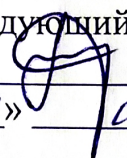


Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»
Экономический факультет
Кафедра математики и информатики

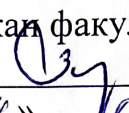
СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой

 С.И.Парфомук
«04» 06 2025 г.

СОГЛАСОВАНО

Декаан факультета

 В.В.Зазерская
«04» 06 2025 г.

**ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

для специальностей

- 6-05-0311-02 Экономика и управление;
- 6-05-0411-01 Бухгалтерский учет, анализ и аудит;
- 6-05-0411-02 Финансы и кредит;
- 6-05-0412-03 Логистика;
- 6-05-0412-04 Маркетинг

Составители: Юхимук Т.Ю., ст. преподаватель,
Юхимук М.М., ст. преподаватель,
Махнист Л.П., доцент, канд. техн. наук, доцент

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БрГТУ
«26» 06 2025 г., протокол № 4.

Рег. № УМК 24/25-167

Пояснительная записка

Актуальность изучения дисциплины

Особенностью современной жизни является проникновение во все сферы человеческой деятельности достижений научно-технического и информационного прогресса, который, в свою очередь, опирается на широкое использование математических знаний. Математические дисциплины играют существенную роль в образовании специалистов экономического профиля. Овладение основными математическими понятиями и методами позволит будущему специалисту свободно ориентироваться в разнообразных математических моделях и методах, успешно применять их для решения сложных экономических задач, активно осваивать и использовать современные информационные технологии.

Цель и задачи дисциплины

Цель учебной дисциплины: ознакомление студентов с математическими понятиями, методами и навыками их использования для решения типовых прикладных задач, а также развитие их логического мышления.

Задачи учебной дисциплины:

- рассматривая математическую культуру как часть общечеловеческой культуры, способствовать формированию высоконравственной гражданской позиции студентов, становлению целостной высокоинтеллектуальной личности, способной решать сложные актуальные задачи;

- сформировать социальные качества, необходимые для осознанного участия в общественно-политической жизни страны;

- дать представление о месте математики в системе естественных и экономических наук, о неразрывном единстве прикладной и фундаментальной математики, о преимуществах математического моделирования и его экономической эффективности;

- ознакомить студентов с основными понятиями и методами современной математики и научить применять математические знания при исследовании реальных экономических процессов;

- развить у студентов способности к логическому мышлению;

- воспитать у студентов мотивацию к глубокому изучению математики как языка общения экономистов, без которого невозможно овладеть специальными дисциплинами, необходимыми им в их будущей профессиональной деятельности.

Учебная дисциплина «Высшая математика» относится к циклу естественно-научных дисциплин и входит в математический модуль государственного компонента. Она является базой для предметов математического цикла «Теория вероятностей», «Статистика» и «Эконометрика». При построении курса реализуется принцип преемственности обучения, он опирается на математические знания, умения и навыки студентов, приобретенные ими в средней школе.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) объединяет структурные элементы научно-методического обеспечения и представляет собой сборник в формате PDF материалов теоретического и практического характера для организации работы студентов специальностей 6-05-0311-02 «Экономика и управление», 6-05-0411-01 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 6-05-0411-02 «Финансы и кредит», 6-05-0412-03 «Логистика» и 6-05-0412-04 «Маркетинг» очной и заочной форм получения образования по изучению дисциплины «Высшая математика». Предусматривается навигация по разделам, обеспечивающая возможность быстрого поиска требуемой информации.

ЭУМК разработан на основании Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 8 ноября 2022 г., № 427, положением об учебно-методическом комплексе по учебной дисциплине учреждения образования «Брестский государственный технический университет» от 31.01.2019 г. и предназначен для реализации требований учебной программы по учебной дисциплине «Высшая математика» для специальностей 6-05-0311-02 «Экономика и управление», 6-05-0411-01 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 6-05-0411-02 «Финансы и кредит», 6-05-0412-03 «Логистика» и 6-05-0412-04 «Маркетинг».

ЭУМК разработан в полном соответствии с утвержденной учебной программой по учебной дисциплине «Высшая математика» математического модуля государственного компонента.

Цели ЭУМК:

- обеспечение качественного методического сопровождения процесса обучения;
- организация эффективной самостоятельной работы студентов.

Содержание и объем ЭУМК полностью соответствуют образовательным стандартам высшего образования специальностей «Экономика и управление», «Логистика», «Маркетинг» (ОСВО 6-05-0311-02-2023, ОСВО 6-05-0412-03-2023, ОСВО 6-05-0412-04-2023 от 10.08.2023, № 246), «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Финансы и кредит» (ОСВО 6-05-0411-01-2023, ОСВО 6-05-0411-02-2023 от 23.08.2023, № 278), а также учебно-программной документации образовательных программ высшего образования. Материал представлен на требуемом методическом уровне и адаптирован к современным образовательным технологиям.

Структура электронного учебно-методического комплекса по дисциплине «Высшая математика»:

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины (конспект лекций).

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в виде методических указаний и вариантов заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы для текущей аттестации, включающие экзаменационные вопросы, а также примерный перечень практических задач, позволяющих определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации образовательных программ высшего образования.

Вспомогательный раздел включает учебно-методическую карту дисциплины «Высшая математика» и список рекомендуемой литературы.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК:

- лекции проводятся с использованием представленных в ЭУМК теоретических материалов;
- практические занятия проводятся с использованием представленных в ЭУМК методических указаний;
- текущая аттестация (курсовой экзамен и зачеты) проводится в письменном виде, вопросы и типовые задачи, используемые в текущей аттестации, приведены в разделе контроля знаний.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Краткий конспект лекций по дисциплине
«Высшая математика»

ГЛАВА I

Математический анализ

§1. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

I. Числовая последовательность.

Пусть каждому числу $n \in \mathbb{N}$ по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное число $x_n \in \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что задана *числовая последовательность* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которую будем обозначать $\{x_n\}$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называются *членами последовательности*, причём x_1 – *первым членом*, x_2 – *вторым*, x_n – *общим членом последовательности*.

Пример (*): Записать первые четыре члена последовательностей, заданных их общими членами

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad y_n = (-1)^n + 1; \quad z_n = \frac{n}{n+1}; \quad t_n = 2^n.$$

$$\bullet \{x_n\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right\}; \quad \{y_n\} = \{0; 2; 0; 2; \dots\}; \quad \{z_n\} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots\right\}; \quad \{t_n\} = \{2; 4; 8; 16; \dots\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (|x_n| \leq M)$. Иначе она называется *неограниченной*. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ из примера (*) являются ограниченными, а $\{t_n\}$ – неограниченной.

Суммой последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{x_n + y_n\}$, члены которой равны сумме соответствующих членов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Аналогично определяются разность, произведение и частное двух последовательностей.

II. Предел числовой последовательности.

Заметим, что в примере (*) члены последовательности $\{x_n\}$ неограниченно приближаются к нулю, а члены последовательности $\{z_n\}$ – к единице.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad (|x_n - a| < \varepsilon)$. При этом говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к a* и записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Если последовательность не имеет конечного предела, то она называется *расходящейся*.

Пример: Доказать, что предел последовательности $z_n = \frac{n}{n+1}$ из примера (*) равен единице:

$$\bullet \text{ По определению, нужно доказать, что } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left(\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \right).$$

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$ и решим неравенство относительно n :

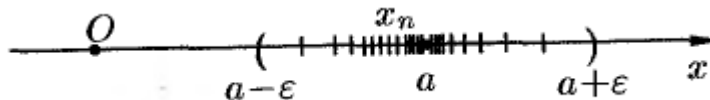
$\left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, поэтому можно положить $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа ($[x]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее x).

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ мы указали соответствующее значение N . Это и доказывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Выясним геометрический смысл предела последовательности.

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Т.о., число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат ε -окрестности точки a (вне этой окрестности может находиться лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$).



Свойства сходящихся последовательностей:

1°. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

2°. Если последовательность сходится, то она ограничена.

(Обратное, в.г., неверно. Последовательность $\{y_n\}$ из примера (*) ограничена, но не имеет предела.)

3°. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, причём, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

4°. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, причём, начиная с некоторого номера, выполняется двойное неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$, то последовательность $\{z_n\}$ сходится, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. /правило двух милиционеров/

Теорема 1: Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Тогда последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{Cx_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ также сходятся, причём:

$$1). \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$2). \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab;$$

$$3). \lim_{n \rightarrow \infty} (Cx_n) = Ca \quad (C = \text{const});$$

$$4). \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

III. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой* (б.м.п.), если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Теорема 2: Для того чтобы предел последовательности $\{x_n\}$ равнялся a , необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{y_n\} = \{x_n - a\}$ была бесконечно малой.

Пример: $\{x_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $y_n = x_n - 1 = \frac{1}{n}$ — б.м.п.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* (б.б.п.), если $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n| > M)$. При этом записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. По определению, б.б.п. являются расходящимися, т.е. не имеют пределов.

Пример: Последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n^\alpha} \right\}$ является б.б.п. при $\alpha < 0$, б.м.п. при $\alpha > 0$ и постоянной последовательностью при $\alpha = 0$.

Теорема 3 (связь б.м.п. и б.б.п.): Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой, причём все её члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ является бесконечно большой. И наоборот: если последовательность $\{x_n\}$ с ненулевыми членами является бесконечно большой, то последовательность $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ является бесконечно малой.

IV. Монотонные последовательности. Число e.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} (x_{n+1} > x_n)$, *неубывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} (x_{n+1} \geq x_n)$, *убывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} (x_{n+1} < x_n)$, и *невозрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} (x_{n+1} \leq x_n)$. Все такие последовательности называются *монотонными*, причём возрастающие и убывающие последовательности называются также *строго монотонными*.

В примере (*) последовательность $\{x_n\}$ является убывающей, $\{z_n\}$ и $\{t_n\}$ – возрастающими, а последовательность $\{y_n\}$ не является монотонной.

Теорема 4 (теорема Вейерштрасса): Всякая монотонная ограниченная последовательность – сходится.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Можно доказать, что она возрастает и ограничена, и поэтому, по теореме Вейерштрасса, сходится. Пределом этой последовательности является иррациональное число $e \approx 2,7183$. Т.о. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

§2. Числовая функция.

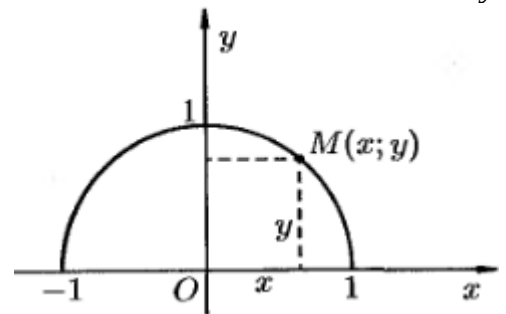
I. Понятие функции. Способы задания функции.

Пусть даны два непустых подмножества X и Y множества действительных чисел $\mathbb{R}$, и пусть каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное число $y \in Y$. Правило, с помощью которого устанавливается данное соответствие, называется *числовой функцией*, и записывается в виде $y = f(x)$, $x \in X$, или $f: X \rightarrow Y$. При этом говорят, что *функция f отображает множество X на множество Y* .

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$, а множество всех $y \in Y$, соответствующим числам $x \in X$, – *областью значений* функции f и обозначается $E(f)$. При этом переменная x называется *аргументом* или *независимой переменной*, а переменная y – *функцией*, или *зависимой переменной*.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$.

Пример: Для функции $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $D(f) = [-2; 2]$, $E(f) = [0; 2]$, а графиком является верхняя полуокружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.



Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если $\forall x \in D(f) (-x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x))$ и *нечётной*, если $\forall x \in D(f) (-x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x))$. График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной – относительно начала координат.

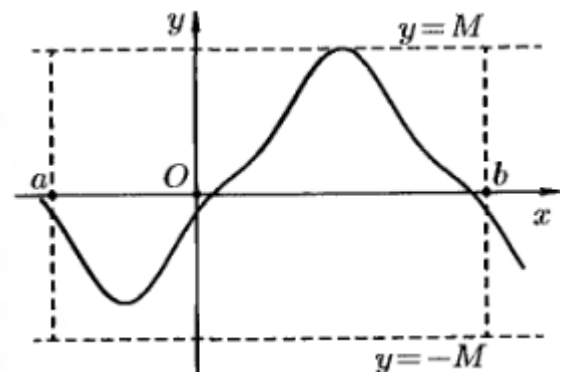
Примеры: Функции $y = |x|$, $y = x^4 - x^2 - 1$ являются чётными, $y = x$, $y = \sin 3x$ – нечётными, $y = x + 1$, $y = 2^x$ – ни чётными, ни нечётными (функциями общего вида).

Пусть $(a; b) \subset D(f)$. Функция $y = f(x)$ называется

- *возрастающей* на интервале $(a; b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a; b) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;
- *убывающей* на интервале $(a; b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a; b) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$;
- *невозрастающей* на интервале $(a; b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a; b) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$;
- *неубывающей* на интервале $(a; b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a; b) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.

Все такие функции называются *монотонными* на интервале $(a; b)$, а возрастающие и убывающие функции – *строго монотонными* на этом интервале. При этом интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности*.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве D , если $\exists M > 0 \forall x \in D (|f(x)| \leq M)$. Иначе она называется *неограниченной* на этом множестве.



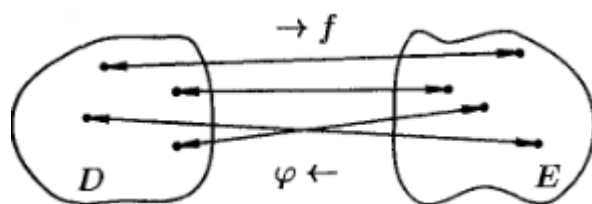
Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если $\exists T \neq 0 \forall x \in D(f) (x+T \in D(f) \wedge f(x+T) = f(x))$. При этом число T называется *периодом* функции $f(x)$.

Очевидно, что любое число вида kT ($k \in \mathbb{Z}$) также является периодом функции $f(x)$. Наименьший из положительных периодов (если он существует) называется *основным периодом* функции.

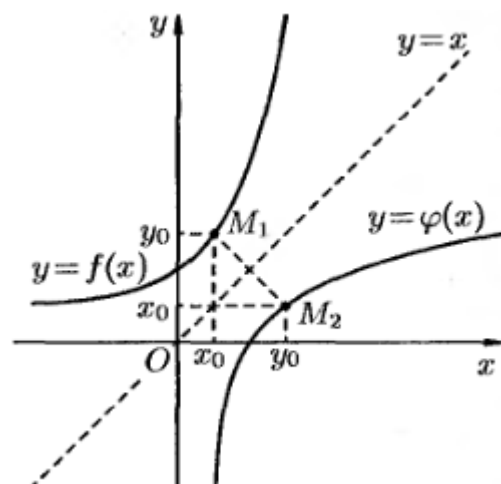
Основными способами задания функции являются: *аналитический* (с помощью формулы), *графический* (с помощью графика) и *табличный*. Далее будем рассматривать только функции, заданные аналитически.

II. Понятие обратной и сложной функций.

Пусть для данной функции $f(x)$ $D(f) = X$, а $E(f) = Y$. Если каждый элемент $y \in Y$ является образом только одного элемента $x \in X$, то определена новая функция $f^{-1}: Y \rightarrow X$, которая называется *обратной* к функции f .



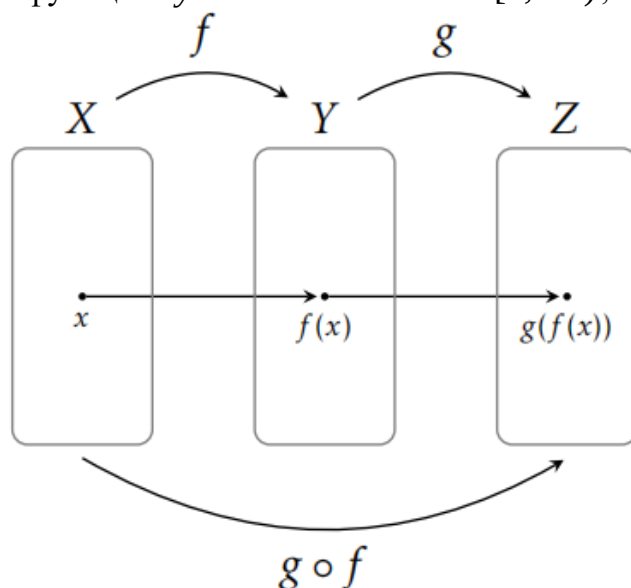
Предположим, что для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Если $D(f) = [a; b]$, $E(f) = [c; d]$, то $D(f^{-1}) = [c; d]$, $E(f^{-1}) = [a; b]$. При этом графики этих функций будут совпадать.



Если же условиться и в случае функции f , и в случае обратной функции f^{-1} независимую переменную обозначать через x , а зависимую – через y , то получим, что графики этих функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных четвертей (т.е. относительно прямой $y = x$).

Пример: Функция $x = \sqrt{y}$ является обратной для функций $y = x^2$ на множестве $[0; +\infty)$, но не на отрезке $[-1; 1]$, т.к. на нём обратная функция

Рассмотрим теперь две числовые функции: $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, где $Y = E(f)$. Очевидно, каждому элементу $x \in X$ можно поставить в соответствие единственный элемент $z \in Z$.



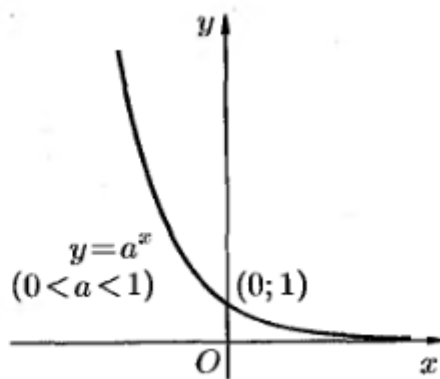
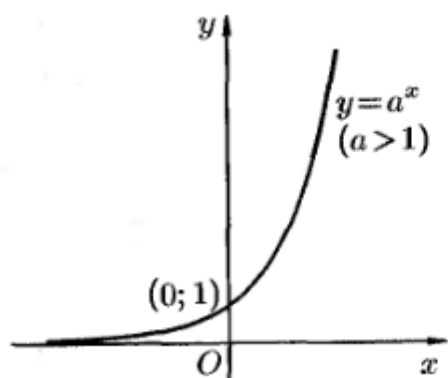
Т.о., на множестве X определена функция $\varphi: X \rightarrow Z$, т.ч. $z = \varphi(x) = g(f(x))$. Эта функция называется *сложной функцией*, или *композицией* функций $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Пример: Функция $z = \sqrt{\sin x}$ является композицией функций $y = \sin x$ и $z = \sqrt{y}$.

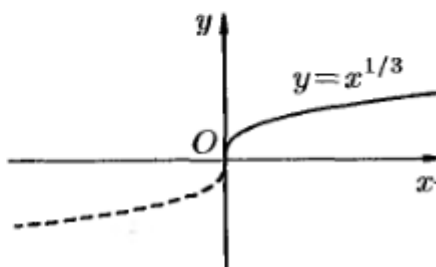
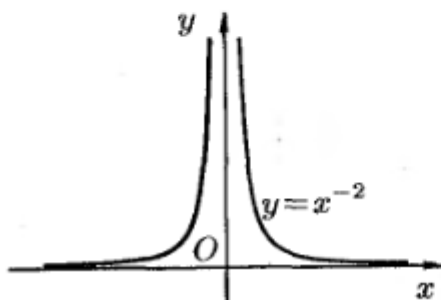
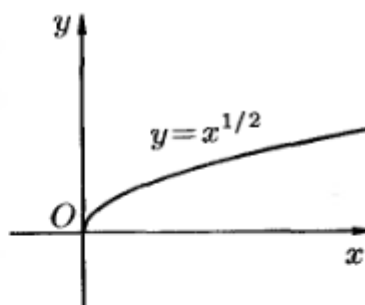
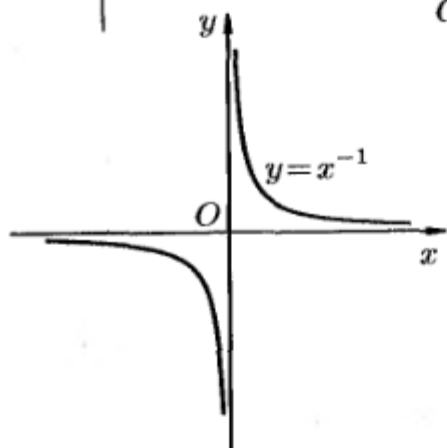
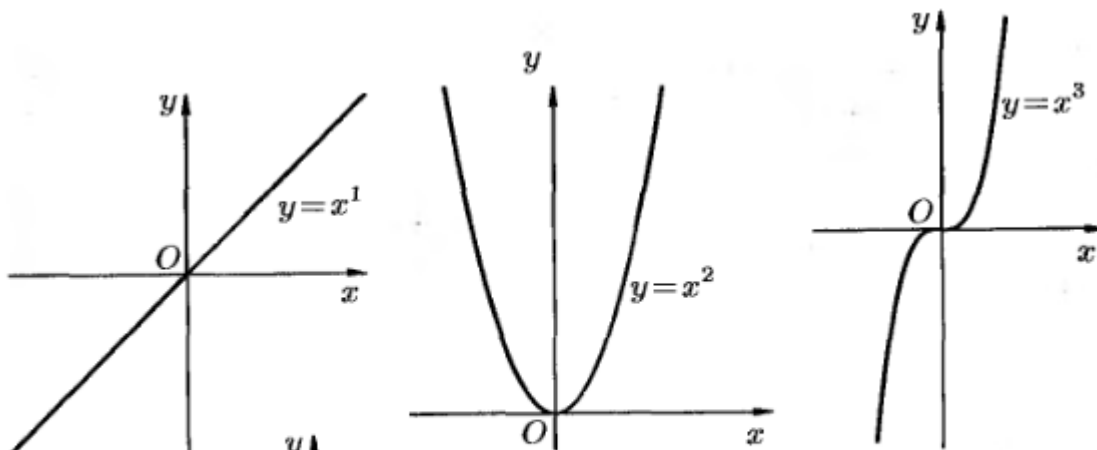
III. Элементарные функции и их графики.

Элементарные функции – функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

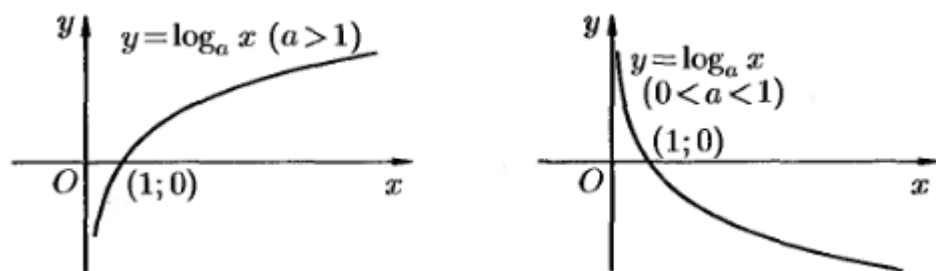
1) Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).



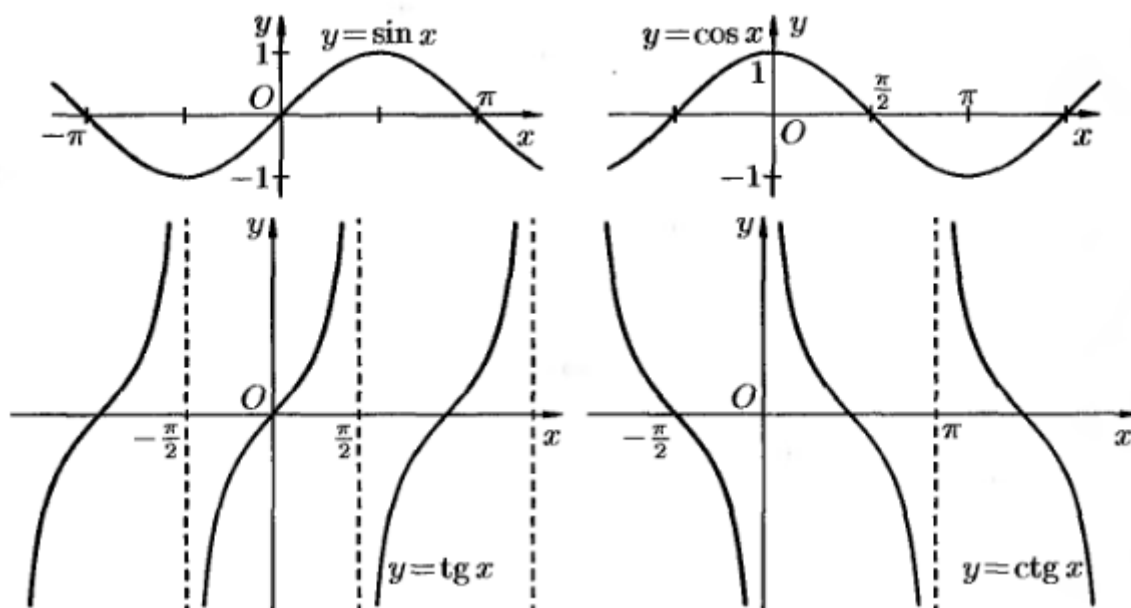
2) Степенная функция $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).



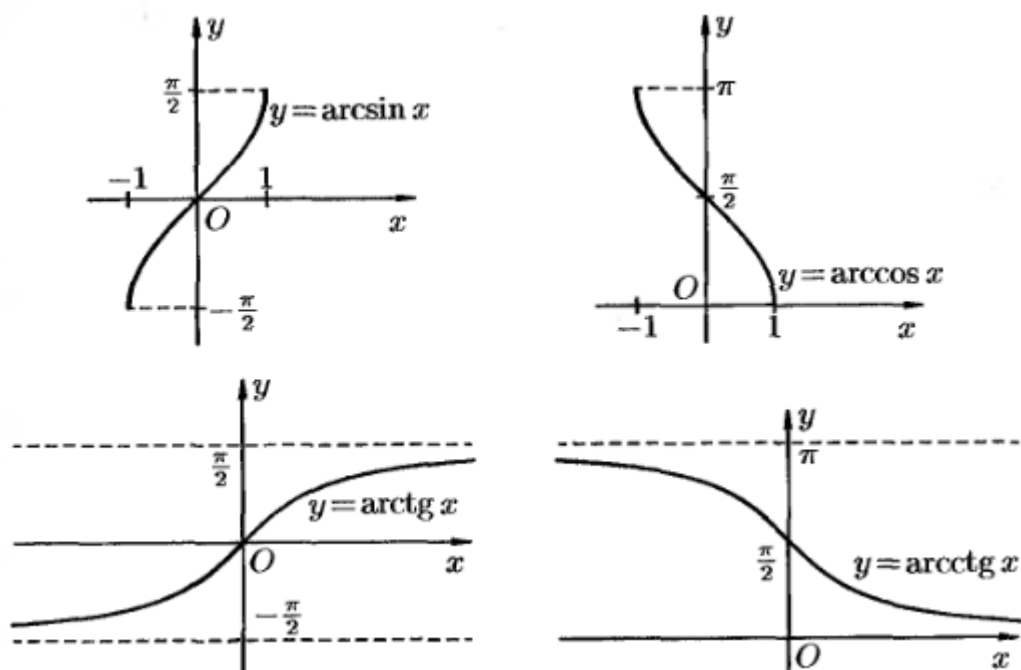
3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).



4) Тригонометрические функции.



5) Обратные тригонометрические функции.



§3. Предел функции.

I. Предел функции в точке и на бесконечности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 .

Число A называется *пределом функции f в точке x_0* , если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(f)$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A , т.е. $\forall \{x_n\} \subset D(f) \left(x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right)$. При этом записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. В общем случае x_0 и A могут равняться $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание: В определении предела функции в точке считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 , большим, чем x_0 , или колеблясь около точки x_0 . Однако бывают случаи, когда способ приближения x к x_0 существенно влияет на значение предела функции.

Число A_1 называется *пределом функции f слева в точке x_0* , если

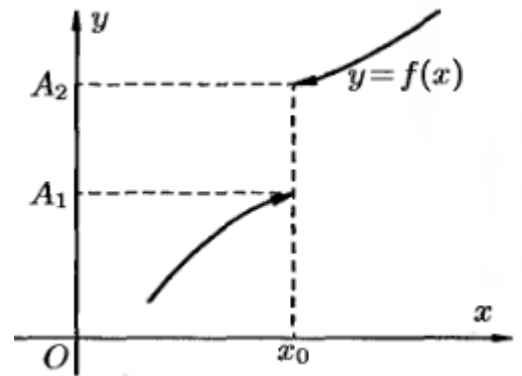
$$\forall \{x_n\} \subset D(f) \left(x_n < x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_1 \right).$$

При этом записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$, или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Число A_2 называется *пределом функции f справа в точке x_0* , если

$$\forall \{x_n\} \subset D(f) \left(x_n > x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_2 \right).$$

При этом записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$, или $f(x_0 + 0) = A_2$.



Пределы функции слева и справа называются *односторонними* (соответственно, *левосторонним* и *правосторонним* пределами).

Теорема 1: Для того, чтобы существовал предел функции f в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовали и были равны оба односторонних предела.

Как и в случае последовательности, функция может иметь лишь один предел при $x \rightarrow x_0$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$* , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$* .

Примеры: 1) функция $f(x) = \frac{1}{x-3}$ является б.б.ф. при $x \rightarrow 3$ и б.м.ф. при $x \rightarrow \infty$;

2) функция $f(x) = x^4$ является б.б.ф. при $x \rightarrow \infty$ и б.м.ф. при $x \rightarrow 0$.

Следующее утверждение устанавливает связь между пределом функции в точке и бесконечно малыми функциями.

Теорема 2 (связь между функцией, её пределом и бесконечно малой функцией):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0.$$

Теорема 3 (предел функции и арифметические операции): Пусть функции f и g имеют конечный предел при $x \rightarrow x_0$. Тогда:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (C = \text{const});$
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\text{если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0).$

▷ Докажем пункт 2): Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Тогда по теореме 2 $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.

Имеем: $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = A \cdot B + [A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)] = A \cdot B + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$. Тогда по теореме 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. □

Упражнение: Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$. / расписать и применить теорему 3 /

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, то выражение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ называется *неопределённостью вида* $\left[\frac{0}{0} \right]$. Если же $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \rightarrow x_0$, то выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ называется *неопределённостью вида* $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, а выражение $f(x) - g(x)$ – *неопределённостью вида* $[\infty - \infty]$. Аналогично вводятся *неопределённости вида* $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$ и $[0^0]$. Раскрыть неопределённость – это значит найти предел соответствующего выражения (если он существует).

Упражнение: 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 3x - 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 3x - 4}$.

Теорема 4 (о пределе промежуточной функции): Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, причём $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. / аналог «правила двух милиционеров» /

II. Замечательные пределы.

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (1)$$

который называется *первым замечательным пределом*.

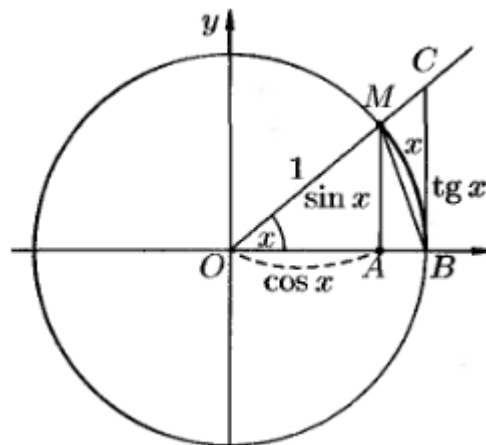
Докажем равенство (1):

► Возьмём единичную окружность и обозначим радианную меру $\angle MOB$ через x (пусть сначала $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Из геометрических соображений получим:

$AM = \sin x$, $BM = x$, $BC = \operatorname{tg} x$. Очевидно, что $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сект. } MOB} < S_{\triangle COB}$, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$,

или $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Делим на $\sin x > 0$: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$,

откуда $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.



Т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, то по теореме 4 (о пределе промежуточной функции) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, и т.к. $-x > 0$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x < 0)}} \frac{\sin x}{x} = 1$. Поскольку оба

односторонних предела равны, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ независимо от способа стремления x к нулю. $\square$

Примеры: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \left[\begin{array}{l} 7x = t; \\ x = \frac{1}{7}t \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{3 \cdot \frac{1}{7}t} = \frac{7}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{7}{3};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5 \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$

Для раскрытия неопределённости вида $[1^\infty]$ часто используют предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad (2)$$

который называется *вторым замечательным пределом*.

Докажем равенство (2):

▷ В §1 было указано, что числовая последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является сходящейся,

причём $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Пусть $x \rightarrow +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leq x < n+1$, где $n = [x]$ – целая часть числа x .

Тогда $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} + 1 < \frac{1}{x} + 1 \leq \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^1} = \frac{e}{1} = e$;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$.

Тогда, по теореме о пределе промежуточной функции, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть теперь $x \rightarrow -\infty$. Сделаем подстановку $x = -t$. Тогда:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t =$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1 = e$.

Т.о., равенство (2) доказано. □

Если в равенстве (2) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$), то второй замечательный предел запишется в виде:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \quad (2')$$

Пример: Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^x = \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = t \\ x = 2t \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right)^2 = e^2. \bullet$$

§4. Сравнение бесконечно малых функций.

I. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$. Тогда их сумма, разность и произведение также являются бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$. Что касается отношения этих функций, то при $x \rightarrow x_0$ оно может вести себя различным образом. Рассмотрим все возможные случаи:

- 1) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$* . Записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$. / «о» малое /
- 2) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$* . При этом $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 3) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ существует, причём не равен ни нулю, ни бесконечности, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow x_0$* . Записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$ или $\beta(x) = O(\alpha(x))$ при $x \rightarrow x_0$. / «О» большое /
- 4) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми при $x \rightarrow x_0$* .

Пример: Рассмотрим функции $\alpha(x) = 7x^2$, $\beta(x) = x \cdot \sin x$, $\gamma(x) = x^3$, $\delta(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, которые являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 7 \neq 0, \neq \infty$, поэтому $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. одного порядка при $x \rightarrow 0$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \infty$, поэтому $\alpha(x)$ – б.м.ф. более низкого порядка, чем $\gamma(x)$ при $x \rightarrow 0$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0$, поэтому $\gamma(x)$ – б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\delta(x)}$ не существует, поэтому $\alpha(x)$ и $\delta(x)$ – несравнимые б.м.ф. при $x \rightarrow 0$.

II. Эквивалентные бесконечно малые функции.

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow x_0$, причём $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Тогда эти функции называются *эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$* . Обозначается: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 1: Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей б.м.ф.

▷ Пусть $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x)$, а $\beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\alpha}(x)} \cdot \frac{\tilde{\beta}(x)}{\tilde{\beta}(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\tilde{\alpha}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\beta}(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}. \quad \square$$

Запишем важнейшие эквивалентности при $x \rightarrow 0$, которые можно использовать для вычисления пределов:

- 1) $\sin x \sim x$;
- 2) $\operatorname{tg} x \sim x$;
- 3) $\arcsin x \sim x$;
- 4) $\operatorname{arctg} x \sim x$;
- 5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
- 6) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$;
- 7) $e^x - 1 \sim x$;
- 8) $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$;
- 9) $\ln(1+x) \sim x$;
- 10) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x \quad (\alpha > 0)$.

Теорема 2: Сумма конечного числа б.м.ф. разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

▷ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, причём $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) = 0 + 1 = 1. \text{ Аналогично для трёх и большего числа слагаемых. } \square$$

Пример: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 3x^2}{\sin 3x} = [\text{теорема 2}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 3x} = [\text{теорема 1}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$

Теорема 3: Разность двух эквивалентных б.м.ф. есть б.м.ф. более высокого порядка, чем каждая из них.

▷ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, причём $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) = 1 - 1 = 0. \text{ Аналогично и } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0. \quad \square$$

Упражнение: Используя эквивалентные б.м.ф., найти следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4 \cos x)}{\cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

§5. Непрерывность функции.

I. Непрерывность функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если она определена в этой точке и в некоторой её окрестности, причём существует предел функции в точке x_0 и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Т.о., для непрерывности функции f в точке x_0 необходимо выполнение трёх условий:

- 1) функция f определена в точке x_0 и некоторой её окрестности;
- 2) функция f имеет предел при $x \rightarrow x_0$;
- 3) выполняется равенство (1).

Замечание: Т.к. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то равенство (1) может быть записано в виде:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x). \quad (2)$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции можно перейти к пределу под знаком функции, т.е. в функцию f вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0 .

Пример: Докажем, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1, \text{ т.к. функция } y = \ln(1+x)$$

непрерывна в точке $x = 0$. •

Точки, в которых функция $f(x)$ не является непрерывной, называются *точками разрыва функции* f . Если x_0 – точка разрыва функции f , то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий определения непрерывности функции, а именно:

- 1) Функция f определена в окрестности точки x_0 , но не определена в самой точке x_0 .

Пример(*): $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0$.

- 2) Функция f определена в точке x_0 и её окрестности, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует.

Пример(**): $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1; \\ 1-x, & 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad x_0 = 1$.

- 3) Функция f определена в точке x_0 и её окрестности, существует

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Пример(***): $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 2, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$.

Введём классификацию точек разрыва:

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва I рода функции f* , если в этой точке существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2 \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*; чтобы устранить разрыв в точке x_0 , достаточно положить $f(x_0) = A_1$, т.е. изменить значение функции в одной точке x_0 .

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва*, при этом величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции f в точке x_0* .

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва II рода функции f* , если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности или не существует.

В примере (*) точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва II рода, в примере (**) точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва I рода со скачком, равным единице, а в примере (***) точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1°. Если функция f непрерывна в точке x_0 , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2°. Если функция f непрерывна в точке x_0 , причём $f(x_0) > 0$, то существует окрестность точки x_0 , в каждой точке которой $f(x) > 0$.

3°. Если функции f и g непрерывны в точке x_0 , то функции $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .

4°. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Из этих свойств вытекает, в частности, что всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения.

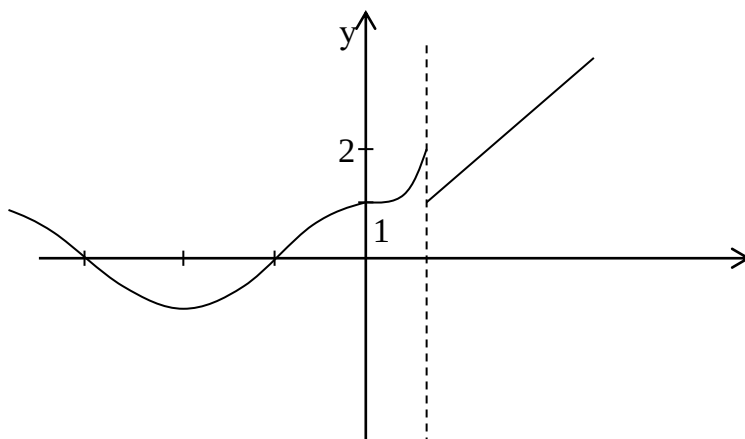
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть. Построить график.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1 \end{array}$$

в точке $x = 0$ функция непрерывна

в точке $x = 1$ точка разрыва 1 – го рода



•
Пример: Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}$ в точке $x_0 = 5$.

• Находим односторонние пределы в точке $x_0 = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5-0} 2^{\frac{1}{x-5}} = [2^{-\infty}] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5+0} 2^{\frac{1}{x-5}} = [2^{+\infty}] = +\infty. \text{ Значит, } x_0 = 5 - \text{точка разрыва II рода функции } f(x) \bullet$$

II. Непрерывность функции в интервале и на отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

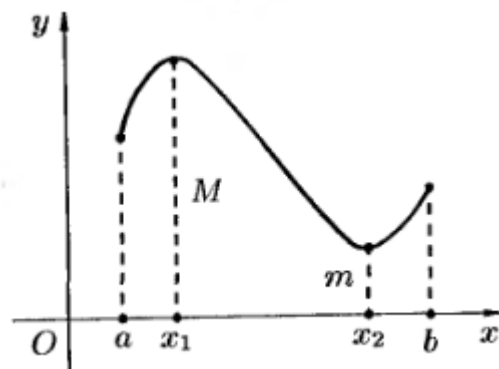
Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$, причём $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке:

1°. Если функция f непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a;b]$ оси Ox , то обратная ей функция f^{-1} также непрерывна и строго монотонна на отрезке $[A;B]$, где $A = f(a)$, $B = f(b)$.

2°. (**Теорема Вейерштрасса**): Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

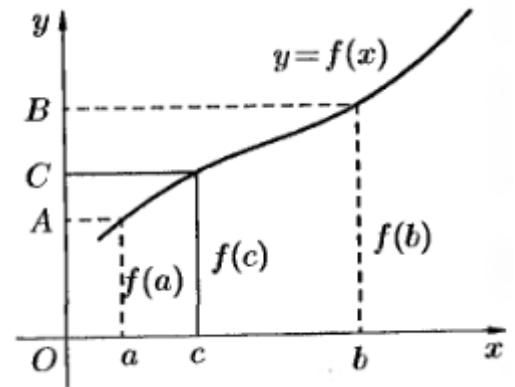
/ изображённая на рисунке графиком функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает своё наибольшее значение M в точке x_1 , а наименьшее значение m – в точке x_2 . Для любого $x \in [a;b]$ имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$ /



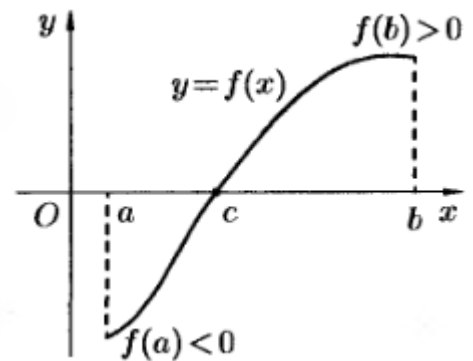
Следствие: Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

3°. (**Теорема Больцано-Коши**): Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $A = f(a)$, $B = f(b)$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B .

/ т.е. для любого числа C , заключённого между A и B , найдётся точка $c \in [a; b]$, т.ч. $f(c) = C$. Другими словами, прямая $y = C$ пересечёт график функции хотя бы в одной точке /



Следствие: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то $\exists c \in (a; b) (f(c) = 0)$.



Данное следствие лежит в основе *метода половинного деления*, который используется для решения уравнений вида $f(x) = 0$, где f – непрерывная на некотором отрезке функция.

ГЛАВА II

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

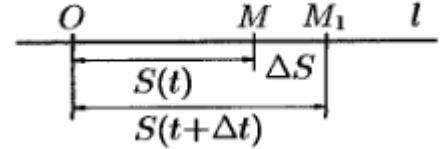
§1. Производная функции.

I. Задачи, приводящие к понятию производной.

Понятие производной является одним из важнейших математических понятий. Рассмотрим две задачи, которые исторически привели к этому понятию.

Задача 1 (скорость прямолинейного движения).

Пусть материальная точка M движется неравномерно по некоторой прямой l . Каждому моменту времени t соответствует определённое расстояние $OM = S$ от точки M до некоторой фиксированной точки O . Это расстояние зависит от истёкшего времени t , т.е. $S = S(t)$.



Если в момент t материальная точка занимает положение M , а спустя время Δt – положение M_1 , то перемещение точки за время Δt будет равняться $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$.

Тогда *средней скоростью* точки за время Δt является величина $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

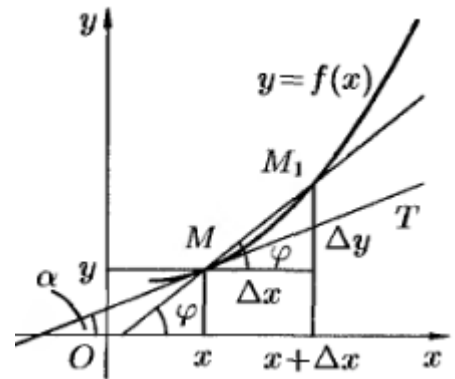
Очевидно, что чем меньше величина Δt , тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t . Поэтому истинная скорость точки в момент времени t будет равна пределу средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Задача 2 (касательная к кривой).

Пусть задана некоторая непрерывная функция $y = f(x)$ и точка $M(x_0; f(x_0))$, принадлежащая графику этой функции. Придадим абсциссе x_0 этой точки приращение Δx и обозначим соответствующую точку графика через M_1 . Обозначим через φ угол между секущей MM_1 и положительным направлением оси Ox .

Тогда угловой коэффициент секущей равен $k_{\text{сек}} = \text{tg } \varphi = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



При $\Delta x \rightarrow 0$ точка M_1 неограниченно приближается к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную к графику в точке M . Обозначив угол между касательной и положительным направлением оси Ox через α , получим:

$$k_{\text{кас}} = \text{tg } \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Заметим, что пределы (1) и (2) имеют одинаковый вид – в обоих случаях требуется найти предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента.

II. Определение производной.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Обозначается $f'(x_0)$. Т.о.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то говорят, что эта функция дифференцируема в точке x_0 . Функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется дифференцируемой в этом интервале. Функцию, сопоставляющую каждой точке x , в которой функция f дифференцируема, её производную в этой точке, называют производной функции f и обозначают $f'(x)$. Операция нахождения производной функции называется её дифференцированием.

Примеры: Найти производные функций $f(x) = C$ ($C = \text{const}$), $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0; \\ g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x; \\ h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \bullet \end{aligned}$$

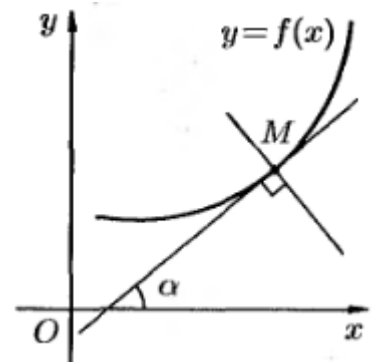
Обобщая задачу 1, можно сказать, что если функция $f(x)$ описывает к.л. физический процесс, то её производная $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

В задаче 2 была получена формула $k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Учитывая равенство (3), её можно записать в виде: $k_{\text{кас}} = f'(x_0)$. Т.о. производная функции f в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке с абсциссой x_0 . В этом состоит геометрический смысл производной. Поскольку касательная проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент $k = f'(x_0)$, то её уравнение запишется в виде: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (4)$$

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется *нормалью к кривой* $y = f(x)$. Т.к. произведение угловых коэффициентов касательной и нормали, проведённых в одной точке, равно (-1) , то уравнение нормали запишется в виде:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (5)$$



Теорема 1 (связь между непрерывностью и дифференцируемостью): Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

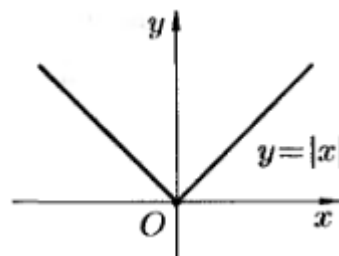
▷ Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда [§3, теорема 2] $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получим: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$, откуда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, или $\left[\begin{array}{l} x_0 + \Delta x =: x \\ x \rightarrow x_0 \end{array} \right] \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. А это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 . □

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может и не иметь производной.

Пример: Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке:

$$\bullet \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1. \bullet$$



Замечания:

1) Пределы, найденные в последнем примере, называются *односторонними производными* и обозначаются $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ (соответственно, «производная слева» и «производная справа»). Лишь в случае, когда односторонние производные в точке существуют и равны, функция дифференцируема в этой точке.

2) Производная непрерывной функции сама не обязательно является непрерывной. Если же функция $f(x)$ в некотором интервале $(a; b)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то функция называется *гладкой* в этом интервале.

3) Существуют функции, непрерывные на всей числовой прямой, которые нигде не дифференцируемы.

III. Правила дифференцирования.

Теорема 2 (производная и арифметические операции): Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в некотором интервале $(a; b)$. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций дифференцируемы в этом интервале, причём:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(uv)' = u'v + uv'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

▷ Докажем 2):

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u. \quad \square$$

Следствие:

1) $(Cu)' = C \cdot u' \quad (C = \text{const});$

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw';$

3) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (C = \text{const}).$

Теорема 3 (производная сложной функции): Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 , причём $y'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Отсюда следует, что для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимой переменной (схематически: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$).

Это правило справедливо и в случае большего числа промежуточных аргументов. Например, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Теорема 4 (производная обратной функции): Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 , причём $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

IV. Производные элементарных функций.

1) Показательная функция.

Найдём производную функции $y = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$):

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = [a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \cdot \ln a \text{ при } \Delta x \rightarrow 0] = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

В частности, при $a = e$ получим $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$.

2) Логарифмическая функция.

Найдём производную функции $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$):

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \\ &= \left[\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\left(\frac{\Delta x}{x} \right)}{\ln a} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta x}{x \cdot \ln a} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \end{aligned}$$

В частности, при $a = e$ получим $(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}$.

3) Степенная функция.

Найдём производную функции $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$x^\alpha = [\text{основное логарифмическое тождество}] = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$. Тогда, по теореме о производной сложной функции, $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

4) Тригонометрические функции.

Найдём производные тригонометрических функций:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x.$$

По формуле производной частного $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

5) Обратные тригонометрические функции.

Функция $y = \sin x$ монотонно возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, причём в каждой точке этого интервала $y' = \cos x > 0$. Тогда, по теореме о производной обратной функции, функция $x = \arcsin y$ является дифференцируемой, причём

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \text{ или } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Т.к. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, то $(\arccos x)' = (\pi/2 - \arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, причём в каждой точке этого интервала $y' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Тогда, по теореме о производной обратной функции, функция

$$x = \operatorname{arctg} y \text{ дифференцируема, причём } (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

или $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$. Т.к. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, то $(\operatorname{arcctg} x)' = (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

6) Гиперболические функции.

Производные тригонометрических функций найдём, пользуясь их выражением через показательные функции: $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$;

аналогично получаем: $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ.

$$1) (C)' = 0 \quad (C = \text{const});$$

$$11) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$2) (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \quad (\alpha \in \mathbb{R});$$

$$12) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$3) (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$13) (\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$4) (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$14) (\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$5) (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u' \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$15) (\text{sh } u)' = \text{ch } u \cdot u';$$

$$6) (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$16) (\text{ch } u)' = \text{sh } u \cdot u';$$

$$7) (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$17) (\text{th } u)' = \frac{1}{\text{ch}^2 u} \cdot u';$$

$$8) (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$18) (\text{cth } u)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 u} \cdot u'.$$

$$9) (\text{tg } u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$10) (\text{ctg } u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

/ привожу примеры /

V. Логарифмическое дифференцирование.

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $(a;b)$ и положительна на этом интервале. Рассмотрим функцию $y = \ln f(x)$. Дифференцируя эту функцию как сложную, получим: $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Производная от натурального логарифма функции называется *логарифмической производной* этой функции, а последовательное применение операции логарифмирования, а затем дифференцирования называется *логарифмическим дифференцированием*.

С помощью этого метода найдём производную *степенно-показательной функции* $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции, причём $u(x) > 0$:

$$\ln y = \ln(u(x)^{v(x)}) = v(x) \cdot \ln u(x) \Rightarrow (\ln y)' = \frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Умножая обе части последнего равенства на функцию $y = u(x)^{v(x)}$, получим:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right). \quad (6)$$

VI. Производные неявных и параметрически заданных функций.

Если функция y задана уравнением вида $y = f(x)$, разрешённым относительно y , то говорят, что эта функция задана в *явном виде*. Если же функция y задана в виде уравнения

$$F(x; y) = 0, \quad (7)$$

то говорят о *неявном задании* функции.

Пример: $y = \cos^2 5x$ – явное задание функции, $y + \sin y = x$ – неявное.

Чтобы найти производную функции y , заданной неявно уравнением (7), достаточно продифференцировать это уравнение по x , считая y функцией от x , а затем выразить из полученного равенства y' .

Упражнение: Найти производную функции y , заданной уравнением $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана с помощью некоторой переменной t в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (8)$$

В этом случае говорят, что функция задана *параметрически*, а переменную t называют *параметром*.

Пример: $\begin{cases} x = R \cos t; \\ y = R \sin t \end{cases}$ – параметрическое уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

Найдём производную функции (8), дополнительно полагая, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$: $y'_x = [\psi(t)]'_x = [\psi(\varphi^{-1}(x))]'_x$ [теорема о производной сложной функции] $= \psi'(t) \cdot (\varphi^{-1})'(x)$ [теорема о производной обратной функции] $= \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$. Т.о.,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (9)$$

Упражнение: Найти производную функции y , заданной параметрически: $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1; \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

VII. Производные высших порядков.

Производная $f'(x)$ от функции $y = f(x)$ называется также *производной 1-го порядка*. В свою очередь, если функция $f'(x)$ дифференцируема, то её производная называется *производной 2-го порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Т.о. $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогично, производная от производной 2-го порядка, если она существует, называется *производной 3-го порядка* и обозначается $f'''(x)$ или $\frac{d^3 y}{dx^3}$. Т.о., $f'''(x) = (f''(x))'$. И т. д...

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \quad (10)$$

Пример: Найти производную 3-го порядка от функции $y = \ln \cos x$.

Механический смысл производной 2-го порядка: Если материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, то 2-я производная от пути по времени равна ускорению движения точки, т.е. $S''(t) = a$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$. Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное равенство относительно y' , найдём производную 1-го порядка. Продифференцировав по x 1-ю производную, получим производную 2-го порядка от неявной функции, зависящую от x , y и y' . Подставляя уже найденное значение y' в выражение 2-ой производной, выразим y'' через x и y .

Пример: Найти y'' , если $x^2 + y^2 = 1$.

$$\bullet 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}, \text{ т.к. } x^2 + y^2 = 1. \bullet$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями (8) Тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, откуда

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \text{ т.е.}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (11)$$

$$\text{Аналогично } y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \dots$$

Пример: Найти производную 2-го порядка от функции $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$

$$\bullet y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 2}{1/t} = 3t^3 + 2t; \quad y''_{xx} = \frac{(3t^3 + 2t)'_t}{1/t} = \frac{9t^2 + 2}{1/t} = 9t^3 + 2t. \bullet$$

§2. Дифференциал функции.

I. Дифференциал функции. Основные теоремы.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , причём $f'(x_0) \neq 0$. Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

По теореме о связи предела функции и б.м.ф. (глава III, §3, теорема 2) можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$. Умножим обе части равенства на Δx :

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (1)$$

Сравним оба слагаемых в правой части (1) с приращением Δx :

Поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то 1-е слагаемое есть б.м.ф. одного порядка с Δx , а 2-е – б.м.ф. более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому 1-е слагаемое называют *главной частью приращения функции* Δy .

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения функции Δy , линейная относительно приращения аргумента Δx . Обозначается dy или $df(x_0)$. Т.о.

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (2)$$

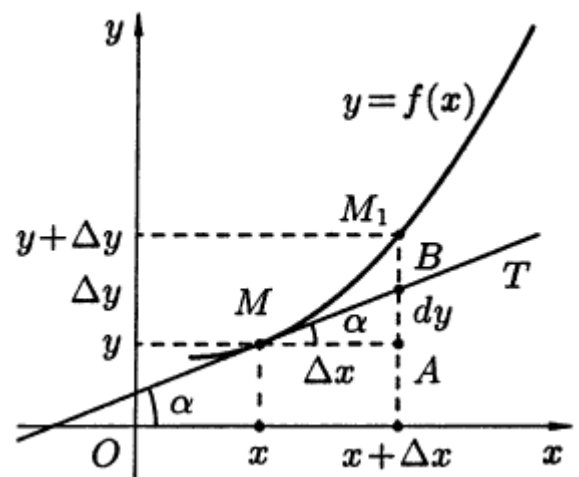
Для функции $y = x$ получим: $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Поэтому формула (2) может быть записана в виде:

$$df(x_0) = f'(x_0) dx. \quad (3)$$

Т.о. дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Выясним геометрический смысл дифференциала. Для этого проведём к графику функции $y = f(x)$ касательную в точке с абсциссой x_0 и обозначим через α угол между этой касательной и положительным направлением оси Ox .

