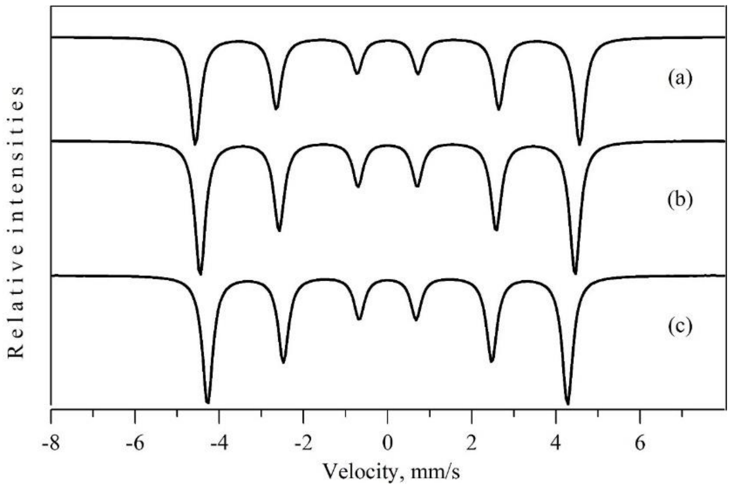

Рисунок 4 – Моделированные спектры сплавов железа с различным содержанием никеля: (a) – 70 %, (b) – 80 %, (c) – 90 %

В результате проведенных расчетных исследований концентраций компонентов в слоистой системе Ni-Fe и вероятностей заполнения разных конфигураций окружения атомов железа в твердом растворе были сформированы модели парциальных спектров, которые позволили смоделировать спектр твердого раствора Fe-10% Ni.

Список использованных источников

1. Restrepo, J. Hyperfine field distribution of disordered Fe1-qNiq alloys: an experimental and theoretical study / J. Restrepo, L.E. Zamora et al. // Hyperfine Interactions. – 1998. – Vol. 3. – P. 213–216.

2. Русаков, В.С. Мессбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем / В.С. Русаков. – Алматы, 2000.

3. Zhubaev, A.K. / A.K. Zhubaev, S.K. Yerezhepova, T.S. Mukhanbetzhan // IOP Conf. Series: J. of Physics: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1393. – 012155.

УДК 517.9

А.И. Жук, Е.Н. Защук, Т.И. Каримова
Брестский государственный технический университет

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций. Получены ассоциированные решения рассматриваемых систем.

Ключевые слова: задача Коши, система дифференциальных уравнений, ассоциированные решения.

Введение. Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0,a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t),\ \ i=\overline{1,p}, \tag{1}$$

где $x(0)=x_0$ и f^{ij} – некоторые функции, $x(t)=[x^1(t),x^2(t),...,x^p(t)]$, а $L^j(t)$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$ непрерывны справа. Рассматриваемая система уравнений описывает модель процесса взлета ракеты. Обобщенные коэффициенты позволяют реализовать скачкообразное изменение массы при отбрасывании ступеней ракеты. Решения уравнения (1) в случае непрерывных функций $L^j(t)$ получены в [1, 2].

Задача (1) содержит произведение обобщенных функций. Для корректного определения произведения, стоящего в правой части уравнения (1), можно формализовать данную задачу в рамках теории обобщенных функций [3]. Также возможен переход к интегральному уравнению [4], где интеграл понимается в определенном смысле, или к аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [5]. Следует отметить, что решения одного и того же уравнения, полученные в рамках интегрального и аппроксимативного подходов, различны.

В данной работе уравнение (1) рассматривается в алгебре новых обобщенных функций, предложенной Лазаковичем Н.В. в работе [6]. Важнейшая особенность новых обобщенных функций состоит в том, что они определяются как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1) с помощью трех описанных выше подходов.

