

А. А. КРОЩЕНКО

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

О НЕЯВНЫХ S-СТАДИЙНЫХ МЕТОДАХ ГАУССА

Одношаговые методы Рунге-Кутты описываются формулой вида $y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i$, где

$$k_i = f\left(t_n + c_i \tau, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) \quad (1 \leq i \leq s).$$

Вещественные параметры b_i, c_i и a_{ij} определяют метод и могут быть получены из предположений вида [2]:

$$B(p): \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}, \quad q = 1, \dots, p; \quad C(\eta): \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q}, \quad i = 1, \dots, s, \quad q = 1, \dots, \eta;$$

$$D(\zeta): \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij} = \frac{b_j}{q} (1 - c_j^q), \quad j = 1, \dots, s, \quad q = 1, \dots, \zeta.$$

Условие $B(p)$ определяет порядок метода.

Для методов Гаусса-Лежандра $c_i, i = 1, \dots, s$ – корни смещенного полинома Лежандра s -той

$$\text{степени } \frac{d^s}{dx^s} (x^s (x-1)^s), \quad p = 2s.$$

Для конструирования методов Гаусса-Лежандра необходимо определить параметры b_i, c_i и a_{ij} .

Для этого можно воспользоваться представленным ниже подходом.

1. Представляем смещенный полином Лежандра степени s в виде $\chi_s(x) = g_s x^s + g_{s-1} x^{s-1} + \dots + g_1 x + g_0$, воспользовавшись рекуррентной формулой $\chi_{s+1} = (2s+1)(2x-1)\chi_s - s^2 \chi_{s-1}$, или получаем сразу коэффициенты $g_s = \left(\prod_{i=1}^s (s+i) \right) / i!$, $g_{k-1} = -\left(g_k k^2 \right) / \left(2 \sum_{l=k}^s l \right)$, $k = \overline{s, 1}$.

2. Находим приближенные значения корней полинома Лежандра степени s , например, как собственные значения соответствующей сопутствующей матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{g_{s-1}}{g_s} & -\frac{g_{s-2}}{g_s} & \dots & -\frac{g_1}{g_s} & -\frac{g_0}{g_s} \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а затем уточняем их с помощью какого-либо итерационного процесса (например, гибридного полюсно-бесполюсного квазиньютоновского процесса, локально сходящегося с кубической скоростью [1]).

3. Параметры b_i, a_{ij} получаем с помощью следующих формул:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^s \frac{(-1)^{s+j} \binom{s-j}{s-1}}{j} \prod_{n \in \left(\frac{s-j}{s-1} \right)_l} c_n}{\prod_{k=1}^s (c_i - c_k)}, \quad k \neq i, \quad i = \overline{1, s} \quad (1)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} c_i + \frac{\sum_{k=2}^s \frac{(-1)^{s+k-1} (k-1) c_i^k \binom{s-k}{s-1}}{k} \sum_{l=1}^s \prod_{n \in \binom{s-k}{s-1}_l} c_n}{\prod_{m=1}^s (c_j - c_m)}, & i = j \\ \frac{\sum_{k=2}^s \frac{(-1)^{s+k-1} (k-1) c_i^k \binom{s-k}{s-1}}{k} \sum_{l=1}^s \prod_{n \in \binom{s-k}{s-1}_l} c_n}{\prod_{m=1}^s (c_j - c_m)}, & i \neq j \end{cases}, \quad m \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq s \quad (2)$$

где $\binom{i2}{i1}$ – число сочетаний из $i1$ элементов по $i2$, $\binom{i2}{i1}_l$ – l -тое сочетание, c_i , $i = 1, \dots, s$ – корни полинома

Лежандра.

Формулы (1) и (2) были получены путем последовательного исключения неизвестных из условий $B(2s)$ и $C(s)$.

Хотя предложенным подходом можно получать процессы произвольного порядка точности, на практике из-за погрешности округления применение метода ограничивается 28 порядком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вержбицкий, В.М. Численные методы: в 2 т. / В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – Т. 1: Линейная алгебра и нелинейные уравнения
2. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999.