Из геометрического смысла производной следует, что $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, откуда $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$. Тогда из Δ_{MLN} получаем, что дифференциал $df(x_0)$ представляет собой приращение ординаты точки касания $M(x_0; f(x_0))$, соответствующее приращению аргумента Δx .



Теорема 1: Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в некотором интервале $(a; b)$. Тогда:

1) $d(C \cdot u) = C \cdot du$ ($C = \text{const}$);

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$ ($v \neq 0$).

Теорема 2: Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента, т.е. если $y = f(u(x))$, то $df(u) = f'(u) \cdot du$.

▷ Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, причём $\varphi(x)$ имеет производную в точке x , а $f'(u)$ – производную в точке u . Тогда, по теореме о производной сложной функции, $\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot \varphi'(x)$, откуда $dy = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = f'(u) \cdot du$. □

Сравнивая полученный результат с формулой (3), получим, что форма записи дифференциала не зависит от того, является аргумент независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала*.

Пример: Найти дифференциал сложной функции $y = \cos u$, $u = \sqrt[3]{x}$.

• $dy = -\sin u \cdot du = -\sin \sqrt[3]{x} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx \right)$.

II. Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Из формулы (1) следует, что $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому при достаточно малом Δx получаем приближённое равенство $\Delta y \approx dy$, т.е. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot dx$, откуда, заменяя dx на Δx и выражая $f(x_0 + \Delta x)$, получим:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (4)$$

Равенство (4) тем точнее, чем ближе приращение Δx к нулю.

Формула (4) позволяет вычислить приближённое значение функции, соответствующее приращённому значению аргумента, если известно её значение в некоторой точке и значение её производной в этой же точке. Эта формула широко применяется в приближённых вычислениях, поскольку обычно дифференциал находится значительно проще, чем приращение функции.

Пример: Вычислить приближённо $\ln 1,02$.

• Воспользуемся формулой (4), где $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$.

Имеем: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$, поэтому $f(1,02) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,02$,

или $\ln 1,02 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0,02 = 0,02$.

III. Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале $(a; b)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$, который также называется её *первым дифференциалом*, зависит от двух переменных – x и dx .

Пусть функция $f'(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a; b)$. Тогда дифференциал в этой точке функции dy , рассматриваемой как функция только от x (т.е. при фиксированном dx) имеет вид: $d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' \cdot dx = f''(x)(dx)^2$.

Дифференциалом 2-го порядка от функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка от этой функции: $d^2y = f''(x)dx^2$.

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков: $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Пример: Найти дифференциал 2-го порядка функции $y = \ln(1 + x^2)$.

• Имеем: $y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Тогда $d^2y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx^2$. •

Если же аргументом функции $y = f(u)$ является некоторая дифференцируемая функция u , то форма дифференциалов высших порядков изменится.

Пример: Найти дифференциал 2-го порядка от функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ – некоторая функция.

• $d^2y = d(dy) = d(f'(u)du) = d(f'(u)) \cdot du + f'(u) \cdot d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$. •

§3. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя.

I. Теоремы о среднем.

Теорема 1 (теорема Ролля о нуле производной): Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $(a;b)$, причём $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, т.ч. $f'(c) = 0$.

▷ Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса (глава III, §5) она достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшего значения M .

Рассмотрим два случая:

1) Если $m = M$, то функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a;b]$, откуда $f'(x) \equiv 0$ на $[a;b]$.

2) Если $m < M$, то функция $f(x)$ достигает значения m или M в некоторой внутренней точке $c \in (a;b)$. Рассмотрим случай $f(c) = M$:

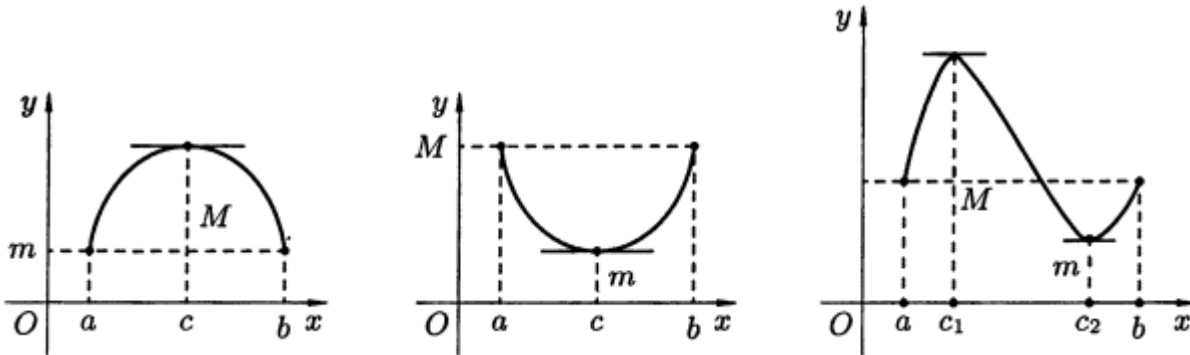
Очевидно, $\forall x \in (a;b)$ ($f(x) \leq f(c)$). Найдём производную функции в точке c :

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \Delta x < 0; \\ \geq 0, & \text{если } \Delta x > 0, \end{cases} \text{ т.к. числитель дроби всегда неотрицателен.}$$

В силу единственности производной получаем, что $f'(c) = 0$.

Случай $f(c) = m$ рассматривается аналогично. □

Геометрический смысл теоремы Ролля: На графике функции $y = f(x)$, принимающей на концах отрезка $[a;b]$ одинаковые значения, найдётся х.б. одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox .



Теорема 2 (теорема Коши о конечных приращениях): Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причём $\forall x \in (a;b)$ ($g'(x) \neq 0$). Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, т.ч. $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

▷ Очевидно, что $g(b) - g(a) \neq 0$, т.к. при $g(a) = g(b)$ по теореме Ролля нашлась бы точка $c \in (a;b)$, т.ч. $g'(c) = 0$, что противоречило бы условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.

Очевидно, эта функция непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $(a;b)$, причём $F(a) = F(b) = 0$. Поэтому, по теореме Ролля, $\exists c \in (a;b)$ ($F'(c) = 0$).

Но $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$, откуда $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. □

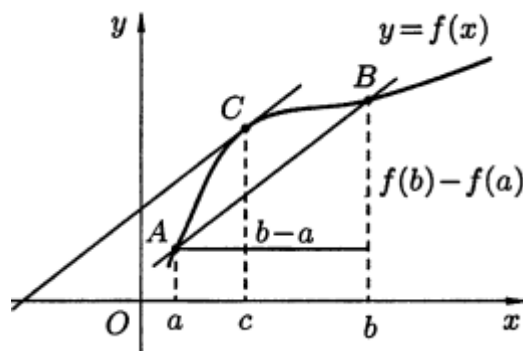
Теорема 3 (теорема Лагранжа о конечных приращениях): Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, т.ч.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

► Применим теорему 2 к функции $g(x) = x$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Перепишем равенство (1) в виде: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Легко проверить, что левая часть равенства есть угловой коэффициент секущей AB , а $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой c . Отсюда следует геометрический смысл теоремы Лагранжа: На графике функции $y = f(x)$ найдётся точка C , в которой касательная к графику параллельна секущей AB .



II. Правило Лопиталя.

Рассмотрим применение производной к нахождению пределов функций.

Теорема 4 (правило Лопиталя раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$): Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 , за исключением, б.м., самой точки x_0 . Пусть также в указанной окрестности $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, а $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

► Доопределим функции f и g в точке x_0 , полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда они будут непрерывны в окрестности точки x_0 , и к ним можно применить теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в этой окрестности: $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где c лежит между x и x_0 .

Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$, получим: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Перейдём в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Теорема 5 (правило Лопиталя раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$): Пусть функции

$f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 , за исключением, б.м., самой точки x_0 . Пусть также в указанной окрестности $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, а

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Замечания:

1) Теоремы 4 и 5 верны и при $x \rightarrow \infty$, т.к. при $x = \frac{1}{t}$ получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = [\text{теорема 4 или 5}] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Если, в свою очередь, выражение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ даёт неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то правило Лопиталя можно применить второй раз, и т. д.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^3 - 3x - 2} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 3} = \frac{13}{9};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{4x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{4} = \frac{9}{4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \dots = \infty; \quad / \text{ обобщение: показательная функция растёт быстрее степенной } /$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{\ln x} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \dots = \infty; \quad / \text{ обобщение: степенная функция растёт быстрее логарифмической } /$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1/x}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-x^2}{x} = 0;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \dots = \frac{1}{2}.$$

Неопределённости вида $[1^\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$ также можно раскрывать с помощью правила Лопиталя, предварительно прологарифмировав функцию (либо применив основное логарифмическое тождество $f(x) = e^{\ln f(x)}$).

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x \stackrel{[0^0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x} = \left[\lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} 0 \right] = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right)^x \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(\frac{2}{x} + 1 \right)} = e^2;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{x^2} \stackrel{[\infty^0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2 \ln \frac{1}{x}} = 1.$$

§4. Исследование функций с помощью производных.

I. Возрастание и убывание функции.

Теорема 1 (необходимое условие монотонности): Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$. Тогда:

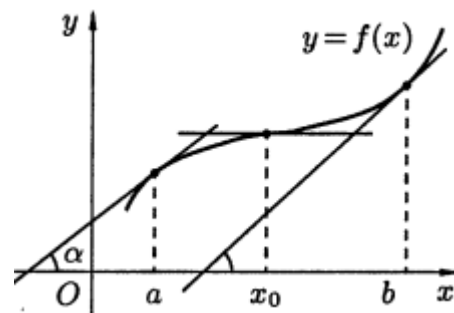
- 1) если $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$, то $\forall x \in (a; b) (f'(x) \geq 0)$;
- 2) если $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, то $\forall x \in (a; b) (f'(x) \leq 0)$.

▷ 1): Возьмём произвольные точки $x, x + \Delta x \in (a; b)$ и рассмотрим отношение $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$, откуда, в силу возрастания функции, $f(x + \Delta x) > f(x)$. Если же $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$, откуда $f(x + \Delta x) < f(x)$. В обоих случаях числитель и знаменатель дроби имеют один знак, откуда следует, что $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ получим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0. \text{ Пункт 2) доказывается аналогично. } \square$$

Геометрический смысл теоремы 1: Касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках параллельны этой оси.



Теорема 2 (достаточное условие монотонности): Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$. Тогда

- 1) если $\forall x \in (a; b) (f'(x) > 0)$, то $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$;
- 2) если $\forall x \in (a; b) (f'(x) < 0)$, то $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.

▷ 1): Возьмём произвольные точки $x_1, x_2 \in (a; b)$, причём $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1; x_2]$

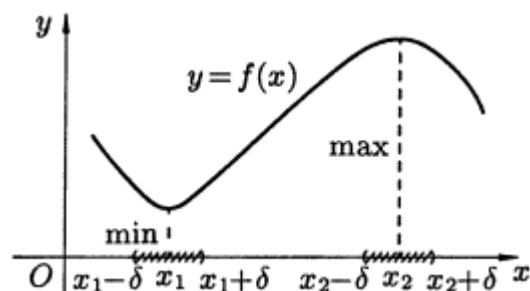
теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1; x_2)$. $\left. \begin{matrix} f'(c) > 0 \\ x_2 - x_1 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$,

т.е. функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. Пункт 2) доказывается аналогично. $\square$

Замечание: Условие $f'(x) > 0$ не является необходимым для возрастания функции (например, функция $f(x) = x^3$ возрастает на $\mathbb{R}$, хотя $f'(0) = 0$)

II. Экстремумы функции.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что $\forall x \in U(x_0) (f(x) \leq f(x_0))$, и *точкой локального минимума*, если $\forall x \in U(x_0) (f(x) \geq f(x_0))$.



Т.о., точки локального минимума и максимума могут быть только внутренними точками области определения функции.

Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

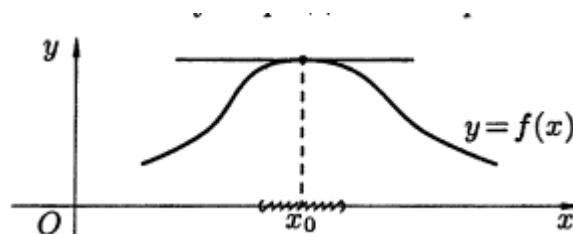
Теорема 3 (необходимое условие локального экстремума): Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 . Тогда $f'(x_0) = 0$.

▷ Пусть x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$. Тогда в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$. Но тогда $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, если

$\Delta x < 0$, и $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$, если $\Delta x > 0$. При $\Delta x \rightarrow 0 - 0$ получим $f'(x_0) \geq 0$, а при

$\Delta x \rightarrow 0 + 0$ – $f'(x_0) \leq 0$. Т.к. производная в точке x_0 может быть только одна, то $f'(x_0) = 0$. Если x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$, то утверждение доказывается аналогично. □

Геометрический смысл теоремы 3: В точке экстремума дифференцируемой функции $f(x)$ касательная к её графику параллельна оси Ox .



Замечание: Обратная теорема – неверна, т.е. если $f'(x_0) = 0$, то это не обязательно означает, что x_0 – точка экстремума (например, для функции $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, хотя экстремума в точке $x_0 = 0$ нет).

Существуют функции, которые в точке экстремума не имеют производной (например, $f(x) = |x|$). Т.о., непрерывная функция может иметь экстремум в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими*.

Теорема 4 (достаточное условие локального экстремума): Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в ней, за исключением, б.м., самой точки x_0 . Тогда, если при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка локального максимума; с минуса на плюс, то x_0 – точка локального минимума.

Теоремы 1 – 4 позволяют исследовать функции на монотонность и экстремум.

Теорема 5 (второе достаточное условие локального экстремума): Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные 1-го и 2-го порядков, причём $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума, а если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Т.о., в предыдущем примере вместо определения знаков производной на промежутках можно было найти производные 2-го порядка в критических точках.

III. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда функция достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений (их также называют соответственно *глобальным максимумом* и *глобальным минимумом* функции на отрезке). Эти значения функция может принимать либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a;b]$, либо на концах отрезка. Если $x_0 \in (a;b)$, то она является точкой локального экстремума.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений на отрезке:

- 1) Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(a;b)$.
- 2) Вычисляем значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах отрезка $[a;b]$.
- 3) Выбираем среди вычисленных значений наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3;0]$.

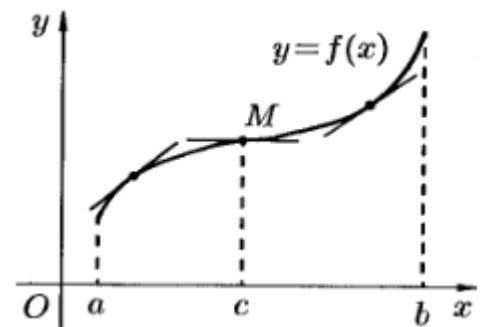
- Находим производную $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ и критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Т.к. $x_2 \notin [-3;0]$, найдём значения функции при $x = -3$, $x = 0$, $x = -1$: $f(-3) = 66$, $f(0) = 3$, $f(-1) = 2$. Т.о., $f_{\max} = f(-3) = 66$, $f_{\min} = f(-1) = 2$.

Замечание: Если функция не имеет критических точек внутри отрезка, то она монотонна на интервале, и её наибольшее и наименьшее значения принимаются на концах отрезка.

IV. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (выпуклым вверх)* на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

График $y = f(x)$ называется *вогнутым (выпуклым вниз)* на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

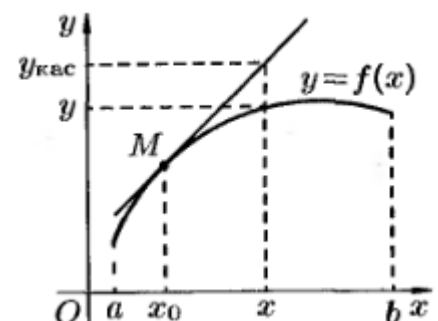


Точка графика, в которой меняется характер выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Теорема 6 (достаточное условие выпуклости): Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если $\forall x \in (a;b) (f''(x) < 0)$, то график функции в интервале $(a;b)$ является выпуклым, а если $\forall x \in (a;b) (f''(x) > 0)$, то график функции в этом интервале является вогнутым.

▷ Рассмотрим 1-й случай – пусть $\forall x \in (a;b) (f''(x) < 0)$.

Фиксируем на графике произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a;b)$ и проведём через неё касательную. Покажем, что на всём интервале $(a;b)$ график функции расположен ниже этой касательной. Для этого сравним в произвольной точке



$x_1 \in (a; b)$ ординату y_1 кривой $y = f(x)$ с ординатой $y_{\text{кас}}$ её касательной:

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, откуда $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$.

Имеем: $y_1 - y_{\text{кас}} = f(x_1) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)] = (f(x_1) - f(x_0)) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = [\text{теорема Лагранжа о конечных приращениях}] = f'(c)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x_1 - x_0)$, где точка c лежит между x_0 и x_1 . Применив к выражению в скобках теорему Лагранжа, получим: $y_1 - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x_1 - x_0)$, где точка c_1 лежит между c и x_0 .

Рассмотрим два случая:

1). Если $x_1 > x_0$, то $x_1 - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$.

2). Если $x_1 < x_0$, то $x_1 - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$.

Учитывая, что в обоих случаях $f''(c_1) < 0$, получим, что $y_1 - y_{\text{кас}} < 0$, т.е. ордината кривой расположена ниже соответствующей ординаты касательной.

Случай $f''(x) > 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 7 (необходимое условие существования точки перегиба): Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки перегиба $M(x_0; f(x_0))$ непрерывную производную 2-го порядка, то $f''(x_0) = 0$.

▷ От противного: Если бы $f''(x_0) < 0$ или $f''(x_0) > 0$, то по предыдущей теореме график функции был бы выпуклым в точке x_0 . $\square$

Отсюда следует, что точка $M(x_0; f(x_0))$ может являться точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если $f''(x_0) = 0$ либо не существует.

Теорема 8 (достаточное условие существования точки перегиба): Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , дважды дифференцируема в её окрестности, за исключением, б.м., самой точки x_0 , причём $f''(x_0) = 0$ либо не существует. Если 2-я производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

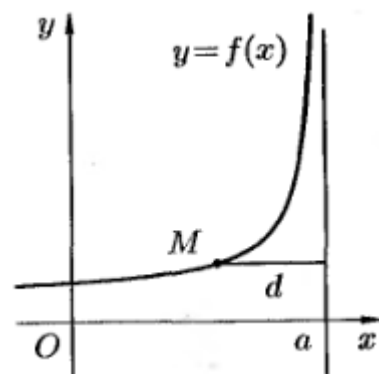
▷ Следует из теоремы 6 и определения точки перегиба. $\square$

V. Асимптоты графика функции.

Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении её от начала координат.

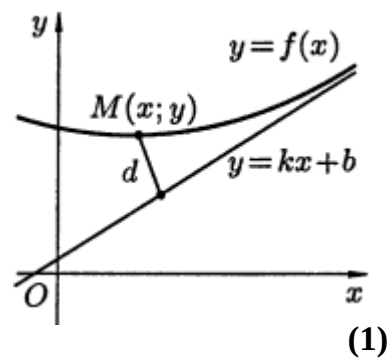
Асимптоты могут быть *вертикальными*, *наклонными* и *горизонтальными*.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ либо $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x , вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва II рода.



Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка кривой $y = f(x)$. Записав уравнение асимптоты в общем виде $kx - y + b = 0$, найдём расстояние до неё от точки M : $d = \frac{|kx - y + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$. Т.к. $d \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то



$$\lim_{x \rightarrow \infty} (kx - y + b) = 0, \quad (1)$$

т.е. $kx - y + b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow \infty$.

Разделим обе части последнего равенства на x : $k - \frac{y}{x} + \frac{b}{x} = \frac{\alpha(x)}{x}$, откуда $k + \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{y}{x}$.

Перейдём к пределу при $x \rightarrow \infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Из условия (1) находим b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx). \quad (3)$$

Т.о., если существует наклонная асимптота $y = kx + b$, то коэффициенты k и b находятся по формулам (2) и (3). В частности, при $k = 0$ получим горизонтальную асимптоту.

Замечание: Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ могут быть разными, поэтому при нахождении пределов (2) и (3) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \rightarrow +\infty$ и когда $x \rightarrow -\infty$.

Пример. Найти асимптоты кривой $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

- Данная функция определена для всех $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$\text{Т.к. } \lim_{x \rightarrow 0+0} (xe^{\frac{2}{x}} + 1) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right) - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2 \cdot e^{\frac{2}{x}} = +\infty, \text{ то прямая}$$

$x = 0$ является вертикальной асимптотой. Горизонтальных асимптот график функции не имеет, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{2}{x}} + 1) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{\frac{2}{x}} + 1) = -\infty$. Определим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right) - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 3. \text{ Следовательно, } y = x + 3 \text{ – наклонная асимптота кривой при}$$

$x \rightarrow +\infty$. Легко видеть, что при $x \rightarrow -\infty$ мы получим тот же результат. Таким образом, прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой при $x \rightarrow \pm\infty$. •

VI. Общая схема исследования функции и построения графика.

Исследование функции $y = f(x)$ и построение графика этой функции целесообразно вести в следующей последовательности:

- 1) Находим область определения функции.
- 2) Находим возможные точки пересечения графика функции с осями координат.
- 3) Находим интервалы знакопостоянства функции, т.е. промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$.
- 4) Выясняем, является ли функция чётной, нечётной, периодической.
- 5) Исследуем функцию на монотонность и экстремум.
- 6) Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции.
- 7) Находим возможные асимптоты графика функции.
- 8) Для уточнения вида графика находим несколько его точек.
- 9) Используя полученную информацию, строим график функции.

Пример. Построить график функции $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

• Применим общую схему исследования:

1) Область определения функции $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

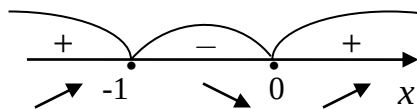
2) Точки пересечения с осями координат: если $y = 0$, то $x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$ – уравнение не имеет решений; $x = 0$ не принадлежит $D(y)$. Таким образом, график функции не пересекает оси координат; $y(x) > 0$, если $x > 0$ и $y(x) < 0$, если $x < 0$.

3) Т.к. $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, то функция принимает отрицательные значения на интервале $(-\infty; 0)$ и положительные – на интервале $(0; +\infty)$.

4) Область определения функции является симметричной относительно начала координат: $y(-x) = -x \cdot e^{\frac{1}{x}} \neq -y(x)$, $y(-x) \neq y(x)$. Таким образом, функция не является ни чётной, ни нечётной.

5) Вычислим первую производную и исследуем её знаки:

$$y' = e^{-\frac{1}{x}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1+x}{x}.$$



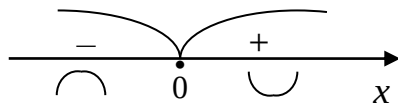
$y' < 0$ для $x \in (-1; 0)$ – функция убывает;

$y' > 0$ для $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ – функция возрастает.

В окрестности точки $x = -1$ производная меняет знак с "+" на "-", поэтому в точке $x = -1$ функция имеет экстремум (максимум) и $y_{\max} = y(-1) = -e$. В точке $x = 0$ производная y' не существует, но в этой точке не существует и сама функция, поэтому точка $x = 0$ не является критической.

6. Вычислим вторую производную и исследуем её знаки:

$$y'' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}.$$



$y'' < 0$ для $x \in (-\infty; 0)$ – график функции является выпуклым;

$y'' > 0$ для $x \in (0; +\infty)$ – график функции является вогнутым.

Так как точка $x=0$ не принадлежит $D(y)$, то точек перегиба – нет

7) Точка разрыва: $x=0$. Исследуем характер разрыва: $\lim_{x \rightarrow 0-0} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Таким образом, в точке $x=0$ функция терпит разрыв второго рода. Исследуем поведение функции в

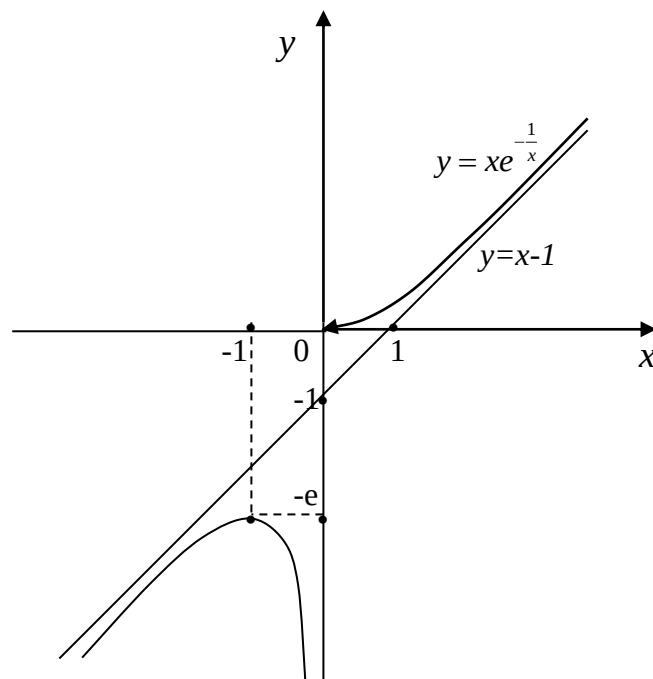
бесконечно удалённых точках: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Найдём асимптоты графика

функции: $x=0$ – вертикальная асимптота. Рассмотрим: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$;

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = -1$. Таким образом, график

функции имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$.

Результат этих исследований наносим на график.



ГЛАВА III

Матричное исчисление и векторная алгебра

§1. Матрицы. Действия над матрицами.

I. Основные понятия.

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Записывается матрица в виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или, сокращённо, } A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ где } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

При этом числа a_{ij} называются *элементами матрицы A* (индекс i указывает на номер строки, индекс j – на номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}).

Замечание: Наряду с квадратными скобками, допускается использовать круглые, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B одинаковой размерности $m \times n$ называются *равными*, если все их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Равенство матриц записывается в виде $A = B$.

$$\text{Матрица } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ у которой число строк равно числу столбцов и равно } n,$$

называется *квадратной матрицей n -го порядка*. При этом элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочную диагональ* матрицы A . Квадратная матрица называется *верхнетреугольной*, если все элементы ниже главной диагонали равны нулю, и *нижнетреугольной*, если все элементы выше главной диагонали равны нулю.

$$\text{Матрица размерности } m \times 1 \text{ вида } \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \text{ называется } \textit{матрицей-столбцом}, \text{ а матрица}$$

размерности $1 \times n$ вида $[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]$ – *матрицей-строкой*.

Квадратная матрица n -го порядка, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а остальные элементы равны нулю, называется *единичной матрицей n -го порядка* и обозначается символом E .

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается символом O (эта матрица может быть любой размерности). В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

$$\text{Пример: } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \text{ – матрица размерности } 2 \times 3, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ – квадратная матрица } 3\text{-го}$$

порядка.

II. Действия над матрицами.

1) Сложение и вычитание матриц.

Эти операции определены только для матриц одинаковой размерности. Суммой матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = A + B$ той же размерности, элементы которой c_{ij} равны сумме соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Аналогично определяется и *разность матриц*.

Пример:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

2) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и числа λ называется матрица $B = \lambda A$ той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Т.о., умножение матрицы на число равносильно умножению всех элементов матрицы на это число.

Пример:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 12 & 15 & 3 \\ 21 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A .

Свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число:

- 1°. $A + O = O + A = A$;
- 2°. $A + B = B + A$;
- 3°. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 4°. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 5°. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 6°. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

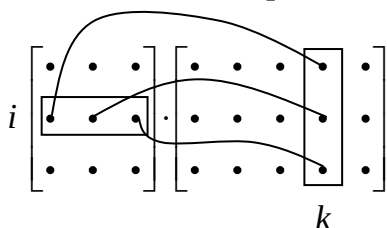
3) Умножение матриц.

Эта операция определена лишь в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй (такие матрицы называются *согласованными*). Произведением матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{jk})_{n \times p}$ называется матрица $C = A \cdot B$ размерности $m \times p$, элементы которой

$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ ($i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}$). Т.о., элемент c_{ik} матрицы $A \cdot B$ равен сумме произведений

элементов i -ой строки матрицы A и соответствующих элементов k -го столбца матрицы B .

Схематически правило получения элемента c_{ik} выглядит так:



Пример:
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц:

- 1°. $A \cdot E = E \cdot A = A$;
- 2°. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- 3°. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- 4°. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- 5°. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$, если все указанные суммы и произведения имеют смысл.

Замечание: В отличие от операции умножения чисел, операция умножения матриц обладает следующими особенностями:

- 1) Из существования произведения $A \cdot B$, вообще говоря, не следует существование произведения $B \cdot A$ (см. последний пример).
- 2) Если произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, то не обязательно $A \cdot B = B \cdot A$ (если же равенство выполняется, то матрицы A и B называют *перестановочными*).
- 3) Равенство $A \cdot B = O$ может выполняться и для ненулевых матриц A и B (например, для матриц $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ имеем $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).

Для квадратных матриц с помощью операции умножения можно определить также операцию *возведения в натуральную степень* n :

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n,$$

которая обладает следующими свойствами:

- 1°. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$;
- 2°. $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$.

4) Транспонирование матрицы.

Если в матрице $A_{m \times n}$ заменить каждую строку столбцом с тем же номером, то получится матрица размерности $n \times m$, которая называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A^T .

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Свойства операции транспонирования матриц:

- 1°. $(A^T)^T = A$;
- 2°. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$;
- 3°. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- 4°. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Если квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ совпадает со своей транспонированной, т.е. $A^T = A$, то такая матрица называется *симметрической*. Если же $A^T = -A$, то матрицу A называют *кососимметрической* (у таких матриц все элементы главной диагонали равны нулю).

§2. Определители. Свойства определителей.

I. Основные понятия.

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

Определителем квадратной матрицы 1-го порядка $A = [a_{11}]$ называется число $\det A = a_{11}$.

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схематически правило вычисления определителя 2-го порядка можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Тогда $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$.

Определителем квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Схематически правило вычисления определителя 3-го порядка записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \text{ и называется правилом треугольников (правилом}$$

Саррюса). Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три его отрицательных члена представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Тогда $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (36 - 5 + 0) - (0 - 24 - 4) = 59$.

Рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Определитель

этой матрицы записывается в виде $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и представляет собой сумму $n!$

слагаемых, составленных по определённом правилу из элементов матрицы A . Данное правило малоприспособлено для нахождения определителей порядков выше 3-го. Однако существуют методы, позволяющие свести нахождение таких определителей к нахождению определителей более низких порядков.

Минором элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} . Обозначается M_{ij} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример: Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ $M_{21} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 66$ и $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -23$.

II. Свойства определителей.

Перечислим основные свойства, которыми обладают определители любого порядка (некоторые из них будем пояснять на примере определителей 2-го порядка).

1°. Определитель матрицы не изменится при её транспонировании, т.е. $\det A^T = \det A$.

2°. При перестановке местами двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный.

3°. Определитель с 2-мя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

4°. Общий множитель всех элементов некоторого ряда определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Отсюда также следует, что если все элементы некоторого ряда определителя умножить на некоторое число, то и сам определитель умножится на это число.

5°. Если все элементы некоторого ряда определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6°. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов пропорциональны, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

7°. Если каждый элемент некоторого ряда определителя равен сумме 2-х слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы 2-х определителей, у одного из которых указанный ряд составлен из первых слагаемых, а у другого – из вторых слагаемых, причём остальные элементы совпадают с соответствующими элементами исходного определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

8°. Если к элементам некоторого ряда определителя прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix}.$$

9°. Определитель равен сумме произведений элементов любого его ряда на их алгебраические дополнения, т.е. $\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n})$.

Данные формулы, называемые *формулами Лапласа*, позволяют свести вычисление определителя n -го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$ -го порядка.

10°. Сумма произведений элементов любого ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

11°. Определитель произведения двух квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению определителей этих матриц, т.е.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

12°. Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Тогда $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [\text{раскладываем по элементам 1-й строки}] = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 =$

$$= 3 \cdot 44 - 2 \cdot (-10) + 1 \cdot (-23) = 129.$$

Упражнение: Вычислить определитель из предыдущего примера путём «обнуления» элементов некоторого ряда (с помощью свойства 8° определителей).

§3. Ранг матрицы. Обратная матрица.

I. Элементарные преобразования матрицы.

Пусть A – произвольная матрица. Элемент строки матрицы назовём *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее его, равны нулю.

Матрица A называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой её строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Пример: Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ – ступенчатая, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ – не ступенчатая.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы.
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на ненулевое число.
3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью одного либо нескольких элементарных преобразований (обозначается $A \sim B$).

Можно доказать, что с помощью элементарных преобразований всякая матрица может быть приведена к ступенчатому виду. В дальнейшем будем рассматривать элементарные преобразования только над строками.

II. Ранг матрицы.

Пусть A – матрица размерности $m \times n$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Выделим в ней k строк

и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка. Все такие определители называются *минорами k -го порядка, порождёнными матрицей A* .

Рангом матрицы A (обозначается $r(A)$ или $\text{rang } A$) называется наибольший из порядков порождённых ею миноров, отличных от нуля. Очевидно, что $0 \leq r(A) \leq \min\{m; n\}$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным минором* (их у матрицы может быть несколько).

Пример: Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

• Все миноры 3-го порядка, порождённые матрицей A , равны нулю, т.к. содержат нулевой столбец. Однако имеется минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, стоящий на пересечении 2-й и 3-й строк со 2-м и 4-м столбцами. Поэтому $r(A) = 2$. Кроме указанного, базисным также является минор $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. •

Свойства ранга матрицы:

1°. При транспонировании матрицы её ранг не изменится, т.е. $r(A^T) = r(A)$.

2°. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то её ранг не изменится.

3°. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

4°. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Рассмотрим основные методы нахождения ранга матрицы:

а). *Метод окаймляющих миноров* состоит в следующем:

1). Выбрать произвольным образом минор первого порядка $M_1 \neq 0$ (если ненулевых нет, то $r(A) = 0$).

2). Среди миноров 2-го порядка, содержащих M_1 (*окаймляющих* M_1), выбрать минор $M_2 \neq 0$ (если ненулевых нет, то $r(A) = 1$).

...

к). Вычислить миноры k -го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет или все они равны нулю, то $r(A) = k - 1$. Иначе процесс продолжается.

...

б). *Метод элементарных преобразований* заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. В силу свойств 3° и 4° ранг матрицы A равен количеству ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы.

Пример: Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ методом элементарных преобразований.

• $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Значит, $r(A) = 2$. При этом минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ является одним из базисных миноров матрицы. •

III. Обратная матрица.

Квадратная матрица n -го порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ называется *невырожденной*,

если $\det A \neq 0$. В случае, когда $\det A = 0$, матрица A называется *вырожденной*. Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных невырожденных матриц.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной невырожденной матрицы A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Матрица $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$, элементами которой являются алгебраические

дополнения транспонированной матрицы A^T , называется *присоединённой к матрице A* .

Теорема 1: Если квадратная матрица A – невырожденная, то существует, причём единственная, обратная ей матрица A^{-1} , которая находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*. \quad (1)$$

► Проверим справедливость формулы для случая матрицы 2-го порядка:

Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, причём $\det A \neq 0$. Тогда:

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{bmatrix} = [\text{свойства } 9^\circ \text{ и } 10^\circ \text{ определите-}$$

$$\text{лей (см. §2)}] = \begin{bmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \cdot E, \text{ откуда } A \cdot \left(\frac{1}{\det A} A^* \right) = E. \text{ Аналогично убеждаемся, что}$$

$$\left(\frac{1}{\det A} A^* \right) \cdot A = E. \text{ Отсюда, по определению обратной матрицы, } \frac{1}{\det A} A^* = A^{-1}.$$

Доказательство для матриц произвольного порядка – аналогично. □

Рассмотрим основные методы нахождения обратной матрицы:

а). *Метод присоединённой матрицы* состоит в применении формулы (1).

Упражнение: Проверить, что для невырожденной матрицы $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ обратной является

$$\text{матрица } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

• Находим алгебраические дополнения по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 2) = -4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5.$$

Подставляем полученные значения в выражение для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 5/8 & 3/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/8 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

б). *Метод элементарных преобразований* состоит в следующем: Приписывая справа к квадратной матрице A n -го порядка единичную матрицу той же размерности, получим матрицу $A|E$ размерности $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками полученной матрицы приводим матрицу A к виду единичной матрицы. Справа от неё автоматически получится матрица A^{-1} .

Пример: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ из предыдущего примера.

$$\bullet A|E = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \sim E|A^{-1}, \text{ откуда } A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

§4. Системы линейных алгебраических уравнений.

I. Основные понятия.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, называется система вида

[illegible]

где числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, b_2, \dots, b_m$ – её *свободными членами*.

Решением системы (1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Система (1) называется *совместной*, если она имеет х.б. одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

Если в системе (1) все свободные члены равны нулю, то эта система называется *однородной*, иначе – *неоднородной*.

Матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ называется *матрицей системы*, а матрица

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] - \text{расширенной матрицей системы (1)}.$$

Теорема 1 (Кронекера-Капелли): СЛАУ (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: $r(A) = r(A|B)$. При этом система имеет единственное решение, если $r(A) = r(A|B) = n$, и бесконечное множество решений, если $r(A) = r(A|B) < n$.

Упражнение: Исследовать на совместность систему $\begin{cases} x - y = 2; \\ -2x + 2y = 3. \end{cases}$

Далее рассмотрим основные методы решения СЛАУ.

II. Метод обратной матрицы.

Пусть матрица A системы (1) является квадратной и невырожденной. В этом случае система (1) может быть записана в т.н. *матричной форме*:

$$AX = B, \quad (2)$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – матрица системы, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных,

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Умножим обе части равенства (2) слева на матрицу A^{-1} : $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Учитывая, что $A^{-1}A = E$, получим:

$$X = A^{-1}B. \quad (3)$$

Метод решения СЛАУ с использованием формулы (3) называется *методом обратной матрицы (матричным методом)*.

Пример: Решить методом обратной матрицы систему
$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

- Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу по формуле

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 2) = -4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5.$$

Подставляем полученные значения в выражение для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 5/8 & 3/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/8 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

Находим значения неизвестных, т.е. матрицу-столбец неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 5/8 & 3/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/8 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем ответ $x = 1, y = 2, z = 1$. •

III. Формулы Крамера.

Пусть так же, как и в предыдущем случае, матрица A системы (1) является квадратной и невырожденной. Распишем матричное равенство (3):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{bmatrix},$$

где $\Delta = \det A$.

Из равенства первой и последней матрицы следует, что

$$\begin{cases} x_1 = (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) / \Delta; \\ x_2 = (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) / \Delta; \\ \dots \\ x_n = (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) / \Delta. \end{cases}$$

Но по формуле Лапласа (свойство 9° определителей) $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение

определителя $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ по элементам 1-го столбца, причём сам определитель Δ_1

получается из Δ путём замены 1-го столбца столбцом свободных членов. Итак, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично получаем, что $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где определитель Δ_2 получается из Δ путём замены 2-го столбца столбцом свободных членов. И т.д., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4)$$

называются *формулами Крамера*.

Пример: Решить систему $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$ с помощью формул Крамера.

- Составим главный определитель системы и вычислим его по правилу треугольников

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 2 - (-1 - 12 + 2) = -3 + 11 = 8.$$

Определитель $\Delta \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим теперь три вспомогательных определителя $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Для вычисления Δ_1 заменим 1-й столбец в главном определителе на столбец свободных членов системы, остальные два столбца оставим без изменения

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 2 - (-12 - 4) = 8.$$

Аналогично вычислим два других определителя:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 - (-2 - 12) = 16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 4 - (2 - 2) = 8.$$

Находим значения неизвестных:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1.$$

В итоге получили тот же ответ $x = 1, y = 2, z = 1$. •

Замечание: Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система совместна, но имеет бесконечное множество решений. Если же $\Delta = 0$, но хотя бы один из $\Delta_j \neq 0$, то система несовместна.

Получилось решение $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 2 \end{cases}$ •

б). Если $r(A) = r(A|B) < n$, то получим:

$$A|B \sim \tilde{A}|\tilde{B} = \left[\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right], \text{ где } \tilde{a}_{ii} \neq 0 \ (i = \overline{1, r}).$$

Полученной расширенной матрице $\tilde{A}|\tilde{B}$ соответствует система, равносильная системе (1), причём $r(\tilde{A})=r(A)$, а $r(\tilde{A}|\tilde{B})=r(A|B)$.

Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}, \tilde{b}_{r+2}, \dots, \tilde{b}_m$ не равно нулю, то $r(\tilde{A}) < r(\tilde{A} | \tilde{B})$, и, по теореме Кронекера-Капелли, система (1) несовместна.

Если же $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \dots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1) совместна, и равносильная ей система имеет вид:

[illegible]

Назовём переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$ *базисными*, а переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – *свободными*. В общем случае в качестве базисных выбирают те переменные, для которых соответствующие столбцы ступенчатой матрицы образуют ненулевой определитель.

Придадим свободным переменным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ произвольные значения $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$ и перенесём их в правые части равенств системы (5):

[illegible]

Выражая из последнего уравнения x_r , из предпоследнего — x_{r-1} , и т. д., находим последовательно все базисные переменные. В итоге получим т.н. *общее решение системы* (1), зависящее от $(n-r)$ произвольных постоянных:

$$\{(x_1(t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n), x_2(t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n), \dots, x_r(t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n), t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}\}.$$

Придавая постоянным $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$ конкретные числовые значения, получим всевозможные частные решения системы (1).

Пример:

- Составляем расширенную матрицу и обрабатываем её методом Гаусса:

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -5/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

По полученной матрице делаем заключение:

Система совместная, так как свободные члены в последних двух строках равны 0.

Система неопределённая, так как есть матрица $\begin{pmatrix} -7/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

Базисные переменные x, y . Свободная неизвестная z . Ранг системы $r = 2$.

Ответ можно записать в виде $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}z \\ y = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}z \end{cases}$ или в виде $\begin{cases} y = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ •

V. Однородные системы.

Пусть дана однородная система линейных уравнений:

[illegible]

Поскольку $r(A) = r(A|B)$, то однородная система всегда совместна (имеет тривиальное нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Теорема 2: Однородная система (6) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) < n$.

▷ *Необходимость:* От противного: пусть $r(A) = n$. Тогда, по теореме Кронекера-Капелли, система (6) имеет единственное решение, которое, очевидно, является нулевым.

Достаточность: Пусть $r(A) < n$. Поскольку однородная система совместна всегда, то, по теореме Кронекера-Капелли, система (6) является неопределённой, т.е. имеет и другие (кроме нулевых) решения. □

Следствие: Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

▷ Если матрица системы (6) является квадратной, причём $r(A) = r < n$, то базисным минором является определитель r -го порядка, а все миноры высших порядков (в том числе и минор, совпадающий с определителем матрицы системы) равны нулю. □

Пример: Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 7z = 0, \\ -5x - 2y + 4z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

• Поменяем в расширенной матрице $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -7 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$ системы 1-ю и 3-ю строки местами и

приведём полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

1) Первую строку матрицы переписываем без изменений. Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки – соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-2) .

2) 1-ю и 2-ю строки матрицы переписываем без изменений. Прибавим к элементам 3-й строки соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 1.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3y + 9z = 0, \end{cases}$ равносильную исходной. Пусть переменные x и y –

базисные, а $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) – свободная. Из последнего уравнения системы получаем:

$$y = \frac{-9t}{3} = -3t. \text{ Подставив найденное значение в первое уравнение, получим: } x = -t + 3t = 2t.$$

Ответ: $(2t, -3t, t), t \in \mathbb{R}$. •

§5. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Всякая ненулевая матрица-столбец $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$, для которой существует число λ , т.ч.

$$AX = \lambda X, \quad (1)$$

называется *собственным вектором матрицы A* . При этом число λ называется *собственным значением матрицы A* , соответствующим собственному вектору X .

Равенство (1) можно записать в виде $AX = (\lambda E)X$, откуда $(A - \lambda E)X = 0$. Распишем последнее матричное равенство:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Данное равенство равносильно однородной системе линейных уравнений:

[illegible]

Т.к. нас интересуют только ненулевые решения системы (2), то в силу следствия теоремы 2 из §4 должно выполняться равенство

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (3)$$

которое называется *характеристическим уравнением матрицы A* . Левая часть этого уравнения представляет собой многочлен n -й степени. Каждому его корню λ_0 (собственному значению матрицы A) соответствует собственный вектор, который находится из системы (2) после подстановки в неё вместо λ величины λ_0 .

Свойства собственных значений и собственных векторов матрицы:

1°. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

2°. Собственные значения симметричной матрицы – действительны.

Пример: Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

• Составим характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$:

Поскольку $A - \lambda E = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - \lambda & -1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$, то характеристическое уравнение примет вид: $\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$.

Корни последнего уравнения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$ являются собственными значениями матрицы A .

Для определения собственных векторов матрицы A запишем матричное равенство $(A - \lambda E) \cdot X = O$ в виде системы:
$$\begin{cases} (9 - \lambda) \cdot x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + (5 - \lambda) \cdot x_2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Найдём собственный вектор X_1 , соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$, для чего вместо λ подставим в систему (*) λ_1 :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 - x_2 = 0.$$

Пусть переменная x_2 – базисная, а $x_1 = u$ ($u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) – свободная. Тогда $x_2 = 3u$. Значит, собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 6$, будет вектор $X_1 = \begin{bmatrix} u \\ 3u \end{bmatrix}$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Найдём собственный вектор X_2 , соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 8$, для чего вместо λ подставим в систему (*) λ_2 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Пусть переменная x_2 – базисная, а $x_1 = v$ ($v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) – свободная. Тогда $x_2 = v$. Значит, собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 8$, будет вектор $X_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$, $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ответ: $\lambda_1 = 6$, $X_1 = \begin{bmatrix} u \\ 3u \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 8$, $X_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$, $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. •

§6. Векторы. Линейные операции над векторами.

I. Основные понятия.

В математике и её приложениях различают два вида величин. Величина, которая полностью определяется своим численным значением, называется *скалярной* (длина, масса, температура). Если же для определения величины необходимо задать не только численное значение, но и некоторое направление в пространстве, то такая величина называется *векторной* (скорость, ускорение, сила).

Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ (также векторы обозначаются строчными буквами латинского алфавита, например, $\vec{a}$, $\vec{b}$).

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Длиной, или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$, называется длина отрезка AB (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$). Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* (*нуль-вектором*) и обозначается $\vec{0}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными* (обозначается $\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они параллельны одной прямой. Коллинеарные векторы могут быть *сонаправленными* ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$) или *противоположно направленными* ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* или *ортом*. Единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, называется *ортом вектора* $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^\circ$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными* (обозначают $\vec{a} = \vec{b}$), если они сонаправлены и имеют одинаковые длины. Из этого определения следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе, не нарушая их равенства. Такие векторы называются *свободными* (в отличие от *фиксированных* и *скользящих* векторов, используемых в механике).

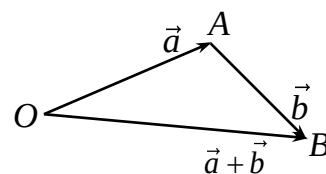
Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол φ , на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$, чтобы он совпал по направлению с вектором $\vec{b}$. Обозначают $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$). При этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен $\frac{\pi}{2}$, называют *ортогональными* и обозначают $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости. Очевидно, что если среди трёх векторов х.б. один – нулевой или любые два – коллинеарны, то такие векторы – компланарны.

II. Линейные операции над векторами.

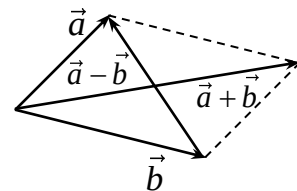
1) Сложение и вычитание векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – заданные векторы. Выберем произвольно точку O и отложим от неё вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. В итоге определится вектор $\overrightarrow{OB}$, который называется *суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* и обозначается $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Данное правило построения суммы векторов называется *правилом треугольника*.



Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Замечание: В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на смежных сторонах, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – их разностью (*правило параллелограмма*).



2) Умножение вектора на число.

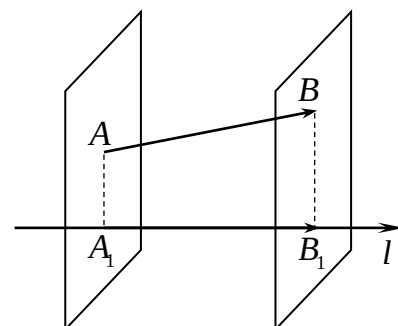
Произведением вектора $\vec{a}$ и числа λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, причём $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$ и $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то, очевидно, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$. Также очевидно равенство $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^\circ$.

Рассмотренные операции (называемые *линейными*) обладают следующими свойствами:

- 1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3°. $\lambda \cdot (\mu\vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$;
- 4°. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- 5°. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

III. Проекция вектора на ось.

Пусть в пространстве заданы некоторая ось l и вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведём через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси l . Пусть эти плоскости пересекают ось соответственно в точках A_1 и B_1 . *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l* называется число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, взятое со знаком «+», если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$, и со знаком «-», если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$. Обозначается $pr_l \overrightarrow{AB}$.



Свойства проекции вектора на ось:

- 1°. $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l \vec{a} + pr_l \vec{b}$;
- 2°. $pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot pr_l \vec{a}$;
- 3°. $pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, l})$.

IV. Базис пространства. Декартова система координат.

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ называются *линейно-зависимыми (ЛЗ)*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, что

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}. \quad (1)$$

Если же равенство (1) выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то эти векторы называются *линейно-независимыми (ЛНЗ)*.

Базисом пространства называется совокупность ЛНЗ векторов, по которым можно единственным образом разложить любой вектор этого пространства. Можно доказать, что базис в трёхмерном пространстве образует любая тройка некопланарных векторов, а на плоскости – любая пара неколлинеарных векторов.

Т.о., если векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – некопланарны, то любой вектор $\vec{a}$ пространства единственным образом разлагается по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3. \quad (2)$$

При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются *координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$* .

Даны векторы $a(1; 2; 3)$, $b(-1; 0; 3)$, $c(2; 1; -1)$ и $d(3; 2; 2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы a, b, c образуют базис и найти координаты вектора d в этом базисе.

Рассмотрим в пространстве *прямоугольную (декартову) систему координат $Oxyz$* – совокупность трёх взаимно перпендикулярных осей Ox, Oy, Oz , называемых *осями координат*, и точки O – *начала координат*. Единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные вдоль осей Ox, Oy, Oz , образуют базис пространства (его называют *ортонормированным базисом*), поэтому каждый вектор $\vec{a}$ можно единственным образом разложить по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \quad (3)$$

где числа a_1, a_2, a_3 являются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Равенство (3) будем кратко записывать в виде $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Можно доказать, что координатами вектора в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются проекции этого вектора на оси координат.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Тогда:

- 1) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;
- 2) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$;
- 3) $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

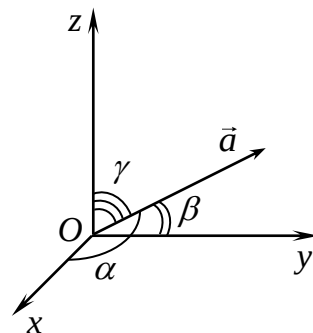
$$4) \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1; \\ a_2 = b_2; \\ a_3 = b_3; \end{cases}$$

$$5) \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \left(\vec{a} = t \cdot \vec{b} \right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Пусть вектор $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ образует с осями Ox , Oy , Oz углы α , β , γ соответственно.

Тогда, по свойству 3° проекции вектора на ось, получим:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_1}{|\vec{a}|}; \\ a_1 &= |\vec{a}| \cos \alpha; \\ a_2 &= |\vec{a}| \cos \beta; \quad \text{откуда} \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \\ a_3 &= |\vec{a}| \cos \gamma; \\ \cos \gamma &= \frac{a_3}{|\vec{a}|}. \end{aligned}$$



Числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$. Эти числа являются координатами орта вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{a}^\circ = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$. При этом имеет место равенство: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Пример. Найти длину вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

$$\bullet |\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 70;$$

$$\cos \alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \quad \cos \beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \quad \cos \gamma = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

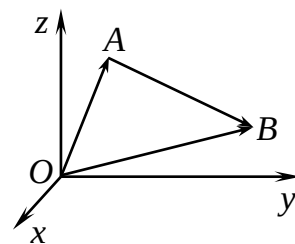
Координатами точки M в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называются координаты вектора $\vec{OM}$.

Найдём координаты вектора $\vec{AB}$, если известны координаты его начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2; y_2; z_2) - (x_1; y_1; z_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

При этом расстояние между точками A и B равно $|\vec{AB}|$, т.е.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Пример. Найти вектор $\vec{a} = \vec{AB}$, если $A(1; 3; 2)$, $B(5; 8; 1)$.

$$\bullet \vec{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \text{где} \quad a_x = 5 - 1 = 4, \quad a_y = 8 - 3 = 5, \quad a_z = 1 - 2 = -1.$$

Значит, $\vec{AB} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

§7. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

I. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (1)$$

Свойства скалярного произведения векторов:

- 1°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{np}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{np}_{\vec{b}} \vec{a}$;
- 3°. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- 4°. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- 5°. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (величину $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ называют скалярным квадратом вектора $\vec{a}$);
- 6°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Пример. Найти скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$ и $\varphi = 60^\circ$.

- По определению скалярного произведения находим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 20$.

Пример. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{a} - \frac{\vec{b} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a})}{\vec{b}^2}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

- Умножая скалярно $\vec{b}$ на $\vec{p}$, получим:

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{b} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a})}{\vec{b}^2} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} \perp \vec{b}.$$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \cdot \vec{k} + a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2 + a_2 b_3 \vec{j} \cdot \vec{k} + a_3 b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k}^2$. Т.к. векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ попарно ортогональны, то $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, т.к. они единичны, то $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$. Т.о.,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (2)$$

Пример: Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (3; -1; 4)$ и $\vec{b} = (1; 2; -5)$.

- По формуле (2) находим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = -19$.

Замечание: Формулу (2) можно применять лишь в случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, в противном случае следует пользоваться общей формулой (1).

Рассмотрим приложения скалярного произведения:

1) Из формулы (1) легко найти угол между векторами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (3)$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

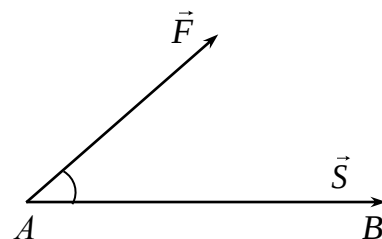
• Согласно формуле (3), $\cos \phi = \frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2}{7}$.

Следовательно, $\phi = \arccos \frac{2}{7}$. •

2) Из свойства 2° следует, что

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (4)$$

3) Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол ϕ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$. Из курса физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{S}$ равна $A = F \cdot S \cdot \cos \phi$, т.е. $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$. Т.о., работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

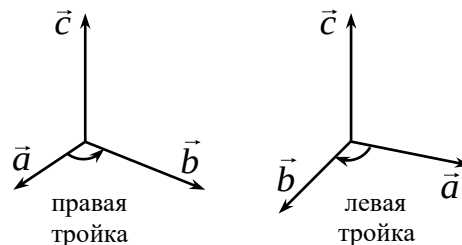


Пример: Вычислить работу равнодействующей сил $\vec{F}_1 = (-4; 1; 2)$, $\vec{F}_2 = (2; 6; -1)$, $\vec{F}_3 = (5; -4; 3)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(-3; 2; 4)$ в точку $M_2(1; 4; 7)$.

