от их функционального назначения.

Заключение

В статье рассмотрены теоретические основы вероятностных методов оценки надежности конструкций. Приведен также пример, иллюстрирующий применение различных уровней оценки надежности, отличающихся сложностью реализации и точностью оценок.

В EN1990 [3] отмечается, что методы III уровня редко применяются для калибровки частных коэффициентов безопасности в основном из-за недостаточных знаний о статистических параметрах распределений переменных, что сводит на нет значимость точности полученных результатов, хотя и потенциально высокой.

Тем не менее, для конкретных ситуаций симуляционные методы выгодны в применении своей гибкостью. Так, например, при применении статистического моделирования авторами данной статьи была разработана система частных коэффициентов безопасности при проектировании технологических анкеров для крепления опалубки и средств подмащивания при возведении монолитных зданий [13]. Однако полностью вероятностный метод позволяет учитывать технологическую культуру конкретного производителя, а также является более гибким в отношении нестандартных расчетных ситуаций, поскольку не использует частных коэффициентов безопасности, а учитывает только статистические параметры базис-

ных переменных и позволяет вести проектирование конструкций с любой заранее заданной надежностью. При этом есть возможность учитывать степень ответственности конструкций и предполагаемый срок службы.

Было показано, что аналитические методы первого и второго порядков эффективны при оценке больших значений индексов надежности, потому как при $\beta \rightarrow \infty$ результаты расчетов по этим методам стремятся к точным результатам. Обратная тенденция характерна для симуляционных методов: получение более точных результатов связано с произведением числа симуляций на вероятность отказа ($N \times p_f$). Это число должно, по меньшей мере, быть равным 100 для получения коэффициента вариации ошибки 10%. Благодаря названным преимуществам и недостаткам в настоящее время применяются как численные симуляционные методы, так и аналитические, не превратившиеся всего лишь в главу истории.

Список цитированных источников

1. Половко, А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. – Санкт-Петербург: БХВ, 2006. – 704 с.
2. Efficient method for calculation of system reliability of a complex structure / S. Park [et al.] // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – №41. – P. 5035–5050.
3. Eurocode 0. Basis of structural design: EN 1990:2001. – Brussels: European Committee for Standardization, 2001.
4. Madsen, H.O. Methods of structural safety / H.O. Madsen, S. Krenk, N.C. Lind. – Prentice Hall, 1986. – 416 p.
5. Многоуровневая система оценки надежности железобетонных конструкций эксплуатируемых и реконструируемых зданий и сооружений / В.В. Тур [и др.] // Строительная наука и техника. – 2007. – №4(13). – С. 4–19.
6. Hurtado, J.E. Structural Reliability: Statistical Learning Perspectives (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics / J.E. Hurtado. – 1 edition. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 257 p.
7. Sørensen, J.D. Notes in Structural Reliability Theory and Risk Analysis / J.D. Sørensen. – Aalborg: Institute of Building Technology and Structural Engineering: Aalborg University, February 2004. – 231 p.
8. Ditlevsen, O. Structural reliability methods: monograph / O. Ditlevsen, H.O. Madsen. – Coastal, maritime and structural engineering: Department of mechanical engineering: Technical university of Denmark. – July 2005. – 363 p.

9. Overview reliability methods: SAFERELNET Task 5.1 / H. Karadeniz [et al.]; TU-Delft. – The Netherlands, April 2003. – 81 p.

10. Бетонные и железобетонные конструкции: СНБ 5.03.01-02. – Введ. 01.07.2003. – Минск: Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2003. – 144 с.

11. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчета и конструирования: учебное пособие для студентов строительных специальностей / Н.П. Блещик [и др.]; под общ. ред. Т.М. Пецоляда, В.В. Тура. – Брест: БГТУ, 2003. – 380 с.

12. General principles on reliability for structures: ISO 2394:1998(E). – Введ. 01.06.1998. – Genève: International Organization for Standardization, 1998. – 82 p.

13. Марковский Д.М. Применение статистического моделирования к оценке надежности и калибровке коэффициентов безопасности в рамках метода предельных состояний при проектировании анкеров / Д.М. Марковский // Вестн. БрГТУ. Строительство. – 2007.