Основные результаты. Согласно работе [6] заменяем обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции, получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций

$$d_{\tilde{h}}\tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \tilde{f}^{ij}(\tilde{t},\tilde{x}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}),\ i=\overline{1,p} \tag{2}$$

с начальным условием $\tilde{x}\big|_{[0,\tilde{h})} = \tilde{x}^0$, где $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde{a} = [\{a\}] \in \tilde{T}$ и $\tilde{t} = [\{t_n\}] \in \tilde{T}$, $\tilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\tilde{f} = [\{f_n(t)\}]$, $\tilde{g} = [\{g_n(x)\}]$, $\tilde{x}^0 = [\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ и обобщенные функции $\tilde{f}^{ij}$, $\tilde{L}^j$ ассоциируют функции f^{ij} и L^j соответственно.

Будем говорить, что новая обобщенная функция $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ ассоциирует обычную функцию или обобщенную функцию f, если f_n сходится к f в некотором топологическом пространстве.

Заменим в (2) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись (2) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)],\ i=\overline{1,p} \tag{3}$$

где $x_n(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L^j(t+s)\rho_n(s)ds$, где $\rho_n \in C^\infty(R)$, $\rho_n \ge 0$, $sup(\rho_n) \subseteq [0,1/n]$, $\int_0^{1/n}\rho_n(s)ds = 1$, а $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\rho} \ge 0$, $\tilde{\rho}_n(x_1,x_2,...,x_p) = n^p\tilde{\rho}(nx_1,nx_2,...,nx_p)$, $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^p)$, $\int_{[0,1/n]^p}\tilde{\rho}(x_1,x_2,...,x_p)dx_1dx_2...dx_p = 1$ и $sup\tilde{\rho} \subseteq [0,1/n]^p$.

При некоторых дополнительных условиях [5] функция x_n^j будет гладкой, поэтому при этих условиях решение задачи (3) определяет новую обобщенную функцию, которая является решением задачи (2). В данной работе исследуются условия, при которых указанная новая обобщенная функция ассоциирует некоторую обычную функцию x, которую называют ассоциированным решением задачи (1). На уровне представителей указанная проблема сводится к описанию предельного поведения решений задачи (3).

Случай Ито. Для описания предельного поведения задачи (3) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^{t+} f^{ij}(x(s-))dL^j(s),\ i=\overline{1,p} \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n \to 0$ так, что $\frac{1}{n} = o(h_n)$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (3) сходится к решению системы уравнений (4) в пространстве $L^1(T)$, если $\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n}|x_{n0}(\tau_t) - x_0|dt \to 0$.

Случай Ито рассмотрен в других топологических пространствах и с другими условиями для функций f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ в работах [7; 8; 9].

Случай Стратоновича. Для описания предельного поведения задачи (3) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\le t}S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),\ i=\overline{1,p}, \qquad (5)$$

где $L^{jc}(t)-$ непрерывная, а $L^{jd}(t)-$ разрывная составляющая функции $L^j(t)$, $\mu_r^j, r=1,2,...-$ точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L^j(\mu_r)=L^{jd}(\mu_r+)-L^{jd}(\mu_r-)$, $j=\overline{1,q}$ – величина скачка, $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s,\mu,x,u))ds,\ i=\overline{1,p}.$$

Случай Стратоновича рассмотрен в других топологических пространствах и с другими условиями для функций f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ в работах [10; 11; 12].

Из результатов статьи [1] следует, что решение систем (4) и (5) существует и единственно.

Теорема 2. Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $h_n=o(\frac{1}{n})$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (3) для всех $t\in T$ сходится к решению системы уравнений (5), если для любого $t\in T$ выполняется $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$.

Из вида ассоциированных решений описанных выше следует, что решения в случае Ито соответствуют интегральному подходу, а в случае Стратоновича – аппроксимативному подходу. Это является следствием того, что уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций являются более общей конструкцией, чем рассматриваемые в указанных подходах. Проиллюстрируем этот факт следующим примером.