• $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3; 3; 4)$, $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (4; 2; 3)$, $\Rightarrow A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 12 + 6 + 12 = 30$. •

II. Векторное произведение векторов.

Говорят, что некопланарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки. Иначе векторы образуют *левую тройку*.



Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий трём условиям:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$;
- 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка.

Свойства векторного произведения векторов:

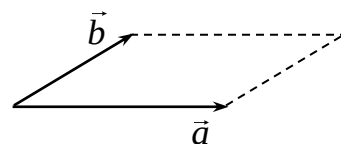
1°. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;

2°. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;

3°. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;

4°. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

5°. число $|\vec{a} \times \vec{b}|$ равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на смежных сторонах.



Пользуясь определением и свойствами векторного произведения, можно доказать, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \quad (5)$$

Пример: Пусть $\vec{a} = (3; -1; 4)$; $\vec{b} = (1; 2; -5)$. Тогда $\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3; 19; 7)$.

Пример. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках: $A(4; 3; 2)$, $B(2; 3; 4)$, $C(1; 1; 1)$.

• Пусть $\vec{a} = \overline{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = \overline{AC} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

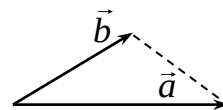
Найдём векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}.$$

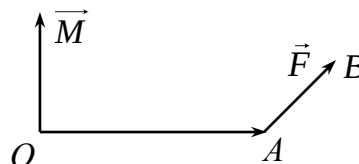
Значит, $S_{\text{пар.}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{16 + 64 + 16} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Рассмотрим приложения векторного произведения:

1) Из свойства 5° следует, что площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, равна $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.



2) Пусть в точке A приложена сила $\vec{F} = \overline{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства. Тогда момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки O находится по формуле: $\vec{M} = \overline{OA} \times \vec{F}$.



Пример. Найти момент силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ относительно точки $A(1; 2; -1)$, если $B(2; -1; 3)$ – точка приложения силы $\vec{F}$.

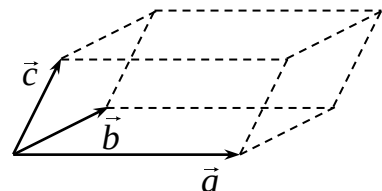
• В нашем случае $\vec{s} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, откуда $\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 11\vec{j} + 11\vec{k} = (-11; 11; 11)$.

III. Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Свойства смешанного произведения векторов:

- 1°. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$;
- 2°. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
- 3°. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны;
- 4°. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V$, где V – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на смежных рёбрах, причём знак «+» соответствует правой тройке векторов, а «-» – левой.



Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

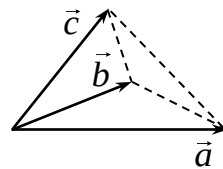
Пример. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

$$\bullet \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 - 1 + 4 + 3 + 2 = 33. \bullet$$

Рассмотрим приложения смешанного произведения:

1) С помощью смешанного произведения легко определить взаимную ориентацию трёх векторов в пространстве: если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то левая, если же $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то векторы компланарны.

2) Из свойства 4° следует, что объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на смежных рёбрах, равен $\frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.



Пример. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(5; 5; 6)$, $B(4; 5; 4)$, $C(4; 3; 3)$, $D(2; 2; 2)$.

Решение: Найдём координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, совпадающих с рёбрами пирамиды, сходящимися в точке A :

$$\overline{AB} = (-1; 0; -2), \quad \overline{AC} = (-1; -2; -3), \quad \overline{AD} = (-3; -3; -4).$$

$$\bullet \text{ Т.к. } V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|, \text{ то } V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-8 - 6 + 12 + 9| = \frac{7}{6} \text{ (куб. ед.)}$$

ГЛАВА IV

Аналитическая геометрия

§1. Прямая на плоскости.

Уравнением кривой на плоскости Oxy называется уравнение вида $F(x; y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки кривой и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой кривой. Переменные x и y в уравнении называются *текущими координатами* точек кривой.

Уравнение кривой позволяет изучение геометрических свойств кривой заменить исследованием её уравнения.

Далее рассмотрим различные способы задания уравнения прямой на плоскости.

1. Виды уравнений прямой на плоскости.

1) Пусть на плоскости Oxy задана некоторая прямая $l \nparallel Oy$. Её положение однозначно определяется точкой $N(0; b)$ пересечения прямой с осью Oy и углом α , который прямая образует с положительным направлением оси Ox . Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка прямой l .

Из $\triangle MNK$ следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y-b}{x}$, откуда $y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x + b$.

Обозначив $k = \operatorname{tg} \alpha$, получим уравнение

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Число k называется *угловым коэффициентом*, а уравнение (1) – *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. / рассмотреть частные случаи /

2) Пусть прямая l с заданным угловым коэффициентом k проходит через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$. Тогда, согласно (1), её уравнение запишется в виде $y = kx + b$, где число b пока неизвестно. Т.к. $M_0 \in l$, то $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$. Подставив b в уравнение (1), получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2)$$

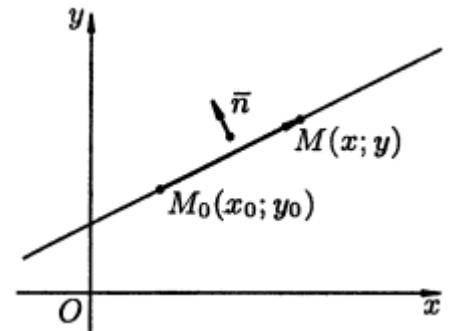
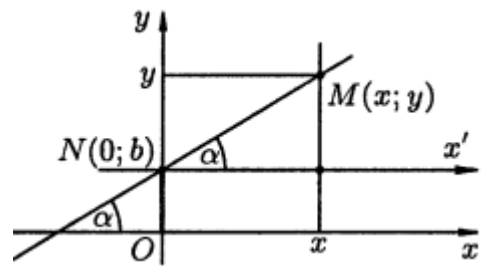
Уравнение (2) называется *уравнением прямой через точку и угловой коэффициент*.

3) Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x; y)$.

Т.к. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0) \perp \vec{n} = (A; B)$, то $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$, т.е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3)$$

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* прямой l , а уравнение (3) – *уравнением прямой через точку и нормальный вектор*.



4) Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x; y)$. Т.к. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0) \parallel \vec{a} = (a_1; a_2)$, то

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \quad (4)$$

Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором прямой l* , а уравнение (4) – *уравнением прямой через точку и направляющий вектор* (или *каноническим уравнением прямой на плоскости*). Если один из знаменателей в (4) обращается в нуль, то это означает, что и соответствующий числитель также равен нулю.

5) Полагая в уравнении (4) $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = t$ и выражая переменные x и y , получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) называются *параметрическими уравнениями прямой l* , а число t – параметром (придавая параметру различные числовые значения, мы будем получать различные точки прямой l)

6) Пусть прямая l проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Т.к. вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ является направляющим для прямой l , то можно воспользоваться каноническим уравнением (4):

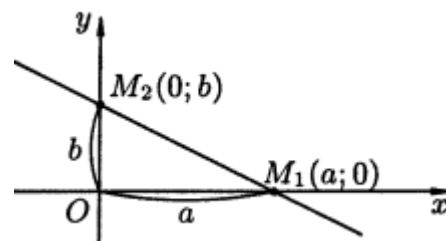
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *уравнением прямой через две точки*.

7) Пусть прямая l , не проходящая через начала координат, пересекает оси координат в точках $M_1(a; 0)$ и $M_2(0; b)$. Тогда,

согласно (6), $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$, откуда получим *уравнение прямой «в отрезках»*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (7)$$



8) Каждое из уравнений (1) – (7) можно привести к виду

$$Ax + By + C = 0, \quad (8)$$

где A, B, C – некоторые числа, причём A и B не равны нулю одновременно.

Уравнение (8) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Как и в случае уравнения (3), вектор $\vec{n} = (A; B)$ является нормальным вектором прямой.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой:

- а) Если $A = 0, B \neq 0$, то уравнение (8) приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$ и определяет прямую, параллельную оси Ox .
- б) Если $B = 0, A \neq 0$, то уравнение (8) приводится к виду $x = -\frac{C}{A}$ и определяет прямую, параллельную оси Oy .
- в) Если $C = 0$, то уравнение примет вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат.

II. Угол между прямыми на плоскости.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$. Найдём угол φ , на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую l_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой l_2 :

По теореме о внешнем угле треугольника $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$, откуда

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1. \text{ Если } \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, а $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, получим:

$$\operatorname{tg}(\hat{l}_1, l_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (9)$$

Замечание: Если требуется найти острый угол между прямыми, то правая часть равенства (9) берётся по модулю.

Если $l_1 \parallel l_2$, то $(\hat{l}_1, l_2) = 0$, откуда $k_1 = k_2$ (условие параллельности прямых на плоскости).

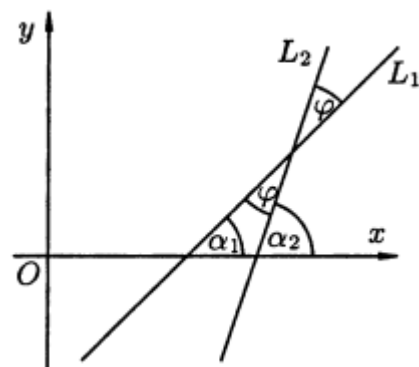
Если $l_1 \perp l_2$, то $(\hat{l}_1, l_2) = \pi/2$, т.е. $\operatorname{tg}(\hat{l}_1, l_2)$ не существует, откуда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т.е. $k_1 \cdot k_2 = -1$ (условие перпендикулярности прямых на плоскости).

Упражнение: Найти острый угол между прямыми $l_1: y = -3x + 7$ и $l_2: y = 2x + 1$.

Пусть теперь две прямые заданы своими общими уравнениями: $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда угол между этими прямыми равен углу между их нормальными векторами, т.е. $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Учитывая, что $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, а $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$, получим:

$$\cos(\hat{l}_1, l_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (10)$$

При этом условие перпендикулярности прямых запишется в виде $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Условие параллельности прямых примет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, а условие их совпадения – $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.



III. Расстояние от точки до прямой.

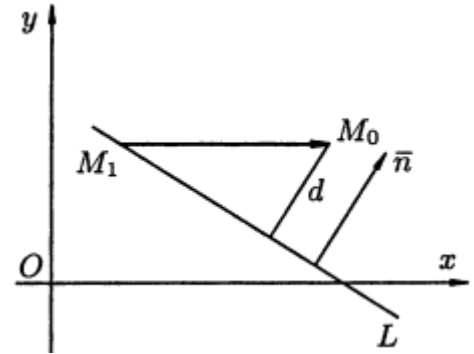
Пусть задана прямая $l: Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$. Найдём расстояние от точки M_0 до прямой l .

Очевидно, что искомое расстояние $d = |np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}|$, где $M_1(x_1; y_1)$ – произвольная точка прямой l . Имеем:

$$d = |np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Поскольку $M_1(x_1; y_1) \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Получаем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (11)$$



Упражнение: Найти высоту трапеции с вершинами в точках $A(-1; 2)$, $B(0; 3)$, $C(1; 5)$, $D(1; 6)$.

§2. Кривые второго порядка.

Кривой II порядка называется множество точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F – некоторые числа, причём A, B, C одновременно не равны нулю. При этом уравнение (1) называется *общим уравнением кривой II порядка*.

Рассмотрим частные случаи кривых II порядка.

I. Эллипс.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через $2a$ (по определению, $2a > 2c$, т.е. $a > c$). Пусть фокусы эллипса расположены в точках $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Если $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, то по определению $F_1M + F_2M = 2a$, откуда

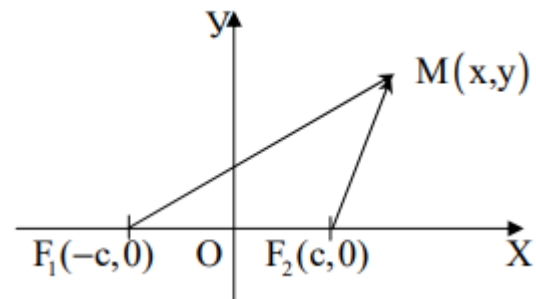
$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a;$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2;$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx;$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$



Т.к. $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Обозначив $a^2 - c^2 = b^2$, получим $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, откуда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *каноническим уравнением эллипса*.

Определим вид полученной кривой по её уравнению. Т.к. уравнение содержит x и y в чётных степенях, то эллипс симметричен относительно осей координат. Полагая поочерёдно $x=0$ и $y=0$, получим точки пересечения эллипса с осями координат: $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$,

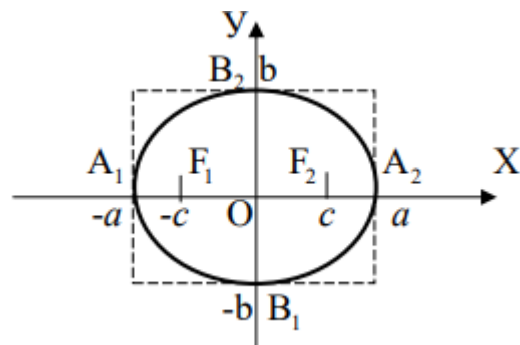
$B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. Из уравнения (2) также следует, что $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, откуда $|x| \leq a$, $|y| \leq b$,

т.е. эллипс расположен внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

Далее, из равенства $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$ следует, что $|x|$ уменьшается при увеличении $|y|$, и наоборот.

Т.о., эллипс имеет следующую форму:

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*, точка $O(0;0)$ – его *центром*. Числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*, а числа $2a$ и $2b$ – его *большой и малой осями*. Прямая, содержащая фокусы, называется *фокальной осью эллипса*.



Замечание: Если в уравнении (2) положить $a=b=R$, то получим уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3)$$

При этом уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ будет иметь вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3')$$

Эксцентриситетом эллипса называется число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ($0 \leq \varepsilon < 1$). При увеличении ε эллипс «сплющивается» к оси Ox , вырождаясь в отрезок при $\varepsilon = 1$. При уменьшении ε эллипс становится менее «сплюсненным», превращаясь в окружность при $\varepsilon = 0$.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса* (2).

Эллипс с полуосями a и b и центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ задаётся уравнением

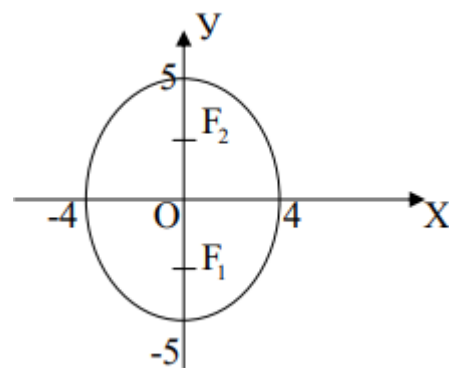
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2')$$

и может быть получен из эллипса (2) параллельным переносом его точек на вектор $\vec{l} = (x_0; y_0)$.

При этом директрисы эллипса (2') задаются уравнениями $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Замечание: Если $a < b$, то уравнение (3) определяет эллипс, большая ось которого лежит на оси Oy , а малая – на оси Ox . Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$,

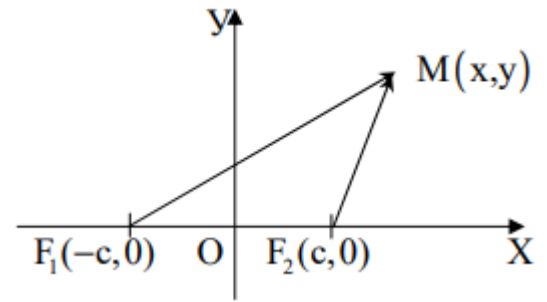
где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Для него эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а уравнения директрис имеют вид $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$. (на рис. – эллипс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$)



Оптическое свойства эллипса: Свет от источника, находящегося в одном из фокусов, отражается от эллипса так, что отражённые лучи пересекаются во втором фокусе.

II. Гипербола.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.



Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов – через $2a$ (по определению, $2a < 2c$, т.е. $a < c$). Пусть фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Взяв произвольную точку $M(x; y)$ гиперболы, получим по определению, что $|F_1M - F_2M| = 2a$. После преобразований, аналогичных выводу уравнения эллипса, получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

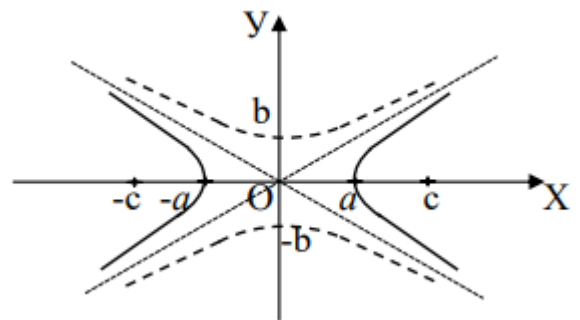
Определим вид кривой. Аналогично эллипсу, гипербола симметрична относительно координатных осей. Полагая $y = 0$, получим точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ пересечения гиперболы с осью Ox . Полагая $x = 0$, получим уравнение $-\frac{y^2}{b^2} = 1$, которое не имеет решений, поэтому

гипербола с осью Oy не пересекается. Из уравнения (4) также следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, откуда $|x| \geq a$, т.е. гипербола расположена вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$. Наконец, из равенства $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$ вытекает, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Можно также доказать, что

гипербола (4) имеет две *асимптоты* с уравнениями $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Т.о., гипербола имеет следующую форму:

Точки A_1, A_2 называются *вершинами гиперболы*, а точка пересечения асимптот – её *центром*. Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями гиперболы*, а числа $2a$ и $2b$ – его *действительной и мнимой осями*. Прямая, содержащая фокусы, называется *фокальной осью гиперболы*.



Эксцентриситетом гиперболы называется число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ ($\varepsilon > 1$). При уменьшении ε гипербола «вытягивается» вдоль действительной оси, а при увеличении – вдоль мнимой (при $\varepsilon = \sqrt{2}$ получаем т.н. *равностороннюю гиперболу* $x^2 - y^2 = a^2$).

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами гиперболы* (4).

Гипербола с полуосями a и b и центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ задаётся уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4')$$

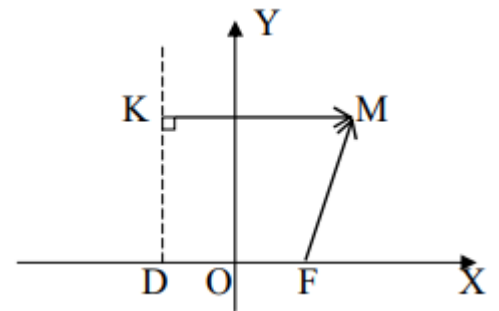
и может быть получена из гиперболы (4) параллельным переносом всех её точек на вектор $\vec{l} = (x_0; y_0)$. Асимптоты такой гиперболы определяются уравнениями $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$, а её директрисы – уравнениями $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Замечание: Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ определяет гиперболу, действительная ось которой расположена на оси Oy , а мнимая – на оси Ox . Эта гипербола называется *сопряжённой* к гиперболе (4). Фокусы такой гиперболы находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$. Её эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а уравнения директрис имеют вид $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.

Оптическое свойства гиперболы: Свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.

III. Парабола.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки F , называемой *фокусом*, и данной прямой d , называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *параметром параболы* и обозначается через p ($p > 0$).



Пусть парабола расположена в прямоугольной системе координат т.о., что её директриса параллельна оси Oy , фокус лежит на положительной полуоси Ox , причём начало координат равноудалено от директрисы и фокуса. Тогда $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, $d: x = -\frac{p}{2}$.

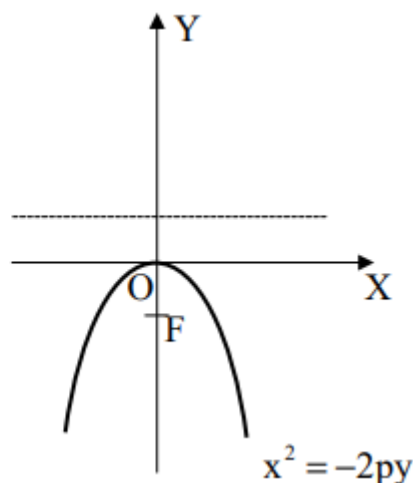
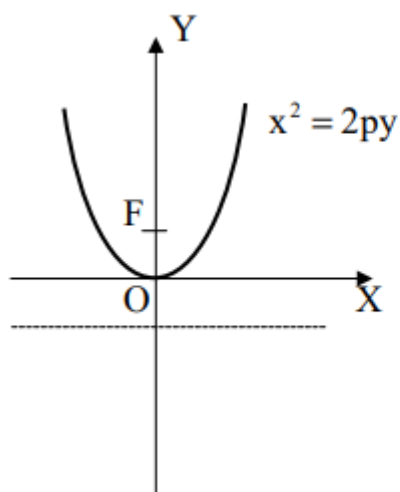
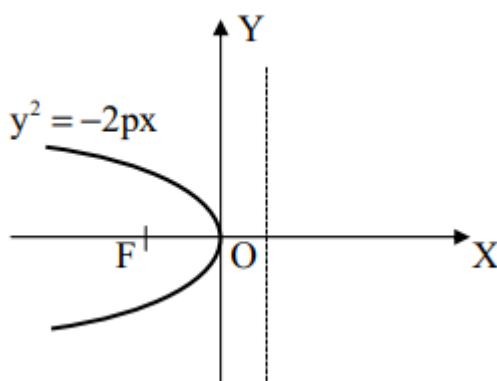
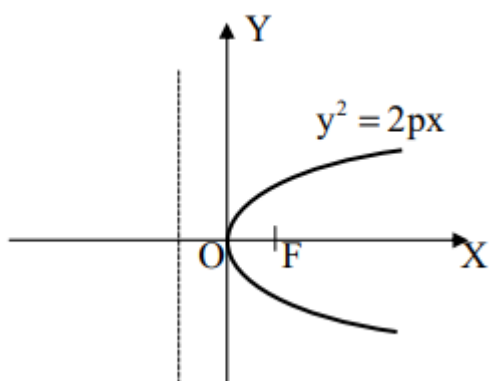
Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка параболы. Тогда из равенства $MF = MN$ получим $\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{\left(-\frac{p}{2} - x\right)^2 + (y - y)^2}$, откуда, после преобразований,

$$y^2 = 2px. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется *каноническим уравнением параболы*.

Т.к. в уравнении (5) $p > 0$, то $x \geq 0$, т.е. парабола расположена справа от оси Oy . При $x = 0$ имеем $y = 0$, т.е. парабола проходит через начало координат. Точка $O(0; 0)$ называется *вершиной параболы*. При неограниченном возрастании x $|y|$ также неограниченно возрастает.

Следующие уравнения также определяют параболы:



Теорема 1 (директориальное свойство кривой второго порядка): Для каждой точки кривой второго порядка отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой есть величина постоянная, равная эксцентриситету: $\varepsilon = 0$ – для окружности; $0 < \varepsilon < 1$ – для эллипса; $\varepsilon = 1$ – для параболы; $\varepsilon > 1$ – для гиперболы.

Теорема 2: Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ определяет:

- окружность, если $A = C$;
- гиперболу, если $A \cdot C < 0$;
- эллипс, если $A \cdot C > 0$;
- параболу, если $A \cdot C = 0$.

При этом возможны также вырожденные случаи (точка, пустое множество, пара параллельных или пересекающихся прямых).

Пример: Установить какая линия определяется уравнением $4x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 109 = 0$. Построить фигуру.

- Выделим полные квадраты:

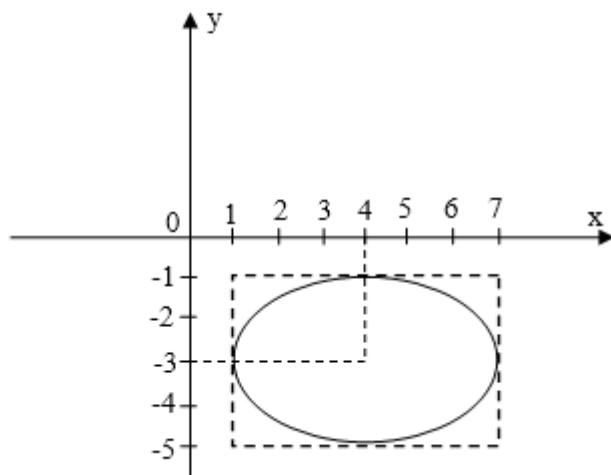
$$4 \cdot (x^2 - 8x) + 9 \cdot (y^2 + 6y) + 109 = 0,$$

$$4 \cdot ((x - 4)^2 - 16) + 9 \cdot ((y + 3)^2 - 9) + 109 = 0,$$

$$4 \cdot (x - 4)^2 - 64 + 9 \cdot (y + 3)^2 - 81 + 109 = 0,$$

$$4 \cdot (x - 4)^2 + 9 \cdot (y + 3)^2 = 36,$$

$$\frac{(x - 4)^2}{3^2} + \frac{(y + 3)^2}{2^2} = 1.$$



Получили уравнение эллипса с полуосями 3 и 2 с центром в точке $M(4; -3)$. •

§3. Плоскость в пространстве.

Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется такое уравнение с тремя переменными $F(x; y; z) = 0$, которому удовлетворяют координаты x , y и z каждой точки поверхности и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей этой поверхности. Переменные x , y , z в уравнении поверхности называются *текущими координатами* точек поверхности.

Простейшей поверхностью является плоскость. В зависимости от способа задания плоскости в пространстве можно рассматривать различные её уравнения.

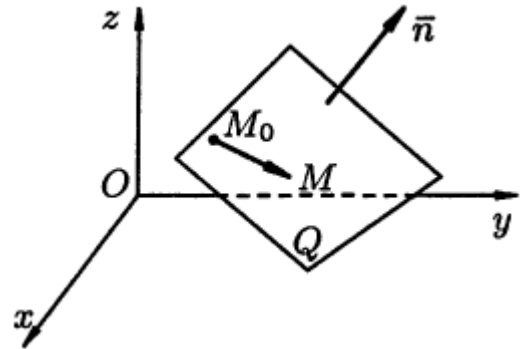
I. Виды уравнений плоскости в пространстве.

1) Пусть задана некоторая плоскость α . Её положение в пространстве $Oxyz$ однозначно определяется точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ плоскости и вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости.

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости α .

Т.к. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \perp \vec{n}$, то $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$, т.е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$



Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором плоскости* α , а уравнение (1) – *уравнением плоскости через точку и нормальный вектор*.

2) Пусть плоскость α проходит через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой. Возьмём на плоскости α произвольную точку $M(x; y; z)$ и образуем векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1); \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1); \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Очевидно, что эти векторы компланарны, откуда, по свойству смешанного произведения векторов, получаем,

что $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *уравнением плоскости через три точки*.

3) Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит плоскости α , а векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ей параллельны, причём $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут компланарными и, аналогично предыдущему пункту, уравнение плоскости α запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

4) Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ лежат в плоскости α , а вектор $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ параллелен этой плоскости, причём $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда векторы $\vec{a}$, $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ будут компланарными и уравнение плоскости α запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

5) Пусть плоскость α , не проходящая через начало координат, пересекает координатные оси в точках $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ и $M_3(0; 0; c)$. Тогда, согласно (2),

уравнение плоскости примет вид
$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или
$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$
 Раскрыв определитель, получим:

$bcx + acy + abz = abc$. Делим на $abc \neq 0$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется *уравнением плоскости «в отрезках»*, т.к. числа $|a|$, $|b|$, $|c|$ – это длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

6) Каждое из уравнений (1) – (5) можно привести к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (6)$$

где A, B, C, D – некоторые числа, причём A, B и C не равны нулю одновременно.

Уравнение (6) называется *общим уравнением плоскости в пространстве*. Как и в случае уравнения (1), вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ является нормальным вектором плоскости.

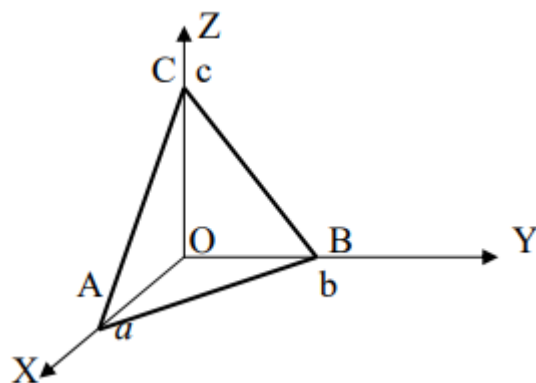
Пример: Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -1, 4)$ и $B(3, 2, -1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

• Вектор $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ параллелен искомой плоскости, причем заданная плоскость имеет вектор нормали $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$. Т.к. точки A и B принадлежат обеим плоскостям, а плоскости

перпендикулярны, то
$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Т.о., вектор нормали $\vec{n}_1 = (11, -7, -2)$. Т.к. A принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. $11 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + D = 0$; $D = -21$.

Итого, получаем уравнение плоскости: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$. •



Рассмотрим частные случаи общего уравнения плоскости:

а). Если $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то уравнение (6) принимает вид $Bu + Cz + D = 0$. В этом случае нормальный вектор $\vec{n} = (0; B; C)$ плоскости α перпендикулярен оси Ox , откуда следует, что $\alpha \parallel Ox$. Аналогично получаем, что при $B = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ $\alpha \parallel Oy$, а при $C = 0, A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$ $\alpha \parallel Oz$.

б). Если $D = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, то уравнение (6) принимает вид $Ax + Bu + Cz = 0$ и определяет плоскость, проходящую через начало координат.

в). Если $A = D = 0, B \neq 0, C \neq 0$, то, согласно предыдущим пунктам, плоскость α проходит через начало координат параллельно оси Ox . Следовательно, плоскость $Bu + Cz = 0$ проходит через ось Ox . Аналогично, уравнения $Ax + Cz = 0$ и $Ax + Bu = 0$ определяют плоскости, проходящие через оси Oy и Oz соответственно.

г). Если $A = B = 0, C \neq 0, D \neq 0$, то уравнение (6) принимает вид $Cz + D = 0$, откуда $z = -\frac{D}{C}$.

Нормальный вектор $\vec{n} = (0; 0; C)$ плоскости α параллелен оси Oz , откуда следует, что плоскость параллельна плоскости Oxy . Аналогично, уравнения $Ax + D = 0$ и $Bu + D = 0$ определяют плоскости, параллельные плоскостям Oyz и Oxz соответственно.

д). Если $A = B = D = 0, C \neq 0$, то уравнение (6) принимает вид $Cz = 0$, или $z = 0$. Это – уравнение плоскости Oxy . Аналогично, $x = 0$ – уравнение плоскости Oyz , $y = 0$ – уравнение плоскости Oxz .

II. Угол между плоскостями.

Пусть две плоскости заданы своими общими уравнениями:

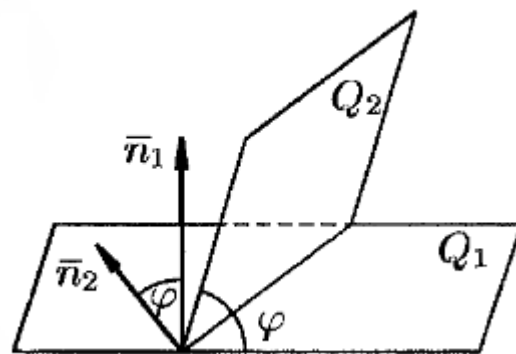
$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Углом между плоскостями называется любой из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Очевидно, угол φ между нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей α и β равен одному из этих углов. Поэтому $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$,

или

$$\cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (7)$$



Замечание: Для нахождения острого угла между плоскостями правую часть формулы (7) следует взять по модулю.

Упражнение: Найти величину острого угла между плоскостями $\alpha: 11x - 8y - 7z + 1 = 0$ и $\beta: 4x - 10y + z - 2 = 0$.

Рассмотрим различные варианты взаимного расположения плоскостей α и β в пространстве:

$$1). \alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

$$2). \alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

$$3). \alpha \text{ пересекает } \beta \Leftrightarrow \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

В частности, из формулы (7) следует, что $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

III. Расстояние от точки до плоскости.

Пусть задана плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Найдём расстояние от точки M_0 до плоскости α :

Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – произвольная точка плоскости α . Тогда, очевидно, $d = |\overrightarrow{np_{\vec{n}} M_1 M_0}| =$

$$= \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

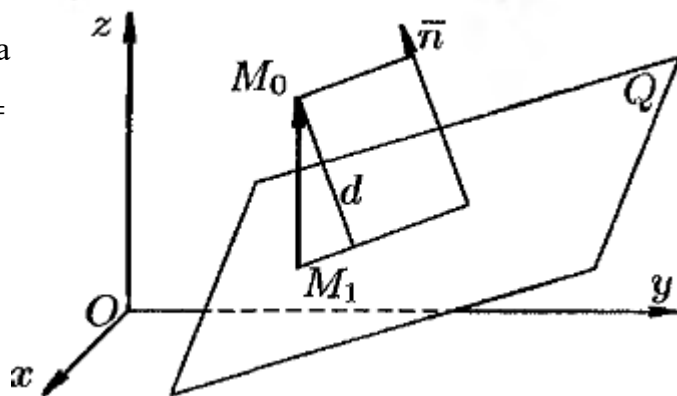
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$M_1(x_1; y_1; z_1) \in \alpha \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (8)$$

Пример: Найти расстояние от начала координат до плоскости $\alpha: x + y + z = 1$.

$$\bullet d = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



§4. Прямая в пространстве.

I. Виды уравнений прямой в пространстве.

1) Пусть в пространстве $Oxyz$ задана некоторая прямая l . Её положение однозначно определяется точкой $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ и вектором $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \parallel l$.

Выберем произвольную точку $M(x; y; z) \in l$. Т.к. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \parallel \vec{a}$, то имеет место равенство $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$, где t – числовой множитель, который может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой. Из равенства двух векторов следует, что $x - x_0 = t \cdot a_1$; $y - y_0 = t \cdot a_2$; $z - z_0 = t \cdot a_3$, откуда

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t; \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \quad (1)$$

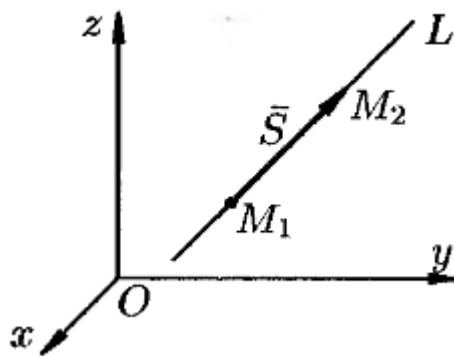
Число t называется *параметром*, а уравнение (1) – *параметрическим уравнением прямой l* . При этом вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором прямой l* .

2). Исключая параметр t из уравнений системы (1), получим:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (2)$$

Уравнения (2) называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

3). Пусть прямая l проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ будет направляющим для прямой l . Согласно (2), получим:



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3)$$

Уравнения (3) называются *уравнениями прямой через две точки*.

4). Пусть заданы две непараллельные плоскости $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

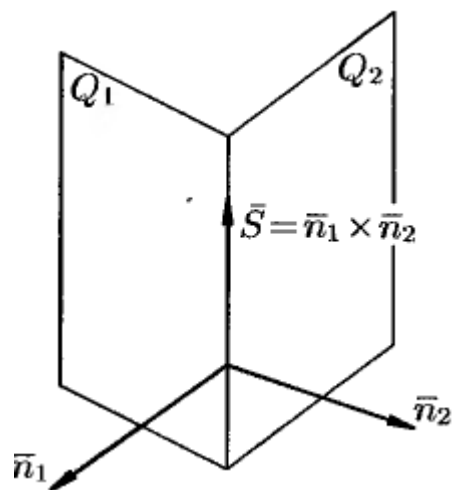
Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Первое уравнение определяет множество точек пространства, принадлежащих плоскости α , второе уравнение – множество точек, принадлежащих плоскости β . Тогда система (4) определяет множество точек, принадлежащих одновременно обеим плоскостям. Поскольку плоскости не параллельны, то этим множеством является некоторая прямая l . Уравнения (4) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

От общих уравнений (4) можно перейти к каноническим уравнениям (2) следующим образом: Координаты точки $M_0 \in l$ получим из системы (4), придав одной из переменных произвольное значение. Т.к. прямая l лежит в обеих плоскостях α и β , то она перпендикулярна их нормальным векторам $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Поэтому в качестве направляющего вектора прямой l можно

взять вектор $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.



Пример: Прямая l задана общими уравнениями: $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0; \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$ Составить её канонические уравнения.

• $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ -2y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z - 1 \\ -2z + 2 + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M_0(0; 2; 3)$. Направляющий вектор прямой: $\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (1; -4; -3)$. Воспользуемся формулой (2): $l: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-3}$.

II. Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве Охуз заданы две прямые:

$$l_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}; \quad l_2: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}.$$

Углом между прямыми l_1 и l_2 называется угол φ между их направляющими векторами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Т.к. $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, то

$$\cos(\hat{l}_1, \hat{l}_2) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (5)$$

Замечание: Для нахождения острого угла между прямыми правую часть формулы (5) следует взять по модулю.

Упражнение: Найти острый угол между прямыми $l_1: \frac{x}{11} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{7}$ и $l_2: \frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$.

Рассмотрим все возможные варианты взаимного расположения прямых

$l_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$ и $l_2: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$ в пространстве:

$$1). l_1 = l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \parallel \vec{b}; \\ \overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{a}, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}; \\ \frac{x_2 - x_1}{a_1} = \frac{y_2 - y_1}{a_2} = \frac{z_2 - z_1}{a_3}. \end{cases}$$

$$2). l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \parallel \vec{b}; \\ \overrightarrow{M_1 M_2} \not\parallel \vec{a}, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}; \\ \frac{x_2 - x_1}{a_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{a_2}; \\ \frac{x_2 - x_1}{a_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{a_3}. \end{cases}$$

$$3). l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1 M_2} - \text{компланарны}; \\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0; \\ \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}; \\ \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_3}{b_3}. \end{cases}$$

$$4). l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1 M_2} - \text{не компланарны, т.е. } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В частности, из формулы (5) вытекает, что $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_3 = 0$.

III. Прямая и плоскость в пространстве.

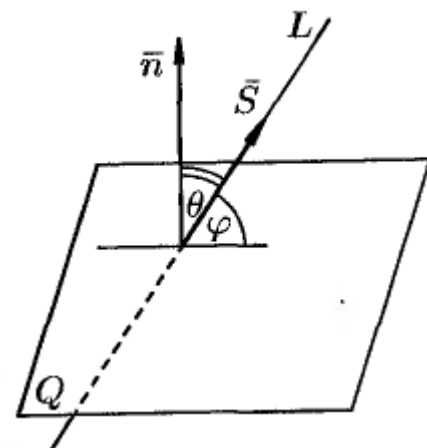
Пусть в пространстве $Oxyz$ заданы плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $l: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$.

Углом между прямой l и плоскостью α называется любой из двух смежных углов, образованных прямой l и её проекцией на плоскость α .

Обозначим через φ угол между плоскостью α и прямой l , а через ψ – угол между векторами $\vec{n} = (A; B; C)$ и

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Тогда $\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \psi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$.

Учитывая, что $\sin \varphi \geq 0$, окончательно получим:



$$\sin(\hat{\alpha}, l) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \quad (6)$$

В частности, $l \perp \alpha$, если $\vec{a} \parallel \vec{n}$, т.е. $\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$.

Рассмотрим все возможные варианты взаимного расположения прямой l и плоскости α :

$$1). l \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n}; \\ M_0 \in \alpha, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

$$2). l \parallel \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n}; \\ M_0 \notin \alpha, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$$

$$3). l \cap \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \not\perp \vec{n}, \text{ т.е. } Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0.$$

В последнем случае можно найти точку M_1 пересечения прямой l и плоскости α . Для этого уравнение прямой запишем в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t; \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$ Выражения в правых

частях этих равенств подставим в уравнение плоскости α вместо x, y, z соответственно:

$$A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0;$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) \cdot t = 0;$$

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) \cdot t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D). \quad (*)$$

Поскольку прямая l и плоскость α пересекаются, то множитель при t отличен от нуля, т.е. $t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$. Подставляя найденное значение в параметрические уравнения прямой,

получим искомую точку пересечения прямой l и плоскости α .

Пример: Найти точку пересечения прямой $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ и плоскости $\alpha: 3x - y + 2z + 5 = 0$.

• Запишем уравнение прямой l в параметрическом виде: $l: \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 2, \\ z = t + 2. \end{cases}$

Подставим правые части этих равенств вместо x, y, z в уравнение плоскости α :

$$3(2t+1) - (t-2) + 2(t+2) + 5 = 0 \Leftrightarrow 7t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения, получим: $x = -3, y = -4, z = 0$.

Значит, прямая l пересекает плоскость α в точке $M(-3; -4; 0)$. •

Замечание: Если в уравнении (*) множитель при t равен нулю и правая часть равна нулю, то уравнение имеет бесконечное множество решений, т.е. $l \subset \alpha$. Если же множитель при t равен нулю, а правая часть не равна нулю, то уравнение решений не имеет, откуда следует, что $l \parallel \alpha$.

ГЛАВА V

Функции нескольких переменных

§1. Функции нескольких переменных.

Предел и непрерывность функции двух переменных.

I. Основные понятия.

Пусть задано некоторое множество D упорядоченных наборов чисел $(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Соответствие f , которое каждому набору чисел $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$, называется *функцией n переменных* и записывается в виде $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. При этом числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *независимыми переменными (аргументами)*, а число z – *зависимой переменной (функцией)*. Множество D называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, принимаемых функцией в области определения, называется *областью значений* этой функции и обозначается $E(f)$.

Примеры:

- 1). Объём V кругового цилиндра есть функция от радиуса R его основания и от его высоты H , т.е. $V(R; H) = \pi R^2 H$ – функция двух переменных.
- 2). Площадь произвольного треугольника есть функция трёх переменных (формула Герона).
- 3). Пусть температура газа, находящегося под поршнем цилиндра, не постоянна. Тогда объём V и давление p газа связаны с его температурой T формулой Клапейрона: $p \cdot V = RT$ ($R = \text{const}$). Отсюда давление можно выразить как функцию от объёма и температуры: $p = \frac{RT}{V}$.

Далее будем рассматривать только функции двух переменных вида $z = f(x; y)$. При этом все полученные результаты естественным образом обобщаются на случай большего числа переменных.

Функцию $z = f(x; y)$ можно рассматривать как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy и записывать $z = f(M)$. Областью определения функции двух переменных м.б. вся плоскость или её часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую множество D , называют *границей множества D* , и обозначают ∂D . Точки множества, не лежащие на границе, называются *внутренними*. Множество, состоящее из одних внутренних точек, называется *открытым*. Множество, полностью содержащее свою границу, называется *замкнутым*.

Геометрический смысл функции двух переменных:

Каждой точке $M_0(x_0; y_0)$ области D в системе координат $Oxyz$ соответствует точка $K(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$ – *аппликата* точки K . Совокупность всех таких точек образует некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию $z = f(x; y)$.

Пример: Найти область определения, область значений функции $f(x; y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и построить её график.

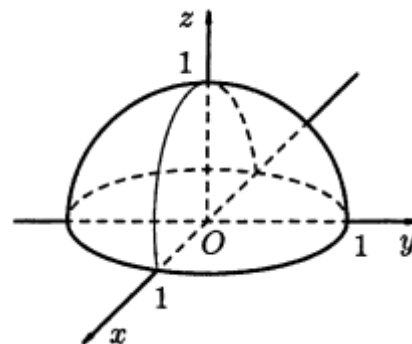
- Из условия неотрицательности подкоренного выражения получаем:

$D(f) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ – круг радиуса $R=1$ с центром в

точке $(0;0)$;

$E(f) = [0;1]$.

Графиком является верхняя полусфера радиуса $R=1$ с центром в начале координат. •



Функция двух переменных может быть задана разными способами – таблицей, аналитически, графиком. Мы будем пользоваться аналитическим способом (когда функция задаётся формулой).

II. Предел и непрерывность функции двух переменных.

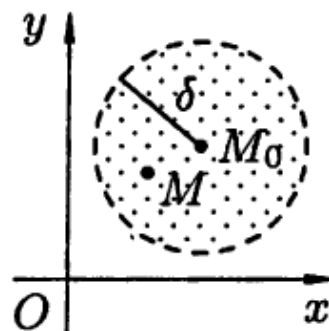
Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, б.м., самой точки M_0 . Число A называется *пределом функции* $f(x; y)$ в точке M_0 , если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq x_0 \forall y \neq y_0 \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x; y) - A| < \varepsilon \right)$. При этом пишут:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y).$$

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, определяет открытый круг с центром в точке M_0 и радиусом δ и называется δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$. Обозначается $U_\delta(M_0)$.

δ -окрестность с исключённым центром называется *проколотой δ -окрестностью* точки $M_0(x_0; y_0)$ и обозначается $\overset{\circ}{U}_\delta(M_0)$.



Т.о., можно дать равносильное определение: Число A называется *пределом функции* $f(x; y)$ в точке M_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \left(|f(M) - A| < \varepsilon \right)$.

Как и в случае функции одной переменной, предел, если он существует, не зависит от пути, по которому точка $M(x; y)$ стремится к точке $M_0(x_0; y_0)$ (таких путей бесконечно много).

Теорема 1: Пусть функции $f(x; y)$ и $g(x; y)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, причём $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x; y) = B$. Тогда:

$$1). \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (C \cdot f(x; y)) = C \cdot A \quad (C = \text{const});$$

$$2). \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x; y) \pm g(x; y)) = A \pm B;$$

$$3). \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x; y) \cdot g(x; y)) = A \cdot B;$$

$$4). \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x; y)}{g(x; y)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0);$$

$$5). \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)^{g(x; y)} = A^B \quad (A > 0).$$

Пример: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} y \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2.$

Пример: Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$

• Пусть точка $M(x; y)$ приближается к точке $O(0; 0)$ по прямой $y = kx$, где k – некоторое число.

Тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$, т.е. зависит от выбора k . Значит, предел не существует. •

Функция $z = f(x; y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0; y_0)$, если выполняются следующие условия:

1). функция определена в точке M_0 и некоторой её окрестности;

2). существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y);$

3). этот предел равен значению функции в точке M_0 , т.е. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$

Функция называется *непрерывной в области* D , если она непрерывна в каждой точке этой области. Точки, в которых непрерывность функции нарушается, называются *точками разрыва* этой функции. При этом точки разрыва могут образовывать целую *линию разрыва*. Например, функция $z = \frac{1}{x - y}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Из непрерывности функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ следует её непрерывность по каждой переменной x и y . Обратное, в.г., не верно.

Пример: Исследовать на непрерывность функцию $z = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x; y) \neq (0; 0), \\ 0, & (x; y) = (0; 0). \end{cases}$

• Для функции z существуют пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$, т.е. функция $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ непрерывна по x и по y в точке $(0; 0)$. Однако мы показали, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не существует.

Поэтому функция z не является непрерывной по совокупности переменных x и y . •

Теорема 2: Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D , то она в этой области ограничена и достигает своих наименьшего и наибольшего значений.

§2. Дифференцирование функции нескольких переменных.

I. Частные производные ф.н.п.

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Т.к. x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение. Дадим переменной x приращение Δx , сохраняя значение y неизменным. Тогда функция z получит приращение, которое называется *частным приращением z по x* и обозначается $\Delta_x z$. Т.о.,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично определяется *частное приращение z по y* :

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменной x* и обозначается одним из символов: z'_x , $\frac{\partial z}{\partial x}$. Частные производные в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначают символами $f'_x(x_0; y_0)$ или $z'_x|_{M_0}$. Аналогично определяется и обозначается *частная производная функции $z = f(x; y)$ по переменной y* :

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

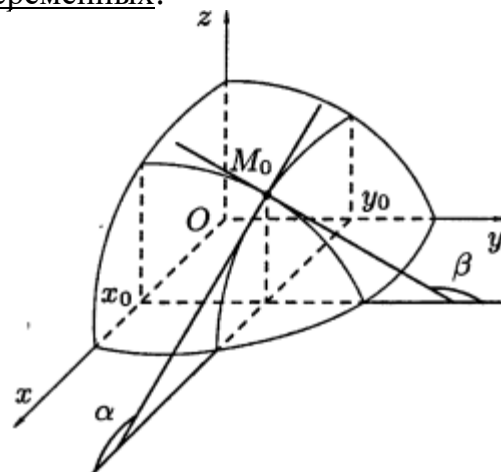
Обобщая данное определение на случай функций произвольного числа переменных, получим, что частная производная ф.н.п. определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные ф.н.п. находят по формулам и правилам дифференцирования функций одной переменной.

Упражнение: Найти частные производные функций:

1) $z = x^3 + 2xy^2 + 4xy - 3y + 1$; 2) $z = x \sin y - e^{x^2 - xy} + \frac{x}{y}$.

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных:

Графиком функции $z = f(x; y)$ является некоторая поверхность. График функции $z = f(x; y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Из геометрического смысла производной функции одной переменной следует, что $f'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной, проведённой к кривой $z = f(x; y_0)$ в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$. Аналогично $f'_y(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \beta$.



Частные производные z'_x и z'_y называют также *частными производными первого порядка*. Т.к. они сами являются функциями двух переменных, то можно говорить об их частных производных. Приняты следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} - \text{частная производная второго порядка по } x;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} - \text{частная производная второго порядка по } y;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} \end{aligned} \right\} - \text{смешанные частные производные второго порядка.}$$

Упражнение: Найти все частные производные второго порядка функций

1) $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$; 2) $z = x \cos(x + y^2)$. / замечаем равенство смешанных производных /

Теорема 1 (теорема Шварца): Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для функции $z = f(x; y)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$.

II. Дифференциалы ф.н.п.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Придадим независимым переменным x и y приращения Δx и Δy соответственно. При этом функция z получит приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y),$$

которое называется *полным приращением функции z в точке M* .

Функция $z = f(x; y)$ называется *дифференцируемой в точке $M(x; y)$* , если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (1)$$

где A и B не зависят от Δx и Δy , $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$, $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве (1) называется *главной частью приращения функции*.

Главная часть приращения функции $z = f(x; y)$, линейная относительно Δx и Δy , называется *полным дифференциалом функции z* и обозначается символом dz : $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называются *частными дифференциалами функции z по x и по y* соответственно. Поскольку для независимых переменных x и y $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то последнее равенство может быть записано в виде:

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \quad (2)$$

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости ф.н.п.): Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные z'_x и z'_y , причём $z'_x = A$, $z'_y = B$.

Т.о., равенство (3) можно записать в виде:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \quad \text{или} \quad dz = d_x z + d_y z, \quad (3)$$

где $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ – частные дифференциалы функции $z = f(x; y)$.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости ф.н.п.): Если функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x; y)$, то она дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал выражается формулой (3).

Замечание. Для функции одной переменной $y = f(x)$ существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием её дифференцируемости в этой точке. Чтобы функция двух переменных $z = f(x; y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в этой точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила вычисления дифференциалов ф.н.п. аналогичны свойствам и правилам вычисления дифференциалов функции одной переменной.

Упражнение: Найти частные и полный дифференциалы функции $z = xe^{xy+y^2}$.

Рассмотрим применение полного дифференциала к приближённым вычислениям:

Из определения полного дифференциала функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ следует, что при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближённое равенство $\Delta z \approx dz$, или $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$.

Отсюда получаем:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y \quad (4)$$

При этом *абсолютная погрешность* Δz вычислений по этой формуле оценивается величиной $\Delta z = |f'_x(x_0; y_0)||\Delta x| + |f'_y(x_0; y_0)||\Delta y|$, а *относительная погрешность* – $\delta_z = \frac{\Delta z}{|z|}$, где z – точное значение величины $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$.

Пример: Вычислить приближённо $1,02^{2,99}$.

• Пусть $f(x; y) = x^y$; $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$, $y_0 = 3$, $\Delta y = -0,01$.

Тогда $f(x_0; y_0) = x^y \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 1$; $f'_x(x_0; y_0) = yx^{y-1} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 3$; $f'_y(x_0; y_0) = x^y \ln x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 0$.

По формуле (4) получаем: $1,02^{2,99} \approx 1 + 3 \cdot 0,02 + 0 \cdot (-0,01) = 1,06$.

Абсолютная погрешность: $\Delta z = |f'_x(x_0; y_0)||\Delta x| + |f'_y(x_0; y_0)||\Delta y| = 1 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,01 = 0,02$.

Относительная погрешность: $\delta_z = \Delta z / |z| \approx 0,02 / 1,06099787 \approx 0,019$, или 1,9 %. •

Полный дифференциал функции называют также *дифференциалом первого порядка*. Введём понятие дифференциалов высших порядков.

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле $d^2z = d(dz)$. Найдём его:

$$d^2z = d(z'_x dx + z'_y dy) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z''_{xx} dx + z''_{yx} dy) dx + (z''_{xy} dx + z''_{yy} dy) dy = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2.$$

Символически равенство $d^2z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2$ записывается в виде:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z. \quad (5)$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z,$$

$$\text{где } \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 \frac{\partial}{\partial y} dy + 3 \frac{\partial}{\partial x} dx \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3.$$

Справедлива следующая формула для дифференциала n -го порядка ($n \in \mathbb{N}$):

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (6)$$

Замечание: Полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные x и y функции $z = f(x; y)$ являются независимыми.

Пример: Найти дифференциал второго порядка функции $z = x^3 y^2$.

• $z'_x = 3x^2 y^2$; $z'_y = 2x^3 y$; $z''_{xx} = 6xy^2$; $z''_{xy} = 6x^2 y$; $z''_{yy} = 2x^3$. Тогда по формуле (5) получим:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 6xy^2 dx^2 + 12x^2 y dx dy + 2x^3 dy^2. \bullet$$

III. Производные сложной и неявной функций.

Пусть $z = f(x; y)$ – функция двух переменных x и y , каждая из которых является функцией независимой переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t); y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t ; переменные x и y при этом называются *промежуточными переменными*.

Теорема 4 (производная сложной функции): Если $z = f(x; y)$ – дифференцируемая в точке $M(x; y)$ функция, а $x = x(t)$, $y = y(t)$ – дифференцируемые функции независимой переменной t , то производная сложной функции $z = f(x(t); y(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (7)$$

Упражнение: Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{x^2+y^2}$, $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$.

Частный случай: Если $z = f(x; y)$, где $y = y(x)$, т.е. $z = f(x; y(x))$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (8)$$

Формула (8) называется *формулой полной производной*.

Общий случай: Если $z = f(x; y)$, где $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, т.е. $z = f(x(u; v); y(u; v))$, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (9)$$

Упражнение: Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Функция $z = f(x; y)$ называется *неявной*, если она задаётся уравнением вида $F(x; y; z) = 0$, неразрешённым относительно z . Полагая $F'_z \neq 0$, найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ такой неявной функции. Имеем: $F(x; y; f(x; y)) = 0$. Дифференцируем это равенство по x и по y :

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x; y; f(x; y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x; y; f(x; y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (10)$$

Упражнение: Найти частные производные функции z , заданной уравнением $e^z + z - x^2y + 1 = 0$.

Замечание: Если функция одной переменной $y = f(x)$ неявно задана уравнением $F(x; y) = 0$, причём $F'_y \neq 0$, то производная этой неявной функции может быть найдена по формуле:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (11)$$

Упражнение: Найти производную функции y , заданной неявно уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

§3. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных.

I. Производная по направлению.

Пусть задана функция трёх переменных $u = f(x; y; z)$, точка $M(x; y; z)$ и некоторый вектор $\vec{\lambda}$, образующий с координатными осями Ox , Oy и Oz углы α , β и γ соответственно. Найдём приращение функции u , возникающее при переходе от точки M к некоторой точке $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$ в направлении вектора $\vec{\lambda}$: $\Delta u = f(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - f(x; y; z)$.

Тогда $\Delta \lambda = |\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Производной от функции $u = f(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$ по направлению $\vec{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|\overrightarrow{MM_1}|}.$$

Производная по направлению $\vec{\lambda}$ характеризует скорость изменения функции u в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} > 0$, то функция u возрастает в направлении $\vec{\lambda}$, а если $\frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} < 0$, то функция u в направлении $\vec{\lambda}$ убывает. Кроме того, величина $\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} \right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции u в направлении $\vec{\lambda}$ в точке M : чем больше $\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} \right|$, тем быстрее изменяется функция. В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Пусть функция $u = f(x; y; z)$ дифференцируема в точке M . Тогда её полное приращение в этой точке запишется в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$.

Т.к. $\Delta x = \Delta \lambda \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta \lambda \cos \beta$, $\Delta z = \Delta \lambda \cos \gamma$, то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta \lambda \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta \lambda \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \Delta \lambda \cos \gamma + \Delta \lambda (\xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \cos \beta + \xi_3 \cos \gamma).$$

Разделим обе части равенства на величину $\Delta \lambda \neq 0$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \cos \beta + \xi_3 \cos \gamma.$$

Перейдём к пределу при $\Delta \lambda \rightarrow 0$, учитывая, что при этом $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1)$$

Пример: Найти производную функции $u = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

• $\vec{\lambda} = \overrightarrow{MM_1} = (2; 2; 1)$; $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$. По формуле (1) получим:
 $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2x \cdot \frac{2}{3} + (2y - 4z) \cdot \frac{2}{3} - 4y \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}z = \frac{4}{3}(x - 2z)$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial \lambda} \Big|_M = \frac{4}{3}(0 - 4) = -\frac{16}{3}$. •

Замечание 1: Производная по направлению не зависит от длины вектора $\vec{\lambda}$.

Замечание 2: Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных: Если $\vec{\lambda} \uparrow \uparrow O_x$, то $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = \cos \gamma = 0$, и поэтому $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично

$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial y}$ при $\vec{\lambda} \uparrow \uparrow O_y$ и $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial z}$ при $\vec{\lambda} \uparrow \uparrow O_z$. Т.о., частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ можно рассматривать как производные от функции u по направлению координатных осей O_x , O_y и O_z соответственно.

Мы получили формулу для вычисления производной по направлению для функции трёх переменных. В случае функции двух переменных $z = f(x; y)$ имеем: $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

Поэтому формула (1) принимает вид:

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha. \quad (2)$$

Упражнение: Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1;2)$ в направлении в направлении вектора $\vec{\lambda}$, образующего угол $\alpha = 45^\circ$ с положительным направлением оси O_x .

II. Градиент и его свойства.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $u = f(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$, называется *градиентом* функции u и обозначается $\text{grad } u$. Т.о.

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Из формул (1) и (3) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \overrightarrow{\lambda^0} \cdot \text{grad } u, \quad (4)$$

где $\overrightarrow{\lambda^0}$ – орт вектора $\vec{\lambda}$.

По определению скалярного произведения двух векторов равенство (4) может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi, \quad (5)$$

где φ – угол между вектором $\text{grad } u$ и направлением $\vec{\lambda}$.

Из формулы (5) следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos \varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Т.о., направление градиента совпадает с направлением $\vec{l}$, вдоль которого функция меняется быстрее всего, т.е. градиент функции указывает направление наискорейшего возрастания функции. При этом наибольшая скорость изменения функции u в точке M равна

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента. Очевидно, наискорейшее убывание функции $u = f(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$ будет происходить в направлении вектора $-\text{grad } u = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}; -\frac{\partial u}{\partial y}; -\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, который называется вектором *антиградиента*.

Свойства градиента:

- 1°. $\text{grad } (u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v$;
- 2°. $\text{grad } (C \cdot u) = C \cdot \text{grad } u \quad (C = \text{const})$;
- 3°. $\text{grad } (u \cdot v) = v \cdot \text{grad } u + u \cdot \text{grad } v$;
- 4°. $\text{grad } \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \text{grad } u - u \cdot \text{grad } v}{v^2}$;
- 5°. $\text{grad } f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad } u$.

Упражнение: Найти наибольшую скорость возрастания функции $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $M(-1; 2; -3)$.

§4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных ф.н.п. Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$. Рассечём поверхность S , изображающую функцию z , плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по кривой $z = f(x_0; y)$. В силу дифференцируемости функции $z = f(x; y)$, в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ можно провести касательную l_1 к кривой $z = f(x_0; y)$ в плоскости $x = x_0$:

$$\begin{cases} z = f(x_0; y_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Аналогичным образом можно построить касательную l_2 к кривой $z = f(x; y_0)$ в плоскости $y = y_0$:

$$\begin{cases} z = f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0); \\ y = y_0. \end{cases}$$

Прямые l_1 и l_2 однозначно определяют плоскость α , которая называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0 . Составим её уравнение:

Обозначим $z_0 = f(x_0; y_0)$. Т.к. $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$, то уравнение плоскости α запишется в виде: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \quad (1)$$

Найдём A_1 и B_1 .

Т.к. $l_1 \subset \alpha$, то $\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0); \\ x = x_0; \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0), \end{cases}$ откуда $B_1 = f'_y(x_0; y_0)$. Аналогично $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$.

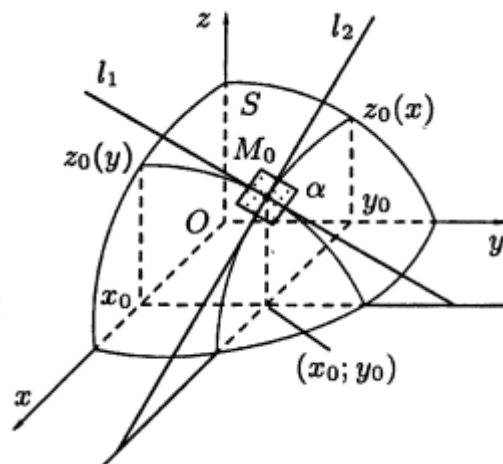
Подставляя A_1 и B_1 в уравнение (1), получим искомое уравнение касательной плоскости:

$$z = f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

Прямая, проходящая через точку M_0 поверхности и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке, называется *нормалью* к поверхности.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, получим канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - f(x_0; y_0)}{-1}. \quad (3)$$



Если поверхность S задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, т.е. функция $z = f(x; y)$ задана неявно, то $f'_x(x_0; y_0) = -\frac{F'_x(x_0; y_0; z_0)}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}$, $f'_y(x_0; y_0) = -\frac{F'_y(x_0; y_0; z_0)}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}$. Формулы (2) и (3) примут вид:

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0. \quad (4)$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует, что нормальным вектором касательной плоскости и направляющим вектором нормали к поверхности $F(x; y; z) = 0$ является вектор градиента функции $u = F(x; y; z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Упражнение: Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1; -1; 2)$.

§5. Экстремум функции нескольких переменных.

I. Основные понятия.

Рассмотрим понятие экстремума для случая функции двух независимых переменных. Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D .

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой локального максимума* функции $z = f(x; y)$, если существует такая δ -окрестность $U_\delta(M_0)$ точки M_0 , что для любой точки $M(x; y)$, отличной от M_0 , в этой окрестности выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$, т.е.

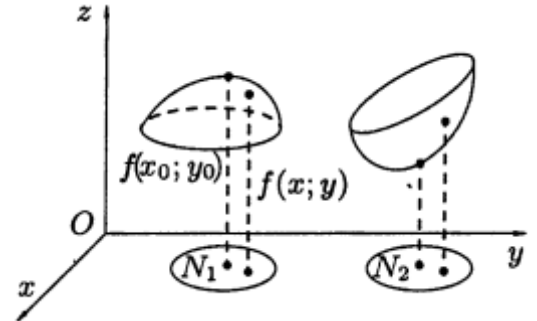
$$\exists U_\delta(M_0) \quad \forall M \in U_\delta(M_0) \quad (M \neq M_0 \Rightarrow f(M) < f(M_0))$$

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке локального максимума называется *локальным максимумом функции*.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой локального минимума* функции $z = f(x; y)$, если $\exists U_\delta(M_0) \quad \forall M \in U_\delta(M_0) \quad (M \neq M_0 \Rightarrow f(M) > f(M_0))$.

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке локального минимума называется *локальным минимумом функции*.

Точки локального максимума и минимума функции $z = f(x; y)$ называют *точками локального экстремума*, а значения функции в этих точках – *локальными экстремумами функции*. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.



II. Необходимые и достаточные условия экстремума.

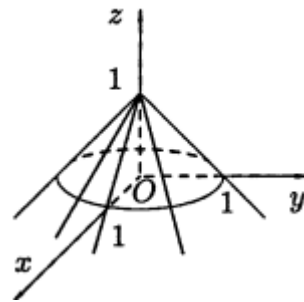
Рассмотрим условия существования экстремума функции двух переменных.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума): Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

▷ Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию $z = f(x; y_0) = \varphi(x)$. Т.к. эта функция имеет экстремум при $x = x_0$, то $\varphi'(x_0) = 0$, откуда $f'_x(x_0; y_0) = 0$. Аналогично доказывается, что $f'_y(x_0; y_0) = 0$. □

Геометрически равенства $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x; y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию, параллельна плоскости Oxy , т.к. уравнение касательной плоскости принимает вид $z = f(x_0; y_0)$.

Замечание: Функция может иметь экстремум в точках, где х.б. одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет локальный минимум в точке $O(0;0)$, но не имеет в этой точке частных производных.



Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, называются *стационарными точками* функции z . Стационарные точки и точки, в которых х.б. одна из частных производных не существует, называются *критическими точками* функции z .

Пример: Единственной критической точкой функции $z = xy$ является точка $O(0;0)$. Однако эта точка не является точкой экстремума функции z , т.к. в любой её окрестности функция z принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Т.о., для нахождения экстремумов функции необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума): Пусть в стационарной точке $M_0(x_0; y_0)$ и некоторой её окрестности функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \text{ Тогда:}$$

- 1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 имеет экстремум, а именно, максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$;
- 2) если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 экстремума не имеет.

Замечание: В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример: Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^3 - 3xy^2$.

• $z'_x = 4x^3 - 3y^2$, $z'_y = 3y^2 - 6xy$. $M(3;6)$, $O(0;0)$ – стационарные точки. В точке M $\Delta = 648$, $A = 18$, поэтому в точке M функция имеет локальный минимум, равный $z_{\min} = z(M) = -27$. В точке O $\Delta = 0$, поэтому нужны дополнительные исследования. При $x = 0$ $z = y^3$, поэтому в любой сколь угодно малой окрестности точки $O(0;0)$ функция z может принимать значения разных знаков. Следовательно, экстремума в этой точке нет. •

Замечание: Теоремы 1 и 2 естественным образом обобщаются и на случай функции большего числа переменных $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. В этом случае $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M_0)$ ($i, j = \overline{1, n}$),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

III. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса, она достигает на этом множестве своих наименьшего значения m и наибольшего значения M . Эти значения (т.н. *глобальные экстремумы*) функция принимает внутри множества $\bar{D}$ либо на его границе.

Сформулируем правило нахождения наименьшего и наибольшего значений дифференцируемой функции $z = f(x; y)$ на множестве $\bar{D}$:

- 1). Находим все критические точки, лежащие внутри множества $\bar{D}$, и вычисляем значения функции в этих точках.
- 2). Находим наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ на границе области $\bar{D}$.
- 3). Сравниваем все найденные значения функции и выбираем среди них наименьшее m и наибольшее M .

Пример: Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2y(2 - x - y)$ в замкнутой области $\bar{D}$, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

• Область является треугольником с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(6;0)$, $B(0;6)$.

- 1). Находим частные производные: $z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2$; $z'_y = 2x^2 - x^3 - 3xy^2$.

Находим стационарные точки функции z , лежащие внутри треугольника OAB ($x > 0$, $y > 0$):

$$\begin{cases} 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0 \\ 2x^2 - x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy(4 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(2 - x - 2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Т.о., получили единственную стационарную точку $M\left(1; \frac{1}{2}\right) \in \bar{D}$.

Вычисляем значение функции в этой точке: $z(M) = \frac{1}{4}$.

- 2). Исследуем поведение функции на границе области $\bar{D}$:

На сторонах треугольника AO и BO значения функции z равны нулю. Найдём наименьшее и наибольшее значения функции на стороне AB : $x + y = 6$:

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x \in [0; 6] \end{cases} \Rightarrow z = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x).$$

Функция, заданная на отрезке, принимает на нём наименьшее или наибольшее значения либо в критических точках внутри соответствующего интервала, либо на концах отрезка.

$$z'(x) = -48x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 4 \in (0; 6).$$

$$z(4) = -128; \quad z(0) = 0; \quad z(6) = 0.$$

- 3). Т.о., глобальный экстремум функции z в области $\bar{D}$ нужно искать среди значений

$$z = \frac{1}{4}, \quad z = 0, \quad z = -128.$$

Наибольшее значение, равное $\frac{1}{4}$, функция z принимает во внутренней точке $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$, а наименьшее значение, равное -128 , на границе области, в точке $K(4; 2)$. •

IV. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Поставим задачу найти экстремум функции $z = f(x; y)$ в области D при условии, что переменные x и y связаны зависимостью $\varphi(x; y) = 0$. Такой экстремум называется *условным*, а уравнение $\varphi(x; y) = 0$ называется *уравнением связи*.

Если из уравнения связи можно выразить y как функцию переменной x , т.е. $y = \psi(x)$, то, подставив вместо y функцию $\psi(x)$, получим функцию одной переменной $z = f(x; \psi(x))$. В этом случае задача нахождения условного экстремума функции двух переменных сводится к задаче нахождения экстремума функции одной переменной.

Решим поставленную задачу, не разрешая уравнение связи относительно одной из переменных:

Найдём полную производную $\frac{dz}{dx}$, учитывая, что y есть функция от x : $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1)$$

Продифференцировав уравнение связи по x , получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2)$$

Умножим уравнение (2) на неизвестное пока число λ и сложим его с уравнением (1):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

Подберём число λ т.ч. вторая скобка в равенстве (3) обращалась в нуль: $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Тогда из

равенства (3) следует, что и $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$.

Т.о., для определения точек условного экстремума получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Введём вспомогательную функцию:

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \varphi(x; y), \quad (5)$$

При этом система (4) примет вид:

$$\begin{cases} F'_x(x; y; \lambda) = 0; \\ F'_y(x; y; \lambda) = 0; \\ F'_\lambda(x; y; \lambda) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Функция (5) называется *функцией Лагранжа*, а число λ – *множителем Лагранжа*.

Т.о., чтобы найти значения x и y , удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$, при которых функция $z = f(x; y)$ может иметь экстремум, нужно составить функцию Лагранжа (5), приравнять все её частные производные к нулю и из полученной системы найти неизвестные x и y .

Пример: Найти экстремум функции $z = x + 2y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 5$.

- Составляем функцию Лагранжа: $F(x; y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

$$\text{Система (6) принимает вид: } \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 2 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 5 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 2 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 5 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}; \\ x = 1; \\ y = 2; \\ \lambda = \frac{1}{2}; \\ x = -1; \\ y = -2. \end{cases}$$

Значит, функция $z = x + 2y$ имеет две критические точки: $M_1(1; 2)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $M_2(-1; -2)$ при $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. При этом значения $z(M_1) = 5$ и $z(M_2) = -5$ являются соответственно условным максимумом и условным минимумом функции z . •

ГЛАВА VI

Интегральное исчисление функций одной переменной

§1. Первообразная функции. Неопределённый интеграл и его свойства.

I. Первообразная функции.

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции найти её производную или дифференциал. Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $f(x) = F'(x)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если она дифференцируема на этом интервале, причём $\forall x \in (a;b) \ (F'(x) = f(x))$.

Пример: Функция $F(x) = \frac{x^2}{2}$ является первообразной функции $f(x) = x$ на $\mathbb{R}$, поскольку

$\forall x \in \mathbb{R} \left(\left(\frac{x^2}{2} \right)' = x \right)$. Очевидно, однако, что функции $\frac{x^2}{2} + 1$, $\frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$, ... также являются

первообразными функции $f(x) = x$ на $\mathbb{R}$, т.е. операция, обратная дифференцированию, уже не является однозначной.

Теорема 1: Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Тогда всякая другая первообразная этой функции задаётся формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

▷ Функция $F(x) + C$ является первообразной функции $f(x)$, т.к. $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$. Пусть $\Phi(x)$ – некоторая другая первообразная функции $f(x)$.

Тогда $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, откуда, по следствию теоремы Лагранжа, $\Phi(x) - F(x) = C$ на интервале $(a;b)$. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. □

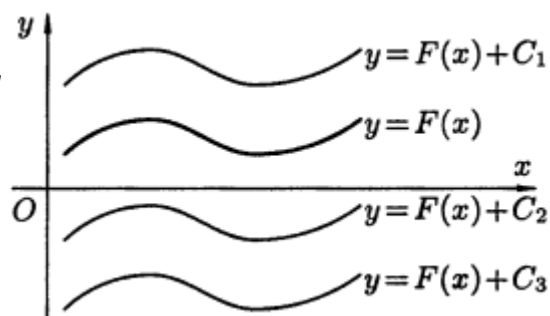
Можно доказать, что если функция непрерывна на некотором интервале, то у неё существует первообразная на этом интервале.

II. Неопределённый интеграл и его свойства.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x) dx$. Из теоремы 1 следует, что если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x) dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная (правильней было бы правую часть равенства заключить в фигурные скобки). Т.о., неопределённый интеграл функции представляет собой общий вид первообразных этой функции. Придавая величине C то или иное значение, мы можем получить из неопределённого интеграла любую первообразную.

Знак $\int$ называют *знаком неопределённого интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x) dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*. Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределённый интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому значению постоянной C соответствует отдельная кривая семейства).



Свойства неопределённого интеграла:

1°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

▷ Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, откуда $\int dF(x) = \int f(x)dx$. □

2°. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3°. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

4°. $\int a f(x)dx = a \int f(x)dx$ ($a = \text{const}$).

▷ $\int a f(x)dx = \int a F'(x)dx = \int (a F(x))' dx = \int d(a F(x)) = a F(x) + C = a \left(F(x) + \frac{C}{a}\right) = a \int f(x)dx$. □

5°. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

▷ Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная функции $g(x)$. Тогда:
 $\int (f(x) + g(x))dx = \int (F'(x) + G'(x))dx = \int (F(x) + G(x))' dx = \int d(F(x) + G(x)) = F(x) + G(x) + C =$
 $= (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, где $C = C_1 + C_2$. □

6°. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для произвольной функции $u = \varphi(x)$, имеющей непрерывную производную, $\int f(u)du = F(u) + C$.

▷ Пусть x – независимая переменная, $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – её первообразная. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$. Положим $u = \varphi(x)$ и рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Имеем: $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$, откуда $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$ □

Замечания:

1) В силу свойства 3° правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Например, равенство $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ верно, поскольку $\left(\frac{1}{2} \sin 2x + C\right)' = \cos 2x$.

2) Из свойства 6° следует, что формула для неопределённого интеграла остаётся справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или некоторой дифференцируемой функцией.

III. Таблица основных неопределённых интегралов.

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных неопределённых интегралов, обращая формулы из таблицы производных и пользуясь свойствами неопределённого интеграла:

$$1) \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$2) \int du = u + C;$$

$$3) \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$$

$$4) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$5) \int e^u du = e^u + C;$$

$$6) \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$7) \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$8) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$$

$$9) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$10) \int \operatorname{sh} u dx = \operatorname{ch} u + C;$$

$$11) \int \operatorname{ch} u dx = \operatorname{sh} u + C;$$

$$12) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C;$$

$$14) \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$15) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$$

$$16) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$17) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

/ символ «u» может обозначать как независимую переменную, так и некоторую функцию /

Замечание: Операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к функциям элементарным. Операция интегрирования уже может привести к *неэлементарным функциям*, т.е. к функциям, которые не могут быть получены из элементарных с помощью конечного числа арифметических операций и композиций.

Например, доказано, что следующие неопределённые интегралы не выражаются через элементарные функции:

$$\int e^{-x^2} dx - \text{интеграл Пуассона};$$

$$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx - \text{интегралы Френеля};$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} - \text{интегральный логарифм};$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx - \text{интегральный синус};$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральный косинус}.$$

§2. Основные методы интегрирования.

I. Непосредственное интегрирование.

Этот метод состоит в том, что заданный интеграл путём тождественных преобразований подынтегрального выражения и применения свойств неопределённого интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

При сведении заданного интеграла к табличному часто используется следующая формула: $f'(u)du = d(f(u))$ (операция «поднесения» под знак дифференциала).

В частности, $du = d(u + b)$; $du = \frac{1}{a} d(au)$; $du = \frac{1}{a} d(au + b)$;

$$u du = \frac{1}{2} d(u^2); \quad \cos u \, du = d(\sin u); \quad \frac{1}{u} du = d(\ln u);$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u); \quad \frac{1}{1+u^2} du = d(\operatorname{arctg} u); \quad \dots$$

Примеры: 1) $\int (3x+8)^{50} dx = \frac{1}{3} \int (3x+8)^{50} d(3x+8) = \frac{(3x+8)^{51}}{51} + C$;

2) $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

II. Замена переменной.

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в неопределённом интеграле $\int f(x) dx$ можно перейти к новой переменной t : $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$, затем найти полученный интеграл (если это возможно) и вернуться к исходной переменной x .
Формула

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (1)$$

называется *формулой замены переменной* в неопределённом интеграле.

Если подынтегральная функция может быть приведена к виду $f(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$, то целесообразно сделать подстановку $t = \psi(x)$. Получим ещё одну формулу замены переменной:

$$\int f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dt = \int f(t) dt. \quad (2)$$

Т.о., формулу (1) можно применять и справа налево (естественно, интегралы при этом должны упрощаться).

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

- Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\text{Тогда } \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C. \bullet$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

- Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C. \bullet$$

Замечание: Поднесение под знак дифференциала является частным случаем замены переменной, т.к. выполняются те же действия, только не вводится новая переменная.

III. Интегрирование по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Тогда $d(uv) = u dv + v du$. Интегрируя это равенство, получим: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$. Отсюда:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

Формула (3) называется *формулой интегрирования по частям*. Она даёт возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный. Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение представляется определённым образом в виде произведения двух сомножителей – u и dv . Затем, после нахождения v и du , применяется формула (3). Иногда её приходится применять несколько раз.

Рассмотрим наиболее типичные случаи, когда целесообразно применять интегрирование по частям:

1) $\int P_n(x) \cdot a^{kx+b} dx$, $\int P_n(x) \cdot \sin(kx+b) dx$, $\int P_n(x) \cdot \cos(kx+b) dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , a, k, b – некоторые числа. В этом случае полагают $u = P_n(x)$.

2) $\int P_n(x) \cdot \log_a(kx+b) dx$, $\int P_n(x) \cdot \arcsin(kx+b) dx$, $\int P_n(x) \cdot \arccos(kx+b) dx$, $\int P_n(x) \cdot \operatorname{arctg}(kx+b) dx$, $\int P_n(x) \cdot \operatorname{arcctg}(kx+b) dx$. В этом случае полагают $dv = P_n(x) dx$.

3) $\int a^{kx+b} \cdot \sin(cx+d) dx$, $\int a^{kx+b} \cdot \cos(cx+d) dx$. В этом случае обычно полагают $u = a^{kx+b}$.

Пример. Найти $\int x^2 \sin x dx$.

$$\begin{aligned} \bullet \int x^2 \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int \sin x dx] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \bullet \end{aligned}$$

Пример. Найти $\int e^{2x} \cos x dx$.

$$\bullet \int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \cdot \int = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x), \text{ откуда } \int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C. \bullet$$

Замечание: Т.к. характер первообразной для подынтегральных функций 1-го типа легко угадывается, то эти интегралы можно находить т.н. *методом неопределённых коэффициентов*.

В частности, $\int P_n(x) \cdot e^{kx+b} dx = Q_n(x) \cdot e^{kx+b} + C$, откуда $(Q_n(x) \cdot e^{kx+b})' = P_n(x) \cdot e^{kx+b}$. После упрощения получим $Q_n'(x) + kQ_n(x) = P_n(x)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , мы найдём неизвестную функцию $Q_n(x)$.

Пример: $\int (x^2+1)e^x dx = (Ax^2 + Bx + D)e^x + C = (x^2 - 2x + 3)e^x + C$.

Пример. Найти $\int x \ln x dx$.

$$\bullet \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C. \bullet$$

Пример. Найти $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

$$\bullet \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = \frac{1}{x^3} dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{2x^2}; \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций.

I. Основные понятия.

Многочленом n -й степени называется функция вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{0, n}$), причём $a_n \neq 0$.

Теорема 1: Всякий многочлен вида (1) может быть представлен в виде:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \dots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_r$ — его действительные корни кратностей соответственно $k_1, k_2, \dots, k_r$, а квадратные трёхчлены не имеют действительных корней.

Примеры:

$$1) x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1);$$

$$2) x^4 + 1 = ((x^2)^2 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1);$$

$$3) x^4 - 99x^3 + 98x^2 = x^2(x^2 - 99x + 98) = x^2(x - 1)(x - 98).$$

Рациональной дробью называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. функция вида

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad (2)$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m , а $Q_n(x)$ — многочлен степени n .

Рациональная дробь называется *правильной*, если $m < n$, и *неправильной*, если $m \geq n$.

Теорема 2: Всякая неправильная рациональная дробь вида (2) может быть представлена в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_{m-n}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_n(x)},$$

где $L_{m-n}(x), R_l(x)$ — многочлены, причём $l < n$.

Пример: Дробь $\frac{x^3 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная.

Разделим числитель на знаменатель «уголком»:

$$\text{Получаем: } \frac{x^3 - 5x + 9}{x - 2} = \frac{(x^2 + 2x - 1)(x - 2) + 7}{x - 2} = x^2 + 2x - 1 + \frac{7}{x - 2}.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x + 9 & x - 2 \\ x^3 - 2x^2 & \hline 2x^2 - 5x + 9 & \\ 2x^2 - 4x & \\ \hline -x + 9 & \\ -x + 2 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

II. Интегрирование простейших дробей.

Правильные рациональные дроби вида

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{A}{x-a}; & \text{(II)} \quad & \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2); \\ \text{(III)} \quad & \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (p^2-4q < 0); & \text{(IV)} \quad & \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (p^2-4q < 0; k \geq 2), \end{aligned}$$

где $A, M, N, a, p, q \in \mathbb{R}$, а $k \in \mathbb{N}$, называются *простейшими рациональными дробями* соответственно I, II, III и IV типов.

Найдём интегралы от простейших рациональных дробей:

(I), (II) – элементарное «поднесение» под знак дифференциала или замена переменной.

Пример: $\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$

$$\begin{aligned} \text{(III): } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} dx = \left[\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{array} \right] = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} dt = M \int \frac{t dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \\ &+ \left(N-\frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \left[q-\frac{p^2}{4} > 0\right] = \frac{M}{2} \int \frac{d\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln\left|t^2+q-\frac{p^2}{4}\right| + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C = \frac{M}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C. \end{aligned}$$

Пример: Найти $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx &= \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=6x-5; \quad du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\ &= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C. \end{aligned}$$

Замечание: Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ дискриминант $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+3; \quad du = dx; \\ x = u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} - 18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C.$$

(IV): Интегрирование простейшей дроби IV типа подобным образом сводится к вычислению интеграла $J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$, для которого справедливо рекуррентное соотношение:

$$J_k = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right). \quad (3)$$

Пример:.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx &= \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du = \\ &= 3 \int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] = \\ &= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

III. Интегрирование рациональных дробей.

Теорема 3: Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой разложен на

множители $Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots (x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$, можно представить, причём единственным образом, в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \left\{ \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} \right\} + \dots + \left\{ \frac{B_1}{x-x_r} + \frac{B_2}{(x-x_r)^2} + \dots + \frac{B_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} \right\} + \dots + \\ &+ \left\{ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}} \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $A_1, \dots, N_{s_m}$ – некоторые действительные числа (их количество равно степени знаменателя).

Для нахождения коэффициентов $A_1, \dots, N_{s_m}$ в равенстве (4) его правую часть приводят к общему знаменателю. В результате получается равенство вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{S_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$, где $S_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределёнными коэффициентами. Т.к. в этом тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители: $P_m(x) \equiv S_{n-1}(x)$. Далее используется один из следующих методов:

Метод сравнения коэффициентов: Приравнявая в тождестве $P_m(x) \equiv S_{n-1}(x)$ коэффициенты при одинаковых степенях переменной x слева и справа, получаем систему линейных уравнений, из которой и находим $A_1, \dots, N_{s_m}$.

Метод частных значений: В тождестве $P_m(x) \equiv S_{n-1}(x)$ придаём аргументу x числовые значения столько раз, сколько неопределённых коэффициентов (в качестве таких значений обычно выбирают действительные корни многочлена $Q_n(x)$). Полученная система линейных уравнений, как правило, имеет простой вид. Этот метод можно комбинировать с предыдущим.

Пример: Найти $\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$.

• Т.к. $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)$, то $\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$.

Приводя к общему знаменателю и приравнявая соответствующие числители, получаем:

$$A(x - 4)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + (4A + 4B + 8C - 6D)x + (-16A - 8B + 8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 9 \\ -4A - 2B - 6C + D = -30 \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28 \\ -16A - 8B + 8D = -88 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = -30 + 4A + 2B + 54 - 6A - 6B \\ 2A + 2B + 4C - 3D = 14 \\ 2A + B - D = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14 \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Итого,

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx &= 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx = \\ &= 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \arctg \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

§4. Интегрирование тригонометрических функций.

I. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Выражение вида $R(\sin x; \cos x)$, которое получается из функций $\sin x$ и $\cos x$ с помощью основных арифметических операций, называется *рациональной функцией* от $\sin x$ и $\cos x$. Нахождение неопределённых интегралов вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$ сводится к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой* (или *подстановкой Вейерштрасса*).

В этом случае $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, откуда

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt, \text{ где } R_1(t) - \text{рациональная функция от } t.$$

Недостатком способа является громоздкость вычислений, а достоинством – то, что он всегда приводит к результату.

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

Пример:

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.$$

II. Упрощённые тригонометрические подстановки.

В некоторых случаях при интегрировании тригонометрических функций целесообразно применять более простые подстановки. Рассмотрим эти случаи:

1) Пусть функция $R(\sin x; \cos x)$ является чётной относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$. Тогда интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$.

В этом случае $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

В частности, данная подстановка применима для интегралов вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

$$\text{Пример: } \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \\ x = \operatorname{arctg} t; \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\left(\frac{dt}{1+t^2} \right)}{1 + \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

2) Если функция $R(\sin x; \cos x)$ нечётна относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$.

В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2k} x dx$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t} dt = \int \frac{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5}{t+2} dt = \int \left[\frac{(t+2)^2 - 4t - 5}{t+2} \right] dt = \\ &= \int \left[t+2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2} \right] dt = \int t dt + \int 2 dt - 4 \int \frac{t dt}{t+2} - 5 \int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| - 4 \int \frac{t}{t+2} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| + 8 \int \frac{dt}{t+2} - 4 \int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln|t+2| + 8 \ln|t+2| - 4t = \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

3) Если функция $R(\sin x; \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то применяется подстановка $\sin x = t$.

В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2k+1} x dx$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{t^2} + \\ &+ 3 \int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3} t^3 = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

4) Интегралы вида $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2k} x dx$, где n и k – неотрицательные целые числа, относятся к 1-му случаю, однако целесообразно их упрощать с помощью формул понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$.

III. Использование тригонометрических преобразований.

Интегралы вида $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$ находятся с помощью тригонометрических формул преобразования произведения в сумму:

В зависимости от типа произведения применяются одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

Пример: $\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$

При нахождении интегралов вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ целесообразно преобразовать подынтегральные функции:

$$\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right); \quad \operatorname{ctg}^n x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right).$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{d \operatorname{ctg} 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8} [\int dx + \int \cos 4x dx] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример.

$$\int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx; \\ x = e^u; \quad dx = e^u du; \end{array} \right\} = \int e^u \cos u du = \left\{ \begin{array}{l} p = \cos u; \quad dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; \quad q = e^u; \end{array} \right\} = e^u \cos u +$$

$$+ \int e^u \sin u du = \left\{ \begin{array}{l} p = \sin u; \quad dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; \quad q = e^u; \end{array} \right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du$$

§5. Интегрирование иррациональных функций.

I. Квадратичные иррациональности.

Рассмотрим неопределённые интегралы вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где a, b, c – некоторые числа, а $P_n(x)$ – многочлен n -й степени.

В случае $n=0$ или $n=1$ для нахождения интеграла можно воспользоваться способом, аналогичным способу интегрирования простейших дробей III типа (выделение полного квадрата и замена переменной).

Примеры

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx &= \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-3; \quad du = dx; \\ x = u+3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} + \\ &+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2+6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $n \geq 2$, можно вычислять, пользуясь формулой:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (1)$$

где λ – некоторое число, а $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределёнными коэффициентами. Для нахождения числа λ и коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ необходимо продифференцировать равенство (1), умножить обе части полученного равенства на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x .

Пример: Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$.

• По формуле (1) имеем: $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} = (Ax + B) \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$.

Дифференцируем: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} = A\sqrt{x^2 - 2x - 1} + (Ax + B) \frac{(2x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x - 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$.

Умножаем на $\sqrt{x^2 - 2x - 1}$: $x^2 = A(x^2 - 2x - 1) + (Ax + B)(x - 1) + \lambda$.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x :

$$x^2: 1 = A + A;$$

$$x^1: 0 = -2A - A + B; \quad \text{откуда} \quad A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{3}{2}; \quad \lambda = 2.$$

$$x^0: 0 = -A - B + \lambda;$$

$$\begin{aligned} \text{Т.о., } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \sqrt{x^2 - 2x - 1} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} = \frac{x+3}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 1} + \\ &+ 2 \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{x+3}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 1} + 2 \ln |x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}| + C. \bullet \end{aligned}$$

II. Дробно-линейная подстановка.

Интегралы вида $\int R \left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \right) dx$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{N}$,

рационализируются с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad (2)$$

где $k = \text{НОК}(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Действительно, из (2) следует, что $ax+b = t^k cx + t^k d$, откуда $x = \frac{t^k d - b}{a - t^k c}$,

$$dx = \frac{kt^{k-1}d(a-t^k c) - (t^k d - b)(-kt^{k-1}c)}{(a-t^k c)^2} dt, \text{ т.е. } x \text{ и } dx \text{ рационально выражаются через } t.$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{6}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{НОК}(3; 2; 6) = 6; \\ x+1 = t^6; \quad t = \sqrt[6]{x+1}; \\ x = t^6 - 1; \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^4 + t}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = \\ &= \int \frac{t(t+1)(t^2 - t + 1)}{t^2(t+1)} 6t^5 dt = 6 \cdot \int (t^6 - t^5 + t^4) dt = \frac{6t^7}{7} - t^6 + \frac{6t^5}{5} = \frac{6(\sqrt[6]{x+1})^7}{7} - (x+1) + \frac{6(\sqrt[6]{x+1})^5}{5} + C. \end{aligned}$$

III. Тригонометрические подстановки.

Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, где R – рациональная функция, можно привести к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций.

Укажем соответствующие подстановки:

$$\begin{aligned} \int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx &\Rightarrow x = a \sin t; \\ \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx &\Rightarrow x = a \operatorname{tg} t; \\ \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx &\Rightarrow x = \frac{a}{\sin t}. \end{aligned}$$

Пример: Привести следующие интегралы к интегралам от тригонометрических функций.

$$1) \int \sqrt{9-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 3 \sin t; t = \arcsin \frac{x}{3}; \\ dx = 3 \cos t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{9-9\sin^2 t} 3 \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt.$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4} dx = \left[\begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t; t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}; \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t + 4}}{16 \operatorname{tg}^4 t} \frac{2dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^4 t \cdot \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{\cos t dt}{\sin^4 t}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sin t}; t = \arcsin \frac{1}{x}; \\ dx = -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t} \end{array} \right] = -\int \operatorname{tg}^3 t \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}.$$

IV. Интегрирование дифференциального бинома.

Выражение вида $x^m (a + bx^n)^p$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $m, n, p \in \mathbb{Q}$, называется *дифференциальным биномом*.

Теорема 1 (Чебышёва): Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ выражается через элементарные функции тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ является целым.

Укажем соответствующие подстановки:

$p \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^k$, где k – НОК знаменателей дробей m и n .

$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p .

$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a}{x^n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p .

Пример:

$$\int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\begin{array}{l} m = -\frac{1}{2}; n = \frac{1}{4}; p = \frac{1}{3}; \\ \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}; 1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3; \\ x = (t^3 - 1)^4; dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \left((t^3 - 1)^4 \right)^{-\frac{1}{2}} (t^3)^{\frac{1}{3}} 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt = 12 \int (t^3 - 1) t^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt =$$

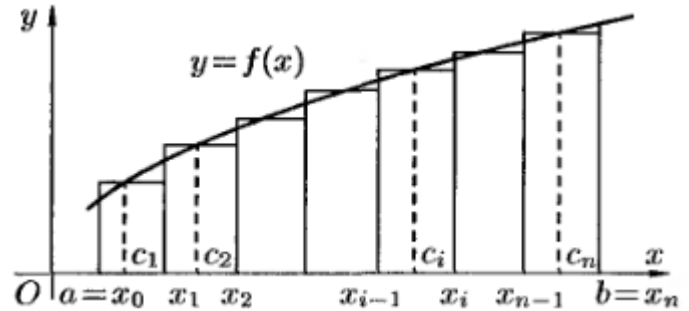
$$= \frac{12t^7}{7} - 3t^4 = \frac{12 \left(\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \right)^7}{7} - 3 \left(\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \right)^4 + C.$$

§6. Определённый интеграл и его свойства.

I. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.

Задача о площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью Ox , слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*. Найдём площадь этой фигуры.



Разобьём отрезок $[a; b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции равна сумме площадей S_i криволинейных трапеций, «опирающихся» на отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = \overline{1, n}$).

В силу непрерывности функции $f(x)$ площадь S_i приближённо равна площади прямоугольника с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотой $f(c_i)$, где c_i – произвольная точка отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, т.е. $S_i \approx f(c_i) \cdot \Delta x_i$. Тогда $S = \sum_{i=1}^n S_i \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$, причём это равенство тем точнее, чем меньше длины отрезков Δx_i . Т.о.,

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \left(\max_{i=1, n} \Delta x_i \rightarrow 0 \right)}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i. \quad (1)$$

Задача о пройденном пути.

Пусть материальная точка M движется прямолинейно с некоторой скоростью $v = v(t)$, непрерывно зависящей от времени t . Поставим задачу – найти путь s , пройденный точкой за промежуток времени от момента $t = a$ до момента $t = b$.

Для этого разобьём временной отрезок $[a; b]$ точками $t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b$ на n коротких промежутков времени $[t_0; t_1], [t_1; t_2], \dots, [t_{n-1}; t_n]$.

Т.к. за промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$ скорость $v(t)$ почти не меняется, то можно приближённо считать её на этом промежутке постоянной и равной $v(\tau_i)$, где $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i]$. С точки зрения механики это означает, что мы считаем движение точки за время $[t_{i-1}; t_i]$ равномерным. Но тогда путь, пройденный точкой за это время, равен $v(\tau_i) \cdot \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Значит, путь, пройденный точкой за всё время $[a; b]$, равен $s \approx \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \cdot \Delta t_i$. Данное равенство тем точнее, чем короче промежутки времени $[t_{i-1}; t_i]$, т.е.

$$s = \lim_{\substack{\max_{i=1, n} \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \cdot \Delta t_i. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), можно заметить, что с аналитической точки зрения они совершенно одинаковы. / можно рассматривать, не опираясь на к.л. задачи /

II. Определённый интеграл и его свойства.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Выполним следующие действия:

- 1) С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ разобьём отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$.
- 2) В каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выберем точку ξ_i и найдём $f(\xi_i)$.
- 3) Умножим каждое значение функции $f(\xi_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, т.е. найдём $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.
- 4) Составим сумму всех таких произведений:

$$f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (3)$$

Сумма вида (3) называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

- 5) Будем увеличивать количество частичных отрезков разбиения, причём таким образом, чтобы величина $\lambda = \max_{i=1, n} \Delta x_i$ (*параметр разбиения*) стремилась к нулю.

Если при этом интегральная сумма (3) имеет предел I , который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Т.о., по определению,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (4)$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, отрезок $[a; b]$ – *областью интегрирования*. Если $\int_a^b f(x) dx$ существует, то говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке $[a; b]$* .

Возвращаясь к результатам (1) и (2), получим:

(1): Определённый интеграл от неотрицательной функции равен площади криволинейной трапеции: $S = \int_a^b f(x) dx$. В этом состоит геометрический смысл определённого интеграла.

(2): Определённый интеграл от скорости прямолинейного движения равен пройденному пути: $s = \int_a^b v(t) dt$. В этом состоит физический смысл определённого интеграла.

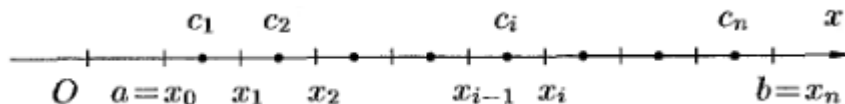
Теорема 1 (Коши): Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Замечание: Теорема Коши даёт лишь достаточное условие интегрируемости, т.е. существуют и разрывные интегрируемые на отрезке функции.

Теорема 2 (формула Ньютона - Лейбница): Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – некоторая её первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5)$$

▷ Разобьём отрезок $[a; b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$.



Рассмотрим тождество:

$$F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)].$$

Применим к каждой разности в квадратных скобках формулу Лагранжа конечных приращений:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(c_n)(x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + F'(c_2)(x_2 - x_1) + F'(c_1)(x_1 - x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i. \end{aligned}$$

Переходя в равенстве $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ к пределу при $\max_{i=1, n} \Delta x_i \rightarrow 0$, мы и получим равенство (5). □

Замечание: Правую часть формулы (5) иногда записывают в виде: $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Пример: 1) $\int_{-1}^2 (3x^2 + 5x^4) dx = (x^3 + x^5) \Big|_{-1}^2 = (2^3 + 2^5) - ((-1)^3 + (-1)^5) = 40 - (-2) = 42$.

Свойства определённого интеграла.

1°. $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$.

▷ $\int_a^b c \cdot f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n (c \cdot f(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = c \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = c \cdot \int_a^b f(x) dx$. □

2°. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

▷ $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. □

3°. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ (как следствие, $\int_a^a f(x) dx = 0$).

▷ $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = - \int_b^a f(x) dx$. □

4°. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ при любом взаимном расположении точек a, b, c .

▷ Рассмотрим сначала случай $a < c < b$:

При разбиении отрезка $[a; b]$ на части включим точку c в число точек деления. Пусть, для определённости, $c = x_m$ ($0 < m < n$). Тогда $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Каждая из записанных сумм является интегральной соответственно для отрезков $[a; b]$, $[a; c]$ и $[c; b]$. Переходя к пределу при $\max_{i=1, n} \Delta x_i \rightarrow 0$, получим: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Пусть теперь $a < b < c$. Тогда, по уже доказанному, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$, откуда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \square$$

5°. (**Теорема о среднем**): Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b] \left(\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a) \right)$. При этом число $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называется *средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$* . / проиллюстрировать геометрически!!! /

▷ С одной стороны, по формуле (5), $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$, а с другой, по формуле Лагранжа, $F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$, где c – некоторая точка отрезка $[a; b]$. $\square$

6°. Если $\forall x \in [a; b] (f(x) \geq 0)$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

▷ По свойству 5° $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$ и оба множителя в правой части неотрицательны. $\square$

7°. Если $\forall x \in [a; b] (f_1(x) \leq f_2(x))$, то $\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$. / следствие 6° /

8°. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$. / проиллюстрировать геометрически!!! /

▷ Интегрируем двойное неравенство $m \leq f(x) \leq M$ на отрезке $[a; b]$ и применяем свойство 7°. $\square$

9°. Если $a < b$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

10°. (**Теорема Барроу**): Производная определённого интеграла по переменному верхнему пределу от непрерывной функции равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т.е.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x). \quad (6)$$

§7. Методы вычисления определённого интеграла.

Очевидным способом вычисления определённого интеграла от непрерывной функции $f(x)$ является применение формулы Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, т.е., фактически, вычисление определённого интеграла сводится к нахождению соответствующего ему неопределённого интеграла.

Рассмотрим основные методы, позволяющие в ряде случаев упростить вычисление определённых интегралов.

I. Замена переменной в определённом интеграле.

Теорема 1: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

► Пусть функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Т.к. $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ есть первообразная для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$. По формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в определённом интеграле*.

Замечание 1: При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется.

Замечание 2: Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ удобно применять подстановку вида $t = \psi(x)$. При этом также необходимо находить новые пределы интегрирования.

Пример:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Замечание: При замене переменной в определённом интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция $\sin$) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы может привести к неверному результату.

II. Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема 2: Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2)$$

▷ На отрезке $[a; b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$, т.е. функция uv является первообразной для функции $u'v + uv'$ на этом отрезке. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница получим: $\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b$, откуда $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$, или $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. □

Формула (2) называется *формулой интегрирования по частям в определённом интеграле*.

Пример: $\int_0^\pi (x+2) \cos \frac{x}{2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx, \\ dv = \cos \frac{x}{2} dx, \quad v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right] = (x+2) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^\pi -$

$$- \int_0^\pi 2 \sin \frac{x}{2} dx = (\pi+2) \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2} - (0+2) \cdot 2 \sin \frac{0}{2} - 4 \int_0^\pi \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) =$$
$$= 2\pi + 4 + 4 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^\pi = 2\pi + 4 + 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{0}{2} \right) = 2\pi + 4 + 4(0-1) = 2\pi.$$

III. Интегрирование чётных и нечётных функций в симметричных пределах.

Теорема 3: Пусть функция $f(x)$ является чётной и непрерывной на отрезке $[-a; a]$. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx.$$

▷ $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = -t; \\ dx = -dt; \\ [-a; 0] \rightarrow [a; 0] \end{array} \right] = - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \dots = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx. \quad \square$

Теорема 4: Пусть функция $f(x)$ является нечётной и непрерывной на отрезке $[-a; a]$. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

▷ $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = -t; \\ dx = -dt; \\ [-a; 0] \rightarrow [a; 0] \end{array} \right] = - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \dots = 0. \quad \square$

Пример: $\int_{-5}^5 e^{-x^2} \cdot \sin x dx = 0.$ / соответствующий неопределённый интеграл – «неберущийся» /

§8. Несобственные интегралы.

Определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования $[a;b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, называется также *собственным интегралом*. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ конечное число точек разрыва I рода, то, разбивая этот отрезок на промежутки и пользуясь свойством 4° определённого интеграла, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно представить в виде суммы конечного числа собственных интегралов.

Рассмотрим случаи, когда промежуток интегрирования является бесконечным либо подынтегральная функция терпит разрывы II рода.

I. Несобственные интегралы I рода.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* (несобственным интегралом I рода) и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Т.о., по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Если указанный предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*. Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

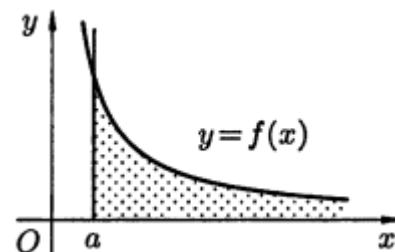
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$, где c – произвольное число (обычно полагают $c = 0$). В этом случае интеграл слева называется сходящимся лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Пример: Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$ или установить его расходимость.

Замечание: При вычислении несобственных интегралов I рода часто пользуются символическим равенством $\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty}$, полагая $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$. / формула Ньютона – Лейбница /

Геометрически сходящийся интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от неотрицательной функции равен площади бесконечно широкой криволинейной трапеции.



Пример: В зависимости от значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ или установить его расходимость. / рассмотреть 3 случая, сделать вывод /

Для исследования несобственного интеграла I рода на сходимость удобно пользоваться следующими признаками:

Теорема 1 (теорема сравнения): Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывны и удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда

- 1). Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – сходится;
- 2). Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ – расходится.

Пример: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^{-1} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 1$ - интеграл сходится

Пример: $\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$ - не существует.

Несобственный интеграл расходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения): Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0, \neq \infty$, то несобственные

интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ – сходится. Можно доказать, что абсолютно сходящийся интеграл – сходится.

II. Несобственные интегралы II рода.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то его называют *несобственным интегралом от разрывной функции (несобственным интегралом II рода)* и обозначают $\int_a^b f(x) dx$. Т.о., по определению,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (3)$$

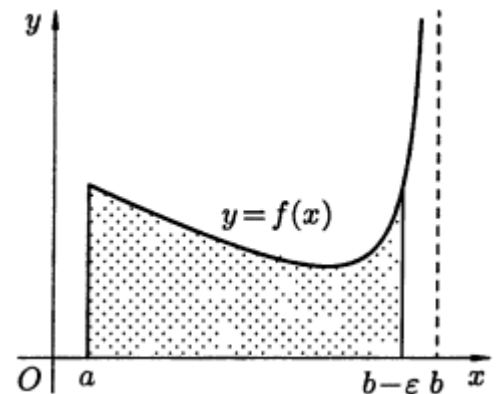
Если указанный предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*. Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Аналогично, если подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x = a$, то полагают:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (4)$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв II рода во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл II рода определяется формулой: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Геометрически сходящийся несобственный интеграл II рода $\int_a^b f(x) dx$ от неотрицательной функции равен площади бесконечно высокой криволинейной трапеции.



Замечание: Для несобственных интегралов II рода справедливы признаки сходимости, аналогичные теоремам 1 и 2.

Пример: $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$

Интеграл – расходящийся.

Замечание: Для сходящихся несобственных интегралов справедливы формулы замены переменной и интегрирования по частям. При этом несобственные интегралы после замены переменной могут «превращаться» в собственные.

§9. Приложения определённого интеграла.

I. Вычисление площадей плоских фигур.

Ранее был установлен геометрический смысл определённого интеграла, а именно: площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси Ox , равна соответствующему определённому интегралу:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Очевидно, что если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox , т.е. ограничена слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, сверху – осью Ox , а снизу – кривой $y=f(x)$ ($f(x) \leq 0$), то её площадь находится по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Объединяя формулы (1) и (2), получим формулу для вычисления площади любой фигуры, ограниченной осью Ox и произвольной кривой $y=f(x)$:

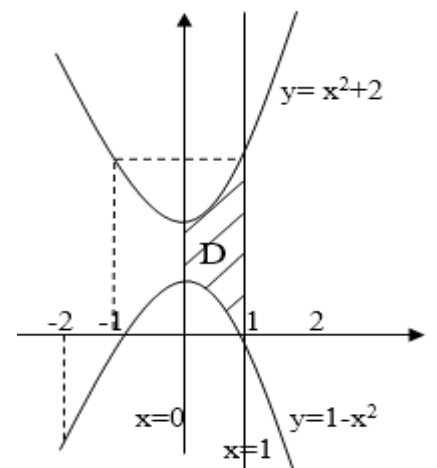
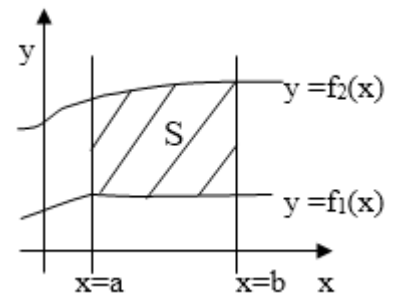
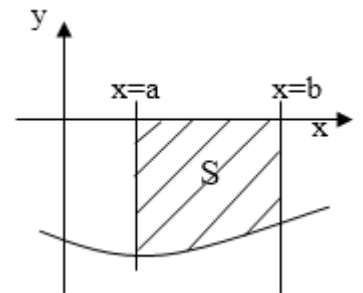
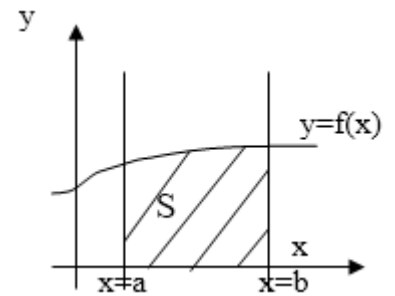
$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь фигуру, ограниченную слева прямой $x=a$, справа – прямой $x=b$, снизу – кривой $y=f_1(x)$, сверху – кривой $y=f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$). Можно доказать, что площадь такой фигуры вычисляется по формуле:

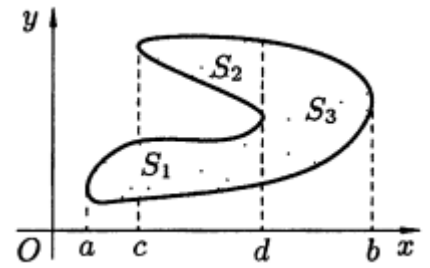
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (4)$$

Пример: Найти площадь фигуры ограниченной линиями:
 $y=1-x^2$; $y=x^2+2$; $x=0$; $x=1$.

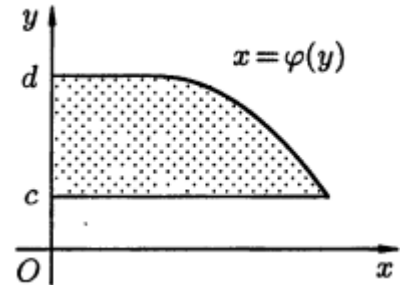
$$\begin{aligned} S_D &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (1 - x^2)] dx = \int_0^1 (x^2 + 2 - 1 + x^2) dx = \\ &= \int_0^1 (2x^2 + 1) dx = \left(2 \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = 1 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Oy , её следует разбить на части так, чтобы к каждой из частей можно было бы применить уже известные формулы.



Наконец, если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y=c$, $y=d$, осью Oy и непрерывной кривой $x=g(y) \geq 0$, то её площадь находится по формуле $S = \int_c^d g(y) dy$.



Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox , то её площадь находится по формуле:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt, \quad (5)$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

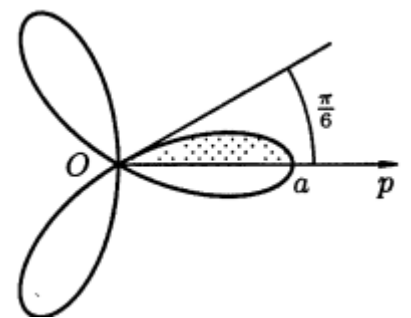
Рассмотрим теперь способ вычисления площадей плоских фигур в полярных координатах. Фигура, ограниченная непрерывной кривой $r=r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, называется *криволинейным сектором*. Площадь такой фигуры находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной «трёхлепестковой розой» $r = a \cos 3\varphi$.

• В силу симметрии фигуры, достаточно найти шестую часть ее площади:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^2}{24}, \text{ откуда } S = \frac{\pi a^2}{4}. \bullet \end{aligned}$$

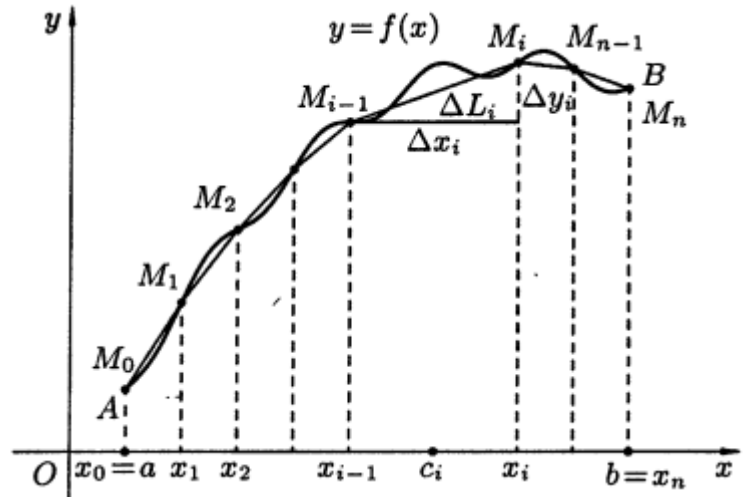


Если фигура ограничена лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и непрерывными кривыми $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$), то её площадь вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi. \quad (7)$$

II. Вычисление длины дуги кривой.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Её график представляет собой некоторую кривую AB с концами в точках $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$. Разобьём эту кривую точками $C_0 = A, C_1, C_2, \dots, C_n = B$ на элементарные дуги $C_{k-1}C_k$ ($k = \overline{1; n}$). Соединив последовательно точки C_k отрезками, получим ломаную, вписанную в кривую AB .