Пример. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами

$$\begin{cases}\dot{Y}(t)-\dot{H}(t)Y(t)=0,\\ \quad Y(0)=1.\end{cases}\quad t\in[0,1], \qquad (6)$$

где $H(s)-$ функция Хэвисайда.

Согласно аппроксимативному подходу $H_n\to H$, $n\to\infty$, тогда от (6) переходим

$$\begin{cases}Y_n(t)-H_n(t)Y_n(t)=0,\\ \quad Y_n(0)=1.\end{cases}\quad t\in[0,1] \qquad (7)$$

Очевидно, что решением (7) является функция $Y_n(t)\to Y(t)=e^{H(t)}$.

При интегральном подходе мы заменяем (6) соответственным интегральным уравнением $Y(t)-\int_0^t Y(s)dH(s)=0$ или используем конечно-разностную аппроксимацию

$$\begin{cases}Y_n(t+h)-Y_n(t)-[H(t+h)-H(t)]\,Y_n(t)=0,\\ \quad Y_n\big|_{[0,h)}=1.\end{cases} \qquad (8)$$

Из (8) получаем $Y_n(t)\to Y(t)=2^{H(t)}$.

Согласно методу, используемому в этой работе, запишем (6) в виде

$$\begin{cases} Y_{h,n}(t+h) - Y_{h,n}(t) - [H_n(t+h) - H_n(t)]\,Y_{h,n}(t) = 0, \\ Y_{h,n}\big|_{[0,h)} = Y_{n0}(t). \end{cases}$$

где

$$H_n(t) = \int_0^{1/n} H(t+s)\rho_n(s)ds = \begin{cases} 0,\ t < -\frac{1}{n}; \\ \int_{-t}^{1/n} \rho_n(s)ds = \int_{-tn}^{1} \rho(s)ds = D(nt),\ t \in [-\frac{1}{n}, 0]; \\ 1,\ t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $Y_{h,n}(t+h) = Y_{h,n}(t) + [H_n(t+h) - H_n(t)]\,Y_{h,n}(t)$, тогда

$$Y_n(t) = \begin{cases} 1,\ t < -\frac{1}{n}; \\ 1 + D(nt),\ t \in [-\frac{1}{n}, 0]; \\ 2,\ t \in [(k-1)h, kh - 1/n]; \\ 2 + D(nt) - D^2(nt),\ t \in [kh - 1/n, kh]. \end{cases}$$

Если сначала $n \to \infty$, а затем $h_n \to 0$ получаем $Y_n(t) \to Y(t) = 2^{H(t)}$. Если сначала $h_n \to 0$, а затем $n \to \infty$ получаем

$$Y_n(t) = \begin{cases} 1,\ t < -\frac{1}{n}; \\ 1 + D(nt),\ t \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + h]; \\ (1 + D(nt)) \prod_{k=0}^{p} (1 + D((t-(k+1)h)n) - D((t-kh)n)),\ t > 0, \end{cases}$$

где $p = \left[\frac{1}{hn}\right]$. Тогда $Y_n(t) \to Y(t) = e^{H(t)}$.

Заключение. Отличительной особенностью подхода применяемого в работе является то, что решение некорректного уравнения не аппроксимируется, как при аппроксимативном подходе, а трактуется как уравнение в дифференциалах, решение которого существует при определенных предположениях, и только после этого находятся условия для существования ассоциированного решения и дается описание корректных уравнений, которым они удовлетворяют.

Список использованных источников

1. Жук, А.И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 1. – С. 12–16.

2. Жук, А.И. Systems of equations in differentials with generalized derivatives of continuous functions / А.И. Жук, Е.Н. Защук // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2024. – № 3. – С. 22–30.

3. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М. : Мир, 1976. – 311 с.

4. Das, P.S. Existence and stability of measure differential equations / P.S. Das, R.R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – Vol .22, № 1. – P. 145–158.