Пусть координаты точек C_k есть $(x_k; f(x_k))$. Тогда длина отрезка $C_{k-1}C_k$ равна $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$.

По формуле Лагранжа конечных приращений имеем: $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, где $\xi_k \in (x_{k-1}; x_k)$, поэтому $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k$. Тогда длина всей ломаной задаётся формулой: $L_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k$.

При $n \rightarrow \infty$ и $\max_{k=1, n} \Delta x_k \rightarrow 0$ ломаная будет приближаться к кривой AB и её длина определится формулой:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (8)$$

Пример: Найти длину дуги кривой $y = x^2 - 1$, отсечённой осью Ox .

- Найдём абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2 - 1$ с осью Ox : $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

По формуле $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, зная, что $y'(x) = 2x$, получим:

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{1 + 4x^2}; dv = dx \\ du = \frac{8x}{2\sqrt{1 + 4x^2}} dx; v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{(4x^2 + 1) - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_{-1}^1 - \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx - \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x^2}} \right) = \\ &= \sqrt{1 + 4x^2} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} - \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{5} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) - \ln \left(-1 + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \right] - \int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2} dx.$$

Обозначим через $L = \int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2} dx \Rightarrow L = 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \right] - L$

$$2L = 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}, \text{ откуда } L = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \frac{(\sqrt{5} + 2)^2}{5 - 4} = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} + 2). \bullet$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (t_1 \leq t \leq t_2)$, то её длина находится по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (9)$$

Если кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), то её длина находится по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (10)$$

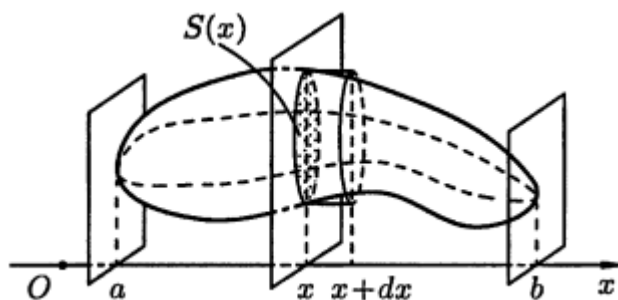
Пример: Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a = \text{const}$).

$$\bullet \frac{1}{2} l = a \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a, \text{ откуда } l = 8a. \bullet$$

III. Вычисление объёмов тел.

Пусть в пространстве задано некоторое тело, причём известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox : $S = S(x)$, $x \in [a; b]$. Пусть, кроме того, функция $S(x)$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$. Тогда объём данного тела вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (11)$$



Формула (11) называется *формулой объёма тела по площади параллельных сечений*.

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. Найдём объём V_x полученного в

результате тела вращения: $V_x = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$, т.е.

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (12)$$

Можно доказать, что при $a \geq 0$ объём тела, полученного при вращении трапеции вокруг оси Oy , находится по формуле:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (13)$$

Пример: Плоская фигура ограничена линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. Найти объёмы тел, образованных вращением этой фигуры вокруг оси Ox и вокруг оси Oy .

- По формуле (12): $V_x = \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = 27\pi$. По формуле (13): $V_y = 2\pi \int_1^4 x \cdot \frac{6}{x} dx = 36\pi$. •

IV. Вычисление площади поверхности вращения.

Пусть дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вращается вокруг оси Ox . Тогда площадь полученной поверхности вращения вычисляется по формуле:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (14)$$

Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$, причём $y(t) \geq 0$, то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (15)$$

Если дуга кривой, заданная в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), вращается вокруг полярной оси, то

$$S_p = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} r(\varphi) |\sin \varphi| \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (16)$$

Пример: Найти площадь поверхности сферы радиуса R .

• Данная сфера может быть получена вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($-R \leq x \leq R$) вокруг оси Ox . Воспользуемся формулой (14):

$$S_x = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \bullet$$

ГЛАВА VII

Дифференциальные уравнения

§1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.

I. Задачи, приводящие к ДУ.

При изучении физических явлений часто не удаётся непосредственно найти закон, связывающий независимую переменную и искомую функцию, однако можно установить связь между этой функцией и её производными. Рассмотрим задачи:

Задача 1. Пусть тело, имеющее температуру T_0 в момент времени $t = 0$, помещено в среду с температурой $a < T_0$. Требуется найти закон, по которому изменяется температура тела в зависимости от времени.

Искомая температура есть функция от времени, обозначим её $T(t)$. Из курса физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температуры тела и температуры окружающей среды. Отсюда получаем:

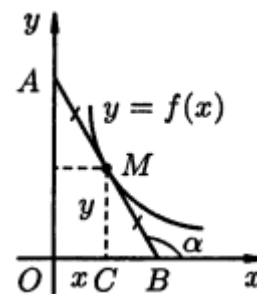
$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - a); \\ T(0) = T_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Соотношения (1) являются математической моделью данного физического процесса.

Задача 2. Требуется найти кривую, проходящую через точку $A(4;1)$, зная, что отрезок любой касательной к этой кривой, заключённый между осями координат, делится в точке касания пополам.

• Пусть $y = f(x)$ – искомая кривая, а $M(x; y)$ – произвольная точка кривой. Из геометрического смысла производной следует, что $y' = \operatorname{tg} \alpha$. С другой стороны, $\operatorname{tg} \angle MBC = \frac{MC}{BC} = [\text{из условия}] = \frac{MC}{OC} = \frac{y}{x}$. Учитывая, что $\operatorname{tg} \angle MBC = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, получим:

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x}; \\ y(4) = 1. \end{cases} \quad (2)$$



Заметим, что задачи 1 и 2 приводят к равенствам, связывающим независимую переменную, искомую функцию и её производную. Такие равенства будем называть дифференциальными уравнениями (ДУ). Позже мы решим обе задачи.

II. Основные понятия.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называется равенство вида

$$F(x; y; y'; y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3)$$

где F – заданная функция, зависящая от $(n+2)$ переменных, x – независимая переменная, $y = f(x)$ – неизвестная функция (переменные $x; y; y'; \dots, y^{(n-1)}$ в ДУ n -го порядка могут отсутствовать). / слово «обыкновенные» далее опускаем /

Примеры: $x^2 y' - y = 0$, $(y')^3 + \sin \frac{1}{x} = 0$ – ДУ первого порядка; $y''' = -x$ – ДУ третьего порядка.

Решением ДУ (3) называется всякая функция $y(x)$, имеющая на некотором интервале $(a; b)$ все производные до n -го порядка включительно и обращающая уравнение (3) в тождество, т.е.

$$F(x; y(x); y'(x); y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b).$$

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ – *интегральной кривой*.

ДУ 1-го порядка записывается в виде:

$$F(x; y; y') = 0, \quad (4)$$

причём это уравнение может не содержать в явном виде x или y , но обязательно содержит y' . Если в уравнении (4) можно выразить y' , то его записывают в виде

$$y' = f(x; y), \quad (5)$$

и называют *ДУ 1-го порядка, разрешённым относительно производной*. Это уравнение устанавливает зависимость между координатами $(x; y)$ точки плоскости и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Т.о., уравнение (5) задаёт поле направлений на плоскости Oxy . Таков геометрический смысл ДУ 1-го порядка.

Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$, уравнение (5) можно записать в *дифференциальной форме*:

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0, \quad (6)$$

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – известные функции двух переменных. Уравнение вида (6) удобно тем, что переменные x и y в нём равноправны, т.е. любую из этих переменных можно рассматривать как функцию от другой переменной.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами. Например, функции $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 5$, $y = x^2 + \pi^2$ являются решениями ДУ $y' = 2x$. И вообще, всякая функция вида $y = x^2 + C$, где $C = \text{const}$, является решением данного ДУ. Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его следует подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ искомая функция y должна принимать значение y_0 , называется *начальным условием* и обозначается

$$y(x_0) = y_0. \quad (7)$$

Общим решением ДУ 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x; C)$ ($C = \text{const}$), удовлетворяющая условиям:

- 1) При любом фиксированном значении C функция $y = \varphi(x; C)$ является решением ДУ;
- 2) Для любого начального условия вида (7) найдётся такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x; C_0)$ удовлетворяет этому начальному условию.

Частным решением ДУ 1-го порядка называется любая функция $y = \varphi(x; C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$. При этом задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

Замечания:

- 1) Если общее решение ДУ найдено неявно, т.е. в виде $\Phi(x; y; C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом ДУ*. $\Phi(x; y; C_0) = 0$ – *частный интеграл ДУ*.
- 2) ДУ может иметь решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях постоянной C . Такие решения называются *особыми решениями ДУ*.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) определяет семейство интегральных кривых ДУ, а частное решение – одна из кривых этого семейства.

Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности решения ДУ 1 порядка): Пусть в уравнении (5) функция $f(x; y)$ и её частная производная $f'_x(x; y)$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку $(x_0; y_0)$. Тогда существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (7).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении её условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

§2. ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах.

Теорема Коши гарантирует лишь существование и единственность решения ДУ, но ничего не говорит о способе нахождения этого решения.

ДУ называется *интегрируемым в квадратурах*, если отыскание его решения сводится к интегрированию функций, причём в результате могут получиться и «неберущиеся» интегралы.

Рассмотрим основные типы ДУ 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах.

I. ДУ с разделяющимися переменными.

ДУ с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0, \quad (1)$$

где P_1 и P_2 – функции, зависящие только от x , а Q_1 и Q_2 – функции, зависящие только от y . Разделив обе части равенства (1) на выражение $P_2(x) \cdot Q_1(y) \neq 0$, получим:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0, \text{ откуда } \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C \quad (C = \text{const}) - \text{общий интеграл ДУ (1).}$$

Замечание: При делении уравнения вида (1) на $P_2(x) \cdot Q_1(y)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует решить уравнение $P_2(x) \cdot Q_1(y) = 0$ и найти те решения исходного ДУ, которые не могут быть получены из общего (особые решения).

Пример: Решить уравнение $(y + xy) dx + (x - xy) dy = 0$.

$$\bullet \quad y(1+x) dx + x(1-y) dy = 0 \quad | : xy \neq 0$$

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1+x}{x} dx + \int \frac{1-y}{y} dy = C \Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = C.$$

$$\ln |x| + x + \ln |y| - y = C - \text{общий интеграл ДУ.}$$

Функции $x=0$ и $y=0$, очевидно, являются решениями ДУ, но не могут быть получены из общего интеграла ни при каких значениях постоянной C , поэтому являются особыми решениями. •

Решим задачу 1 из предыдущего параграфа.

$$\bullet \quad \begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - a); & \frac{dT}{T-a} = -k dt; \Rightarrow \ln|T-a| = -kt + C; \Rightarrow T(t) = e^{-kt+C} + a. \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Получили общее решение; найдём частное, удовлетворяющее начальному условию $T(0) = T_0$:

$$T_0 = e^C + a \Rightarrow e^C = T_0 - a \Rightarrow C = \ln(T_0 - a). \text{ Подставляем } C \text{ в общее уравнение:}$$

$$T(t) = e^{-kt + \ln(T_0 - a)} + a = e^{-kt} \cdot e^{\ln(T_0 - a)} + a, \text{ или } T(t) = (T_0 - a) \cdot e^{-kt} + a. \bullet$$

Решим задачу 2 из предыдущего параграфа.

$$\bullet \begin{cases} y' = -\frac{y}{x}; & \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \Rightarrow x dy + y dx = 0; \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln |y \cdot x| = \ln |C| \Rightarrow y = \frac{C}{x}. \\ y(4) = 1. \end{cases}$$

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(4) = 1$:

$$1 = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4. \text{ Подставляем } C \text{ в общее уравнение: } y = \frac{4}{x}. \bullet$$

Замечание: Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, сводится к ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены $u = ax + by + c$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример: Свести уравнение $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ к ДУ с разделяющимися переменными.

$$\bullet \text{ Замена: } u = 4x + 2y - 1, \text{ откуда } y = \frac{1}{2}u - 2x + \frac{1}{2} \text{ и } y' = \frac{1}{2}u' - 2.$$

$$\text{Подставляем в исходное уравнение: } \frac{1}{2}u' - 2 = \sqrt{u} \Rightarrow \frac{1}{2}u' = \sqrt{u} + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}du = (\sqrt{u} + 2)dx - \\ \text{ДУ с разделяющимися переменными. } \bullet$$

II. Однородные ДУ.

Функция $f(x; y)$ называется *однородной функцией n -го порядка*, если $\forall \lambda \in \mathbb{R} \left(f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n f(x; y) \right)$.

Примеры: $f_1(x; y) = 2x + 3y$, $f_2(x; y) = x^2 - 7xy + 5y^2$ – однородные функции соответственно 1-го и 2-го порядков.

Однородным ДУ называется уравнение вида

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0, \quad (2)$$

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – однородные функции одного и того же порядка.

Разрешим уравнение (2) относительно производной: $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x; y)}{Q(x; y)}$. Поскольку

$\frac{P(\lambda x; \lambda y)}{Q(\lambda x; \lambda y)} = \frac{\lambda^n P(x; y)}{\lambda^n Q(x; y)} = \frac{P(x; y)}{Q(x; y)}$, то всякое однородное уравнение может быть представлено в виде

$$y' = f(x; y), \quad (3)$$

где $f(x; y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Учитывая, что в правой части (3) $f(x; y) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x; \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, получим ещё одну форму записи однородного уравнения:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Сделаем в (4) замену

$$y = ux, \quad (5)$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y' = u'x + u$. Подставим u и y' в уравнение (4):

$$u'x + u = \varphi\left(\frac{ux}{x}\right) = \varphi(u), \quad \text{откуда} \quad \frac{du}{dx} \cdot x = \varphi(u) - u \quad - \text{ДУ с разделяющимися переменными.}$$

После нахождения общего решения этого уравнения сделаем обратную подстановку $u = \frac{y}{x}$ и получим общее решение (или общий интеграл) исходного уравнения.

Упражнение: Решить уравнение $2xy dy = (x^2 + y^2) dx$. / $y^2 = x^2 - \frac{x}{C}$ – общий интеграл ДУ /

Упражнение: Найти частное решение ДУ $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$. / $y = xe^{-\frac{1}{2}x}$ /

Замечание 1: При интегрировании однородных уравнений вида (2) или (3) не обязательно приводить их к виду (4), можно сразу применять подстановку (5).

Замечание 2: Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – некоторые числа,

приводится к однородному уравнению с помощью подстановки $\begin{cases} x = t + \alpha; \\ y = w + \beta, \end{cases}$ где t – новая

независимая переменная, w – новая неизвестная функция, а числа α и β находятся из системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0; \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Пример: Свести ДУ $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$ к однородному.

• Решаем систему $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0; \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases} \quad \alpha = 1, \beta = -1.$ Делаем замену: $\begin{cases} x = t + 1; \\ y = w - 1; \end{cases} \quad dx = dt, dy = dw,$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t + 1 + 2(w - 1) + 1}{2(t + 1) + w - 1 - 1}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{t + 2w}{2t + w} - \text{однородное ДУ.} \bullet$$

III. Линейные ДУ первого порядка.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (6)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции. Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (5) называется *линейным однородным* (ЛОДУ-I), иначе – *линейным неоднородным* (ЛНДУ-I). ЛОДУ-I $y' + p(x)y = 0$ является ДУ с разделяющимися переменными, поэтому основной интерес представляют неоднородные уравнения.

Существует несколько методов интегрирования линейных неоднородных уравнений. Рассмотрим один из них – *метод Бернулли*.

Решение ДУ (6) будем искать в виде

$$y = u \cdot v, \quad (7)$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – новые неизвестные функции, причём одна из них может быть выбрана произвольным образом. Получим: $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в уравнение (6): $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, откуда

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (*)$$

Подберём функцию $v(x)$ т.ч. выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим ДУ:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln |v| = -\int p(x)dx + C.$$

Т.к. функцию $v(x)$ мы можем выбирать произвольно, положим $C = 0$. Получим $v = e^{-\int p(x)dx}$. Подставляем найденную функцию в уравнение (*):

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot 0 = q(x), \text{ откуда } u' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} - \text{ДУ с разделяющимися переменными.}$$

$$\text{Имеем: } du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx, \text{ откуда } u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Возвращаясь к переменной y , получим решение исходного уравнения:

$$y = uv = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (8)$$

Упражнение: Найти общее решение ДУ $y' + 2xy = 2x$.

Упражнение: Решить задачу Коши: $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(\pi) = 5$.

IV. Уравнение Бернулли.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^\alpha, \quad (9)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции, а α – действительное число, не равное нулю и не равное единице (при $\alpha = 0$ получаем линейное уравнение, а при $\alpha = 1$ – ДУ с разделяющимися переменными).

Существует метод, позволяющий свести уравнение (9) к ЛНДУ-I, но на практике проще сразу применить подстановку Бернулли (7).

Упражнение: Найти общее решение уравнения $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$.

§3. ДУ высших порядков.

I. Основные понятия.

Уравнение
$$F(x; y; y'; y'') = 0, \quad (1)$$

связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию $y(x)$, а также её производные $y'(x)$ и $y''(x)$, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Если уравнение (1) можно записать в виде

$$y'' = f(x; y; y'), \quad (2)$$

то говорят, что оно *разрешено относительно второй производной*.

Решением ДУ (2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (2) называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

- 1) $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ – решение (2) при любых фиксированных значениях постоянных C_1 и C_2 ;
- 2) для любых начальных условий

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_1 \quad (3)$$

существует единственная пара значений постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, т.ч. функция $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0)$ удовлетворяет условиям (3).

Всякое решение $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0)$ уравнения (2), которое получается из общего решения $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, называется *частным решением* этого уравнения.

Решения ДУ (2), записанные в виде $\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0$ и $\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0) = 0$ называются соответственно его *общим* и *частным интегралами*.

Как и в случае ДУ первого порядка, задача отыскания частного решения ДУ (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), называется *задачей Коши*.

Геометрически это означает найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеющую в этой точке касательную, которая образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен y_1 .

Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности решения ДУ II порядка): Пусть в уравнении (2) функция $f(x; y; y')$ и её частные производные f'_x , f'_y непрерывны в некоторой области D , содержащей точку $(x_0; y_0; y_1)$. Тогда существует, причём единственное, решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3).

Аналогичные понятия, определения и теорема имеют место для ДУ n -го порядка, которое в общем виде записывается следующим образом:

$$F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}). \quad (4)$$

Начальные условия для ДУ (4) имеют вид $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_1; y''(x_0) = y_2; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, а его общее решение записывается в виде $y = \varphi(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$.

II. ДУ, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим три типа ДУ высших порядков, которые с помощью замены переменной (подстановки) сводятся к ДУ более низких порядков.

1). Рассмотрим уравнение $y'' = f(x).$ (5)

Т.к. $y'' = (y')' = \frac{d(y')}{dx}$, то уравнение (5) можно привести к виду $d(y') = f(x)dx$. Интегрируя его, получим: $y' = \int f(x)dx + C_1$, или $y' = \varphi_1(x) + C_1$. Интегрируем последнее уравнение по x : $y = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx = \int \varphi_1(x)dx + C_1x + C_2$, или $y = \varphi_2(x) + C_1x + C_2$ – общее решение уравнения (5).

Если дано уравнение $y^{(n)} = f(x),$ (6)

то, проинтегрировав его последовательно n раз, аналогично предыдущему получим общее решение в виде $y = \varphi_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример: Найти частное решение ДУ $y''' = 6/x^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1$.

2). Рассмотрим уравнение $y'' = f(x; y'),$ (7)

не содержащее явно искомую функцию y .

Сделаем подстановку $y' = z(x)$, где z – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$ и уравнение (7) примет вид $z' = f(x; z)$. Пусть $z = \varphi(x; C_1)$ – общее решение этого уравнения. Сделав обратную замену, получим: $y' = \varphi(x; C_1)$. Интегрируем уравнение по x : $y = \int \varphi(x; C_1)dx + C_2$ – общее решение уравнения (7).

Уравнение вида $F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \dots; y^{(n)}) = 0,$ (8)

которое также не содержит явно искомой функции, с помощью подстановки $y^{(k)} = z(x)$ приводится к виду $F(x; z; z'; \dots; z^{(n-k)}) = 0$. Т.о. порядок уравнения (8) понижается на k единиц.

В частности, уравнение $y^{(n)} = f(x; y^{(n-1)})$

с помощью подстановки $y^{(n-1)} = z(x)$ сводится к ДУ первого порядка.

Упражнения: Найти общее решение ДУ: 1) $2xy'' = y'$; 2) $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

3). Рассмотрим уравнение $y'' = f(y; y')$, (9)

которое не содержит явно независимую переменную x .

Для понижения порядка уравнения введём новую функцию $p(y)$, полагая $y' = p(y)$. Дифференцируем последнее равенство по x , учитывая, что p – сложная функция от x :

$y'' = p'(y) \cdot y'(x) = p' \cdot p$. Уравнение (9) примет вид: $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y; p)$. Пусть $p = \varphi(y; C_1)$ – общее

решение этого уравнения. Тогда, сделав обратную замену, получим: $\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1)$, откуда

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2 - \text{общий интеграл уравнения (9)}.$$

Таковую же подстановку применим при решении ДУ вида

$$F(y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0,$$

которое также не содержит явно переменную x . В этом случае $y' = p$, $y'' = p'p$, $y''' = p''p^2 + (p')^2 p$, ...

Пример: Найти частное решение ДУ $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$:

• $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, $yp'p = p^2 - p^3$. Разделим обе части уравнения на p ($p \neq 0$, поскольку в противном случае $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y'(0) = 2$):

$$y \frac{dp}{dy} = p - p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dp}{(p - 1/2)^2 - (1/2)^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow -\ln \left| \frac{p-1}{p} \right| = \ln |y| + \ln |C_1| \Rightarrow \frac{p}{p-1} = C_1 y;$$

$$p = C_1 yp - C_1 y \Rightarrow p(1 - C_1 y) = -C_1 y \Rightarrow p = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1}. \text{ Т.о. } y' = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1}.$$

В силу начальных условий $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$ получим $2 = \frac{C_1}{C_1 - 1}$, откуда $C_2 = 2$, т.е. $y' = \frac{2y}{2y - 1}$.

Интегрируем полученное уравнение: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2y - 1} \Rightarrow \int \frac{2y - 1}{2y} dy = dx \Rightarrow y - \frac{1}{2} \ln |y| = x + C_2$.

В силу начального условия $y(0) = 1$ получим: $1 - \frac{1}{2} \ln |1| = 0 + C_2$, откуда $C_2 = 1$.

Т.о. получаем $y - \frac{1}{2} \ln |y| = x + 1$ – частный интеграл исходного ДУ. •

§4. ЛОДУ высших порядков.

I. Основные понятия.

Уравнение вида

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = g(x), \quad (1)$$

где $b_0(x) \neq 0$, $b_1(x), \dots, b_n(x)$, $g(x)$ – заданные функции, называется *ЛДУ n -го порядка*. При этом функции $b_0(x), \dots, b_n(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (1), а $g(x)$ – его *свободным членом*. Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется *однородным*, иначе – *неоднородным*.

Далее будем рассматривать лишь *приведённые ЛДУ n -го порядка*, т.е. уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (2)$$

причём будем считать, что коэффициенты и свободный член этого уравнения являются непрерывными на некотором интервале $(a; b)$ функциями. При этих условиях для уравнения (2) справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши.

II. ЛОДУ второго порядка.

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3)$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 1: Если функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются решениями уравнения (3), то функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (4)$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$, также является решением уравнения (3). / доказываю подстановкой (4) в (3) /

Следствие: Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – некоторые решения уравнения (3), то решениями также будут функции $y = y_1(x) + y_2(x)$ и $y = C \cdot y_1(x)$ ($C = \text{const}$).

Возникает вопрос: Поскольку функция (4) является решением уравнения (3) и при этом содержит две произвольные постоянные, не является ли она общим решением уравнения (3)? Для ответа на вопрос введём понятия линейной зависимости и независимости функций.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале $(a; b)$, если равенство

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0, \quad (5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Иначе эти функции называются *линейно зависимыми*.

Замечание: Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. когда $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a;b) \quad (y_2(x) = \lambda y_1(x))$.

Примеры:

1). Функции $y = e^x$ и $y = 2e^x$ – ЛЗ на любом интервале числовой прямой, поскольку $\lambda_1 e^x + \lambda_2 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x (\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, что возможно и при ненулевых значениях λ_1 и λ_2 (например, $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$).

2). Функции $y = x$ и $y = x^2$ – ЛНЗ на интервале $(0;1)$.

Определителем Вронского (вронскианом) дифференцируемых на интервале $(a;b)$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называется функция вида $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$.

Совокупность любых двух ЛНЗ на интервале $(a;b)$ частных решений ЛОДУ (3) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 2: Частные решения $y_1(x), y_2(x)$ уравнения (3) образуют фундаментальную систему решений на интервале $(a;b)$, если ни в одной точке этого интервала их вронскиан не обращается в нуль.

Теорема 3 (структура общего решения ЛОДУ II порядка): Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (3) образуют на интервале $(a;b)$ фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание: Полученные результаты естественным образом распространяются на ЛОДУ n -го порядка вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$.

III. ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \quad (6)$$

где p и q – некоторые действительные числа. По теореме 3 для нахождения общего решения уравнения (6) достаточно найти любые два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Рассмотрим метод Эйлера решения данной задачи. Будем искать частное решение уравнения (6) в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторое число. Получим: $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставим в (6):

$\lambda^2 e^{\lambda x} + p \cdot \lambda e^{\lambda x} + q \cdot e^{\lambda x} = 0$, откуда $e^{\lambda x} (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$. Т.к. $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (7)$$

Квадратное уравнение (7) называется *характеристическим уравнением* ДУ (6). Для его составления достаточно в уравнении (6) заменить y'' на λ^2 , y' – на λ , а y – на единицу.

При решении характеристического уравнения (7) возможны следующие три случая:

Случай 1. $D = p^2 - 4q > 0$, т.е. корни λ_1, λ_2 – действительны и различны. В этом случае частными решениями уравнения (6) являются функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Проверим, образуют ли они фундаментальную систему решений:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (6) запишется в виде:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (8)$$

Упражнение: Найти общее решение ДУ $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Случай 2. $D = p^2 - 4q = 0$, т.е. характеристическое уравнение (7) имеет пару равных действительных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \left(= -\frac{p}{2} \right)$. В этом случае имеется лишь одно частное решение $y_1 = e^{\lambda x}$. Докажем, что функция $y_2 = x e^{\lambda x}$ также является решением уравнения (6): / доказываю /

Проверим, образуют ли функции $y_1 = e^{\lambda x}$ и $y_2 = x e^{\lambda x}$ фундаментальную систему решений:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{vmatrix} = (e^{\lambda x})^2 \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda & 1 + \lambda x \end{vmatrix} = (e^{\lambda x})^2 \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (6) запишется в виде $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ или

$$y = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x). \quad (9)$$

Упражнение: Найти общее решение ДУ $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Случай 3. $D = p^2 - 4q < 0$, т.е. $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2} = -\frac{p}{2} \pm i \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Обозначив $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, получим пару комплексно-сопряжённых корней: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае частными решениями уравнения (7) будут

$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$ и $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$. Найдём два действительных частных решения уравнения (7), для чего составим линейные комбинации:

$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x =: y_1$, $\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x =: y_2$. По теореме 1 y_1 и y_2 являются решениями

уравнения (7). Легко проверить, что они образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение уравнения (6) запишется в виде:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (10)$$

Упражнение: Найти общее решение ДУ $y'' - 6y' + 25y = 0$.

IV. ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Метод Эйлера можно применить и для решения более общей задачи – нахождения общего решения ЛОДУ n -го порядка вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (11)$$

где $p_i \ (i = \overline{1, n})$ – некоторые числа.

Частные решения уравнения (11) также ищем в виде $y = e^{\lambda x}$ и приходим к решению характеристического уравнения

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0. \quad (12)$$

Известно, что алгебраическое уравнение n -ой степени имеет ровно n корней (среди них могут быть повторяющиеся, комплексные). Если корень $\lambda = \lambda_k$ повторяется m раз, то говорят, что это *корень кратности m* , иначе его называют *простым корнем*.

Примем без доказательства следующие факты:

- 1). Каждому простому действительному корню λ в общем решении соответствует частное решение $y = e^{\lambda x}$.
- 2). Действительному корню λ кратности $m > 1$ соответствует m частных решений: $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda x}$, $\dots$, $y_m = x^{m-1} e^{\lambda x}$.
- 3). Каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ соответствует два частных решения: $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.
- 4). Пары комплексно-сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности $m > 1$ соответствует $2m$ частных решений:
 $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x$, $\dots$, $y_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$;
 $y_{m+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_{m+2} = x e^{\alpha x} \sin \beta x$, $\dots$, $y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Можно доказать, что в каждом из этих случаев частные решения образуют фундаментальную систему.

Упражнение: Найти общее решение ДУ $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$.

§5. ЛНДУ высших порядков.

I. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка.

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – заданные, непрерывные на интервале $(a;b)$ функции.

Уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (2)$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (1), называется *соответствующим ему однородным уравнением*.

Теорема 1 (структура общего решения ЛНДУ II порядка): Общим решением y ЛНДУ (1) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (2), т.е.

$$y = y^* + \bar{y}. \quad (3)$$

▷ Проверим, что функция (3) является решением уравнения (1):

$$\begin{aligned} (y^* + \bar{y})'' + a_1(x)(y^* + \bar{y})' + a_2(x)(y^* + \bar{y}) &= \left((y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* \right) + \\ &+ \left((\bar{y})'' + a_1(x)(\bar{y})' + a_2(x)\bar{y} \right) = f(x) + 0 = f(x). \end{aligned}$$

Распишем равенство (3) в виде

$$y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (4)$$

где y_1, y_2 – фундаментальная система решений ЛОДУ (2). Докажем, что функция (4) является общим решением уравнения (1). Для этого нужно доказать, что из решения (4) можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (5)$$

Продифференцировав уравнение (4) и подставив начальные условия, получим систему:

$$\begin{cases} y_0 = y^*(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0); \\ y'_0 = (y^*)'(x_0) + C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0); \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0 - (y^*)'(x_0). \end{cases}$$

Рассматривая последнюю систему как систему относительно неизвестных C_1 и C_2 , видим, что определитель этой системы равен вронскиану $W(x_0)$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке x_0 . Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ (2), то по теореме 2 из §4 $W(x_0) \neq 0$, т.е. система имеет единственное решение $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. При этом $y = y^* + C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2$ является частным решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям (5). □

II. Метод вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим *метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)* нахождения частного решения ЛНДУ (1). Пусть $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – общее решение однородного уравнения (2). Заменим в этом решении постоянные C_1 и C_2 на неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и подберём их так, чтобы функция

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \quad (6)$$

была частным решением уравнения (1).

Дифференцируем (6): $(y^*)' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$.

Потребуем, чтобы

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (7)$$

Тогда $(y^*)' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$;

$$(y^*)'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставим y^* , $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в уравнение (1):

$$\{C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)\} + \\ + a_1(x)\{C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\} + a_2(x)\{C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\} = f(x).$$

Группируем слагаемые при $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x)\{y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)\} + C_2(x)\{y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)\} + \\ + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения ЛОДУ (2), то оба выражения в фигурных скобках равны нулю. Поэтому

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (8)$$

Т.о., функция (6) будет частным решением уравнения (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (7) и (8):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (9)$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, т.к. это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений уравнения (2). Поэтому система (9) имеет единственное решение $\begin{cases} C_1'(x) = \varphi_1(x); \\ C_2'(x) = \varphi_2(x), \end{cases}$ из которого находятся функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и составляется частное решение (6).

Пример: Найти общее решение ДУ $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

• Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, поэтому частное решение ЛНДУ ищем в виде $y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$.

Т.к. фундаментальная система решений определяется функциями $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$,

то система (9) запишется в виде:
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0; \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решим систему с помощью формул Крамера: $\Delta = 1$, $\Delta_1 = -\operatorname{tg} x$, $\Delta_2 = 1$.

$C_1'(x) = -1 \Rightarrow C_1(x) = -x$, $C_2'(x) = \operatorname{ctg} x \Rightarrow C_2(x) = \ln |\sin x|$ (произвольные постоянные не пишем, т.к. ищем частное решение).

Т.о., $y^* = -x \cos x + \ln |\sin x| \sin x$, откуда $y = (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln |\sin x|) \sin x$. •

Метод вариации произвольных постоянных может быть распространён и на случай ЛНДУ более высоких порядков. Рассмотрим этот метод на примере ЛНДУ III порядка.

Пример: Найти общее решение ДУ $y''' - 5y'' + 6y' = 2^x$.

• Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, откуда $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$. Т.о. частное решение ЛНДУ ищем в виде: $y^* = C_1(x) + C_2(x) e^{2x} + C_3(x) e^{3x}$.

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$.

Составляем систему, аналогичную системе (9):
$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cdot e^{2x} + C_3'(x) \cdot e^{3x} = 0; \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) \cdot 2e^{2x} + C_3'(x) \cdot 3e^{3x} = 0; \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) \cdot 4e^{2x} + C_3'(x) \cdot 9e^{3x} = 2^x. \end{cases}$$

Решим систему с помощью формул Крамера:

$$\Delta = 6e^{5x}, \Delta_1 = e^{5x} \cdot 2^x, \Delta_2 = -3e^{3x} \cdot 2^x, \Delta_3 = 2e^{2x} \cdot 2^x.$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{6} \cdot 2^x \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{6 \ln 2} \cdot 2^x;$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot 2^x = -\frac{1}{2} \cdot e^{(\ln 2 - 2)x} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2x} \cdot 2^x}{\ln 2 - 2};$$

$$C_3'(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} \cdot 2^x = \frac{1}{3} \cdot e^{(\ln 2 - 3)x} \Rightarrow C_3(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{-3x} \cdot 2^x}{\ln 2 - 3}.$$

$$\text{Т.о., } y^* = \frac{2^x}{6 \ln 2} - \frac{e^{-2x} \cdot 2^x}{2 \ln 2 - 4} e^{2x} + \frac{e^{-3x} \cdot 2^x}{3 \ln 2 - 9} e^{3x} = \left(\frac{1}{6 \ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2 - 4} + \frac{1}{3 \ln 2 - 9} \right) 2^x = \frac{2^x}{\ln 2 (\ln 2 - 2) (\ln 2 - 3)}.$$

Значит, общее решение запишется в виде: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + \frac{2^x}{\ln 2 (\ln 2 - 2) (\ln 2 - 3)}$. •

Теорема 2 (принцип суперпозиции решений): Если y_1^* – частное решение уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$, а y_2^* – частное решение уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$, то функция $y = y_1^* + y_2^*$ является частным решением уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

▷ Доказывается непосредственной подстановкой $y = y_1^* + y_2^*$ в последнее уравнение. □

III. ЛНДУ II порядка с постоянными коэффициентами и правой частью спец. вида.

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \quad (10)$$

где p и q – некоторые действительные числа. Для нахождения частного решения y^* можно использовать метод вариации произвольных постоянных. Если же правая часть $f(x)$ имеет т.н. «специальный» вид, то существует более простой способ нахождения y^* .

Суть метода, называемого *методом неопределённых коэффициентов*, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределёнными коэффициентами, затем подставляют её в уравнение (10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1 (частный). Пусть правая часть уравнения (10) имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ – многочлен степени n . В этом случае уравнение запишется в виде:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x)e^{\alpha x}. \quad (11)$$

а). Если число α не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, то частное решение уравнения (11) нужно искать в виде:

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x), \quad (12)$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами.

б). Если число α является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (11) нужно искать в виде:

$$y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x). \quad (13)$$

в). Если число α является двукратным корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (11) нужно искать в виде:

$$y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x). \quad (14)$$

Упражнения: Найти общее решение ДУ:

1). $y'' + 6y' + 9y = e^x (48x + 8);$

2). $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x};$

3). $y'' + y' = 2x - 1.$

Случай 2 (частный). Пусть правая часть уравнения (10) имеет вид $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$, где $A, B, \beta \in \mathbb{R}$, причём $\beta \neq 0$. В этом случае уравнение запишется в виде:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = A \cos \beta x + B \sin \beta x. \quad (15)$$

а). Если числа $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, то частное решение уравнения (15) нужно искать в виде:

$$y^* = E \cos \beta x + F \sin \beta x, \quad (16)$$

где E и F – неопределённые коэффициенты.

б). Если числа $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение уравнения (15) нужно искать в виде:

$$y^* = x(E \cos \beta x + F \sin \beta x). \quad (17)$$

Упражнения: Найти общее решение ДУ:

1). $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$;

2). $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

Случай 3 (общий). Пусть правая часть уравнения (10) имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ – многочлен степени n , $Q_m(x)$ – многочлен степени m . В этом случае уравнение запишется в виде:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x). \quad (18)$$

Частное решение уравнения (18) следует искать в виде:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x), \quad (19)$$

где $R_l(x), S_l(x)$ – многочлены степени $l = \max\{n, m\}$ с неопределёнными коэффициентами, а число r равно количеству корней характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, совпадающих с числом $\alpha + \beta i$.

Упражнения: Найти общее решение ДУ:

1). $y'' + 4y' = e^x (24\cos 2x + 2\sin 2x)$;

2). $y'' + y = x \sin x + \cos 2x$.

Замечание: Метод подбора частного решения ЛНДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x),$$

где $f(x)$ имеет специальный вид, описанный выше, аналогичен методу подбора частного решения ЛНДУ второго порядка.

Упражнение: Найти общее решение ДУ $y^{IV} - 3y'' = 9x^2$.

§6. Системы дифференциальных уравнений.

I. Основные сведения.

Ряд задач математики, физики, химии приводят к нескольким ДУ, образующим систему (например, задачи динамики криволинейного движения, задачи электротехники для нескольких электрических цепей, задачи определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций).

Система ДУ первого порядка, содержащая n неизвестных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, в общем виде записывается следующим образом:

[illegible]

Система ДУ первого порядка, разрешённых относительно производной, т.е. система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x; y_1; y_2; \dots; y_n); \\ y_2' = f_2(x; y_1; y_2; \dots; y_n); \\ \\ y_n' = f_n(x; y_1; y_2; \dots; y_n), \end{cases} \quad (1)$$

называется *нормальной системой ДУ*.

Во многих случаях системы ДУ и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (1).

Примеры:

1) Система трёх ДУ II порядка $\begin{cases} \ddot{x} = F_1(x; y; z; t; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}); \\ \ddot{y} = F_2(x; y; z; t; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}); \\ \ddot{z} = F_3(x; y; z; t; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}), \end{cases}$ описывающая закон движения

материальной точки в пространстве, путём введения новых переменных $\begin{cases} u = \dot{x}, \\ v = \dot{y}, \\ w = \dot{z} \end{cases}$ приводится

$$\text{к нормальной системе} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{y} = v; \\ \dot{z} = w; \\ \dot{u} = F_1(x; y; z; t; u; v; w); \\ \dot{v} = F_2(x; y; z; t; u; v; w); \\ \dot{w} = F_3(x; y; z; t; u; v; w). \end{array} \right.$$

нормальной системе $\begin{cases} y' = u; \\ u' = v; \\ v' = f(x; y; u; v). \end{cases}$

Решением системы (1) называется совокупность из n функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

$$y_1(x_0) = y_1^0; \quad y_2(x_0) = y_2^0; \quad \dots; \quad y_n(x_0) = y_n^0. \quad (2)$$

Меняя в области D точку M_0 (т.е. начальные условия), получим бесконечное множество решений вида $y_1 = \varphi_1(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$, ... , $y_n = \varphi_n(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$. Это решение называется *общим решением системы* (1), если по заданным начальным условиям (2)

можно однозначно определить постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x; C_1; C_2; \dots; C_n) = y_1^0; \\ \varphi_2(x; C_1; C_2; \dots; C_n) = y_2^0; \\ \\ \varphi_n(x; C_1; C_2; \dots; C_n) = y_n^0. \end{array} \right.$$

Решение, которое получается из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется *частным решением системы* (1). *Задача Коши для системы* (1) ставится следующим образом: найти решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Универсальным методом интегрирования нормальных систем является метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка (т.н. *метод исключения*). Рассмотрим этот метод на примере системы ЛНДУ вида:

[illegible]

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, а $f_i(x)$ – заданные дифференцируемые функции ($i, j = \overline{1, n}$).

Выполним следующие действия:

1) Дифференцируем 1-ое уравнение системы (3): $y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \dots + a_{1n}y_n' + f_1'(x)$. Подставляем в это равенство значения производных $y_1', y_2', \dots, y_n'$ из системы (3). Получим равенство вида:

$$y_1'' = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n + g_2(x).$$

Продифференцировав последнее равенство ещё раз и заменив в нём значения производных $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ на их выражения из системы (3), получим:

$$y_1''' = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + \dots + b_{3n}y_n + g_3(x).$$

Продолжая этот процесс, в итоге найдём:

$$y_1^{(n)} = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n + g_n(x).$$

Соберём полученные уравнения в систему:

[illegible]

2) Из первых $(n-1)$ уравнений системы (4) выразим функции $y_2, y_3, \dots, y_n$ через $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$:

[illegible]

3) Значения функций $y_2, y_3, \dots, y_n$ из системы (5) подставим в последнее уравнение системы (4). Получим ЛНДУ n -го порядка вида $y_1^{(n)} + d_1 y_1^{(n-1)} + \dots + d_{n-1} y_1' + d_n y_1 = l(x)$. Пусть его общее решение имеет вид: $y_1 = \varphi_1(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$. Продифференцировав его $(n-1)$ раз и подставив y_1 и значения производных $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (5), найдём оставшиеся компоненты общего решения системы (3): $y_2 = \varphi_2(x; C_1; C_2; \dots; C_n), \dots, y_n = \varphi_n(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$.

Упражнения:

1) Решить систему ЛОДУ $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2; \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2. \end{cases}$

2) Решить систему ЛНДУ $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2; \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^x. \end{cases}$

3) Решить систему ЛОДУ $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3; \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3; \\ y_3' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

III. Системы ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ещё один метод интегрирования нормальной системы ДУ вида (1) в случае, когда она представляет собой систему ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Для простоты будем рассматривать систему трёх уравнений с тремя неизвестными y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{cases} \quad (6)$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – заданные числа.

Будем искать частное решение системы (6) в виде:

$$y_1 = \alpha e^{\lambda x}, \quad y_2 = \beta e^{\lambda x}, \quad y_3 = \gamma e^{\lambda x}, \quad (7)$$

где постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ нужно подобрать так, чтобы функции (7) удовлетворяли системе (6).

Подставляем (7) в (6):

$$\begin{cases} \alpha \lambda e^{\lambda x} = a_{11} \alpha e^{\lambda x} + a_{12} \beta e^{\lambda x} + a_{13} \gamma e^{\lambda x}, \\ \beta \lambda e^{\lambda x} = a_{21} \alpha e^{\lambda x} + a_{22} \beta e^{\lambda x} + a_{23} \gamma e^{\lambda x}, \\ \gamma \lambda e^{\lambda x} = a_{31} \alpha e^{\lambda x} + a_{32} \beta e^{\lambda x} + a_{33} \gamma e^{\lambda x}. \end{cases} \quad \text{Сокращаем на } e^{\lambda x}: \begin{cases} \alpha \lambda = a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma, \\ \beta \lambda = a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma, \\ \gamma \lambda = a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma. \end{cases} \quad \text{Преобразуем:}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma = 0, \\ a_{21} \alpha + (a_{22} - \lambda) \beta + a_{23} \gamma = 0, \\ a_{31} \alpha + a_{32} \beta + (a_{33} - \lambda) \gamma = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Систему (8) можно рассматривать как систему трёх линейных однородных алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ . Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы обращался в нуль, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) называется *характеристическим уравнением* системы (6). Раскрывая определитель, получим относительно λ алгебраическое уравнение третьей степени, которое всегда имеет три корня. Рассмотрим все возможные случаи:

Случай 1. Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения (9) действительны и различны. Для каждого корня λ_i ($i = 1, 2, 3$) запишем систему (8) и определим коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (один из коэффициентов можно считать равным единице). Т.о. получим:

- для корня λ_1 – частное решение $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}, y_2^{(1)} = \beta_1 e^{\lambda_1 x}, y_3^{(1)} = \gamma_1 e^{\lambda_1 x}$;
- для корня λ_2 – частное решение $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{\lambda_2 x}, y_2^{(2)} = \beta_2 e^{\lambda_2 x}, y_3^{(2)} = \gamma_2 e^{\lambda_2 x}$;
- для корня λ_3 – частное решение $y_1^{(3)} = \alpha_3 e^{\lambda_3 x}, y_2^{(3)} = \beta_3 e^{\lambda_3 x}, y_3^{(3)} = \gamma_3 e^{\lambda_3 x}$.

системы (6) запишется в виде
$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + C_3 y_1^{(3)}; \\ y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + C_3 y_2^{(3)}; \text{ или} \\ y_3 = C_1 y_3^{(1)} + C_2 y_3^{(2)} + C_3 y_3^{(3)}, \end{cases}$$

Упражнение: Решить систему $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases} / \begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}, \\ y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}, \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}. \end{cases}$

Упражнение: Решить систему $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 3y_2 + y_3. \end{cases} \quad / \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x, \\ y_2 = -2C_2 e^x \sin 2x + 2C_2 e^x \cos 2x, \\ y_3 = -C_1 e^x + 5C_2 e^x \cos 2x + 5C_3 e^x \sin 2x. \end{cases}$

а) если $k=2$, то $y_1 = (Ax+B)e^{\lambda x}$, $y_2 = (Cx+D)e^{\lambda x}$, $y_3 = (Ex+F)e^{\lambda x}$;
 б) если $k=3$, то $y_1 = (Ax^2+Bx+C)e^{\lambda x}$, $y_2 = (Ex^2+Fx+G)e^{\lambda x}$, $y_3 = (Kx^2+Lx+M)e^{\lambda x}$.

Упражнение: Решить систему $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases} \quad / \quad \begin{cases} y_1 = 2C_1 + C_2xe^x + C_3e^x, \\ y_2 = -C_1 + C_2e^x, \\ y_3 = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^x. \end{cases} /$

[illegible]

ГЛАВА VIII

Числовые и степенные ряды

§1. Числовые ряды.

I. Основные понятия и свойства.

Числовым рядом называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – действительные числа, которые называются *членами ряда*. При этом u_n называется *общим членом ряда* (1).

Сумма первых n членов ряда (1) называется *n -ой частичной суммой* ряда и обозначается S_n , т.е. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то говорят, что ряд (1) *сходится*.

При этом число S называют *суммой ряда* (1) и записывают $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ равен бесконечности или не существует, то говорят, что ряд (1) *расходится*.

Примеры:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \dots$ – сходится ($S_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$);

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$ – расходится ($S_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$);

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ – расходится ($S_1 = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = 0, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \nexists$);

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится ($S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$).

Свойства числовых рядов:

1°. Если ряд (1) сходится и его сумма равна S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ ($c = \text{const}$) также сходится, причём его сумма равна cS . Если же ряд (1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ также расходится.

2°. Если сходится ряд (1) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а их суммы равны соответственно S и σ , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ также сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

3°. Если к ряду (1) прибавить (или отбросить или изменить) конечное число членов, то его сходимость от этого не изменится.

Замечание: Сумма двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом (например, расходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ дают в сумме ряд сходящийся).

II. Ряд геометрической прогрессии.

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0), \quad (2)$$

который называется *рядом геометрической прогрессии*.

Известно, что при $q \neq 1$ сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. Найдём предел этой суммы: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1-q}$.

Рассмотрим все возможные случаи:

- 1) $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, т.е. ряд (2) сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$;
- 2) $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. ряд (2) расходится;
- 3) $q = 1 \Rightarrow S_n = an \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. ряд (2) расходится;
- 4) $q = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, т.е. ряд (2) также расходится.

Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, причём, в случае сходимости, его сумма равна $\frac{a}{1-q}$.

Упражнение: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$ и, в случае сходимости, найти его сумму.

III. Необходимый признак сходимости.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости): Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

▷ Пусть ряд (1) сходится, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Учитывая, что при $n > 1$ $S_n - S_{n-1} = u_n$, получаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$. □

Следствие (достаточное условие расходимости): Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд (1) расходится.

▷ < от противного > □

Упражнения: Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3}{7n + 1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n+3}{2n+5}$.

Замечание: Теорема 1 даёт необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ не следует, что ряд (1) сходится. Это означает, что существуют и расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Пример: Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится:

$$\bullet S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n}.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится, хотя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

IV. Гармонический ряд.

В качестве ещё одного примера рассмотрим т.н. *гармонический ряд*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (3)$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Покажем, однако, что ряд (3) расходится:

▷ В теме «Числовая последовательность и её предел» [глава III, §1] была рассмотрена последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Т.к. эта последовательность является монотонно возрастающей, то $\forall n \in \mathbb{N} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \right)$. Логарифмируем это неравенство по основанию e , получим: $n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, откуда $\frac{1}{n} > \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

Распишем подробнее:

$$\begin{aligned} 1 &> \ln 2; \\ \frac{1}{2} &> \ln 3 - \ln 2; \\ \frac{1}{3} &> \ln 4 - \ln 3; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n} &> \ln(n+1) - \ln n. \end{aligned}$$

Суммируя левые и правые части неравенств, получим: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1)) = \infty$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. гармонический ряд (3) расходится. □

Замечание: Гармонический ряд расходится очень медленно (для того, чтобы частичная сумма превысила 100, необходимо около 10^{43} элементов ряда).

§2. Знакопостоянные ряды.

I. Признаки сравнения.

В этом параграфе будем рассматривать только *знакоположительные ряды*, т.е. ряды с положительными членами. Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путём сравнения его с неким «эталонным» рядом, о сходимости которого всё известно. В основе такого сравнения лежат следующие две теоремы:

Теорема 1 (теорема сравнения): Пусть для членов знакоположительных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (2)$$

начиная с некоторого номера $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда:

- 1) если ряд (2) сходится, то и ряд (1) сходится;
- 2) если ряд (1) расходится, то и ряд (2) расходится.

▷ В силу свойства 3° числовых рядов можно считать, что неравенство $a_n \leq b_n$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для n -х частичных сумм $S_n^{(a)}$ и $S_n^{(b)}$ имеет место неравенство:

$$S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}. \quad (3)$$

- 1) Пусть ряд (2) сходится. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(b)} = S^{(b)}$, причём $S_n^{(b)} \leq S^{(b)}$ (т.к. все члены ряда – неотрицательные числа). Из неравенства (3) следует, что $S_n^{(a)} \leq S^{(b)}$. В силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности $\exists S^{(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(a)}$, т.е. ряд (1) сходится.
- 2) Пусть ряд (1) расходится. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(a)} = \infty$, откуда в силу неравенства (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(b)} = \infty$, т.е. ряд (2) расходится. □

Упражнения: Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+7^n}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Теорема 2 (предельный признак сравнения): Пусть для членов знакоположительных рядов (1) и (2) существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0, \neq \infty$. Тогда эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

▷ Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left(\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \varepsilon \right)$, откуда $A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon$,

или

$$(A - \varepsilon)b_n < a_n < (A + \varepsilon)b_n \quad (4)$$

Если ряд (1) сходится, то из левого неравенства и теоремы (1) следует, что ряд (2) сходится. Если ряд (1) расходится, то из правого неравенства следует, что и ряд (2) также расходится. □

II. Достаточные признаки сходимости.

Теорема 3 (признак Даламбера): Пусть для членов ряда (1) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда:

- 1) если $l < 1$, то ряд (1) сходится;
- 2) если $l > 1$, то ряд (1) расходится;
- 3) если $l = 1$, то признак ответа не даёт (т.е. существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды).

▷ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда, по определению предела последовательности,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \right), \text{ или}$$

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon. \quad (5)$$

1) Пусть $l < 1$. Очевидно, можно подобрать ε т.ч. $l + \varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$ ($q < 1$). Тогда из правой части (5) получим $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, или

$$a_{n+1} < q \cdot a_n. \quad (6)$$

Т.к. сходимость ряда не меняется при изменении конечного числа членов, можно считать, что неравенство (6) выполняется не только при $n > N$, но и для всех $n \in \mathbb{N}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} a_2 &< q \cdot a_1; \\ a_3 &< q \cdot a_2 < q^2 \cdot a_1; \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &< q \cdot a_{n-1} < q^{n-1} \cdot a_1; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Т.о. получили, что члены ряда $a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ меньше соответствующих членов ряда

$qa_1 + q^2a_1 + \dots + q^{n-1}a_{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Тогда, по теореме сравнения, исходный ряд также сходится.

2) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера, $a_{n+1} > a_n$, т.е. члены ряда возрастают с увеличением n . Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, и ряд расходится в силу достаточного условия расходимости.

3) Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $l = 1$. При этом первый ряд сходится (рассмотрен в примере в §1), а второй (гармонический) – расходится. □

Упражнения: Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n \cdot (5n-1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$.

Теорема 4 (радикальный признак Коши): Пусть для членов ряда (1) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда:

- 1) если $l < 1$, то ряд (1) сходится;
- 2) если $l > 1$, то ряд (1) расходится;
- 3) если $l = 1$, то признак ответа не даёт (т.е. существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды).

▷ Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда, по определению предела последовательности,

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left(\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon \right)$, или

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon. \quad (7)$$

1) Пусть $l < 1$. Очевидно, можно подобрать ε т.ч. $l + \varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$ ($q < 1$). Тогда из правой части (7) получим $\sqrt[n]{a_n} < q$, или $a_n < q^n$.

Т.о., члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Тогда, по теореме сравнения, исходный ряд также сходится.

2) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера, $a_n > 1$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Т.о., ряд расходится в силу достаточного условия расходимости. $\square$

Упражнения: Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\ln^n(2n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^{n^2}$.

Теорема 5 (интегральный признак Коши): Пусть члены ряда (1) могут быть представлены как значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$, т.ч. $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ..., $a_n = f(n)$, ... Тогда:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд (1) сходится;

2) если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд (1) расходится.

Упражнения: Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (ряд Дирихле);

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}.$$

Замечание: Ряд Дирихле часто используется в качестве «эталонного» при исследовании рядов с помощью предельного признака сравнения.

Упражнения: Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^5+3n^3+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Существуют признаки сходимости знакопостоянных рядов, которые «работают» в случае, когда признаки Даламбера и Коши не дают ответа (признаки Раабе, Гаусса, Ермакова).

§3. Знакопеременные ряды.

I. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница.

Числовой ряд называется *знакопередающим*, если любые два его соседних члена имеют разные знаки. Т.о., знакопередающий ряд – это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (1)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad (2)$$

где $\forall n \in \mathbb{N} (a_n > 0)$.

Теорема 1 (признак Лейбница): Пусть для знакопередающего ряда (1) выполнены условия:

1) последовательность модулей членов ряда монотонно убывает: $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$;

2) модуль общего члена ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тогда ряд (1) сходится, причём его сумма S удовлетворяет условию $0 < S < a_1$.

▷ Рассмотрим частичную сумму чётного числа членов: $S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m}$.

Группируем слагаемые: $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$.

В силу 1-го условия теоремы выражение в каждой скобке положительно. Поэтому последовательность $S_2, S_4, \dots, S_{2m}, \dots$ возрастает, причём $S_{2m} > 0$ ($m \in \mathbb{N}$).

Перегруппируем: $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$. Очевидно, $S_{2m} < a_1$.

Т.о., последовательность $S_2, S_4, \dots, S_{2m}, \dots$ является возрастающей и ограниченной. По теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$, причём $0 < S < a_1$.

Рассмотрим частичную сумму нечётного числа членов: $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$.

Имеем: $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$ (в силу 2-го условия теоремы).

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ как при чётном, так и при нечётном n , причём $0 < S < a_1$. □

Следствие: Для остатка $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ ряда (1), удовлетворяющего условиям признака

Лейбница, справедливо неравенство $|S - S_n| < a_{n+1}$. Т.о., если сумму S сходящегося знакопередающего ряда заменить его n -ой частичной суммой S_n , то допущенная при этом погрешность меньше модуля первого из отбрасываемых членов ряда.

Пример: Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

• По признаку Лейбница ряд сходится. $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{4}$; $a_3 = \frac{1}{27}$; $a_4 = \frac{1}{256}$; $a_5 = \frac{1}{3125} < 0,001$.

Поэтому, в силу следствия из признака Лейбница, для достижения нужной точности достаточно отбросить все члены ряда, начиная с пятого: $S \approx S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} \approx 0,783$. •

Замечания:

- 1) Исследование знакопеременного ряда (2) (с отрицательным первым членом) сводится путём умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (1).
- 2) Если 2-е условие признака Лейбница выполняется, а 1-е выполняется лишь начиная с некоторого номера, то соответствующий знакопеременный ряд также сходится.
- 3) Признак Лейбница является достаточным, но не необходимым признаком сходимости, т.е. знакопеременный ряд может сходиться и при немонотонном стремлении к нулю модулей членов ряда.

Пример: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} \right) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^2} + \dots$ является знакопеременным, сходящимся (как разность сходящихся рядов), но не удовлетворяет 1-му условию признака Лейбница.

II. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Числовой ряд называется *знакопеременным*, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных слагаемых (знакопеременные ряды являются частным случаем знакопеременных рядов).

Теорема 2 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда): Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (4)$$

составленный из модулей членов ряда (3), сходится, то и ряд (3) также сходится.

➤ Очевидно двойное неравенство: $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. Т.к. по условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

сходится, то по теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ также сходится.

Но $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, откуда следует, что и ряд (3) сходится. $\square$

Замечание: Доказанная теорема представляет собой лишь достаточный признак сходимости знакопеременных рядов, т.е. знакопеременный ряд (3) может сходиться, а соответствующий ему

ряд (4) – расходиться (например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится). Однако, если,

применяя к ряду (4) признак Даламбера (или радикальный признак Коши), получим предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l > 1$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$), то в этом случае оба ряда – (3) и (4) – расходятся.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Если сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то такой знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*.

Теорема 2 утверждает, что всякий абсолютно сходящийся ряд – сходится.

Укажем свойства абсолютно сходящихся рядов:

1°. Если ряд (3) абсолютно сходится и имеет сумму S , то всякий ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (3).

2°. Абсолютно сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с суммами S_1 и S_2 соответственно можно почленно складывать и вычитать. В итоге получатся абсолютно сходящиеся ряды с суммами $S_1 + S_2$ и $S_1 - S_2$.

Т.о., абсолютно сходящиеся ряды обладают свойствами конечных сумм. Для условно сходящихся рядов эти свойства, в.г., не верны.

Пример: Легко проверить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ является условно сходящимся.

Обозначим его сумму через S , т.е. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = S$. При этом $S > 0$ по признаку Лейбница.

Переставим теперь члены ряда так, чтобы за одним положительным членом следовали два отрицательных:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2} S. \end{aligned}$$

Т.о., при такой перестановке слагаемых сумма ряда уменьшилась вдвое.

Теорема 3 (Римана): Если знакопеременный ряд сходится условно, то для любого числа $A \in \mathbb{R}$ можно так переставить слагаемые этого ряда, что после перестановки его сумма будет равна числу A . Кроме того, слагаемые условно сходящегося ряда можно переставить так, что полученный ряд окажется расходящимся.

Т.о., условная сходимость осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов, и поэтому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим. Абсолютная же сходимость основана на быстроте убывания членов ряда и от порядка их следования не зависит.

Упражнения: Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

§4. Функциональные ряды.

I. Функциональные ряды.

Пусть функции $u_i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$) определены в некоторой области D_x . Тогда выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

называется *функциональным рядом*.

Примеры: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-7)^{2n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$; $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$.

Придавая переменной x конкретное числовое значение x_0 , мы из (1) получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots, \quad (2)$$

который может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Если числовой ряд (2) сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда (1), если же расходится, то *точкой расходимости*. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости* (область сходимости $D \subset D_x$).

По аналогии с числовым рядом составим n -ую *частичную сумму* ряда (1): $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$. Тогда в области сходимости *сумма ряда* (1) определится равенством $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.

Функциональный ряд (1) называется *абсолютно сходящимся* на множестве D , если $\forall x \in D$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Пример: Найти сумму функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$.

$$\bullet S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \frac{b_1}{1-q} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2, & \text{если } x \neq 0. \end{cases} \bullet$$

Видим, что сумма функционального ряда, составленного из непрерывных функций, есть функция, разрывная в точке $x = 0$.

Пример: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ абсолютно сходится по теореме сравнения, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2 x$, составленный из производных – расходится в силу достаточного условия расходимости.

Последние два примера показывают, что сумма функционального ряда в общем случае не сохраняет свойств членов ряда.

Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* в области D к сумме $S(x)$, если

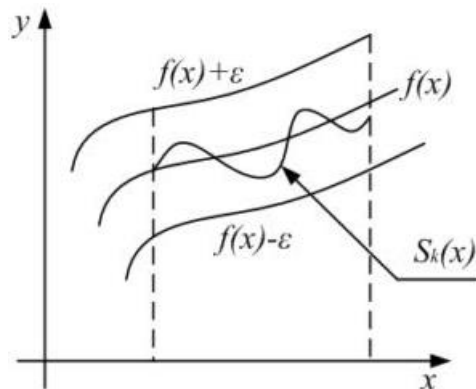
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in D (|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon). \quad (3)$$

Выполнение условия (3) означает, что, начиная с некоторого номера, графики всех частичных сумм $y = S_n(x)$ будут расположены в « ε -полосе» относительно графика суммы этого ряда $y = S(x)$ для всех $x \in D$.

При этом определение сходящегося в области D ряда можно записать в виде:

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon),$$

т.е. номер N зависит, вообще говоря, и от $\varepsilon > 0$, и от точки x .



Теорема 1 (мажорантный признак Вейерштрасса): Пусть для членов ряда (1) и некоторого множества D выполняется условие: $\forall x \in D \forall n \in \mathbb{N} (|u_n(x)| \leq a_n)$, причём числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда функциональный ряд (1) на множестве D сходится абсолютно и равномерно.

Замечание: Функциональный ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1, называется *мажорируемым*, а соответствующий числовой ряд – *мажорирующим*.

Можно доказать, что свойства равномерно сходящихся рядов аналогичны свойствам конечных сумм непрерывных функций:

1°. Если члены равномерно сходящегося функционального ряда (1) непрерывны на некотором отрезке $[a; b]$, то его сумма $S(x)$ также непрерывна на этом отрезке.

2°. Если члены ряда (1) непрерывны на отрезке $[a; b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то $\forall [\alpha; \beta] \subset [a; b]$ выполняется равенство $\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx$, причём полученный при почленном интегрировании ряд также будет равномерно сходящимся.

3°. Если члены ряда (1) непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[a; b]$ и ряд, составленный из производных, равномерно сходится на этом отрезке, то $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, т.е. равномерно сходящиеся ряды можно почленно дифференцировать.

Примеры: Найти области сходимости функциональных рядов:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$; / $D = \mathbb{R}$ /
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-2)^n}$; / $D = (-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$ /
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}$; / $D = (0; +\infty)$ /
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; / $D = (1; +\infty)$ /
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$; / $D = (-2; 2)$ /

II. Степенные ряды.

Важную роль в математике и её приложениях играют ряды, членами которых являются степенные функции аргумента $(x - x_0)$, где x_0 – некоторое постоянное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (4)$$

Ряд (4) является частным случаем функционального ряда (1) и называется *степенным рядом*. Область сходимости степенного ряда не пуста, т.к. содержит по крайней мере одну точку $x = x_0$.

С помощью линейной замены переменной ряд (4) легко приводится к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (5)$$

поэтому при изучении степенных рядов можно рассматривать только ряды вида (5).

Теорема 2 (теорема Абеля): Если степенной ряд (5) сходится при $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$.

► Пусть ряд (5) сходится в точке x_1 . Тогда, по определению, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ сходится.

Следовательно, по необходимому признаку сходимости, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$. Из свойств сходящихся последовательностей следует, что последовательность $\{a_n x_1^n\}$ является ограниченной, т.е.

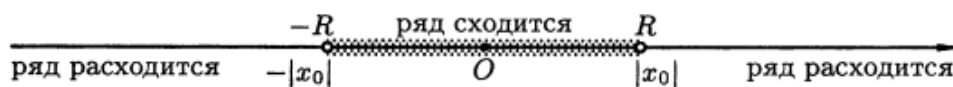
$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (|a_n x_1^n| \leq M)$. Пусть $|x| < |x_1|$, тогда величина $q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$. Следовательно,

$|a_n x^n| = \left| a_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n = |a_n x_1^n| \cdot q^n \leq M \cdot q^n$. Т.к. числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n$ является

сходящимся рядом геометрической прогрессии, то по мажорантному признаку Вейерштрасса ряд (5) абсолютно сходится при $|x| < |x_1|$. □

Следствие: Если ряд (5) расходится при $x = x_2$, то он расходится и при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_2|$.

Теорема Абеля и её следствие позволяют судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда:



Радиусом сходимости степенного ряда (5) называется такое неотрицательное число R , что при $|x| < R$ этот ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится. При этом интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (5). На концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Выведем формулу для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (5), для чего выпишем ряд, составленный из модулей членов этого ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + \dots + |a_n x^n| + \dots$

Фиксируем переменную $x \neq 0$ и применим к полученному знакоположительному ряду признак

Даламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \neq 0$. По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, и расходится при $|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Т.о., по определению,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (6)$$

Аналогично, применяя радикальный признак Коши, можно получить ещё одну формулу для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (5):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (7)$$

Замечания:

1) Если $R = 0$, то область сходимости ряда (5) состоит из единственной точки $x = 0$, а если $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

2) Интервалом сходимости степенного ряда (4) является интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3) Если степенной ряд содержит не все степени переменной x , т.е. задан неполный степенной ряд, то использовать формулы (6) и (7) нельзя. В этом случае интервал сходимости находят, непосредственно применяя признак Даламбера или Коши для ряда, составленного из модулей членов данного степенного ряда. При этом если показатели степени $(x - x_0)$ «идут» с регулярными пропусками, т.е. образуют некоторую арифметическую прогрессию с разностью k , то вместо формул (6) и (7) следует использовать одну из следующих формул:

$$R = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}, \quad (6')$$

$$R = \sqrt[k]{\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}. \quad (7')$$

Упражнение: Найти области сходимости степенных рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^3 + 2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n \cdot 3^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{3n-1}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}.$$

При исследовании числовых и функциональных рядов, одновременно содержащих выражения вида n^n и $n!$, часто бывает полезной следующая эквивалентность:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

которая называется *формулой Стирлинга*.

Пример: Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$.

• Находим радиус сходимости по формуле (6): $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e$. Следовательно, интервалом сходимости ряда является интервал $(-e; e)$. Исследуем сходимость при $x = e$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \stackrel{(8)}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n}$ – расходится по достаточному условию расходимости. При $x = -e$ – аналогично. Т.о., областью сходимости является интервал $(-e; e)$. •

Свойства степенных рядов:

1°. Степенной ряд (5) сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке $[a; b]$, целиком принадлежащем его интервалу сходимости $(-R; R)$.

2°. Сумма $S(x)$ степенного ряда (5) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R; R)$.

3°. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2 , можно почленно складывать, вычитать и умножать. При этом радиус сходимости суммы, разности и произведения рядов не меньше, чем $\min\{R_1; R_2\}$.

4°. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать. При этом для суммы ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (9)$$

при $x \in (-R; R)$ выполняется равенство:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \quad (10)$$

5°. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости. При этом для ряда (9) и $[a; x] \subset (-R; R)$ выполняется равенство:

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \dots + \int_a^x a_n t^n dt + \dots \quad (11)$$

Ряды (10) и (11) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (9).

§5. Разложение функций в степенные ряды.

I. Формула Тейлора.

Рассмотрим многочлен n -ой степени вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (1)$$

Выберем произвольное число x_0 и преобразуем многочлен (1) также в многочлен степени n , но относительно разности $(x - x_0)$, т.е. представим $P_n(x)$ в виде:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n. \quad (2)$$

Для нахождения коэффициентов продифференцируем равенство (2) n раз:

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1};$$

$$P''_n(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2};$$

$$P'''_n(x) = 3 \cdot 2A_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2A_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)A_n(x - x_0)^{n-3};$$

.....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot A_n.$$

Подставим $x = x_0$ в полученные равенства и равенство (2):

$$P_n(x_0) = A_0 \Rightarrow A_0 = P_n(x_0);$$

$$P'_n(x_0) = A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{P'_n(x_0)}{1!};$$

$$P''_n(x_0) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!};$$

$$P'''_n(x_0) = 3 \cdot 2A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3!};$$

.....

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot A_n \Rightarrow A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в равенство (2), получим разложение многочлена n -ой степени по степеням $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (3)$$

Формула (3) называется *формулой Тейлора для многочлена степени n* .

Пример: Разложить многочлен $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ по степеням $(x - 3)$.

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Оказывается, при определённых условиях её можно приближённо представить в виде многочлена (3) и дать оценку погрешности этого приближения.

Теорема 1: Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Тогда $\forall x \in U(x_0)$ найдётся точка c , лежащая между x и x_0 , т.ч.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}. \quad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора для функции $f(x)$* , а функция

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (5)$$

называется *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*. $R_n(x)$ есть погрешность приближённого равенства $f(x) \approx P_n(x)$. Т.о., формула Тейлора позволяет заменить функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ с точностью до остаточного члена $R_n(x)$.

При $x_0 = 0$ получим частный случай формулы Тейлора – *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (6)$$

где точка c находится между 0 и x .

II. Ряды Тейлора и Маклорена.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков в окрестности точки x_0 , то из формулы Тейлора (4) получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$, называемое *рядом Тейлора*:

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (7)$$

При $x_0 = 0$ получим разложение функции $f(x)$ в *ряд Маклорена*:

$$f(x) \sim f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (8)$$

Формально ряд Тейлора можно построить для любой бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции $f(x)$. Однако полученный ряд может оказаться расходящимся, либо сходиться, но не к функции $f(x)$.

Теорема 2: Для того, чтобы ряд Тейлора (7) функции $f(x)$ сходилась к $f(x)$ в точке x , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член (5) формулы Тейлора стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Т.о., для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена необходимо:

- 1) найти производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$;
- 2) вычислить значения функции $f(x)$ и её производных в точке $x_0 = 0$;
- 3) выписать ряд (8) для функции $f(x)$ и найти его интервал сходимости;
- 4) найти интервал $(-R; R)$, в котором $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Если такой интервал существует, то в нём функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

На практике часто пользуются более простой теоремой, которая даёт достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора:

Теорема 3: Если модули всех производных функции $f(x)$ ограничены в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, то $\forall x \in U(x_0)$ ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т.е. имеет место разложение (7).

Таблица разложений элементарных функций в ряд Маклорена.

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad x \in \begin{cases} [-1;1], & \text{если } \alpha \geq 0; \\ (-1;1], & \text{если } -1 < \alpha < 0; \\ (-1;1), & \text{если } \alpha \leq -1; \end{cases}$$

$$5) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1;1);$$

$$6) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1;1];$$

$$7) \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$8) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

▷ Докажем справедливость разложения 1): $\forall n \in \mathbb{N} \left(f^{(n)}(x) = e^x \right) \Rightarrow e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$\forall x \in (-R; R) \left| f^{(n)}(x) \right| = e^x < e^R =: M$. По теореме 3 $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ ряд сходится к функции e^x . □

§6. Приложения степенных рядов.

I. Приближённое вычисление значений функций.

Рассмотрим вопрос о нахождении значения функции $y = f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Пусть в интервале сходимости $(-R; R)$ функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Маклорена:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

Тогда точное значение $f(x_1)$ равно сумме числового ряда, который получается из ряда (1) при $x = x_1$, т.е.

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + \dots \quad (2)$$

На практике ряд (2) заменяют его частичной суммой: $f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$, причём число n подбирают таким образом, чтобы $|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| < \varepsilon$, где $R_n(x_1) = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \dots$ – остаток ряда Маклорена.

Если ряд (2) является знакочередующимся и удовлетворяет признаку Лейбница, то по следствию из признака Лейбница $|R_n(x_1)| < |a_{n+1}x_1^{n+1}|$, т.е. достаточно найти член ряда, по модулю меньший ε , и отбросить все члены, начиная с найденного. В остальных случаях записывают остаточный член в форме Лагранжа и подбирают n т.ч. $|R_n(x_1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x_1^{n+1} \right| < \varepsilon$ для всех чисел c , находящихся между 0 и x_1 .

Пример: Найти $\cos 2$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

• Т.к. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$, то $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} + \dots$

Этот знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому ищем n , удовлетворяющее неравенству $\left| (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{2^{2n}}{(2n)!} < \varepsilon$:

$$1 > \varepsilon; \quad \frac{2^2}{2!} = 2 > \varepsilon; \quad \frac{2^4}{4!} \approx 0,6667 > \varepsilon; \quad \frac{2^6}{6!} \approx 0,0889 > \varepsilon; \quad \frac{2^8}{8!} \approx 0,0063 > \varepsilon; \quad \frac{2^{10}}{10!} \approx 0,0003 < \varepsilon.$$

Т.о., $\cos 2 \approx 1 - 2 + 0,6667 - 0,0889 + 0,0063 = -0,416$. •

Пример: Вычислить число e с точностью $\varepsilon = 0,001$.

• Т.к. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, то $e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$. Запишем остаточный член

последнего ряда в форме Лагранжа: $|R_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!}$, где $c \in (0; 1)$.

Т.к. $e^c < e^1 < 3$, то ищем n , удовлетворяющее неравенству $3/(n+1)! < \varepsilon$: $n = 6$.

Т.о., $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} \approx 1 + 1 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,718$. •

II. Приближённое вычисление определённых интегралов.

Если первообразная функции f не выражается через конечное число элементарных функций либо её вычисление приводит к громоздким выкладкам, то определённый интеграл вида $\int_a^b f(x)dx$ можно вычислять приближённо с помощью степенных рядов.

Чтобы вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$, нужно:

- 1) разложить подынтегральную функцию в ряд Маклорена;
- 2) почленно проинтегрировать полученный ряд на отрезке $[a; b]$ (этот отрезок должен полностью содержаться в области сходимости ряда);
- 3) Найти сумму полученного числового ряда с требуемой точностью.

Пример: Вычислить $\int_0^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$. / интеграл – «небериющийся» /

$$\bullet 1) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{ откуда } \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots$$

$$2) \int_0^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{1/3} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \dots \right) \Big|_0^{1/3} =$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 3^2} + \frac{1}{3^5 5^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1} (2n+1)^2} + \dots$$

3) Последний знакочередующийся ряд удовлетворяет признаку Лейбница, поэтому ищем наименьшее n , удовлетворяющее условию $\left| (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1} (2n+1)^2} \right| < \varepsilon = 0,0001$:

$$\frac{1}{3} = 0,33333 > \varepsilon; \quad \frac{1}{3^3 3^2} = 0,00412 > \varepsilon; \quad \frac{1}{3^5 5^2} = 0,00016 > \varepsilon; \quad \frac{1}{3^7 7^2} < \varepsilon.$$

$$\text{Т.о., } \int_0^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx 0,33333 - 0,00412 + 0,00016 = 0,3294. \bullet$$

Упражнение: Вычислить $\int_0^{1/5} e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Замечание: Указанным приёмом (путём разложения подынтегральной функции в степенной ряд с последующим интегрированием этого ряда) можно находить и неопределённые интегралы.

Упражнение: Найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функции $f(x)$ и $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ носят названия соответственно *функции Гаусса* и *функции Лапласа* и играют важную роль в теории вероятностей и математической статистике.

III. Приближённое решение дифференциальных уравнений.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y'' = f(x; y; y'), \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_1. \quad (4)$$

Если ДУ (3) нельзя проинтегрировать в квадратурах или его интегрирование трудоёмко, то решение этого уравнения обычно ищут в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (5)$$

Значения $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ берутся из начальных условий (4), $y''(x_0)$ находится из уравнения (3) при подстановке в его правую часть начальных условий. Далее, дифференцируя обе части равенства (3) по x и подставляя в правую часть $x = x_0$ и уже найденные производные, получим $y'''(x_0)$, $y^{IV}(x_0)$, $y^V(x_0)$, ... Найденные значения производных подставляем в равенство (5). Частичная сумма полученного ряда и будет приближённым решением ДУ (3).

Данный метод решения ДУ называется *методом последовательного дифференцирования* и может быть применён к ДУ любого порядка, разрешённому относительно старшей производной.

Пример: Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения ДУ $y'' - xy' + y^2 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

• Т.к. $x_0 = 0$, будем искать решение ДУ в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$y'' = xy' - y^2 \Rightarrow y''(0) = 0 \cdot y'(0) - y^2(0) = 0 - 0 = 0;$$

$$y''' = (y' + xy'') - 2yy' \Rightarrow y'''(0) = (y'(0) + 0 \cdot y''(0)) - 2y(0)y'(0) = 1;$$

$$y^{IV} = 2y'' + xy''' - 2(y')^2 - 2yy'' \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y''(0) + 0 \cdot y'''(0) - 2(y'(0))^2 - 2y(0)y''(0) = -2;$$

$$y^V = 3y''' + xy^{IV} - 6y'y'' - 2yy''' \Rightarrow y^V(0) = 3y'''(0) + 0 \cdot y^{IV}(0) - 6y'(0)y''(0) - 2y(0)y'''(0) = 3.$$

Т.о., решение ДУ имеет вид:

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{-2}{4!}x^4 + \frac{3}{5!}x^5 + \dots \approx x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{40} \cdot$$

Упражнение: Найти 5 первых отличных от нуля членов разложения в степенной ряд решения ДУ $y'' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальным условиям $y(-1) = 2$; $y'(-1) = \frac{1}{2}$.

/ Решение ищем в виде: $y(x) = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n + \dots$ /

Для решения линейных ДУ с переменными коэффициентами наиболее удобен *метод неопределённых коэффициентов*. Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \quad (6)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_1. \quad (7)$$

Предположим, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды Тейлора по степеням $(x - x_0)$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$. Будем искать частное решение $y = y(x)$ уравнения (6) в виде степенного ряда с неопределёнными коэффициентами:

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots \quad (8)$$

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий (7): $c_0 = y_0$, $c_1 = y_1$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (8) дважды и подставляем $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (6), заменив функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ их разложениями. В результате получим тождество, из которого, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, найдём недостающие числа $c_2, c_3, c_4, \dots$. Построенный ряд сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения (6).

Пример: С помощью метода неопределённых коэффициентов найти первые 4 члена разложения в степенной ряд решения ДУ $4x^2y'' + y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 0,5$.

• Т.к. $x_0 = 1$, будем искать решение ДУ в виде ряда Тейлора:

$$y = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)^2 + c_3(x - 1)^3 + \dots + c_n(x - 1)^n + \dots, \text{ где } c_0 = y(1) = 1, \quad c_1 = y'(1) = 0,5.$$

Дважды дифференцируем это равенство:

$$y' = 0,5 + 2c_2(x - 1) + 3c_3(x - 1)^2 + 4c_4(x - 1)^3 + \dots + nc_n(x - 1)^{n-1} + \dots;$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3(x - 1) + 12c_4(x - 1)^2 + 20c_5(x - 1)^3 + \dots + n(n - 1)c_n(x - 1)^{n-2} + \dots$$

Раскладываем функцию $4x^2$ по степеням $(x - 1)$:

$$4x^2 = 4((x - 1)^2 + 2x - 1) = 4((x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1) = 4(x - 1)^2 + 8(x - 1) + 4.$$

Подставляем y и y' в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} & \left[4(x - 1)^2 + 8(x - 1) + 4 \right] \cdot \left[2c_2 + 6c_3(x - 1) + 12c_4(x - 1)^2 + 20c_5(x - 1)^3 + \dots \right] + \\ & + \left[1 + 0,5(x - 1) + c_2(x - 1)^2 + c_3(x - 1)^3 + \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Приравниваем коэффициенты: } \begin{cases} 8c_2 + 1 = 0; \\ 16c_2 + 24c_3 + 0,5 = 0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} c_2 = -1/8; \\ c_3 = 1/16. \end{cases}$$

$$\text{Т.о., решение ДУ имеет вид: } y(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(x - 1)^3 + \dots \bullet$$

Упражнение: Решить задачу Коши: $y'' + xy' + y = x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. / $y(x) = \sin x$ /

ГЛАВА IX

Линейное программирование

§1. Задачи линейного программирования.

Математическое программирование – раздел математики, в котором разрабатываются теория и методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Математическая модель задачи математического программирования включает:

- 1). Совокупность неизвестных величин $x_1; x_2; \dots; x_n$, образующих план задачи $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$.
- 2). Целевую функцию $f(X)$, которая задаёт критерий оптимальности задачи.
- 3). Совокупность ограничений, налагаемых на неизвестные величины. Эти ограничения образуют область допустимых планов Ω .

Схематически модель задачи математического программирования выглядит так:

$$\begin{cases} f(X) \rightarrow \text{extr}; \\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Линейное программирование – это раздел математического программирования, который исследует модели экстремальных задач с линейной целевой функцией и системой ограничений, состоящей из линейных уравнений и неравенств.

Рассмотрим примеры задач линейного программирования (ЗЛП).

I. Задача о наилучшем использовании ресурсов.

Пусть некоторое предприятие может выпускать n различных видов продукции P_j ($j = \overline{1, n}$). При производстве продукции предприятие использует m видов ресурсов R_i ($i = \overline{1, m}$), причём их количества равны соответственно b_i у.е. Известна цена реализации c_j одной единицы продукции P_j . Известны также технологические коэффициенты a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), которые указывают, сколько единиц i -го ресурса требуется для производства одной единицы j -й продукции. Требуется определить, какие виды продукции и в каких количествах нужно производить, чтобы обеспечить предприятию максимум объёма реализации при имеющихся ресурсах.

Составим математическую модель задачи. Пусть $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ – искомый план производства ($\langle$ компонента x_j равна объёму производства j -й продукции $\rangle$). Т.к. c_j – цена реализации одной единицы j -й продукции, то цена реализованных x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общий объём реализации – $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$. Т.к. $a_{ij} x_j$ – расход i -го ресурса на производство x_j единиц j -ой продукции, то общий расход этого ресурса составит $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$. Исходя из экономического смысла задачи, получим следующую модель:

[illegible]

$$\begin{cases} \max f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (1)$$

II. Задача о диете.

Составим математическую модель задачи. Пусть $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ – искомый план закупок (*< компонента x_j равна количеству закупаемого продукта j -го вида >*). Т.к. c_j – стоимость одной единицы продукта P_j , то за всю купленную продукцию j -го вида покупатель заплатит $c_j x_j$ у.е., а за всю корзину продуктов он заплатит $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ у.е. Очевидно, количество i -го питательного вещества во всех купленных продуктах равно $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$. Исходя из смысла задачи, получим следующую модель:

[illegible]

$$\begin{aligned} \min f(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Задача (2) также является задачей линейного программирования.

§2. Графический метод решения ЗЛП.

ЗЛП с двумя переменными всегда может быть решена графически. *< случай двух переменных не имеет особого практического значения, но его рассмотрение проясняет свойства ЗЛП, а также приводит к идее её решения >*

Пусть дана ЗЛП

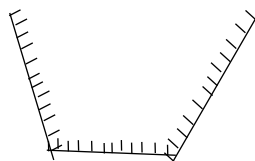
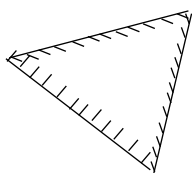
[illegible]

где c_j, a_{ij}, b_i ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2}$) – заданные действительные числа, а $X = (x_1; x_2)$ – план задачи.

Каждое из неравенств системы ограничений задаёт на плоскости $x_1 O x_2$ некоторую полуплоскость. Их пересечение образует область допустимых планов задачи (1).

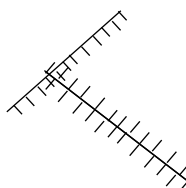
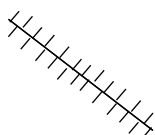
Изобразим все возможные случаи:

- 1). Выпуклый многоугольник. 2). Неограниченная многоугольная область.



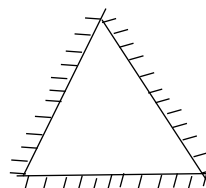
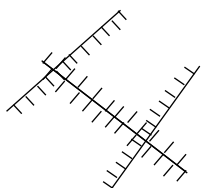
- ### 3). Прямая линия.

- 4). Луч.



- 5). Отрезок.

- 6). Пустое множество.



Рассмотрим решение задачи для 1-го случая: пусть областью допустимых планов ЗЛП является выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Выберем произвольное значение целевой функции $f(X) = f_0$. Получим уравнение прямой линии $c_1x_1 + c_2x_2 = f_0$. Пусть эта линия пересекает область допустимых планов в точках M и N .

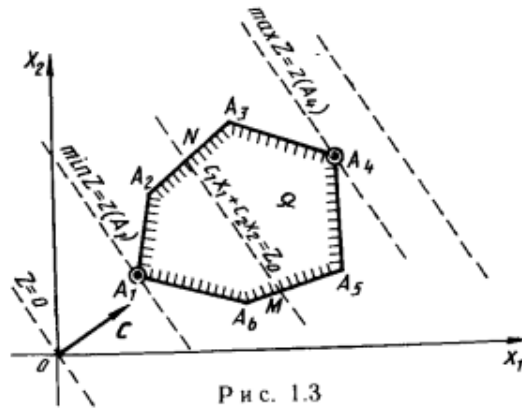


Рис. 1.3

Во всех точках прямой MN сохраняет одно и то же постоянное значение f_0 . Меняя это значение, получим целое семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня целевой функции*.

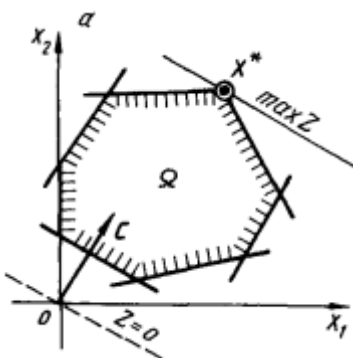
Известно, что направлением наискорейшего возрастания функции нескольких переменных является направление её вектора градиента. Поэтому наискорейшее возрастание целевой функции происходит в направлении $\text{grad } f(X) = (f'_{x_1}; f'_{x_2}) = (c_1; c_2)$. Очевидно, вектор $\vec{c} = (c_1; c_2)$ перпендикулярен линиям уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Получаем алгоритм графического решения двумерной ЗЛП:

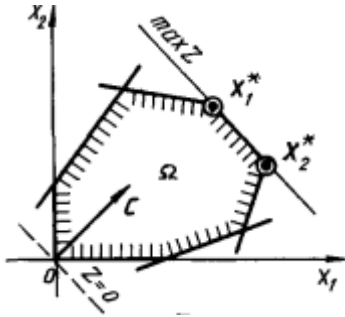
- 1). С учётом системы ограничений строим область допустимых планов Ω .
- 2). Строим вектор градиента $\vec{c} = (c_1; c_2)$.
- 3). Проводим произвольную линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ перпендикулярно направлению вектора $\vec{c}$ (*например, линию, проходящую через начало координат*).
- 4). При решении задачи на максимум перемещаем линию уровня в направлении вектора $\vec{c}$, т.ч. она касалась области допустимых планов в её крайнем положении. Такое положение линии уровня называется *разрешающим*. В случае решения задачи на минимум линию уровня перемещаем в противоположном направлении.
- 5). Определяем оптимальный план $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции

Рассмотрим возможные варианты.

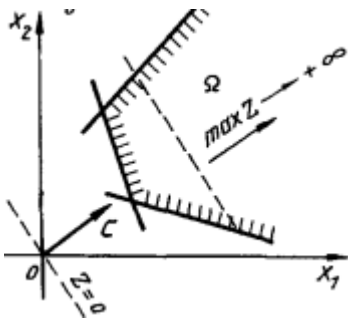
- 1). Оптимальный план – единственный: линия уровня в разрешающем положении имеет с областью Ω единственную общую точку (возможные случаи 1, 2, 4, 5).



2). Оптимальных планов – бесконечное множество: линия уровня в разрешающем положении проходит через сторону области Ω (случаи 1 – 5).



3). Оптимального плана нет. Либо целевая функция неограниченна в области Ω (случаи 2, 3, 4), либо $\Omega = \emptyset$ (случай 6).



Пример: Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой

$$Z = x + 2y$$

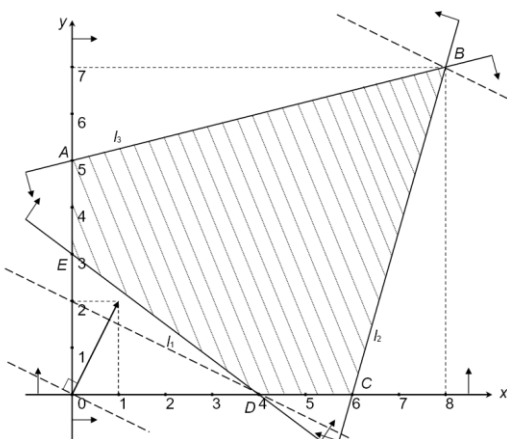
функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y :

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12, \\ 7x - 2y \leq 42, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$\bullet \quad l_1: 3x + 4y = 12 \quad l_1: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ y & 3 & 0 \end{array},$$

$$l_2: 7x - 2y = 42 \quad l_2: \begin{array}{c|c|c} x & 6 & 8 \\ y & 0 & 7 \end{array}, \quad l_3: -x + 4y = 20 \quad l_3: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ y & 5 & 6 \end{array}$$

Построим указанные прямые. Получим область.



Находим вектор $\text{grad } Z = (1; 2)$ и откладываем его от начала координат (при этом конец данного вектора будет находиться в точке с координатами $(1; 2)$). Перпендикулярно вектору градиента строим линию уровня (например, проводя ее через начало координат).

Будем перемещать линию уровня в направлении вектора $\text{grad } Z$ до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку максимума B .

Таким образом, $\max Z = Z(8; 7) = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 22$.

Далее будем перемещать линию уровня в противоположном направлении до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку минимума D .

Таким образом, $\min Z = Z(4; 0) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4$. •

§3. Двойственность в ЛП.

I. Симметричные двойственные задачи.

Понятие двойственности рассмотрим на примере задачи оптимального использования сырья.

Пусть на предприятии решили рационально использовать отходы основного производства. В плановом периоде появились отходы сырья m видов в объёмах b_i единиц ($i = \overline{1, m}$). Из этих отходов, учитывая специализацию предприятия, можно наладить выпуск n видов неосновной продукции. Пусть a_{ij} – норма расхода i -го сырья на единицу j -й продукции ($j = \overline{1, n}$), c_j – цена реализации единицы j -й продукции. Тогда план производства $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, обеспечивающий предприятию максимум выручки, находится из следующей ЗЛП:

[illegible]

Предположим теперь, что с самого начала при изучении вопроса об использовании отходов основного производства на предприятии появилась возможность реализации их некоторой организации. Необходимо установить прикидочные цены $Y = (y_1; y_2; \dots; y_m)$ на эти отходы. Эти цены должны быть установлены исходя из следующих требований:

- 1). Покупающая организация стремится минимизировать общую стоимость отходов сырья.
- 2). Предприятие согласно уступить отходы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той, что могло бы получить, организовав собственное производство.

Требование 1 запишется в виде $\min g(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$.

Рассмотрим требование 2: Предприятие откажется от выпуска продукции первого вида, если $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$, где левая часть неравенства – выручка за сырьё, идущее на единицу продукции 1-го вида, правая часть – её прикидочная цена. Аналогичные оценки справедливы и для других видов продукции. Т.о., получаем следующую ЗЛП:

$$\begin{cases} \min g(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m ; \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 ; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 ; \\ \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n ; \\ y_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Переменные $y_i \ (i = \overline{1, m})$ называются двойственными оценками (теневыми ценами).
Задачи (1) и (2) называют парой взаимно двойственных ЗЛП.

Запишем эти задачи в кратком виде:

<u>Прямая задача:</u> $\max f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j;$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (3)$	<u>Двойственная задача:</u> $\min g(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i;$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq c_j \ (j = \overline{1, n}); \\ y_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (4)$
---	---

Заметим, что каждая из задач (3), (4) является двойственной для другой задачи. Сопоставляя эти задачи, легко установить следующие взаимосвязи:

- 1). Если прямая задача – на максимум, то двойственная к ней – на минимум, и наоборот.
- 2). Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются правыми частями ограничений двойственной задачи, и наоборот.
- 3). Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.
- 4). Задаче на максимум соответствуют неравенства типа “ $\leq$ ”, а задаче на минимум – неравенства “ $\geq$ ”.
- 5). Число переменных прямой задачи равно числу ограничений двойственной задачи, и наоборот.
- 6). Все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Пример: Для ЗЛП

$$\begin{cases} \max f(X) = 4x_1 + 2x_2; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 \leq 4; \\ 2x_1 + x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

задача

$$\begin{cases} \min g(Y) = 6y_1 + 4y_2 + 12y_3; \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4; \\ y_1 + y_2 \geq 2; \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0. \end{cases}$$

является двойственной

II. Несимметричные двойственные задачи.

Рассмотрим ЗЛП на максимум в канонической форме:

$$\begin{cases} \max f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (5)$$

Приведём её к задаче в симметричной форме:

$$\begin{aligned} \max f(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = \overline{1, m}); \\ \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i & (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Введём двойственные переменные y'_i и y''_i ($i = \overline{1, m}$) для каждой системы ограничений в (6). Тогда задача, двойственная к ЗЛП (6), примет вид:

$$\begin{aligned} \min g(Y) &= \sum_{i=1}^m b_i y'_i - \sum_{i=1}^m b_i y''_i; & \min g(Y) &= \sum_{i=1}^m b_i (y'_i - y''_i); \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} y'_i - \sum_{i=1}^m a_{ji} y''_i \geq c_j & (j = \overline{1, n}); \\ y'_i \geq 0, y''_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}), \end{cases} & \text{откуда} & \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} (y'_i - y''_i) \geq c_j & (j = \overline{1, n}); \\ y'_i \geq 0, y''_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}), \end{cases} \end{aligned}$$

Введём новые переменные $y_i = y'_i - y''_i$ ($i = \overline{1, m}$) и будем считать, что переменная y_i соответствует i -му ограничению-равенству задачи (5). Тогда двойственная к (5) ЗЛП запишется в виде:

$$\begin{aligned} \min g(Y) &= \sum_{i=1}^m b_i y_i; \\ \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i &\geq c_j & (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом переменные y_i могут принимать значения любых знаков (в т.ч., могут равняться нулю), и на них не нужно налагать условия неотрицательности.

Пусть исходная задача имеет ограничения любых типов. Тогда пару двойственных задач можно записать в виде:

<u>Прямая задача:</u> $\begin{aligned} \max f(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = \overline{1, m_1}); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = \overline{m_1 + 1, m}); \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n_1}). \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$	<u>Двойственная задача:</u> $\begin{aligned} \min g(Y) &= \sum_{i=1}^m b_i y_i; \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq c_j & (j = \overline{1, n_1}); \\ \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i = c_j & (j = \overline{n_1 + 1, n}); \\ y_i \geq 0 & (i = \overline{1, m_1}). \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$
---	---

Т.о., двойственная задача со смешанными ограничениями составляется с соблюдением следующих дополнительных правил:

- 1). Если на переменную x_j прямой задачи наложено условие неотрицательности, то j -е ограничение двойственной задачи записывается в виде неравенства, и наоборот.
- 2). Если на переменную x_j прямой задачи не наложено условие неотрицательности, то j -е ограничение двойственной задачи записывается в виде строгого равенства, и наоборот.
- 3). Если в прямой задаче имеются ограничения-равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не налагаются условия неотрицательности.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Пример:} & \max f(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5; & \\
 & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \leq 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \leq -4; \\ x_1 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \min g(Y) = 5y_1 + 8y_2 + 9y_3 - 4y_4; \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 2; \\ -3y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 = -1; \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_4 \geq 1; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 = -3; \\ -y_2 + 2y_3 + y_4 = 1; \\ y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}
 \end{array}$$

§4. Симплексный метод решения ЗЛП.

Графический метод целесообразно применять лишь в случае двух переменных. Для решения задач большей размерности будем использовать симплексный метод.

Симплексный метод предполагает:

- 1) умение находить начальный опорный план;
- 2) наличие признака оптимальности опорного плана;
- 3) умение переходить к нехудшему опорному плану.

I. Построение начального опорного плана.

Пусть система ограничений ЗЛП имеет вид $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$ (здесь и далее будем предполагать, что все переменные удовлетворяют условию неотрицательности).

Говорят, что ограничение ЗЛП имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения – с коэффициентом, равным нулю. Эта переменная называется *предпочтительной*.

Пример: В системе ограничений
$$\begin{cases} \underline{x_1} + 2x_2 - x_4 = 7; \\ x_2 + 5x_4 = 3; \\ 2x_2 + \underline{x_3} - 7x_4 = 1 \end{cases}$$
 1-е и 3-е ограничения имеют предпочтительный вид, а 2-е – нет.

Говорят, что система ограничений ЗЛП имеет *предпочтительный вид*, если каждое уравнение этой системы имеет предпочтительный вид. В этом случае легко найти опорный план задачи: переменные, не являющиеся предпочтительными (свободные), нужно приравнять к нулю, тогда предпочтительные переменные (базисные) будут равны правым частям соответствующих ограничений.

Пример: В системе ограничений
$$\begin{cases} x_1 + \underline{x_2} - x_5 = 8; \\ 3x_2 + \underline{x_3} + 5x_5 = 3; \\ -2x_1 + \underline{x_4} - 7x_5 = 10 \end{cases}$$
 базисными являются переменные x_2, x_3, x_4 , а свободными – переменные x_1, x_5 . Поэтому начальный опорный план $X^0 = (0; 8; 3; 10; 0)$.

Пусть теперь система ограничений ЗЛП имеет вид $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$.

В этом случае задача приводится к каноническому виду с помощью дополнительных (балансовых) переменных, которые добавляются к левым частям неравенств. В результате получим эквивалентную ЗЛП с ограничениями $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \underline{x_{n+i}} = b_i, b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$, которые имеют предпочтительный вид. Следовательно, начальный опорный план новой задачи

запишется в виде: $\tilde{X}^0 = \left(\underbrace{0; 0; \dots; 0}_n; \underbrace{b_1; b_2; \dots; b_m}_m \right)$. Решив эту задачу, т.е. найдя её оптимальный план $\tilde{X}^* = \left(\underbrace{x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*}_n; \underbrace{x_{n+1}^*; x_{n+2}^*; \dots; x_{n+m}^*}_m \right)$, мы сразу же получим и оптимальный план исходной задачи: $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$. При этом экстремальные значения обеих задач будут одинаковыми, т.к. дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

Пример: Система ограничений
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 18; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 \leq 13; \\ -x_1 + x_3 + 5x_4 \leq 9 \end{cases}$$
 преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 + \underline{x_5} = 18; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 + \underline{x_6} = 13; \\ -x_1 + x_3 + 5x_4 + \underline{x_7} = 9, \end{cases} \text{ где } x_5, x_6, x_7 - \text{балансовые переменные. Начальным опорным}$$

планом новой задачи является план $\tilde{X}^0 = (0; 0; 0; 0; 18; 13; 9)$.

Пусть теперь система ограничений ЗЛП имеет вид $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$.

В этом случае задача приводится к каноническому виду с помощью балансовых переменных, которые вычитаются из левых частей неравенств. Однако полученные в результате ограничения $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, b_i \geq 0$ не имеют предпочтительного вида, т.к. балансовые переменные входят в левые части равенств с коэффициентами, равными -1 .

Поэтому план $\tilde{X}^0 = \left(\underbrace{0; 0; \dots; 0}_n; \underbrace{-b_1; -b_2; \dots; -b_m}_m \right)$ не является опорным.

В этом случае вводится т.н. *искусственный базис*. К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные w_i . В целевую функцию эти переменные вводятся с коэффициентом M в случае задачи на минимум и с коэффициентом $-M$ в случае задачи на максимум (M – большое положительное число). Полученная задача называется *M-задачей*, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Пусть исходная ЗЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} \max(\min) f(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j; \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \ b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

причем ни одно из ограничений не имеет предпочтительного вида. Тогда соответствующая ей *M-задача* запишется в виде:

$$\begin{aligned} \max(\min) \tilde{f}(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j - (+) \sum_{i=1}^m M w_i; \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + w_i = b_i & (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}); \\ w_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}), \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где знак “–” в целевой функции относится к задаче на максимум, а знак “+” – к задаче на минимум. Ограничения задачи (2) имеют предпочтительный вид. Её начальным опорным

планом будет план $\tilde{X}^0 = \left(\underbrace{0; 0; \dots; 0}_n; \underbrace{b_1; b_2; \dots; b_m}_m \right)$.

Рассмотрим, как связаны между собой задачи (1) и (2):

Теорема 1: Если в оптимальном плане

$$\tilde{X}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*; w_1^*; w_2^*; \dots; w_m^*) \quad (3)$$

M -задачи (2) все искусственные переменные $w_i^* = 0 \ (i = \overline{1, m})$, то план

$$X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*) \quad (4)$$

является оптимальным планом исходной задачи (1).

Δ Т.к. план $\tilde{X}^*$ отличается от плана X^* только последними нулевыми компонентами, то план X^* является допустимым для исходной задачи (1). Допустим, что он не является оптимальным. Тогда в случае задачи на максимум $\exists X^1 \ (f(X^1) \geq f(X^*))$. Но тогда $\tilde{f}(\tilde{X}^1) = f(X^1) \geq f(X^*) = \tilde{f}(\tilde{X}^*)$, а это противоречит оптимальности плана $\tilde{X}^*$ задачи (2).

В случае задачи на минимум доказательство то же □

Теорема 2: Если в оптимальном плане M -задачи (2) х.б. одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т.е. её условия несовместны.

Δ Рассмотрим задачу на максимум. Пусть $w_{i_0} > 0$. Тогда целевая функция M -задачи примет вид $\tilde{f}(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j - M w_{i_0}$. Поскольку $M > 0$ – достаточно большое число, то при $w_{i_0} \rightarrow \infty$ целевая функция будет неограниченно стремиться к $-\infty$, что противоречит её максимизации. □

Итак, чтобы решить задачу с ограничениями, не имеющими предпочтительного вида, вводят искусственный базис и решают полученную M -задачу. Если в результате её решения получен оптимальный план, в котором все искусственные переменные равны нулю, то его первые n компонентов дают оптимальный план исходной задачи.

II. Признак оптимальности опорного плана.

Пусть исходная задача решается на максимум. Можно доказать, что, если для некоторого опорного плана все оценки свободных переменных $\Delta_j \ (j = \overline{1, n})$ неотрицательны, то такой план оптимален.

Пусть исходная задача решается на минимум. Также доказывается, что, если для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_j \ (j = \overline{1, n})$ неположительны, то такой план оптимален.

III. Переход к нехудшему опорному плану.

Рассмотрим задачу на максимум. Пусть не все $\Delta_j \ (j = \overline{1, n})$ неотрицательные. То среди симплексных отношений выбирают наименьшее неотрицательное. Это отношение определяет разрешающую строку. На пересечении разрешающей строки и столбца находится разрешающий элемент. Переходим к 1-й итерации.

Переход к 1-й и последующим итерациям осуществляется по плану:

- 1) соответствующая переменная в разрешающей строке заменяется на переменную соот-ую разрешающему столбцу;
- 2) все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
- 3) остальные элементы разрешающего столбца заполняют нулями;
- 4) все остальные элементы включая индексную строку определяют по правилу прямоугольника:

При этом столбец, соответствующей базисной переменной, содержит одну единицу.

Замечание: Контроль вычислений для каждой таблицы осуществляется путём проверки индексной строки по правилу заполнения этой строки для нулевой итерации.

При решении задач симплексным методом используется след. правило:

1) (признак бесконечности множества оптимальных планов). Если в индексной строке последней симпл. табл., содержащей опт. план имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов, один из которых найден;

2) (признак неограниченности целевой функции). Если в индексной строке симплексной таблицы в задаче на максимум содержится отрицательная оценка (разрешающий столбец, а в нём нет ни одного положительного элемента), то целевая функция на множестве допустимых планов неограниченна сверху ($z = +\infty$).

Аналогичным образом может решаться задача на минимум с ограничениями – равенствами, имеющими предпочтительный вид. Выбор разрешающего столбца определяется наибольшим по модулю положительным элементом в индексной строке. Оптимальный план соответствует неположительной индексной строке. Симплексные отношения определяются теми же правилами.

§5. Транспортная задача.

Транспортная задача формулируется следующим образом. В m пунктах отправления $A_1, \dots, A_m$ сосредоточен однородный груз в количествах $a_1, \dots, a_m$ единиц. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям $B_1, \dots, B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, \dots, b_n$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i -го ($i = \overline{1, m}$) пункта отправления в j -й ($j = \overline{1, n}$) пункт назначения. Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются.

Для построения экономико-математической модели транспортной задачи рассмотрим матрицу

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \text{ где } x_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \text{ обозначает количество единиц груза, который}$$

необходимо доставить из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения. Эта матрица называется *матрицей перевозок*. Предполагается, что все $x_{ij} \geq 0$.

Транспортные расходы запишем в форме матрицы $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ и назовем ее *матрицей тарифов*.

Для наглядности условия ТЗ можно представить таблицей, которую назовём *распределительной*.

Поставщик	Потребитель				Запас груза a_i
	B_1	B_2	...	B_n	
	Заграты на перевозку 1 ед. груза, доставка				
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребность в грузе b_i	b_1	b_2	...	b_n	

Переменные $x_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ должны удовлетворять ограничениям по запасам, потребностям и условиям неотрицательности.

В математической форме эти условия можно записать так:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}), \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

Цель транспортной задачи – минимизировать общие затраты на реализацию плана перевозок, которые можно представить функцией

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (***)$$

Математически транспортная задача ставится так: даны система ограничений (*) при условии (**) и линейная функция (***). Требуется среди множества решений системы (*) найти такое неотрицательное решение, при котором линейная функция (*** минимизируется.

Будем называть план перевозок $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ допустимым, если он удовлетворяет ограничениям (*) и (**).

Допустимый план перевозок, доставляющий минимум целевой функции (***), называется оптимальным.

Модель транспортной задачи называют закрытой, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщика, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство:

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Если для ТЗ выполняется одно из условий: $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то модель транспортной задачи называют открытой.

Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую. Так при выполнении первого условия необходимо ввести фиктивный пункт назначения. Спрос фиктивного потребителя полагают равным небалансу, а все тарифы одинаковыми, чаще всего равными нулю.

Аналогично при выполнении второго условия вводится фиктивный поставщик, запас груза у которого равен небалансу, а все тарифы дополнительной строки распределительной таблицы равны нулю.

При преобразовании открытой задачи в закрытую целевая функция не меняется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

Построение опорных планов и все преобразования проводятся в распределительной таблице. Если в плане перевозок переменная x_{ik} равна некоторому числу $a \neq 0$, то это число записываем в соответствующую клетку $(i; k)$ и считаем ее занятой или базисной, если же $x_{ik} = 0$, то клетку $(i; k)$ оставляем свободной. При этом число занятых опорным планом клеток должно быть равно $m + n - 1$.

Начальный опорный план строится по методу северо-западного угла или по методу минимального элемента.

Далее нужно проверить является ли план оптимальным. Для этого вычисляем потенциалы поставщиков u_i и потребителей v_j , решив систему уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$. Потенциалы считаются для базисных клеток.

Далее вычисляем оценки Δ_{ij} для всех свободных клеток по формуле $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} < 0$, то полученный оптимальный план единственный. В случае, если хотя бы одна оценка $\Delta_{ij} = 0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением целевой функции.

Если для опорного плана перевозок указанное условие оптимальности не выполняется, то за счет загрузки свободной клетки с максимально положительной оценкой план перевозок улучшается. Для наиболее перспективной свободной клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписывают знаки: свободной клетке – плюс, следующей по часовой или против часовой стрелке занятой клетке минус, след. – плюс и т.д. Из поставок в клетках цикла с «отрицательными» вершинами выбирается наименьшее количество λ груза, которое и перемещается по клеткам цикла: прибавляется к поставкам в положительных вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушится. В общем случае цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом. Цикл включает одну свободную клетку и остальные занятые. Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Цикл строится лишь для свободной клетки.

ГЛАВА X

Программирование на сетях

§6. Потоки на сетях.

I. Основные понятия.

Теория потоков возникла первоначально в связи с разработкой методов решения задач, связанных с рациональной перевозкой грузов. Схема доставки груза представлялась в виде графа, по ребрам которого проходит подлежащий максимизации поток этого груза. Позднее обнаружилось, что к задаче о максимальном потоке сводятся и другие важные оптимизационные практические задачи, такие, например, как задача отыскания минимального по стоимости плана выполнения комплекса работ при заданной его продолжительности; задача об определении максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной сети каналов связи из одного пункта в другой; задача об оптимальных назначениях; различные задачи организации снабжения; задачи, связанные с наиболее экономным строительством энергетических сетей, железных и шоссейных дорог и много других прикладных задач.

Основным в теории потоков является понятие сети.

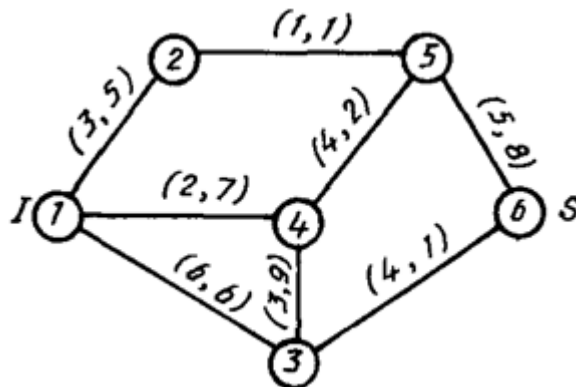
Сеть – это взвешенный конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины I , являющейся входом (*истоком*) графа, к вершине S , являющейся выходом (*стоком*) графа. Для наглядности будем представлять, что по ребрам (i, j) сети из истока I в сток S направляется некоторое вещество (груз, ресурс, информация). В теории потоков предполагается, что если ребро (i, j) входит в сеть, то в сеть входит и ребро (j, i) . Ребрам сети присваивается одна или несколько числовых характеристик.

Общее количество вершин сети будем обозначать через n .

Максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i, j) , называется его пропускной способностью. В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если вершины k и l на сети не соединены, то $r_{kl} = r_{lk} = 0$. Пропускные способности сети можно задать квадратной матрицей R n -ого порядка. Поскольку $r_{ii} = 0$, на главной диагонали этой матрицы стоят нули.