5. Завалищин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 256 с.

6. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.

7. Жук, А.И. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 2. – С. 17–22.

8. Zhuk, A.I. On associated solution of the system of non-autonomous differential equations in the Lebesgue spaces / A.I. Zhuk, H.N. Zashchuk // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2022. – № 1. – P. 6–13.

9. Жук, А.И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 6. – С. 20–23.

10. Жук, А.И. Автономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А.И. Жук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 55–62.

11. Жук, А.И. Многомерные дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер.4. Физика, математика. – 2010. – № 2. – С. 77–79.

12. Жук, А.И. Ассоциированные решения многомерных неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А.И. Жук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2015. – № 5 (95). – С. 64–66.

УДК 004.4:517.3

А.И. Жук, Е.Н. Защук, В.А. Шеина, Л.А. Ярмолик
Брестский государственный технический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМВОЛЬНОГО ПАКЕТА MATHEMATICA ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Исследуются способы задания графов и операции над ними в системе компьютерной алгебры Mathematica. Продемонстрированы некоторые возможности символьного пакета при работе с графами.

Ключевые слова: элементы теории графов, система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Введение. Теория графов в последнее время нашла широкое применение в различных отраслях науки. Графы используются для моделирования интернета, социальных сетей, помогают оптимизировать маршруты, планировать перевозки. С помощью графов исследуются генетические сети, структуры молекул, взаимодействия между биологическими системами. Теория графов – это универсальный инструмент для решения самых разнообразных задач, и ее применение только расширяется с развитием технологий [1].

В настоящей работе изучаются вопросы выполнения основных операций над графами в символьном пакете Mathematica, а именно их объединение и пересечение. Такие операции используются, например, при слиянии данных социальных платформ и построении общей сети связей между пользователями, для комбинирования транспортных сетей и анализа совпадений маршрутов. Применение СКА Mathematica было уже продемонстрирована ранее авторами в таких математических разделах, как «Теория пределов» и «Аналитическая геометрия» [2–6].

Основная часть. Рассмотрим прикладную задачу: разработать карту общественного транспорта города. Сформируем два графа для автобусных и троллейбусных маршрутов, где вершины графов представляют остановки, а ребра – маршруты между ними. Для создания общей сети всех видов транспорта используем операцию объединения графов, а для определения общих пересадочных узлов – операцию пересечения. Рассмотрим решение поставленной задачи и реализуем соответствующую анимацию с использованием символьного пакета Mathematica. В пакете существуют встроенные функции, которые позволяют проводить необходимые нам действия над графами GraphIntersection и GraphUnion.

Для начала была реализована данная задача с использованием встроенной библиотеки форм и стилей графов в системе Mathematica [2]. Зададим список графов и выбор графа из этого списка следующим образом:

```
sample={"BannerGraph","BullGraph","ButterflyGraph","ClawGraph","CricketGraph",{"Cycle",5},"DartGraph","
DiamondGraph",{"Fan",{3,2}},"ForkGraph","GemGraph","HouseGraph","HouseXGraph",{"JohnsonSkeleton",12
},"KiteGraph",{"Lollipop",{4,1}},{"Path",2},{"Path",3},{"Path",4},{"Path",5},"PawGraph","PentatopeGraph","Sq
uareGraph",{"Star",5},{"Tadpole",{3,2}},"TetrahedralGraph","TriangleGraph",{"Wheel",5}};
graphs=Table[GraphData[sample[[i]]],{i,Length[sample]}];
```

Далее рассмотрим сам программный модуль, который позволяет из заданного массива встроенных графов выбрать два любых графа, а затем выбрать необходимую операцию над этими графами. Текст программы:

```
Manipulate[
Module[{g,h, style},
g=graphs[[i]];
h=graphs[[j]];
style={VertexSize->0.2,VertexLabels->"Name",ImagePadding->10,ImageSize->{220,320}};
Grid[{Switch[op,
```