Пример: Рассмотрим сеть:

Здесь $n=6$, и поэтому матрица R – шестого порядка.



$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	3	6	2	0	0
2	5	0	0	0	1	0
3	6	0	0	3	0	4
4	7	0	9	0	4	0
5	0	1	0	2	0	5
6	0	0	1	0	8	0

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро (i, j) в единицу времени, называется *поток по ребру* (i, j) .

Если поток из вершины i в вершину j равен x_{ij} , то поток из вершины j в вершину i будет равен $-x_{ij}$, т.е.

$$x_{ji} = -x_{ij} \quad (1)$$

Принимается также, что $x_{ii} = 0$.

Если поток x_{ij} по ребру (i, j) меньше его пропускной способности, $x_{ij} < r_{ij}$, то ребро (i, j) называют *ненасыщенным*, если же $x_{ij} = r_{ij}$, то – *насыщенным*.

Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем рёбрам (i, j) сети называют потоком по сети или просто потоком.

Из физического смысла грузопотока следует, что поток по каждому ребру (i, j) не может превышать его пропускную способность, т.е.

$$x_{ij} \leq r_{ij}, i, j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Для любой вершины, кроме истока I и стока S , количество вещества, поступающего в эту вершину, равно количеству вещества, вытекающего из неё, т.е.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, i \neq I, S. \quad (3)$$

Это ограничение называют условием сохранения потока: в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают. Отсюда следует, что общее количество вещества, вытекающего из истока I , совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток S , т.е.

$$f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{is}, \quad (4)$$

где j – конечные вершины рёбер, исходящих из I ; i – начальные вершины рёбер, входящих в S . Линейную функцию f называют *мощностью потока* на сети.

II. Постановка задачи о максимальном потоке.

Задачу о максимальном потоке можно сформулировать следующим образом: найти совокупность $X^* = \{x_{ij}^*\}$ потоков x_{ij}^* по всем рёбрам (i, j) сети, которая удовлетворяет условиям (1)-(3) и максимизирует линейную функцию (4).

Алгоритм построения максимального потока:

- 1) Построить некоторый начальный поток $X^0 = \{x_{ij}^0\}$.
- 2) Организовать процедуру составления подмножества A вершин, достижимых из истока I по ненасыщенным рёбрам. Если в этом процессе сток S не попадёт в подмножество A , то построенный поток максимальный и задача решена. Если же S попал в A , то перейти к пункту (3) алгоритма.
- 3) Выделить путь из I в S , состоящий из ненасыщенных рёбер, и увеличить поток x_{ij} по каждому ребру этого пути на величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берётся по рёбрам (i, j) упомянутого пути. Тем самым будет построен новый поток $X^1 = \{x_{ij}^1\}$. После этого надо возвратиться к пункту (2) алгоритма.

При выполнении пункта (3) на каждом шаге по крайней мере одно из ненасыщенных рёбер становится насыщенным (именно то, которое соответствует Δ), а поскольку число рёбер в сети конечно, через конечное число шагов максимальный поток будет построен.

III. Разрез на сети. Теорема Форда-Фалкерсона.

Пусть дана некоторая сеть. Разобьём множество вершин сети на два непересекающихся подмножества A и B так, чтобы исток I попал в подмножество A , а сток S – в подмножество B . В этом случае говорят, что на сети произведён разрез, отделяющий исток I от стока S . В результате произведённого разбиения вершин появятся рёбра (i, j) , конечные точки которых окажутся в разных подмножествах. Совокупность рёбер (i, j) , начальные точки которых принадлежат подмножеству A , а конечные – подмножеству B , называют разрезом сети обозначают A/B .

Величина $R(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}$, представляющая собой сумму пропускных способностей r_{ij} всех рёбер разреза, называется *пропускной способностью разреза*.

Пусть на сети задан поток $X = \{x_{ij}\}$ и произведён разрез A/B . Величина $X(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij}$, представляющая собой сумму потоков x_{ij} по всем рёбрам разреза, называется *потоком через разрез*.

Если на сети задан поток $X = \{x_{ij}\}$ и произведён разрез A/B , то хотя бы одно ребро любого полного пути, ведущего из истока I в сток S , будет обязательно принадлежать разрезу A/B . При этом величина потока по любому полному пути не превышает

пропускную способность каждого его ребра, а потому величина X суммарного потока, устремлённого из истока I в сток S , не может превысить пропускную способность любого разреза сети, т.е. $\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} \leq \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}$.

Если удастся построить на сети поток $X^* = \{x_{ij}^*\}$, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза A/B , то этот поток будет максимальным, а разрез A/B обладает минимальной пропускной способностью.

Теорема (Форда-Фалкерсона): На любой сети максимальная величина потока из истока I в сток S равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего I от S .

§7. Элементы сетевого планирования.

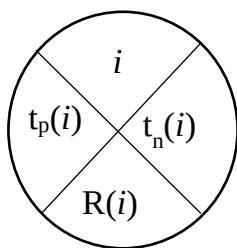
Иногда необходимо управлять сложными комплексами взаимосвязанных работ, направленных на достижение определённых целей. Примерами таких комплексов в экономике могут быть: комплекс мероприятий по реконструкции и модернизации производства; комплекс мер по внедрению нового технологического процесса; совокупность работ, связанных с автоматической обработкой прогнозной и плановой информации с помощью ЭВМ и др. При этом возникает ряд важных проблем, например: наилучшая организация проведения отдельных работ с тем, чтобы завершить весь комплекс в кратчайший срок; наиболее рациональное распределение ресурсов, минимизирующее суммарные затраты по выполнению всех работ; выявление перечня работ, выполнение которых в первую очередь влияет на окончание в срок всего комплекса и др.

При планировании и оперативном управлении сложными комплексами работ, объединённых общностью цели, с успехом используются их графические модели – сетевые графики (сети). С математической точки зрения сетевой график – это связный орграф без петель и контуров.

Под работой понимают любые действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определённым результатам. Работы изображают стрелками. У каждой стрелки проставляется время выполнения работы.

Под событием понимают результат завершения одной или нескольких работ. События изображают кружками, в которых указывают номер или шифр события.

Сетевые графики имеют одно исходное событие и одно завершающее событие.



i – номер события;

$t_p(i)$ – ранний срок свершения события;

$t_n(i)$ – поздний срок свершения события;

$R(i)$ – резерв времени события i ;

Ранний срок $t_p(i)$ свершения события i – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию. Имеет место равенство:

$$t_p(i) = \max_{(i;j) \in U_j^+} (t_p(i) + t(i;j)). \quad (1)$$

U_j^+ – множество работ, входящих в j -е событие;

$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы $(i; j)$;

$t(i; j)$ – продолжительность работы $(i; j)$

Поздний срок $t_n(i)$ наступления события i – это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием. Имеет место равенство:

$$t_n(i) = \min_{(i;j) \in U_i^-} (t_n(j) + t(i; j)). \quad (2)$$

U_i^- – множество работ, выходящих из i -го события;

$t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы $(i; j)$;

Разность между поздним и ранним сроками свершения события i составляет резерв $R(i)$ времени этого события: $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$.

Резерв $R(i)$ показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без изменения срока наступления завершающего события S .

$L_{крит}$ – критический путь, он проходит через вершины с нулевым резервом времени.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Методические указания для проведения
практических занятий по дисциплине
«Высшая математика»

ГЛАВА I

Математический анализ

Предел числовой последовательности.

Задание 1. Найти предел последовательности.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $x_n = \frac{5n^4 - 3n^2 + 2}{3n^3 - 2n - n}$ | 11. $x_n = \frac{1 + 3n^5 - 8n^8}{3 - n^2 + 2n^8}$ | 21. $x_n = \frac{1 - 2n^2 - 9n^5}{3n^7 + 7n^3 - 5n}$ |
| 2. $x_n = \frac{3 - 4n^4 + 5n^6}{2n^8 + 4n^2 - 7}$ | 12. $x_n = \frac{2n^5 + 3n^4 + 2n}{5n^2 - 2n + 4}$ | 22. $x_n = \frac{3 + 2n^3 - 6n^5}{2n - n^2 - 3n^5}$ |
| 3. $x_n = \frac{1 + 5n^2 + 4n^4}{2 - 3n^3 - 2n^4}$ | 13. $x_n = \frac{9 - 4n - 2n^2}{6n^4 + 8n^2 - 5n}$ | 23. $x_n = \frac{5n^7 + n^5 + 1}{n^5 - 2n^3 - 4}$ |
| 4. $x_n = \frac{7n^8 - 2n^6 + n}{2 - 4n^2 - 3n^3}$ | 14. $x_n = \frac{9n^7 - 2n^8 + 2n}{3n^7 + 7n - 4}$ | 24. $x_n = \frac{4 + 2n^3 - 5n^4}{n - 3n^5 + 6n^7}$ |
| 5. $x_n = \frac{2 + 4n^3 - 5n^4}{7 + 7n^3 - 6n^8}$ | 15. $x_n = \frac{7n^6 + 3n^4 + 8n}{3 - 5n - n^5}$ | 25. $x_n = \frac{6n^3 - 3n^2 + 5}{n^3 - 7n + 2}$ |
| 6. $x_n = \frac{1 + 5n^4 + 8n^9}{4n^9 - 5n^7 + n}$ | 16. $x_n = \frac{n - 4n^2 + 5n^3}{2 - 7n^4 + 6n^5}$ | 26. $x_n = \frac{4 - 3n^2 + 6n^9}{n^8 - 5n^5 - n}$ |
| 7. $x_n = \frac{3n^4 + n^5 + 8n^7}{2n^3 + 5n^2 - 1}$ | 17. $x_n = \frac{4n^8 + 3n^6 - 2}{1 - 4n^7 - 4n^8}$ | 27. $x_n = \frac{3 - 2n^4 + 8n^5}{n^6 + 6n^5 - 2}$ |
| 8. $x_n = \frac{3n^3 - 2n^2 + 4}{3n^5 - 7n - 1}$ | 18. $x_n = \frac{7 - 2n^4 + 4n^6}{2 - 6n^2 + 3n^4}$ | 28. $x_n = \frac{n - 2n^2 - 8n^4}{2n^4 - 6n^3 + 1}$ |
| 9. $x_n = \frac{5 - 4n^3 - 9n^9}{9n^9 + 7n^6 - n}$ | 19. $x_n = \frac{5n^4 + n^2 + 2}{2n^6 - 9n^4 - 4n}$ | 29. $x_n = \frac{9n^3 - 3n^2 + 5}{2n^2 + 5n - 2}$ |
| 10. $x_n = \frac{1 + 5n^3 - n^8}{3n - n^6 + 2n^7}$ | 20. $x_n = \frac{6 + 9n - 5n^2}{4 - 2n + n^2}$ | 30. $x_n = \frac{5n^3 - n^2 + 2n}{3n^8 - 2n^6 - 1}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^7 - 3x^5 + 2}{x^6 - 5x^9 - x}$.

• При $x \rightarrow +\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е. мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^7 - 3x^5 + 2}{x^6 - 5x^9 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^9 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^9} \right)}{x^9 \left(\frac{1}{x^3} - 5 - \frac{1}{x^8} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^9}}{\frac{1}{x^3} - 5 - \frac{1}{x^8}} = \frac{0}{-5} = 0,$$

т.к. выражения $\frac{4}{x^2}, \left(-\frac{3}{x^4}\right), \frac{2}{x^9}, \frac{1}{x^3}, \left(-\frac{1}{x^8}\right)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$. •

Предел функции.

Задание 1. Найти предел функции, не используя правила Лопиталья.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{3x^2 - 5x - 2}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 9x + 4}{x^2 + x - 12}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 5x - 3}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{5x^2 + 23x - 10}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{4x^2 - 13x - 12}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 11x + 10}{x^2 + 3x - 10}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{3x^2 - 10x + 7}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 15x + 18}{x^2 - 8x + 12}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 12x + 4}{x^2 + x - 2}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{7x^2 + 5x - 2}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 11x - 12}{x^2 + 4x - 21}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{4x^2 - 19x - 5}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 8x - 16}{x^2 + 6x + 8}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + x - 30}{3x^2 + 20x + 12}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 15x + 7}{x^2 - 5x - 14}$ |

Задание 2. Найти предел функции.

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+2}}{x^2 - 25}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{\sqrt{7+x} - \sqrt{11+2x}}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{7x-4}}{x^2 + 3x - 10}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 20}{\sqrt{3-x} - \sqrt{-9-4x}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5x+7} - \sqrt{1-x}}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{-9x+7} - \sqrt{8-8x}}{x^3 + 1}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{5x+6} - \sqrt{7x-6}}{x^2 - 5x - 6}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 4x - 21}{\sqrt{-2x-5} - \sqrt{2-x}}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+11}}{x^2 + 7x - 10}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x-5} - \sqrt{x+1}}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 8x^2 + 7x}{\sqrt{3x+8} - \sqrt{2x+7}}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 5x - 3}{\sqrt{1-5x} - 4}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3 - \sqrt{2x-5}}{6 - \sqrt{5x+1}}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{6-5x} - \sqrt{4-6x}}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 8x^2 + 15x}{\sqrt{3-5x} - \sqrt{-3-7x}}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3-2x} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 9}$ |

Задание 3. Найти предел функции.

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-2} \right)^{5x+8}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-3x}{7-3x} \right)^{\frac{2x-3}{5}}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x-3}{7x+4} \right)^{2x-5}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6-x}{2-x} \right)^{\frac{7-3x}{2}}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+1}{4x-9} \right)^{3-5x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5+2x}{9+2x} \right)^{3x-5}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+6x}{5+6x} \right)^{4x+1}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x+2}{7x-3} \right)^{\frac{4+3x}{9}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x}{5-2x} \right)^{\frac{5x+2}{7}}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-6x}{9-6x} \right)^{\frac{3-4x}{5}}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+5} \right)^{5-x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-3}{4x+7} \right)^{\frac{4-x}{5}}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-8x}{7-8x} \right)^{3x+4}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+2}{5x+8} \right)^{\frac{4-2x}{3}}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x-3}{8x+2} \right)^{5-8x}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти предел функции, не используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 3x - 9}$.

• При $x \rightarrow -3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, т.е. мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Квадратное уравнение $x^2 - 5x - 24 = 0$ имеет корни (-3) и 8 . Значит,

$$x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8).$$

Квадратное уравнение $2x^2 + 3x - 9$ имеет корни (-3) и $1,5$. Значит,

$$2x^2 + 3x - 9 = 2(x + 3)(x - 1,5) = (x + 3)(2x - 3).$$

Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 3x - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 8)}{(x + 3)(2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 8}{2x - 3} = \frac{-3 - 8}{2 \cdot (-3) - 3} = \frac{-11}{-9} = \frac{11}{9}.$$

Пример 2. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{2 - \sqrt{3x-8}}$.

• При $x \rightarrow 4$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для раскрытия этой неопределённости умножим числитель и знаменатель на выражения, сопряжённые числителю и знаменателю.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{2 - \sqrt{3x-8}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{5+x} - 3)(\sqrt{5+x} + 3)(2 + \sqrt{3x-8})}{(2 - \sqrt{3x-8})(2 + \sqrt{3x-8})(\sqrt{5+x} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left((\sqrt{5+x})^2 - 3^2\right)(2 + \sqrt{3x-8})}{\left(2^2 - (\sqrt{3x-8})^2\right)(\sqrt{5+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(2 + \sqrt{3x-8})}{(12-3x)(\sqrt{5+x} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 + \sqrt{3x-8}}{-3 \cdot (\sqrt{5+x} + 3)} = \frac{2 + \sqrt{3 \cdot 4 - 8}}{-3 \cdot (\sqrt{5+4} + 3)} = \frac{2 + \sqrt{3 \cdot 4 - 8}}{-3 \cdot (\sqrt{5+4} + 3)} = -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}. \bullet
\end{aligned}$$

Пример 3. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+7}{4x+3} \right)^{8x-2}$.

• При $x \rightarrow +\infty$ получаем неопределённость вида $[1^\infty]$. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+7}{4x+3} \right)^{8x-2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+3+4}{4x+3} \right)^{8x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+3}{4x+3} + \frac{4}{4x+3} \right)^{8x-2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{4x+3} \right)^{8x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{4x+3}{4} \right)} \right)^{8x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{4x+3}{4} \right)} \right)^{\left(\frac{4x+3}{4} \right) \left(\frac{4}{4x+3} \right) (8x-2)} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{4x+3} \right) (8x-2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{32x-8}{4x+3} \right)} = e^{\frac{32}{4}} = e^8. \bullet
\end{aligned}$$

Эквивалентные бесконечно малые функции.

Задание 1. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \arcsin 4x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{\arcsin^2(\operatorname{tg}(x + 2))}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(e^{2x-6} - 1)}{1 - \cos(6 - 2x)}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2^{8x} - 1)}{\operatorname{tg}(4x)}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_3(1 + \sin(x - 2))}{x^3 - 8}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 5x}{\ln(1 + \sin 2x)}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\log_5(1 + 2x)}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{1 - \cos(2x + 8)}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin^2(\operatorname{tg}(5 - x))}{x^3 - 25x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{x-3} - 1}{x^2 + 2x - 15}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\ln(1 + \sin(x + 6))}{x^2 - 36}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6x}{\cos 8x - \cos 2x}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5^x - 1)}{x^2 + x}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{\ln(1 + \sin(6 + 2x))}$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\arcsin(2x))}{\cos 3x - \cos 5x}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{\sin(3-x)} - 1}{x^2 - 9}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(1 - \cos(8x))}{\ln(1 + 4x)}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3(\ln(1 + 2x))}{7x^2 + 4x}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(4 - 8x)}{(1 - 2x)^3 - 1}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{\ln(1 + \sin(5 - x))}$ | 27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - \cos(4 - 2x)}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\operatorname{tg}^2(6x)}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin((1 + 2x)^6 - 1)}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\log_4(1 + 5x))}{x^3 + 2x^2 + 5x}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(e^x - 1)}{\cos 5x - \cos x}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 16x}{\arcsin(\operatorname{tg}(4 - x))}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{3x-6} - 1}{1 - \cos(4 - 2x)}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{3-3x} - 1)}{x^2 - 4x + 3}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_6(1 + \operatorname{tg}(5x))}{x^3 - 6x^2 + 8x}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - \cos 3x}{\operatorname{arctg} 2x}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - \sin^2 3x}{x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

- При $x \rightarrow 0$ получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости используем эквивалентные бесконечно малые функции. Вначале преобразуем выражение.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - \sin^2 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x - \sin 3x) \cdot (\sin 5x + \sin 3x)}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{5x+3x}{2} \sin \frac{5x-3x}{2} \cdot \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x \sin x \cdot \sin 4x \cos x}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot 1 \cdot \sin x \cdot \sin 4x \cdot 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \sin 4x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \\ \sin 4x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 4x. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot x \cdot 4x}{x^2} = 16 \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $\cos 4x$ и $\cos x$ стремятся к единице при $x \rightarrow 0$. •

Непрерывность функции.

Задание 1. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -1, \\ x^2 + 3, & -1 \leq x < 2, \\ 5, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$16. \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5, & x \leq -1, \\ (x-1)^2, & -1 < x \leq 4, \\ 7 - x, & x > 4. \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x < -4, \\ x^2 + 4x + 5, & -4 \leq x \leq 1, \\ 11 - x, & x > 1. \end{cases}$$

$$17. \quad f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x \leq -1, \\ 2x + 3, & -1 < x < 2, \\ -x^2 + 5, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < -2, \\ -x^2 - 2x + 3, & -2 \leq x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$18. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ x^2 - 5, & -1 < x \leq 2, \\ -(1-x)^2, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} (x+3)^2, & x \leq -2, \\ -x^2 + 3, & -2 < x \leq 1, \\ 3x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$19. \quad f(x) = \begin{cases} -2x - 3, & x < -4, \\ 5, & -4 \leq x < 1, \\ x^2 - 4x + 5, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} 5x + 8, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 2, \\ -x^2 + 6x - 4, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$20. \quad f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -1, \\ x^2 - 4, & -1 < x \leq 3, \\ 11 - 2x, & x > 3. \end{cases}$$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 2, \\ -x^2 + 8x - 7, & 2 < x \leq 7, \\ 2x - 9, & x > 7. \end{cases}$$

$$21. \quad f(x) = \begin{cases} -4x - 29, & x < -4, \\ -x^2 - 2x - 5, & -4 \leq x \leq 0, \\ x - 6, & x > 0. \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 11, & x < -3, \\ -x^2 + 5, & -3 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$22. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1, \\ 2x - 5, & 1 < x \leq 4, \\ x^2 - 10x + 15, & x > 4. \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 10, & x \leq -1, \\ 3, & -1 < x < 2, \\ -x^2 + 6x - 4, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$23. \quad f(x) = \begin{cases} -2x - 7, & x \leq -5, \\ x^2 + 4x - 3, & -5 < x < 0, \\ x - 3, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, & x < 3, \\ x - 6, & 3 \leq x < 6, \\ (x-6)^2, & x \geq 6. \end{cases}$$

$$24. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 3, & x \leq -2, \\ -(x-1)^2, & -2 < x \leq 3, \\ 5 - 2x, & x > 3. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} -3, & x < 2, \\ x^2 - 10x + 15, & 2 \leq x \leq 7, \\ 1 - x, & x > 7. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < -4, \\ -3x - 5, & -4 \leq x < -2, \\ -x^2 + 5, & x \geq -2. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 7, & x < 1, \\ x^2 - 6x + 1, & 1 \leq x \leq 7, \\ x - 5, & x > 7. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} -x^2 - 10x - 15, & x < -1, \\ -x^2 + 4x - 1, & -1 \leq x \leq 4, \\ x - 3, & x > 4. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x + 7, & x < -3, \\ x^2 - 4, & -3 \leq x \leq 4, \\ 12, & x > 4. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} -3x, & x < 1, \\ -x^2 + 6x - 8, & 1 \leq x \leq 6, \\ 7 - 2x, & x > 6. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7, & x < -1, \\ x^2 - 4x - 5, & -1 \leq x < 6, \\ 2x - 7, & x \geq 6. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 9, & x \leq 2, \\ -x^2 + 10x - 15, & 2 < x \leq 8, \\ 2x - 9, & x > 8. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 5, & x < 0, \\ 5, & 0 \leq x \leq 3, \\ -x^2 + 8x - 7, & x > 3. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} -7 - 2x, & x \leq -4, \\ x + 5, & -4 < x < 1, \\ (x - 2)^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 1, \\ x^2 - 6x + 10, & 1 < x \leq 6, \\ 2x - 9, & x > 6. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & x < -3, \\ x^2 - 6, & -3 \leq x \leq 2, \\ -x, & x > 2. \end{cases}$$

Решение типового варианта

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \leq -2, \\ x^2 - 7, & -2 < x \leq 3, \\ 2, & x > 3. \end{cases}$ на непрерывность и

построить её график.

• Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; +\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

Для точки $x_1 = -2$ имеем:

$$f(-2 - 0) = \lim_{x \rightarrow -2 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2 - 0} (2x + 5) = 1,$$

$$f(-2 + 0) = \lim_{x \rightarrow -2 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2 + 0} (x^2 - 7) = -3,$$

$$f(x_1) = f(-2) = 2x + 5|_{x=-2} = 1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x)$, но оба существуют и конечны, то функция $f(x)$ в точке $x_1 = -2$ имеет разрыв первого рода со скачком функции: $|1 - (-3)| = 1 + 3 = 4$.

Для точки $x_2 = 3$ имеем:

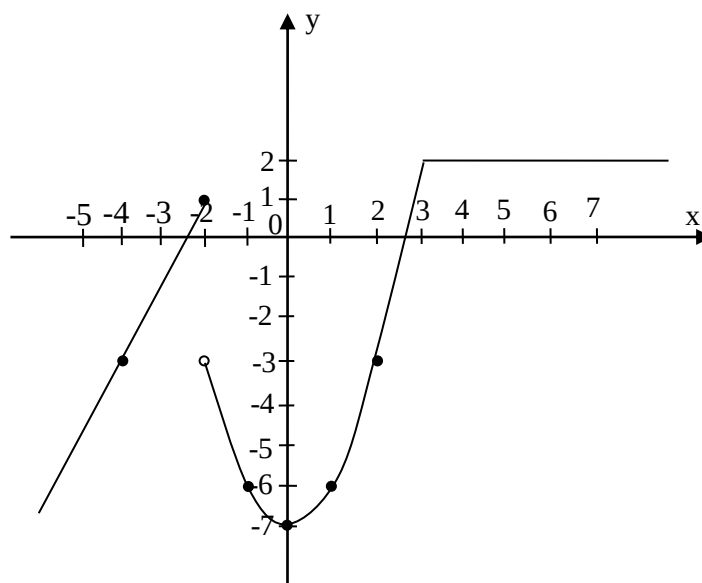
$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x^2 - 7) = 2,$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 2 = 2,$$

$$f(x_2) = f(3) = 2|_{x=3} = 2.$$

Так как $f(3-0) = f(3+0) = f(3)$, то функция $f(x)$ в точке $x_2 = 3$ является непрерывной.

График функции имеет вид:



ГЛАВА II

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производная функции.

Задание 1. Найти производную функции.

$$1. y = 5\sqrt{x} + \frac{4}{x^3} - 7x^2 + 2\sqrt[3]{x^4}$$

$$2. y = \frac{3}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 5x^6 + 2x$$

$$3. y = 3x^4 - \frac{5}{\sqrt[7]{x^3}} - 2x^7 + \frac{6}{x^8}$$

$$4. y = 4\sqrt{x^5} - \frac{2}{x} + 3x^6 + \frac{6}{\sqrt{x^7}}$$

$$5. y = 4\sqrt{x^7} - \frac{1}{6\sqrt{x^5}} - \frac{8}{x} - 5$$

$$6. y = 6x - 3x^5 + \frac{5}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x^9}}$$

$$7. y = \frac{6}{x^2} - \sqrt[3]{x^5} + 2x^4 - \frac{1}{3x}$$

$$8. y = 5\sqrt[3]{x^4} - 2x + 4x^7 - \frac{5}{7x^6}$$

$$9. y = 8x^3 - \frac{1}{x^2} + 9\sqrt[3]{x^4} - 3x$$

$$10. y = \frac{1}{2x^3} + 6x - \frac{4}{\sqrt[3]{x^5}} - 2\sqrt{x^7}$$

$$11. y = 4\sqrt[7]{x^6} - \frac{2}{x^4} + 3x^4 - \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

$$12. y = 3\sqrt{x^5} - \frac{1}{6x^3} + 3x - \frac{8}{\sqrt[5]{x^7}}$$

$$13. y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2x^4} + 3x^5 - 8\sqrt{x}$$

$$14. y = \frac{6}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}} - 3x^3 + 3$$

$$15. y = 4\sqrt{x} + \frac{5}{x^4} + \sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{7x}$$

$$16. y = \frac{4}{3x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^5 - 8\sqrt{x^3}$$

Задание 2. Найти производную функции.

$$1. y = \ln^3(x^2 - 5) \cdot \cos \sqrt{\lg 2x}$$

$$2. y = \frac{\arccos^4(e^{2-3x^4})}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x-3)}}$$

$$3. y = \operatorname{arctg}(\ln(7-2x)) \cdot \sqrt{\operatorname{sh}(x \cos 7)}$$

$$4. y = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ch} 3x}}{\ln(5^{1-6x} - 3x^7)}$$

$$5. y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}(2^x + x^3)} \cdot \log_2(e^{3-\sin x})$$

$$6. y = \frac{\sqrt{\cos(2^{\operatorname{th} x^4})}}{\arcsin^3(4+x^3)}$$

$$7. y = \log_4^5(x^4 - 5x^2) \cdot \operatorname{tg}(\sin^2 2x)$$

$$8. y = \frac{\log_4(\operatorname{ch}^5(1-x))}{\operatorname{tg} \sqrt{\sin 5x}}$$

$$9. y = \sqrt[4]{\ln^3(3-x^2)} \cdot \operatorname{cth}(5^{2x} - 3x^5)$$

$$10. y = \frac{e^{\arccos x^4}}{\ln^6(\operatorname{cth} \sqrt[5]{5x^6 - 2})}$$

$$11. y = \arccos^4(\operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{\ln(e^x - x \sin 5)}$$

$$12. y = \frac{\operatorname{arccotg}(\log_3^5(3x+1))}{\sqrt{\cos^3(5x^3 - \ln 2)}}$$

$$13. y = \operatorname{tg}(\log_2^4(5x^3)) \cdot (3e^{5x} - 5)^3$$

$$14. y = \frac{(\ln^4 x - \sin x^3)^6}{e^{\operatorname{sh}(2\sqrt{x}-3)}}$$

$$15. y = \arcsin(\operatorname{ch}^5 4x) \cdot \ln \sqrt{\operatorname{tg}^7 (x^2 - 3^x)} \quad 16. y = \frac{\sqrt[7]{3^{5x} - \operatorname{ctg} x}}{\cos(\arcsin^3(\ln x))}$$

Задание 3. Найти производные первого и второго порядков функции $y = y(x)$.

$$\begin{array}{lll} 1. \operatorname{tg}(2x^2 - 7y) = x & 2. \begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t^4 \end{cases} & 3. e^{xy} + 2x = y^3 \\ 4. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2 \\ y = \ln t^4 \end{cases} & 5. \ln \frac{y}{x} + 2x^2 + y = 0 & 6. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 3} \\ y = (t^2 + 3)^2 \end{cases} \\ 7. \sqrt{xy} + \operatorname{tg} y = 3 & 8. \begin{cases} x = \arccos t \\ y = (1 - t^2)^{-1/2} \end{cases} & 9. \sin^2(x - y^4) = x \\ 10. \begin{cases} x = e^{-4t+3} \\ y = t^2 e^{2t+3} \end{cases} & 11. 2^{xy} + \sin y = 1 & 12. \begin{cases} x = (t+2)^{-1} \\ y = t^3(t+2)^{-1} \end{cases} \\ 13. xy = x^2 + \operatorname{arctg} y & 14. \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^2 \ln t \end{cases} & 15. \operatorname{tg} x + e^{xy} = 5 \end{array}$$

Решение типового варианта

Пример 1. Продифференцировать функцию $y = \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} - 7x^6 + \frac{3}{5x^4} - 8$.

$$\begin{aligned} \bullet y' &= \left(\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} - 7x^6 + \frac{3}{5x^4} - 8 \right)' = \left(6x^{-\frac{3}{5}} - 7x^6 + \frac{3}{5}x^{-4} - 8 \right)' = \left(6x^{-\frac{3}{5}} \right)' - (7x^6)' + \\ &+ \left(\frac{3}{5}x^{-4} \right)' - (8)' = 6 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) x^{-\frac{3}{5}-1} - 7 \cdot 6x^{6-1} + \frac{3}{5} \cdot (-4)x^{-4-1} = -\frac{18}{5}x^{-\frac{8}{5}} - 42x^5 - \frac{12}{5}x^{-5} = \\ &= -\frac{18}{5\sqrt[5]{x^8}} - 42x^5 - \frac{12}{5x^5}. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2. Продифференцировать функции:

$$a) y = \arcsin^5(1 - 3x^2) \cdot \log_5(\operatorname{tg} \sqrt{x}); \quad б) y = \frac{\cos^3(2^{3x-1})}{e^{2x-5x^4+2}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet a) y' &= \left(\arcsin^5(1 - 3x^2) \cdot \log_5(\operatorname{tg} \sqrt{x}) \right)' = \left(\arcsin^5(1 - 3x^2) \right)' \cdot \log_5 \left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \arcsin^5(1 - 3x^2) \cdot \left(\log_5 \left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \right) \right)' = 5 \arcsin^4(1 - 3x^2) \cdot \left(\arcsin(1 - 3x^2) \right)' \cdot \log_5(\operatorname{tg} \sqrt{x}) + \end{aligned}$$

$$+ \arcsin^5(1-3x^2) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 5} \cdot \left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \right)' = 5 \arcsin^4(1-3x^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-3x^2)^2}} \cdot (1-3x^2)' \cdot$$

$$\cdot \log_5(\operatorname{tg} \sqrt{x}) + \arcsin^5(1-3x^2) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 5} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = 5 \arcsin^4(1-3x^2) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-3x^2)^2}} \cdot (-6x) \cdot \log_5(\operatorname{tg} \sqrt{x}) + \arcsin^5(1-3x^2) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 5} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{30x \cdot \arcsin^4(1-3x^2) \cdot \log_5(\operatorname{tg} \sqrt{x})}{\sqrt{1-(1-3x^2)^2}} + \frac{\arcsin^5(1-3x^2)}{2\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \ln 5 \cdot \cos^2 \sqrt{x}};$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{\cos^3(2^{3x-1})}{e^{2x-5x^4+2}} \right)' = \frac{(\cos^3(2^{3x-1}))' \cdot e^{2x-5x^4+2} - (e^{2x-5x^4+2})' \cdot \cos^3(2^{3x-1})}{(e^{2x-5x^4+2})^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2(2^{3x-1}) \cdot (\cos(2^{3x-1}))' \cdot e^{2x-5x^4+2} - e^{2x-5x^4+2} \cdot (2x-5x^4+2)' \cdot \cos^3(2^{3x-1})}{(e^{2x-5x^4+2})^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2(2^{3x-1}) \cdot (-\sin(2^{3x-1})) (2^{3x-1})' \cdot e^{2x-5x^4+2} - e^{2x-5x^4+2} \cdot (2-20x^3) \cdot \cos^3(2^{3x-1})}{(e^{2x-5x^4+2})^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2(2^{3x-1}) \cdot (-\sin(2^{3x-1})) (2^{3x-1} \cdot \ln 2) \cdot 3 \cdot e^{2x-5x^4+2} - e^{2x-5x^4+2} \cdot (2-20x^3) \cdot \cos^3(2^{3x-1})}{(e^{2x-5x^4+2})^2} =$$

$$= \frac{-9\cos^2(2^{3x-1}) \cdot (\sin(2^{3x-1})) (2^{3x-1} \cdot \ln 2) - (2-20x^3) \cdot \cos^3(2^{3x-1})}{e^{2x-5x^4+2}} \cdot$$

Пример 3. Найти производные первого и второго порядков функции $y = y(x)$:

а) $y^2 - x = \operatorname{arctg} y$;

б) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = 2t^8 - 3t^5. \end{cases}$

• а) Равенство $y^2 - x = \operatorname{arctg} y$ определяет функцию y , заданную неявно. Продифференцируем обе части этого равенства по x , считая y функцией от x :
 $(y(x))^2 - x = \operatorname{arctg} y(x)$:

$$2y(x) \cdot y'(x) - 1 = \frac{1}{1+(y(x))^2} \cdot y'(x) \Leftrightarrow y'(x) \cdot \left(2y(x) - \frac{1}{1+(y(x))^2} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1}{2y(x) - \frac{1}{1+(y(x))^2}} \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 + 1}{2y^3 + 2y - 1}. (*)$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x :

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(\frac{(y(x))^2 + 1}{2(y(x))^3 + 2y(x) - 1} \right)' = \\ &= \frac{\left((y(x))^2 + 1 \right)' (2(y(x))^3 + 2y(x) - 1) - \left((y(x))^2 + 1 \right) (2(y(x))^3 + 2y(x) - 1)'}{(2(y(x))^3 + 2y(x) - 1)^2} = \\ &= \frac{2y(x)y'(x)(2(y(x))^3 + 2y(x) - 1) - ((y(x))^2 + 1)(6(y(x))^2 y'(x) + 2y'(x))}{(2(y(x))^3 + 2y(x) - 1)^2} = \\ &= y'(x) \cdot \frac{2y(x)(2(y(x))^3 + 2y(x) - 1) - ((y(x))^2 + 1)(6(y(x))^2 + 2)}{(2(y(x))^3 + 2y(x) - 1)^2} = \\ &= y'(x) \cdot \frac{-2(y(x))^4 - 4(y(x))^2 - 2y(x) - 2}{(2(y(x))^3 + 2y(x) - 1)^2} = -2y' \cdot \frac{y^4 + 2y^2 + y + 1}{(2y^3 + 2y - 1)^2}. \end{aligned}$$

Подставим в последнее выражение y' из равенства (*):

$$y'' = -2 \cdot \frac{y^2 + 1}{2y^3 + 2y - 1} \cdot \frac{y^4 + 2y^2 + y + 1}{(2y^3 + 2y - 1)^2} = -\frac{2y^6 + 6y^4 + 2y^3 + 6y^2 + 2y + 2}{(2y^3 + 2y - 1)^3}.$$

б) Равенства $\begin{cases} x = t^4 \\ y = 2t^8 - 4t^5 \end{cases}$ определяют параметрически заданную функцию, для которой

справедливы равенства $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$ Имеем: $x'_t = (t^4)' = 4t^3;$

$$y' = (2t^8 - 4t^5)' = 16t^7 - 20t^4.$$

$$\text{Значит, } y'_x = \frac{16t^7 - 20t^4}{4t^3} = 4t^4 - 5t.$$

$$\text{Далее, } (y''_x)'_t = (4t^4 - 5t)' = 16t^3 - 5, \text{ откуда } y''_x = \frac{16t^3 - 5}{4t^3} = 4 - \frac{5}{4t^3}.$$

Дифференциал функции.

Задание 1. Найти дифференциал функции.

1. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

2. $y = \sqrt[3]{x^6 - 1}$

3. $y = x^2 \cdot \ln x$

4. $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 2}$

5. $y = (x^3 - x) \cdot \operatorname{tg} x$

6. $y = \left(\frac{5}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x^9}} \right)^5$

7. $y = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$

8. $y = \frac{x - 3}{x + 3}$

9. $y = (x^2 + 1)^3$

10. $y = \sqrt{\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x + 2)}$

11. $y = \sin^2 x$

12. $y = 3^{\operatorname{arctg}(\ln x)}$

13. $y = 2^{\cos x}$

14. $y = \frac{\sqrt{x} - 6}{x^4 + 7}$

15. $y = \ln^3(\sin x)$

16. $y = x^3 \cdot \ln(6x)$

Задание 2. Вычислить приближенно.

1. $\ln 1,02$

2. $\sqrt[3]{26}$

3. $\sqrt{24}$

4. $\cos 61^\circ$

5. $(1,98)^5 + (3,01)^3$

6. $(2,01)^4 + (2,01)^3$

7. $(1,02)^5$

8. $\sqrt[5]{\frac{1,98}{2,02}}$

9. $\operatorname{tg} 44^\circ$

10. $\operatorname{arctg} 1,05$

11. $(0,99)^5$

12. $\ln(1,003)$

13. $\sqrt[5]{31,97}$

14. $(2,001)^3 - 2 \cdot 2,001 + 1$

15. $\sin 29^\circ$

16. $\sqrt[7]{\frac{4,02}{3,97}}$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$.

- Дифференциал функции найдем по формуле: $dy = y' dx$.

Найдем y' :

$$y' = \left(x^2 e^{x^2} \right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = \left(2x e^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x \right) \ln x + x e^{x^2} = 2x e^{x^2} (1 + x^2) \ln x + x e^{x^2} = x e^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x).$$

Подставляя в формулу, получим $dy = \left(x e^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x) \right) dx$. •

Пример 2. Вычислить приближённо $\ln 1,02$.

- Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$,

где $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$.

Имеем: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$, поэтому $f(1,02) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,02$,

или $\ln 1,02 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0,02 = 0,02$. •

Правило Лопиталья.

Задание 1. Найти предел с помощью правила Лопиталья.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-3)}{\sqrt[3]{x+5}}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \lg x \cdot \lg(x-1)$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{e^{\operatorname{tg} x} - x - 1}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 2x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 4x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{5x}) \operatorname{ctg} x$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7^{\frac{1}{x}} - 1\right) x$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos 5x}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{e^{x^2} - 1 - x^2}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{\sin^2 x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 8}{x \ln x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{ctg}^2 6x}{\operatorname{ctg}^2 3x}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^2 2x}{\operatorname{ctg}^2 4x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln(\sin^2 x)$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$ |
| 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[3]{2x-3}}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{\ln(1-x^3)}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) \ln x$ |
| 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{x - \operatorname{tg} x}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(\cos 2x)}{\log_3(\cos 3x)}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$ |
| 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x+7}}{\lg(x-2)}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2 6x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{5x+4}}{\log_2(x-1)}$ |
| 25. $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \ln(x-2)$ | 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{\sin^2 3x}$ | 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$ |
| 28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{(3x+5)^3}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{1 - \cos 6x}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(\sin 3x)}{\log_2(\sin 2x)}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ с помощью правила Лопиталья.

• При $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Следовательно, можно применить правило Лопиталья:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

Исследование функций с помощью производных.

Задание 1. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба графика функции.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $y = x^3 + 15x^2 + 63x + 66$ | 2. $y = x^3 + 12x^2 + 36x - 4$ |
| 3. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ | 4. $y = x^3 - 12x^2 + 21x + 30$ |
| 5. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 49$ | 6. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 28$ |
| 7. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 22$ | 8. $y = x^3 + 6x^2 - 36x - 80$ |
| 9. $y = x^3 - 9x^2 - 21x + 17$ | 10. $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 40$ |
| 11. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 10$ | 12. $y = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 51$ |
| 13. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ | 14. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ |
| 15. $y = 4x^3 + 18x^2 - 48x + 9$ | 16. $y = 2x^3 - 9x^2 - 60x - 57$ |
| 17. $y = 2x^3 - 27x^2 + 84x + 15$ | 18. $y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$ |
| 19. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$ | 20. $y = x^3 - 3x^2 - 72x + 80$ |
| 21. $y = 2x^3 - 24x^2 + 90x - 6$ | 22. $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 5$ |
| 23. $y = 6x^3 + 9x^2 - 36x + 20$ | 24. $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 15$ |
| 25. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ | 26. $y = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 11$ |
| 27. $y = 2x^3 - 21x^2 + 36x + 7$ | 28. $y = x^3 + 9x^2 - 48x - 30$ |
| 29. $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 3$ | 30. $y = 4x^3 + 30x^2 + 48x + 1$ |

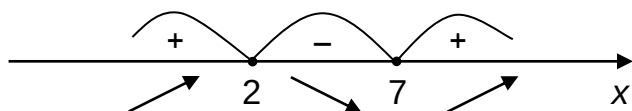
Решение типового варианта

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции $y = 4x^3 - 54x^2 + 168x - 30$, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба ее графика.

• Функция $y = 4x^3 - 54x^2 + 168x + 30$ определена на всей числовой прямой. Найдем критические точки этой функции:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 108x + 168 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 7. \end{cases}$$

Критические точки разбивают область определения функции y на промежутки $(-\infty; 2)$, $(2; 7)$, $(7; +\infty)$. Определим знак производной y' на каждом из этих промежутков:



Таким образом, функция y возрастает на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[7; +\infty)$ и убывает на

промежутке $[2; 7]$. При этом точка $x = 2$ является точкой локального максимума функции, а точка $x = 7$ – ее точкой локального минимума.

Находим локальный максимум и локальный минимум функции:

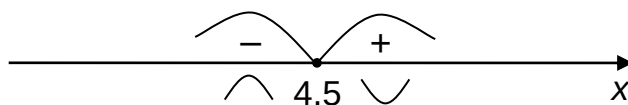
$$y_{\max} = y(2) = 4 \cdot 2^3 - 54 \cdot 2^2 + 168 \cdot 2 - 30 = 32 - 216 + 336 - 30 = 122,$$

$$y_{\min} = y(7) = 4 \cdot 7^3 - 54 \cdot 7^2 + 168 \cdot 7 - 30 = 1372 - 2646 + 1176 - 30 = -128.$$

Для определения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции находим вторую производную и приравниваем ее к нулю:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 24x - 108 = 0 \Leftrightarrow x = 4,5.$$

Точка $x = 4,5$ разбивает область определения функции на промежутки $(-\infty; 4,5)$ и $(4,5; +\infty)$. Определим знак второй производной y'' на каждом из этих промежутков:



Таким образом, график функции y является выпуклым на промежутке $(-\infty; 4,5]$ и вогнутым на промежутке $[4,5; +\infty)$.

Так как $y(4,5) = 4 \cdot (4,5)^3 - 54 \cdot (4,5)^2 + 168 \cdot 4,5 - 30 = -3$, то точка $(4,5; -3)$ является точкой перегиба графика функции.

Таким образом, $(-\infty; 2]$ и $[7; +\infty)$ – промежутки возрастания,

$[2; 7]$ – промежуток убывания;

$x_{\max} = 2$ – точка локального максимума,

$x_{\min} = 7$ – точка локального минимума;

$y_{\max} = 122$ – локальный максимум функции,

$y_{\min} = -128$ – локальный минимум функции;

$(-\infty; 4,5]$ – промежуток выпуклости графика,

$[4,5; +\infty)$ – промежуток вогнутости графика;

$(4,5; -3)$ – точка перегиба графика. •

ГЛАВА III

Матричное исчисление и векторная алгебра

Матрицы. Действия над матрицами.

Задание 1. Найти матрицу $B \cdot (B^T - 3A)$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$26. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$27. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$28. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$14. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$29. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$15. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$30. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение типового варианта.

Пример 1. Найти матрицу $B \cdot (B^T - 3A)$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

• Выполним следующие действия:

$$1) \quad B^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$2) \quad 3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix};$$

$$3) \quad B^T - 3A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -1-(-3) \\ 4-3 & -3-0 \\ 1-9 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix};$$

$$4) \quad B \cdot (B^T - 3A) = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-8) & 7 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-6) \\ (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-8) & (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Определители.

Задание 1. Вычислить определитель.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение типового варианта.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{2)}{=} a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44} \stackrel{3)}{=} a_{42} \cdot A_{42} \stackrel{4)}{=}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{5)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{6)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -9 \\ 0 & -13 & -11 \end{vmatrix} \stackrel{7)}{=} a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} \stackrel{8)}{=} a_{11} \cdot A_{11} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -11 & -9 \\ -13 & -11 \end{vmatrix} \stackrel{9)}{=} \begin{vmatrix} -11 & -9 \\ -13 & -11 \end{vmatrix} = (-11) \cdot (-11) - (-9) \cdot (-13) = 121 - 117 = 4.$$

1) Получим нули в 4-й строке с помощью элементов 2-го столбца. 2-й столбец записываем без изменений. 1-й столбец также записываем без изменений, так как элемент $a_{41} = 0$. На месте элемента $a_{43} = 3$ получим нуль. Для этого каждый элемент 2-го столбца умножим на (-3) и прибавим к соответствующим элементам 3-го столбца. На месте элемента $a_{44} = -2$ получим нуль, умножая каждый элемент 2-го столбца на 2 и прибавляя к соответствующим элементам 4-го столбца.

2) Разложим полученный определитель по элементам 4-й строки.

3) Так как элементы a_{41} , a_{43} , a_{44} – нулевые, то и произведения $a_{41} \cdot A_{41}$, $a_{43} \cdot A_{43}$, $a_{44} \cdot A_{44}$ также будут равны нулю.

4) a_{42} – элемент на пересечении 4-й строки и 2-го столбца, а A_{42} – его алгебраическое дополнение.

5) Получим нули в 1-м столбце. 1-ю строку переписываем без изменений. На месте элемента $a_{21} = 3$ получим нуль, для чего каждый элемент 1-й строки

умножим на (-3) и прибавим к соответствующим элементам 2-й строки. На месте элемента $a_{31} = 4$ получим нуль, умножая каждый элемент 1-й строки на (-4) и прибавляя к соответствующим элементам 3-й строки.

6) Разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца.

7) Так как элементы a_{21} и a_{31} – нулевые, то и произведения $a_{21} \cdot A_{21}$ и $a_{31} \cdot A_{31}$ также будут равны нулю.

8) a_{11} – элемент на пересечении 1-й строки и 1-го столбца, а A_{11} – его алгебраическое дополнение.

9) Полученный определитель 2-го порядка вычисляем следующим образом: из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали. •

Ранг матрицы. Обратная матрица.

Задание 1. Найти матрицу, обратную к матрице A .

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & -7 \\ 7 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ -1 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 1 & 6 & 9 \\ -6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -5 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$14. \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -4 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 8 & -3 & 8 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$15. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Задание 2. Найти ранг матрицы A .

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 11 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 8 & 1 & 13 & -11 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ -1 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & -6 \\ -6 & 9 & -3 & -9 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & 7 & -16 \end{bmatrix}$$

$$14. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \\ -15 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$15. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение типовых заданий

Пример 1. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

- Матрицу, обратную к матрице A , найдём по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) = -6.$$

Найдём алгебраические дополнения матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 1 = -15 - 2 = -17;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = - (0 \cdot (-5) - 1 \cdot 4) = - (0 - 4) = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 0 - 12 = -12;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = - (1 \cdot (-5) - (-2) \cdot 2) = - (-5 + 4) = 1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot (-2) = -10 + 8 = -2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = - (2 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = - (4 - 4) = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 1 + 6 = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (1) - 0 \cdot (-2)) = -(2 + 0) = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6 - 0 = 6.$$

Таким образом, $A^{-1} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{bmatrix} -17 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$ •

Пример 2. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

• Вычтем из третьей строки матрицы A первую, а из второй – удвоенную первую:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ затем прибавим к третьей строке вторую и отбросим полученную}$$

нулевую строку: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Базисный минор полученной матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ имеет второй порядок,

следовательно, ранг матрицы A равен 2. •

Системы линейных алгебраических уравнений.

Задание 1. Решить систему линейных неоднородных уравнений.

- | | | | | | |
|----|--|-----|--|-----|--|
| 1. | $\begin{cases} x - 4y - 3z = -3, \\ 2x - 2y + z = 9, \\ 3x - y - 4z = -5. \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -1, \\ x - 2y + z = -5, \\ 5x - y + 2z = -4. \end{cases}$ | 11. | $\begin{cases} 2x - 2y - 5z = 2, \\ 3x + y - 2z = -4, \\ x - y - 4z = 4. \end{cases}$ |
| 2. | $\begin{cases} 5x + y + 4z = -7, \\ 2x - 4y - 3z = 7, \\ x - 5y - 2z = -3. \end{cases}$ | 7. | $\begin{cases} x + y + 4z = 9, \\ 3x + 5y + 2z = 1, \\ 4x - 2y + 5z = -9. \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} 3x + y + 2z = 7, \\ 4x - 2y - 5z = 3, \\ x + 2y + 5z = 7. \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 9, \\ 4x - 2y - 5z = -6, \\ 3x + y - z = 4. \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = -5, \\ x - 2y + z = -6, \\ 3x + y - z = -2. \end{cases}$ | 13. | $\begin{cases} x - 3y - 2z = -3, \\ 2x - 2y + z = 1, \\ 4x - 3y + 5z = 2. \end{cases}$ |
| 4. | $\begin{cases} 4x + 3y + z = -7, \\ 5x + 3y + 4z = -5, \\ x + 2y - 2z = -8. \end{cases}$ | 9. | $\begin{cases} x + 5y + 3z = -5, \\ 3x - 4y - 3z = 7, \\ 4x + y - z = 7. \end{cases}$ | 14. | $\begin{cases} 3x + 5y + 4z = -7, \\ 2x - 2y + 3z = -4, \\ x - 3y - z = -7. \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} 3x - y + 4z = 8, \\ 4x + 5y + 4z = 7, \\ 2x - 2y + 3z = 6. \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} 2x - y - 3z = -6, \\ 5x + 2y + 4z = -4, \\ x - 2y - 3z = -9. \end{cases}$ | 15. | $\begin{cases} x + 3y - 2z = -9, \\ 3x - 5y + 4z = 9, \\ 4x - 2y + z = -5. \end{cases}$ |

Задание 2. Решить систему линейных однородных уравнений.

- | | | | | | |
|----|--|-----|--|-----|--|
| 1. | $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 5z = 0, \\ 2x - 3y + 7z = 0. \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} 3x - y - 5z = 0, \\ 4x - 5y - 3z = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$ | 11. | $\begin{cases} 4x + 2y + 5z = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ 2x + 4y + z = 0. \end{cases}$ |
| 2. | $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 0, \\ 5x + y + 7z = 0, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$ | 7. | $\begin{cases} x + 4y + z = 0, \\ 2x + 3y - 3z = 0, \\ 2x + 5y - z = 0. \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} 5x + 2y + z = 0, \\ 4x + y - z = 0, \\ x - 2y - 7z = 0. \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ x - 3y - 2z = 0. \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} 3x + 3y + 4z = 0, \\ x - y - 2z = 0, \\ 5x - 2y - 5z = 0. \end{cases}$ | 13. | $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ 3x + 4y - 3z = 0, \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$ |
| 4. | $\begin{cases} 5x + y + 2z = 0, \\ 2x + y + z = 0, \\ 7x - 4y + z = 0. \end{cases}$ | 9. | $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0, \\ 5x + 8y + 2z = 0, \\ x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$ | 14. | $\begin{cases} 4x + y + 8z = 0, \\ 5x - 2y - 3z = 0, \\ 5x - y + z = 0. \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} 3x + y - 4z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0, \\ 4x + 5y + 2z = 0. \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} x + 3y + 4z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0, \\ 5x + 2y - 6z = 0. \end{cases}$ | 15. | $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0, \\ x - 4y - 6z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$ |

Решение типового варианта.

Пример 1. Решить систему линейных неоднородных уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -5, \\ 4x + 3y - 5z = -6, \\ x - 2y - 4z = 4. \end{cases}$$

• Рассмотрим основные методы решения систем линейных уравнений:

а) метод обратной матрицы (матричный метод):

Введя обозначения $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$, запишем исходную систему в

матричном виде: $A \cdot X = B$, откуда $X = A^{-1} \cdot B$.

Матрицу A^{-1} найдём по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) \cdot (-5)) - (1 \cdot 3 \cdot (-5) + 3 \cdot (-2) \cdot (-5) + 4 \cdot 2 \cdot (-4)) = -36 - 10 + 40 - (-15 + 30 - 32) = -6 + 17 = 11 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Найдём алгебраические дополнения матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - (-2) \cdot (-5) = -12 - 10 = -22;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(4 \cdot (-4) - 1 \cdot (-5)) = -(-16 + 5) = 11;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -8 - 3 = -11;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-4) - (-2) \cdot (-5)) = -(-8 - 10) = 18;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 1 \cdot (-5) = -12 + 5 = -7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot (-2) - 1 \cdot 2) = -(-6 - 2) = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-5) = -10 + 15 = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot (-5) - (4) \cdot (-5)) = -(-15 + 20) = -5;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$$

Таким образом, $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} -22 & 18 & 5 \\ 11 & -7 & -5 \\ -11 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$

Подставляя A^{-1} и B в равенство $X = A^{-1} \cdot B$, найдём вектор-столбец неизвестных:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} -22 & 18 & 5 \\ 11 & -7 & -5 \\ -11 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 1. \end{cases}$$

б) формулы Крамера:

Поскольку определитель матрицы A системы отличен от нуля, то решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы A ; а $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители, полученные из Δ заменой 1-го, 2-го, 3-го столбцов столбцом свободных членов соответственно.

Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) \cdot (-5)) - (1 \cdot 3 \cdot (-5) + 3 \cdot (-2) \cdot (-5) + 4 \cdot 2 \cdot (-4)) = (-36 - 10 + 40) - (-15 + 30 - 32) = -6 + 17 = 11 \neq 0.$$

Находим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -5 \\ -6 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot ((-1) \cdot (-11) - 0 \cdot (-9)) = 22;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 4 & -6 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -17 & 7 \\ 4 & -22 & 11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -17 & 7 \\ -22 & 11 \end{vmatrix} = (-17) \cdot 11 - 7 \cdot (-22) = -33;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -17 \\ 4 & 11 & -22 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 8 & -17 \\ 11 & -22 \end{vmatrix} = (-22) \cdot 8 - 11 \cdot (-17) = 11.$$

По формулам Крамера получаем:

$$x = \frac{22}{11} = 2; y = \frac{-33}{11} = -3; z = \frac{11}{11} = 1.$$

в) метод Гаусса:

Расширенная матрица системы имеет вид: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \end{array} \right]$. Поменяем

1-ю и 3-ю строки матрицы местами и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & -5 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 11 & 11 & -22 \\ 0 & 8 & 7 & -17 \end{array} \right] \xrightarrow{2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 7 & -17 \end{array} \right] \xrightarrow{3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

1) 1-ю строку матрицы переписываем без изменений. К элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-4) . Затем к элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-3) .

2) Разделим элементы 2-й строки на 11, 1-ю и 2-ю строки матрицы переписываем без изменений.

3) К элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на (-8) .

Последней расширенной матрице соответствует система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 4, \\ y + z = -2, \\ -z = -1. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы получаем: $z = \frac{-1}{-1} = 1.$

Подставив значение z во 2-е уравнение, получим: $y = \frac{-2-1}{1} = -3.$

Из 1-го уравнения системы находим: $x = 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 2. \bullet$

Пример 2. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 7z = 0, \\ -5x - 2y + 4z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

• Поменяем в расширенной матрице $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -7 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$ системы 1-ю и 3-ю строки местами

и приведём полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

1) Первую строку матрицы переписываем без изменений. Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки – соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-2) .

2) 1-ю и 2-ю строки матрицы переписываем без изменений. Прибавим к элементам 3-й строки соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 1.

Получаем систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3y + 9z = 0, \end{cases}$$
 равносильную исходной.

Пусть переменные x и y – базисные, а $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) – свободная.

Из последнего уравнения системы получаем: $y = \frac{-9t}{3} = -3t$. Подставив найденное значение в первое уравнение, получим: $x = -t + 3t = 2t$. •

Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Задание 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

• Составим характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$:

Поскольку $A - \lambda E = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - \lambda & -1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$, то характеристическое уравнение

примет вид: $\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$.

Корни последнего уравнения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$ являются собственными значениями матрицы A .

Для определения собственных векторов матрицы A запишем матричное равенство $(A - \lambda E) \cdot X = O$ в виде системы:
$$\begin{cases} (9 - \lambda) \cdot x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + (5 - \lambda) \cdot x_2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Найдём собственный вектор X_1 , соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$, для чего вместо λ подставим в систему (*) λ_1 :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 - x_2 = 0.$$

Пусть переменная x_2 – базисная, а $x_1 = u$ ($u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) – свободная. Тогда $x_2 = 3u$. Значит, собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 6$, будет вектор $X_1 = \begin{bmatrix} u \\ 3u \end{bmatrix}$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Найдём собственный вектор X_2 , соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 8$, для чего вместо λ подставим в систему (*) λ_2 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Пусть переменная x_2 – базисная, а $x_1 = v$ ($v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) – свободная. Тогда $x_2 = v$. Значит, собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 8$, будет вектор $X_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$, $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Таким образом, имеем: $\lambda_1 = 6$, $X_1 = \begin{bmatrix} u \\ 3u \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 8$, $X_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$, $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. •

Векторы. Операции над векторами.

Задание 1. Вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot (\gamma\vec{a} - \delta\vec{b})$.

1. $\alpha = 2, \beta = -4, \gamma = -3, \delta = 1, \vec{a} = (-2; 3; 1), \vec{b} = (1; -1; 2)$
2. $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 4, \delta = 2, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$
3. $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 2, \delta = 4, \vec{a} = (5; 2; -2), \vec{b} = (3; -1; 1)$
4. $\alpha = -2, \beta = -5, \gamma = 2, \delta = 6, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\pi}{3}$
5. $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = -4, \vec{a} = (2; 1; 3), \vec{b} = (1; -1; -4)$
6. $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = -3, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$
7. $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 1, \delta = -4, \vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (2; -1; -3)$
8. $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 1, \delta = 2, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\pi}{3}$
9. $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = 2, \delta = 1, \vec{a} = (-1; 2; 1), \vec{b} = (4; 3; -5)$
10. $\alpha = -1, \beta = 6, \gamma = 5, \delta = -2, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$
11. $\alpha = 3, \beta = 5, \gamma = -1, \delta = 2, \vec{a} = (2; -5; 1), \vec{b} = (-3; 1; 1)$
12. $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 3, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\pi}{3}$
13. $\alpha = -5, \beta = -2, \gamma = 2, \delta = -3, \vec{a} = (-4; -1; 3), \vec{b} = (5; 2; -3)$
14. $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 4, \delta = -2, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$
15. $\alpha = 4, \beta = -2, \gamma = -2, \delta = -3, \vec{a} = (2; -1; -4), \vec{b} = (1; 2; -4)$

Задание 2. Найти длину вектора $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \times (\gamma\vec{a} - \delta\vec{b})$.

1. $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1, \delta = 5, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$
2. $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = -1, \delta = 3, \vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (3; -2; -1)$
3. $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = 2, |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$
4. $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -1, \delta = 2, \vec{a} = (-4; -1; 2), \vec{b} = (3; 0; 1)$
5. $\alpha = 4, \beta = -5, \gamma = 2, \delta = -1, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

6. $\alpha = -2, \beta = -4, \gamma = -1, \delta = 3, \vec{a} = (0; -5; 2), \vec{b} = (1; 4; -1)$
7. $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 2, |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$
8. $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 3, \delta = 1, \vec{a} = (-1; 3; 2), \vec{b} = (2; 5; 0)$
9. $\alpha = 2, \beta = 4, \gamma = -2, \delta = -1, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$
10. $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 2, \delta = 1, \vec{a} = (-2; -1; 3), \vec{b} = (0; -4; 1)$
11. $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -2, \delta = 3, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$
12. $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = 5, \delta = 2, \vec{a} = (1; 0; -4), \vec{b} = (2; -3; -7)$
13. $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 4, \delta = 6, |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$
14. $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2, \delta = 3, \vec{a} = (1; -3; -5), \vec{b} = (2; 0; -4)$
15. $\alpha = -1, \beta = -6, \gamma = 2, \delta = 3, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$

Решение типового варианта

Пример 1. Вычислить $(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$, если

а) $\vec{a} = (2; -2; 5), \vec{b} = (-1; 1; 2);$

б) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 1, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$

• а) Выполним следующие действия:

1) $2\vec{a} - 4\vec{b} = 2 \cdot (2; -2; 5) - 4 \cdot (-1; 1; 2) = (4; -4; 10) - (-4; 4; 8) = (8; -8; 2);$

2) $\vec{a} + 3\vec{b} = (2; -2; 5) + 3 \cdot (-1; 1; 2) = (2; -2; 5) + (-3; 3; 6) = (-1; 1; 11);$

3) $(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = (8; -8; 2) \cdot (-1; 1; 11) = 8 \cdot (-1) + (-8) \cdot 1 + 2 \cdot 11 = 6.$

б) Упростим выражение:

$$(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot 3\vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{a} - 4\vec{b} \cdot 3\vec{b} = 2\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 12\vec{b}^2.$$

Далее выполним по действиям:

1) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 16;$

2) $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1;$

3) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2;$

4) $2\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 12\vec{b}^2 = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = 32 + 4 - 12 = 24. \bullet$

Пример 2. Найти длину вектора $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (-3\vec{a} - 2\vec{b})$, если:

а) $\vec{a} = (2; -1; 4)$, $\vec{b} = (-5; 3; -5)$;

б) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

• а) Выполним следующие действия:

1) $2\vec{a} + \vec{b} = 2 \cdot (2; -1; 4) + (-5; 3; -5) = (4; -2; 8) + (-5; 3; -5) = (-1; 1; 3)$;

2) $-3\vec{a} - 2\vec{b} = -3 \cdot (2; -1; 4) - 2 \cdot (-5; 3; -5) = (-6; 3; -12) + (10; -6; 10) = (4; -3; -2)$;

3) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (-3\vec{a} - 2\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (7; 10; -1).$

Найдём длину вектора: $\left| (2\vec{a} + \vec{b}) \times (-3\vec{a} - 2\vec{b}) \right| = \sqrt{7^2 + 10^2 + (-1)^2} = \sqrt{150}.$

б) Упростим выражение:

$$\begin{aligned} \left| (2\vec{a} + \vec{b}) \times (-3\vec{a} - 2\vec{b}) \right| &= \left| 2\vec{a} \times -3\vec{a} + 2\vec{a} \times -2\vec{b} + \vec{b} \times -3\vec{a} + \vec{b} \times -2\vec{b} \right| = \\ &= \left| -4\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{b} \times \vec{a} \right| = \left| -4\vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| -\vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|. \end{aligned}$$

$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3. \bullet$$

ГЛАВА IV

Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости.

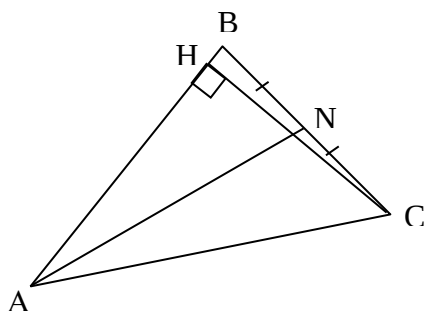
Задание 1. В треугольнике ABC найти точку пересечения медианы AN и высоты CH .

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $A(2;-3), B(4;3), C(-2;5)$ | 16. $A(2;-2), B(3;1), C(-5;1)$ |
| 2. $A(-1;-4), B(2;-3), C(-4;1)$ | 17. $A(2;4), B(-1;-5), C(5;1)$ |
| 3. $A(2;-3), B(3;-1), C(5;-5)$ | 18. $A(3;1), B(5;-3), C(3;7)$ |
| 4. $A(3;-3), B(6;3), C(2;5)$ | 19. $A(4;-5), B(-4;3), C(-2;5)$ |
| 5. $A(-1;1), B(3;5), C(-7;-3)$ | 20. $A(-3;-4), B(-4;-2), C(2;-6)$ |
| 6. $A(6;5), B(5;2), C(3;-4)$ | 21. $A(-5;3), B(-6;4), C(2;6)$ |
| 7. $A(3;3), B(1;5), C(9;3)$ | 22. $A(3;-6), B(-5;2), C(1;-4)$ |
| 8. $A(-6;-2), B(-8;3), C(2;7)$ | 23. $A(1;-3), B(5;-5), C(-1;7)$ |
| 9. $A(2;3), B(-1;6), C(7;8)$ | 24. $A(3;7), B(-2;2), C(8;4)$ |
| 10. $A(-3;-2), B(4;-3), C(-2;5)$ | 25. $A(3;5), B(1;6), C(2;3)$ |
| 11. $A(4;2), B(6;3), C(2;-1)$ | 26. $A(-1;-5), B(-2;-4), C(-6;-6)$ |
| 12. $A(3;5), B(1;9), C(5;3)$ | 27. $A(2;3), B(1;5), C(-3;-3)$ |
| 13. $A(4;3), B(1;6), C(3;4)$ | 28. $A(4;3), B(5;2), C(-5;-6)$ |
| 14. $A(4;1), B(-2;-2), C(4;-2)$ | 29. $A(4;3), B(5;7), C(-3;9)$ |
| 15. $A(2;2), B(3;5), C(-1;1)$ | 30. $A(-4;3), B(2;9), C(-8;1)$ |

Решение типового варианта

Пример 1. В треугольнике ABC найти точку пересечения медианы AN и высоты CH , если $A(2;1), B(7;-6), C(-5;-4)$.

- Выполним схематически рисунок.



Найдём уравнение медианы AN по формуле: $\frac{x - x_A}{x_N - x_A} = \frac{y - y_A}{y_N - y_A}$, где $A(x_A; y_A)$,

$$N(x_N; y_N).$$

Точка N имеет координаты: $N\left(\frac{7+(-5)}{2}; \frac{-6+(-4)}{2}\right) \Rightarrow N(1; -5)$

Уравнение медианы AN имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{1-2} &= \frac{y-1}{-5-1}; \\ \frac{x-2}{-1} &= \frac{y-1}{-6}; \\ 6x - y - 11 &= 0.\end{aligned}$$

Найдём уравнение высоты CH . Для этого сначала найдём угловой коэффициент прямой AB .

Уравнение прямой AB имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{7-2} &= \frac{y-1}{-6-1}; \\ \frac{x-2}{5} &= \frac{y-1}{-7}; \\ -7x - 5y + 19 &= 0.\end{aligned}$$

Угловой коэффициент прямой AB : $k = -\frac{7}{5}$.

Так как $AB \perp CH$, то $k_{AB} \cdot k_{CH} = -1$. Отсюда $k_{CH} = \frac{5}{7}$.

Уравнение высоты CH найдём по формуле: $y - y_C = k_{CH} \cdot (x - x_C)$.

$$\begin{aligned}y - (-4) &= \frac{5}{7} \cdot (x - (-5)); \\ y + 4 &= \frac{5}{7} \cdot (x + 5); \\ 5x - 7y - 3 &= 0.\end{aligned}$$

Найдём точку пересечения медианы AN и высоты CH . Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\begin{cases} 6x - y - 11 = 0; \\ 5x - 7y - 3 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} -42x + 7y + 77 = 0; \\ 5x - 7y - 3 = 0. \end{cases} \\ -37x + 74 = 0, \\ x = 2, \\ y = 6 \cdot 2 - 11 = 1.\end{aligned}$$

Получим точку с координатами $(2; 1)$. •

Кривые второго порядка.

Задание 1. Установить какая линия определяется уравнением. Сделать рисунок.

- | | |
|---|---|
| 1. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$ | 16. $4x^2 - 9y^2 - 48x - 54y + 27 = 0$ |
| 2. $4x^2 - 9y^2 - 40x + 18y + 55 = 0$ | 17. $4x^2 + 36y^2 + 56x + 72y + 88 = 0$ |
| 3. $9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$ | 18. $9x^2 - 4y^2 + 72x - 40y + 8 = 0$ |
| 4. $16x^2 - 4y^2 + 64x + 24y - 36 = 0$ | 19. $36x^2 + 9y^2 - 72x - 90y - 63 = 0$ |
| 5. $9x^2 + 25y^2 + 72x + 50y - 56 = 0$ | 20. $49x^2 - y^2 - 98x - 4y - 4 = 0$ |
| 6. $4x^2 - 16y^2 + 48x - 96y - 64 = 0$ | 21. $9x^2 + 36y^2 - 90x + 72y - 63 = 0$ |
| 7. $x^2 + 49y^2 + 4x - 98y + 4 = 0$ | 22. $x^2 - 49y^2 - 8x - 98y - 82 = 0$ |
| 8. $25x^2 - 4y^2 + 50x - 16y - 91 = 0$ | 23. $x^2 + 49y^2 - 14x + 98y + 49 = 0$ |
| 9. $25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$ | 24. $9x^2 - 25y^2 - 90x + 50y - 25 = 0$ |
| 10. $4x^2 - 25y^2 - 40x - 50y - 25 = 0$ | 25. $49x^2 + y^2 + 98x - 16y + 64 = 0$ |
| 11. $4x^2 + 49y^2 - 40x - 98y - 47 = 0$ | 26. $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$ |
| 12. $4x^2 - 36y^2 + 48x + 72y - 36 = 0$ | 27. $9x^2 + 4y^2 + 36x + 32y + 64 = 0$ |
| 13. $49x^2 + 4y^2 + 98x - 48y - 3 = 0$ | 28. $x^2 - 9y^2 + 6x - 36y - 36 = 0$ |
| 14. $36x^2 - y^2 - 72x - 8y - 16 = 0$ | 29. $4x^2 + 9y^2 - 40x - 18y + 73 = 0$ |
| 15. $36x^2 + 4y^2 - 72x - 16y - 92 = 0$ | 30. $4x^2 - 16y^2 + 24x - 64y - 92 = 0$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Установить какая линия определяется уравнением $4x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 109 = 0$. Сделать рисунок.

• Выделим полные квадраты.

$$4 \cdot (x^2 - 8x) + 9 \cdot (y^2 + 6y) + 109 = 0,$$

$$4 \cdot ((x - 4)^2 - 16) + 9 \cdot ((y + 3)^2 - 9) + 109 = 0,$$

$$4 \cdot (x - 4)^2 - 64 + 9 \cdot (y + 3)^2 - 81 + 109 = 0,$$

$$4 \cdot (x - 4)^2 + 9 \cdot (y + 3)^2 = 36,$$

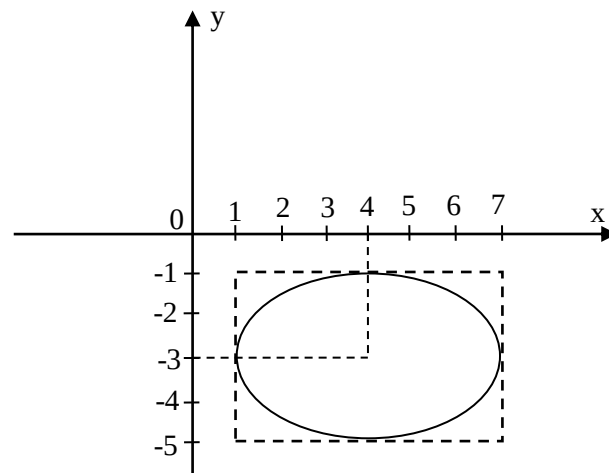
$$\frac{(x - 4)^2}{3^2} + \frac{(y + 3)^2}{2^2} = 1.$$

Этим уравнением определяется эллипс.

Построим фигуру. Вначале сделаем необходимые расчёты.

Центр эллипса находится в точке с координатами $(4; -3)$. Большая полуось равна 3, малая полуось равна 2.

В итоге получим:



•

Плоскость в пространстве.

Задание 1. Найти длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D .

1. $A(2;3;-1), B(3;-1;-4), C(4;2;-3), D(-1;2;1)$
2. $A(5;-2;3), B(6;-1;4), C(7;1;1), D(4;-2;-1)$
3. $A(6;-4;1), B(5;-6;-2), C(8;-1;4), D(6;-5;-7)$
4. $A(-1;4;5), B(1;1;7), C(-2;5;3), D(-2;3;6)$
5. $A(3;-4;1), B(5;-3;4), C(-1;1;2), D(3;2;-1)$
6. $A(5;-1;3), B(4;-3;-2), C(3;3;1), D(-1;6;-7)$
7. $A(-4;1;-2), B(-5;2;-3), C(2;5;1), D(3;-2;3)$
8. $A(-1;-4;2), B(3;-5;4), C(-2;-2;1), D(4;6;1)$
9. $A(4;5;-3), B(2;4;-2), C(5;7;1), D(-4;3;5)$
10. $A(-2;3;2), B(1;-2;4), C(-5;4;1), D(3;4;1)$
11. $A(3;-1;5), B(6;-4;3), C(1;2;4), D(3;5;-8)$
12. $A(4;-2;-1), B(1;-8;2), C(6;5;-4), D(-2;5;1)$
13. $A(1;4;-3), B(-2;5;-2), C(6;3;-5), D(-2;-3;1)$
14. $A(6;2;-1), B(-2;4;-5), C(3;3;-2), D(3;1;-7)$
15. $A(2;-1;-3), B(5;-3;-5), C(-5;4;1), D(1;-2;3)$
16. $A(-1;4;-2), B(-2;3;-1), C(-5;-1;4), D(-2;3;-4)$
17. $A(-2;1;6), B(-1;3;3), C(2;4;-1), D(2;-3;5)$
18. $A(5;2;3), B(4;1;4), C(3;-3;7), D(-5;5;2)$
19. $A(-1;3;-2), B(-4;7;-5), C(3;-3;4), D(2;-3;1)$
20. $A(-3;5;-2), B(-7;3;-3), C(-8;1;-3), D(-4;1;-2)$
21. $A(6;2;-2), B(3;3;-3), C(2;5;-4), D(2;-5;1)$
22. $A(-1;4;-6), B(-2;2;-5), C(3;5;-4), D(1;-2;1)$
23. $A(4;6;-2), B(2;4;-1), C(5;3;-3), D(-3;1;2)$

24. $A(-3; -2; 5), B(1; 3; 9), C(-6; -6; 3), D(-1; 2; 2)$
25. $A(2; 6; 7), B(-2; 8; 8), C(5; 3; 5), D(5; -4; -2)$
26. $A(-3; 5; -2), B(-2; 3; -1), C(-5; 1; 3), D(4; -3; -1)$
27. $A(-2; -1; -4), B(-5; 4; 1), C(-1; -2; -6), D(2; -9; -8)$
28. $A(5; -1; 8), B(6; -2; 9), C(2; 3; 6), D(-1; 2; 5)$
29. $A(3; 4; 2), B(-2; 2; 4), C(4; 5; 3), D(3; 2; -2)$
30. $A(-2; 4; 3), B(-1; -3; -1), C(-3; 2; 1), D(-2; 3; 2)$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D , если $A(3; 4; -2), B(2; 3; -4), C(6; 5; -1), D(-2; 1; -4)$.

• Найдём уравнение плоскости ABC по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда уравнение ABC будет:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 4 & z + 2 \\ 2 - 3 & 3 - 4 & -4 + 2 \\ 6 - 3 & 5 - 4 & -1 + 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 3 & y - 4 & z + 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 4 & z + 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x - 3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y - 4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z + 2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - 3) - 5 \cdot (y - 4) + 2 \cdot (z + 2) = x - 5y + 2z + 21.$$

Таким образом, уравнение плоскости запишется в виде:

$$x - 5y + 2z + 21 = 0.$$

Длина высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D – это расстояние от точки D до плоскости ABC , которой находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ где } ABC: Ax + By + Cz + D = 0, D(x_0, y_0, z_0).$$

Имеем:

$$d = \frac{|-2 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 21|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{|-2 - 5 - 8 + 21|}{\sqrt{1 + 25 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{30}}.$$

Прямая в пространстве.

Задание 1. Установить взаимное расположение прямой l и плоскости β .
В случае их пересечения найти координаты точки пересечения.

$$1. \quad l: \frac{x-1}{5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{4}; \quad \beta: x + 2y + 3z + 5 = 0$$

$$2. \quad l: \begin{cases} 2x + 2y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - 2z + 2 = 0; \end{cases} \quad \beta: 3x + y + 2z + 8 = 0$$

$$3. \quad l: \begin{cases} x = -4t + 2, \\ y = 2t + 4, \\ z = 3t + 1; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{7/5} + \frac{y}{7/2} + \frac{z}{7/3} = 1$$

$$4. \quad l: \frac{x+6}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}; \quad \beta: 2x + 3y + 4z + 1 = 0$$

$$5. \quad l: \begin{cases} -3x + y - 2z + 4 = 0, \\ 2x - 2y + 3z + 3 = 0; \end{cases} \quad \beta: x + 3y - z + 7 = 0$$

$$6. \quad l: \begin{cases} x = 3t + 5, \\ y = -t + 1, \\ z = 2t + 4; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{1} + \frac{y}{-1/2} + \frac{z}{-2/3} = 1$$

$$7. \quad l: \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{4}; \quad \beta: 3x - 2y - z + 5 = 0$$

$$8. \quad l: \begin{cases} 5x + 2y + 3z + 5 = 0, \\ x + 3y + 5z + 6 = 0; \end{cases} \quad \beta: 4x - y - 2z + 4 = 0$$

$$9. \quad l: \begin{cases} x = -t + 4, \\ y = 2t - 2, \\ z = 3t + 1; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{-7} + \frac{y}{7/2} + \frac{z}{-7/5} = 1$$

$$10. \quad l: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{4}; \quad \beta: 2x + 5y - 4z + 3 = 0$$

$$11. \quad l: \begin{cases} 3x - 4y + 5z - 6 = 0, \\ 4x - 3y + 2z + 6 = 0; \end{cases} \quad \beta: 3x - y - z + 12 = 0$$

$$12. \quad l: \begin{cases} x = 4t - 3, \\ y = -2t + 4, \\ z = 5t - 5; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{1} + \frac{y}{3/2} + \frac{z}{-3/2} = 1$$

$$13. \quad l: \frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}; \quad \beta: 3x + 4y - 3z + 10 = 0$$

$$14. \quad l: \begin{cases} 4x - 5y + 3z - 1 = 0, \\ x - 2y + 2z + 2 = 0; \end{cases} \quad \beta: 3x + y - 5z - 5 = 0$$

$$15. \quad l: \begin{cases} x = -4t + 2, \\ y = 3t - 5, \\ z = 2t + 3; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{2} + \frac{y}{-4/3} + \frac{z}{1} = 1$$

$$16. \quad l: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{-4}; \quad \beta: 2x - 5y - 3z - 11 = 0$$

$$17. \quad l: \begin{cases} 3x - 2y + z + 4 = 0, \\ 2x + 4y - 3z + 2 = 0; \end{cases} \quad \beta: 6x - 4y + 2z + 3 = 0$$

$$18. \quad l: \begin{cases} x = 4t + 3, \\ y = -5t + 2, \\ z = 3t - 1; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-6} = 1$$

$$19. \quad l: \frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-7}; \quad \beta: 5x + 2y + 3z - 4 = 0$$

$$20. \quad l: \begin{cases} 4x + 2y - 3z + 1 = 0, \\ 3x + y - 2z + 5 = 0; \end{cases} \quad \beta: 2x + 3y - z - 3 = 0$$

$$21. \quad l: \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 5t - 3, \\ z = -4t + 5; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{-2/3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$$

$$22. \quad l: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-5}; \quad \beta: 4x - y + 2z - 8 = 0$$

$$23. \quad l: \begin{cases} x - y + 4z + 3 = 0, \\ 2x + 3y - z + 2 = 0; \end{cases} \quad \beta: 3x + 3y - z - 9 = 0$$

$$24. \quad l: \begin{cases} x = -3t - 4, \\ y = 2t + 3, \\ z = -7t + 5; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{-9/5} + \frac{y}{-9/2} + \frac{z}{3} = 1$$

$$25. \quad l: \frac{x+5}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{3}; \quad \beta: 2x + 3y - 3z - 7 = 0$$

$$26. \quad l: \begin{cases} 5x - 2y + z - 3 = 0, \\ 3x - y + 2z + 3 = 0; \end{cases} \quad \beta: 4x - y + 5z + 3 = 0$$

$$27. \quad l: \begin{cases} x = 5t + 2, \\ y = -4t - 1, \\ z = 6t - 2; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{-1} + \frac{y}{1/2} + \frac{z}{2/3} = 1$$

$$28. \quad l: \frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-2}{4}; \quad \beta: 5x + 2y - 3z - 9 = 0$$

$$29. \quad l: \begin{cases} x - 2y + 2z + 2 = 0, \\ 3x - 3y + 2z + 4 = 0; \end{cases} \quad \beta: 3x - 2y + z - 1 = 0$$

$$30. \quad l: \begin{cases} x = 5t - 1, \\ y = -4t + 3, \\ z = 2t + 4; \end{cases} \quad \beta: \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{3} = 1$$

Решение типового варианта

Пример 1. Установить взаимное расположение прямой l и плоскости β . И в случае их пересечения найти координаты точки пересечения. Если:

$$a) \quad l: \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z+6}{4}; \quad \beta: 4x + 5y + z - 4 = 0.$$

$$б) \quad l: \begin{cases} 5x + 5y + 4z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + z + 4 = 0. \end{cases} \quad \beta: x - y + 2z - 7 = 0$$

$$в) \quad l: \begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = -5t - 4, \\ z = 2t + 1 \end{cases}; \quad \beta: \frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-6/7} = 1$$

• а) Для того, чтобы установить взаимное расположение прямой l и плоскости β , решим систему:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z+6}{4}; \\ 4x + 5y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение прямой l в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t, \\ y = 4 + 6t, \\ z = -6 + 4t. \end{cases}$$

Полученные выражения для x , y и z подставим в уравнение плоскости β :

$$4 \cdot (3 - 3t) + 5 \cdot (4 + 6t) + (-6 + 4t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 22t + 22 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Так как система имеет единственное решение, то прямая пересекает плоскость. Найдём координаты точки пересечения. Для этого подставим найденное значение t в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3 - 3 \cdot (-1) = 6, \\ y = 4 + 6 \cdot (-1) = -2, \\ z = -6 + 4 \cdot (-1) = -10. \end{cases}$$

Таким образом, координаты точки пересечения прямой и плоскости $(6; -2; -10)$.

Значит прямая пересекает плоскость в точке $(6; -2; -10)$.

б) Для того, чтобы установить взаимное расположение прямой l и плоскости β , решим систему:

$$\begin{cases} 5x + 5y + 4z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + z + 4 = 0, \\ x - y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение прямой l в параметрическом виде. Для этого сначала найдём точку, которая принадлежит прямой и направляющий вектор.

Пусть $x = 0$, тогда система примет вид $\begin{cases} 5y + 4z - 5 = 0, \\ 3y + z + 4 = 0. \end{cases}$ Найдём из неё y и z .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5y + 4z - 5 = 0, \\ -12y - 4z - 16 = 0. \end{cases} \\ -7y - 21 = 0, \\ y = -3, \\ 5 \cdot (-3) + 4z - 5 = 0, \\ z = 5. \end{aligned}$$

Получили точку $(0; -3; 5)$.

Теперь найдём направляющий вектор: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}.$

Значит, направляющий вектор имеет вид: $\vec{a} = (-7; 3; 5)$.

Уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -7t, \\ y = -3 + 3t, \\ z = 5 + 5t. \end{cases}$$

Полученные выражения для x , y и z подставим в уравнение плоскости β :

$$-7t - (-3 + 3t) + 2 \cdot (5 + 5t) - 7 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot t + 6 = 0.$$

Так как последнее равенство невозможно, то прямая параллельна плоскости.

Значит прямая параллельна плоскости.

в) Для того, чтобы установить взаимное расположение прямой l и плоскости β , решим систему:

$$\begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = -5t - 4, \\ z = 2t + 1. \end{cases}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-6/7} = 1.$$

Запишем уравнение плоскости β в виде:

$$x - 2y - 7z - 6 = 0.$$

Полученные выражения для x , y и z подставим в уравнение плоскости β :

$$(4t + 5) - 2 \cdot (-5t - 4) - 7 \cdot (2t + 1) - 6 = 0. \Leftrightarrow 0 \cdot t = 0.$$

Так как последнему неравенству удовлетворяют все числа, то прямая лежит в плоскости.

Значит прямая лежит в плоскости. •

ГЛАВА V

Функции нескольких переменных

Дифференцирование функции нескольких переменных.

Задание 1. Найти частные производные второго порядка функции z .

1. $z = x^2y^4 + 2x^3y + 5x^2 + 7y^3 - 1$
2. $z = 3x^3y^4 + 2xy + 8x^2 - 2y^4 + 2$
3. $z = 4xy^3 - 5x^2y + 3x^3 - y^4 - 3$
4. $z = 2x^2y^2 - 5x^3y^4 - 2x + y^2 + 4$
5. $z = x^4y^5 - x^2y^3 + x^4 - 3y - 5$
6. $z = 3x^2y^4 - 4x^3y^3 + 2x^5 - y + 6$
7. $z = 4xy - 2x^4y^6 + 7x^5 + y^3 - 7$
8. $z = 5x^2y^3 - 8xy^2 + 9y - 2x^3 + 8$
9. $z = 4y^4x^3 - 5y^3x^2 - 4x + 7y^3 + 16$
10. $z = 5y^3x^2 + 2y^3x^4 - x^3 + y^3 - 17$
11. $z = 3y^5x^3 - y^4x^6 + x^4 - 4y^4 + 18$
12. $z = y^5x^2 - y^3x^2 + 5x^5 - 2y^7 - 19$
13. $z = y^6x^7 - 4x^3y - 5x^2 + 3y^4 + 20$
14. $z = x^5y^5 - 3x^6y^8 + 2x^4 - 5y - 21$
15. $z = x^6y - 8x^2y^2 + 2x - 3y^3 + 22$
16. $z = x^5y^6 + 2x^4y^7 - x^4 + y^5 - 23$

Задание 2. Заданное уравнение определяет в некоторой окрестности точки $A(x_0; y_0; z_0)$ единственную неявную функцию вида $z = z(x; y)$. Вычислить значения ее частных производных в точке $(x_0; y_0)$.

1. $\sin^2 x + \cos^2 y + \sin y \cos z = 4, A(0; \pi/2; \pi/2)$
2. $x^2y + 3xyz + y^{3x} + zy = 2, A(0; 1; 2)$
3. $e^{xz} - 2\cos y + yz^2 + x = 2, A(1; \pi/2; 0)$
4. $\ln x + 2x^2yz + e^z + y^3 = 4, A(1; 4; 0)$
5. $x/y + z/x + y/z = 6, A(1; -4; 2)$
6. $z^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 8 = 2, A(2; 2; 1)$
7. $x \sin y + y \cos z + z \cos x = 2, A(0; \pi/2; \pi)$
8. $x^y + z^y + z^x = 3, A(1; 1; 1)$
9. $(x^2 + y^2)^3 + z^4 - xyz = 2, A(3; 1; 1)$
10. $z \cos(xy) - y \sin(xz) + x e^{yz} = 1, A(0; 0; 2)$
11. $e^{xy-1} + \ln(xz) - x^2yz^3 = 4, A(1; 1; -1)$
12. $\sqrt{xz + yz^2} - 3xy + 2z = 1, A(2; 0; 2)$
13. $x \ln(yz) - y^2 \cos x + z e^{xy} = 3, A(0; 1; 1)$
14. $z \cos x^y + x \cos y^z + y^x \cos z^2 = 2, A(1; 1; 0)$

Задание 3. Найти производную сложной функции $z = z(x; y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin t$
2. $z = x/y - y/x$, $x = 1 + 2t$, $y = t^3$
3. $z = (x^2 + y - 2)^3$, $x = \ln(t + 2)$, $y = e^{2t}$
4. $z = \sqrt{x + 4y - 2}$, $x = \sin 2t$, $y = \operatorname{tg} 3t$
5. $z = \arcsin(x^2 y)$, $x = t^4 + 2t + 1$, $y = t^4$
6. $z = \ln(x^2 + y^3)$, $x = e^{4t}$, $y = \cos t$
7. $z = e^{2x - y^4}$, $x = \operatorname{tg} 2t$, $y = t + 2$
8. $z = x^y$, $x = t^2 - 2t + 8$, $y = \operatorname{ctg} 5t$
9. $z = \operatorname{tg} \frac{4y}{x + 3}$, $x = t^4$, $y = \sin^2 t$
10. $z = \frac{x}{4y^3 - 2}$, $x = t^3$, $y = t + 2$
11. $z = \ln \frac{y^3 - 2}{x}$, $x = \cos 3t$, $y = 4 \operatorname{tg} t$
12. $z = \left(\frac{y^2 + 4}{x^3} \right)^3$, $x = \operatorname{arctg} t$, $y = e^t$
13. $z = x^3 e^{2y}$, $x = 1 - 2t$, $y = \sin 3t$
14. $z = \ln(e^{2x} - 2^y)$, $x = \operatorname{tg} 4t$, $y = \cos^4 t$
15. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$, $x = \frac{1}{t}$, $y = t^2 + 3$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = 6x^3 y^2 - 2x^2 y + x^4 + 3y^5 - 7$.

• Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = (6x^3 y^2 - 2x^2 y + x^4 + 3y^5 - 7)'_x = 18x^2 y^2 - 4xy + 4x^3,$$

$$z'_y = (6x^3 y^2 - 2x^2 y + x^4 + 3y^5 - 7)'_y = 12x^3 y - 2x^2 + 15y^4.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y , найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (18x^2 y^2 - 4xy + 4x^3)'_x = 36xy^2 - 4y + 12x^2,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (12x^3y - 2x^2 + 15y^4)'_y = 12x^3 + 60y^3,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (18x^2y^2 - 4xy + 4x^3)'_y = 36x^2y - 4x,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (12x^3y - 2x^2 + 15y^4)'_x = 36x^2y - 4x. \bullet$$

Пример 2. Уравнение $x^2y - z^3 + 3x = 4$ определяет в некоторой окрестности точки $A(3;0;-1)$ единственную неявную функцию вида $z = z(x;y)$. Вычислить значения ее частных производных в точке $(3;0)$.

• Для функции $z = z(x;y)$, заданной неявно уравнением $F(x;y;z) = 0$, справедливы равенства: $z'_x = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$; $z'_y = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$.

В нашем случае $F(x;y;z) = x^2y - z^3 + 3x - 4$, поэтому $F'_x = 2xy + 3$, $F'_y = x^2$, $F'_z = -3z^2$.

Следовательно, $z'_x = -\frac{2xy + 3}{-3z^2} = \frac{2xy + 3}{3z^2}$; $z'_y = -\frac{x^2}{-3z^2} = \frac{x^2}{3z^2}$.

Вычисляем значения найденных частных производных в точке $A(3;0;-1)$:

$$z'_x(3;0) = \frac{2xy + 3}{3z^2} \Big|_A = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0 + 3}{3 \cdot (-1)^2} = 1, \quad z'_y(3;0) = \frac{x^2}{3z^2} \Big|_A = \frac{3^2}{3 \cdot (-1)^2} = 3. \bullet$$

Пример 3. Найти производную сложной функции $z = \arcsin \frac{2y}{x}$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$.

• Воспользуемся формулой: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

$$\text{Имеем: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2yx^{-1})^2}} \cdot (-2yx^{-2}) = \frac{-2yx^{-2}}{\sqrt{1 - (2yx^{-1})^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2yx^{-1})^2}} \cdot (2x^{-1}) = \frac{2x^{-1}}{\sqrt{1 - (2yx^{-1})^2}};$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{2yx^{-2} \sin t}{\sqrt{1 - (2yx^{-1})^2}} + \frac{2x^{-1} \cos t}{\sqrt{1 - (2yx^{-1})^2}} = \frac{2 \operatorname{ctg}^2 t}{\sqrt{1 - (2 \operatorname{tg} t)^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - (2 \operatorname{tg} t)^2}} = \frac{2(\operatorname{ctg}^2 t + 1)}{\sqrt{1 - 4 \operatorname{tg}^2 t}} = \\ &= \frac{2}{\sin^2 t \sqrt{1 - 4 \operatorname{tg}^2 t}}. \bullet \end{aligned}$$

Дифференциалы функции нескольких переменных.

Задание 1. Найти полный дифференциал функции u .

- | | |
|---|--|
| 1. $u = \cos(x^2y + y^2 \ln(zy))$ | 9. $u = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{xy} \sin x^2}{z^3y}\right)$ |
| 2. $u = \sin\left(\frac{x^2z^y}{\ln(xz)}\right)$ | 10. $u = \operatorname{arcctg}(z \operatorname{tg}(z^3y) - xyz)$ |
| 3. $u = \operatorname{tg}(x^2 \cos(yx) + 2z)$ | 11. $u = \operatorname{ctg}(z^2 \ln(x^3z) - yx^3z)$ |
| 4. $u = \operatorname{ctg}\left(\frac{z^2x^y}{\sin(xz)}\right)$ | 12. $u = \sin(z^2y + 7y \ln(yx))$ |
| 5. $u = \arccos(2y^3 \sin(zy) + x^2y)$ | 13. $u = \cos\left(\frac{\sqrt{z} \operatorname{tg}(x^2z^3)}{y^4x^3}\right)$ |
| 6. $u = \arcsin\left(\frac{x^4yz}{\operatorname{tg}(xz)}\right)$ | 14. $u = \arcsin(y e^{2xy^4} + 7xz^2)$ |
| 7. $u = \operatorname{arctg}(x^3 \operatorname{ctg}(xy^2) - 2zy^2)$ | 15. $u = \arccos\left(\frac{5x^2\sqrt{z} - x^3y}{xz}\right)$ |
| 8. $u = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\ln(x^3y)}{x^4z^3}\right)$ | 16. $u = \log_4(3z e^{xz} + \sqrt{xy^3})$ |

Задание 2. С помощью полного дифференциала вычислить приближённо данную величину (результат записать с двумя знаками после запятой).

- | | |
|---|--|
| 1. $\sqrt{3,01^2 + 3,98^2}$ | 9. $\frac{3,01^3}{5,08^2 - 1,98^4}$ |
| 2. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2,01^2}{0,98} - 3\right)$ | 10. $\sqrt[4]{5,02^2 - 2,97^2}$ |
| 3. $3,01^2 \cdot 1,97^2 \cdot 0,98^3$ | 11. $\operatorname{arctg} \frac{0,98^2}{2,01^3 - 7}$ |
| 4. $\ln \frac{0,97^3}{3,01^2 - 8}$ | 12. $3,97^2 \cdot 0,99^3 \cdot 1,98^2$ |
| 5. $\frac{2,98^2 + 4,01^2}{5,02}$ | 13. $\ln\left(\frac{1,97^2}{0,98^4} - 3\right)$ |
| 6. $\sqrt{6,03^2 + 7,98^2}$ | 14. $\frac{5,02^2 - 1,98^4}{3,03^2}$ |

$$\begin{array}{ll}
 7. \arctg\left(\frac{1,97^3}{1,01^2} - 7\right) & 15. \sqrt{8,03^2 + 6,98^2 + 8} \\
 8. 2,01^4 \cdot 2,99^2 \cdot 1,02^3 & 16. \arctg \frac{2,03^5 + 4}{5,97^2}
 \end{array}$$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $u = \sin\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right)$.

• Найдем сначала частные производные данной функции:

$$u'_x = \left(\sin\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \right)'_x = \cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \cdot \frac{2x + \frac{y}{x}}{\sqrt{z^3 y}},$$

$$u'_y = \left(\sin\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \right)'_y = \cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \cdot \frac{\ln x \sqrt{z^3 y} - \frac{z^3(x^2 + y \ln x)}{2\sqrt{z^3 y}}}{(\sqrt{z^3 y})^2},$$

$$u'_z = \left(\sin\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \right)'_z = \cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \cdot \frac{3z^2 y \cdot (x^2 + y \ln x)}{-2\sqrt{(z^3 y)^3}}.$$

Найдём полный дифференциал u по формуле $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$:

$$\begin{aligned}
 du = & \left(\cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \cdot \frac{2x + \frac{y}{x}}{\sqrt{z^3 y}} \right) dx + \left(\cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \cdot \frac{\ln x \sqrt{z^3 y} - \frac{z^3(x^2 + y \ln x)}{2\sqrt{z^3 y}}}{(\sqrt{z^3 y})^2} \right) dy + \\
 & + \left(\cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \cdot \frac{3z^2 y (x^2 + y \ln x)}{-2\sqrt{(z^3 y)^3}} \right) dz, \text{ или}
 \end{aligned}$$

$$du = \cos\left(\frac{x^2 + y \ln x}{\sqrt{z^3 y}}\right) \left(\frac{\left(2x + \frac{y}{x}\right) dx}{\sqrt{z^3 y}} + \frac{\left(\ln x \sqrt{z^3 y} - \frac{z^3(x^2 + y \ln x)}{2\sqrt{z^3 y}}\right) dy}{(\sqrt{z^3 y})^2} - \frac{3z^2 y (x^2 + y \ln x) dz}{2\sqrt{(z^3 y)^3}} \right). \bullet$$

Пример 2. С помощью полного дифференциала вычислить приближённо $\sqrt[3]{9,98^2 + 5,03^2}$ (результат записать с двумя знаками после запятой).

• Представим данную величину в виде $\sqrt[3]{9,98^2 + 5,03^2} = \sqrt[3]{(10 - 0,02)^2 + (5 + 0,03)^2}$

и введём функцию $f(x; y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$, где $x = x_0 + \Delta x$; $x_0 = 10$; $\Delta x = -0,02$; $y = y_0 + \Delta y$; $y_0 = 5$; $\Delta y = 0,03$.

Воспользуемся приближённым равенством:

$$f(x; y) = f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$$

Получим: $f(x_0; y_0) = \sqrt[3]{10^2 + 5^2} = 5$;

$$f'_x(x; y) = \left(\sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}; \quad f'_x(x_0; y_0) = \frac{2 \cdot 10}{3\sqrt[3]{(10^2 + 5^2)^2}} = \frac{4}{3};$$

$$f'_y(x; y) = \left(\sqrt[3]{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}; \quad f'_y(x_0; y_0) = \frac{2 \cdot 5}{3\sqrt[3]{(10^2 + 5^2)^2}} = \frac{2}{3}.$$

Вычисляем: $\sqrt[3]{9,98^2 + 5,03^2} \approx 5 + \frac{4}{3} \cdot (-0,02) + \frac{2}{3} \cdot 0,03 = 5 - 0,027 + 0,02 \approx 4,99$. •

Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных.

Задание 1. Вычислить производную функции z в точке M по направлению вектора $\vec{a}$.

1. $z = x^3y^2 + 3xy - 7x^4 - 4y^3$, $M(-1;1)$, $\vec{a} = (8;15)$
2. $z = 2x^4y^5 + 2xy^2 + x^5 + y^4$, $M(-1;-1)$, $\vec{a} = (3;-4)$
3. $z = 5x^2y^4 + 3x^2y - 8x + 9y^7$, $M(-3;-1)$, $\vec{a} = (8;-6)$
4. $z = x^4y + 5x^3y^2 + 8x^2 - 2y^2$, $M(2;-1)$, $\vec{a} = (12;9)$
5. $z = x^5y^6 + 8x^2y^3 - 5x^3 - 2y^4$, $M(1;-1)$, $\vec{a} = (5;12)$
6. $z = 2x^4y^3 - 8xy^2 - x - 6y^2$, $M(1;-1)$, $\vec{a} = (8;15)$
7. $z = x^3y^4 - 3xy^2 - 2x^8 + 5y^2$, $M(1;-2)$, $\vec{a} = (3;4)$
8. $z = x^4y - 5xy^2 - 2x^3 - 3y^3$, $M(-2;-2)$, $\vec{a} = (8;6)$
9. $z = 2xy^2 + 4x^2y - 3x^3 - 7y$, $M(-1;3)$, $\vec{a} = (-9;-12)$
10. $z = xy^2 + x^3y + 7x + 4y$, $M(3;-3)$, $\vec{a} = (5;-12)$
11. $z = 2x^3y^2 - 5xy - x^3 - 2y^4$, $M(2;-1)$, $\vec{a} = (15;8)$
12. $z = 4xy^2 + x^4y^3 - 4x + 2y^3$, $M(-1;2)$, $\vec{a} = (4;3)$
13. $z = 2x^2y^3 + 4xy + 2x^2 - 7y^3$, $M(2;2)$, $\vec{a} = (6;-8)$
14. $z = 4x^2y^3 - 6x^4y + 7x^2 + 3y$, $M(-1;2)$, $\vec{a} = (12;9)$
15. $z = 7x^2y - 3x^4y^2 - 3x^2 - 2y^2$, $M(-1;2)$, $\vec{a} = (12;5)$

Решение типового варианта

Пример 1. Вычислить производную функции $z = 3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y$ в точке $M(1;-1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (4;3)$.

• Воспользуемся формулой $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} \Big|_M = \text{grad } z \Big|_M \cdot \vec{a}^0$, где $\text{grad } z \Big|_M = (z'_x(M); z'_y(M))$ –

градиент функции z в точке M , а $\vec{a}^0$ – орт вектора $\vec{a}$.

Находим частные производные функции z :

$$z'_x = (3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y)'_x = 9x^2y^2 - 10x^4y^4 - 9x^2;$$

$$z'_y = (3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y)'_y = 6x^3y - 8x^5y^3 + 3.$$

Находим значения этих производных в точке M :

$$z'_x(M) = (9x^2y^2 - 10x^4y^4 - 9x^2) \Big|_M = 9 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot 1^4 \cdot (-1)^4 - 9 \cdot 1^2 = -10;$$

$$z'_y(M) = \left(6x^3y - 8x^5y^3 + 3\right)\Big|_M = 6 \cdot 1^3 \cdot (-1) - 8 \cdot 1^5 \cdot (-1)^3 + 3 = 5.$$

Тогда $\text{grad } z|_M = (-10; 5)$.

Орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a} = (a_1; a_2)$ находится по формуле $\vec{a}^0 = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}; \frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)$, где $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. В

нашем случае $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $\vec{a}^0 = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

В итоге получаем: $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\Big|_M = (-10; 5) \cdot \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = (-10) \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} = -5$. •

Экстремум функции нескольких переменных.

Задание 1. Исследовать функцию z на локальный экстремум.

1. $z = 2x^3 + 42xy + 21y^2 - 24x - 84y + 60$
2. $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 18x - 30y - 93$
3. $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 12x - 24y - 126$
4. $z = 2x^3 - 30xy + 15y^2 + 6x + 30y - 8$
5. $z = 2x^3 + 18xy - 9y^2 - 60x + 36y - 143$
6. $z = 4x^3 + 12xy - 3y^2 - 36x - 30y - 389$
7. $z = x^3 + 6xy - y^2 - 30x + 18y - 58$
8. $z = 2y^3 - 12xy + 3x^2 - 18y + 18x + 35$
9. $z = 8y^3 - 24xy - 168y + 3x^2 + 60x + 309$
10. $z = 2x^3 - 30xy + 15y^2 - 24x + 60y + 43$
11. $z = 8x^3 + 24xy - 3y^2 - 120x + 48y - 181$
12. $z = 4x^3 + 36xy - 9y^2 - 84x + 90y - 148$
13. $z = x^3 + 18xy - 9y^2 - 12x + 36y - 6$
14. $z = 2y^3 - 18xy - 6y + 9x^2 + 18x - 25$
15. $z = 2y^3 - 6xy - 18y + x^2 + 10x + 37$

Решение типового варианта

Пример 1. Исследовать функцию $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2$ на локальный экстремум.

- Находим частные производные первого и второго порядков функции Z :

$$z'_x = (2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2)'_x = 6x^2 + 6y - 36,$$

$$z'_y = (2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2)'_y = 6x - 6y.$$

$$z''_{xx} = (6x^2 + 6y - 36)'_x = 12x,$$

$$z''_{yy} = (6x - 6y)'_y = -6,$$

$$z''_{xy} = (6x^2 + 6y - 36)'_y = 6.$$

Находим стационарные точки функции z , приравнявая частные производные первого порядка к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6y - 36 = 0; \\ 6x - 6y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y - 6 = 0; \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0; \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; \\ x = 2; \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; \\ y = -3; \\ x = 2; \\ y = 2. \end{cases}$$

Получили две стационарные точки: $M_1(2;2)$ и $M_2(-3;-3)$.

Исследуем функцию z на экстремум в этих точках.

$M_1(2;2):$

$$A = z''_{xx}(M_1) = 12x|_{M_1} = 12 \cdot 2 = 24;$$

$$B = z''_{xy}(M_1) = 6|_{M_1} = 6;$$

$$C = z''_{yy}(M_1) = (-6)|_{M_1} = -6;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 24 \cdot (-6) - 6^2 = -180.$$

Т.к. $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_1 функция z не имеет.

$M_2(-3;-3):$

$$A = z''_{xx}(M_2) = 12x|_{M_2} = 12 \cdot (-3) = -36;$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = 6|_{M_2} = 6;$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = (-6)|_{M_2} = -6;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-36) \cdot (-6) - 6^2 = 180.$$

Т.к. $\Delta > 0$ и $A < 0$, то точка M_2 является точкой локального максимума.

Найдём локальный максимум как значение функции z в точке M_2 :

$$z_{\max} = z(M_2) = 2(-3)^3 + 6 \cdot (-3) \cdot (-3) - 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 2 = 83.$$

Таким образом, $z_{\max}(-3;-3) = 83$. •

ГЛАВА VI

Интегральное исчисление функций одной переменной

Основные методы интегрирования.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{\sqrt[5]{x^3} - 2x^2 + 4}{x^3} dx$ | 8. $\int \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{7x^3}{\sqrt{x^5}} - \frac{8}{x} \right) dx$ |
| 2. $\int \left(x\sqrt{x^5} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{x^2} - 1 \right) dx$ | 9. $\int \left(2 - \frac{5\sqrt{x}}{x^2} + \frac{4}{\sqrt[9]{x^7}} \right) dx$ |
| 3. $\int \left(5x + \frac{3\sqrt[6]{x}}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx$ | 10. $\int \frac{2\sqrt{x^5} + x^7 - 6}{x^4} dx$ |
| 4. $\int \frac{3x^3 - 2\sqrt{x^7} + 2}{2\sqrt{x^3}} dx$ | 11. $\int \left(4 - \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^7}} \right) dx$ |
| 5. $\int \frac{5x - 4\sqrt[3]{x^7} - 10}{x} dx$ | 12. $\int \frac{5 - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^4}}{4x} dx$ |
| 6. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5x^8}{x^2} - \frac{6}{x} \right) dx$ | 13. $\int \left(\frac{5\sqrt{x}}{x} + \frac{7}{2\sqrt{x^7}} - 8 \right) dx$ |
| 7. $\int \left(\frac{5x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[5]{x^3}}{2\sqrt{x^5}} - 8x \right) dx$ | 14. $\int \left(16x - \frac{2\sqrt{x^5}}{x^5} + \frac{x^6}{3\sqrt{x^7}} \right) dx$ |

Задание 2. Найти неопределенный интеграл.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^6 3x} dx$ | 16. $\int \sin(3 - 8x) dx$ |
| 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 8x^2}}$ | 17. $\int \frac{dx}{2x^2 - 3}$ |
| 3. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$ | 18. $\int \frac{dx}{(1-x)^5 \sqrt{\ln^6(1-x)}}$ |
| 4. $\int \frac{7x dx}{4x^2 + 25}$ | 19. $\int \frac{4x^4 dx}{2x^5 + 25}$ |
| 5. $\int e^{4x+5} dx$ | 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 3}}$ |
| 6. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 5x}}{\sin^2 5x} dx$ | 21. $\int \frac{\arccos^4 7x}{\sqrt{1 - 49x^2}} dx$ |
| 7. $\int \frac{\sqrt{3} dx}{\sqrt{10 + 4x^2}}$ | 22. $\int \frac{\sqrt{\ln(5-x)}}{(5-x)} dx$ |

Задание 3. Найти неопределенный интеграл.

- | | | |
|---|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\int \frac{\ln(2x-1)}{(2x-1)^2} dx$ | 11. $\int (x-2) \sin(2-x) dx$ | 21. $\int \frac{x dx}{\cos^2 4x}$ |
| 2. $\int (3x+2) e^{4x} dx$ | 12. $\int (2x+5) \ln 2x dx$ | 22. $\int x \ln \frac{x}{8} dx$ |
| 3. $\int x \operatorname{arcctg} x dx$ | 13. $\int 4x \cos(5x+2) dx$ | 23. $\int x e^{2-6x} dx$ |
| 4. $\int x \arctg x dx$ | 14. $\int (2x+4) e^{2x+4} dx$ | 24. $\int \ln \frac{5-x}{5+x} dx$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{7x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx$.

- Представив корни в виде степеней, разделим числитель на знаменатель и воспользуемся свойством линейности неопределённого интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{7x^3 + x^{2/3} - 1}{x^{1/2}} dx = \int (7x^{5/2} + x^{1/6} - x^{-1/2}) dx = 7 \int x^{5/2} dx + \\ &+ \int x^{1/6} dx - \int x^{-1/2} dx = 7 \frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + \frac{x^{1/6+1}}{1/6+1} - \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2\sqrt{x^7} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{4dx}{\sqrt{9-64x^2}}$.

- Учитывая, что $d(8x) = (8x)' dx = 8dx$, получим:

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{9-64x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{8dx}{\sqrt{3^2-(8x)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(8x)}{\sqrt{3^2-(8x)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x}{3} + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int x \sin(5x+1) dx$.

- Применим метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int x \sin(5x+1) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin(5x+1) dx, \quad v = -\frac{1}{5} \cos(5x+1) \end{array} \right] = x \cdot \left(-\frac{1}{5} \cos(5x+1) \right) - \\ &- \int \left(-\frac{1}{5} \cos(5x+1) \right) dx = -\frac{1}{5} x \cos(5x+1) + \frac{1}{25} \sin(5x+1) + C. \end{aligned}$$

Интегрирование рациональных функций.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{x-2}{x^2-6x+7} dx$

8. $\int \frac{x^2-6x-19}{(x^2-x-6)(x-1)} dx$

2. $\int \frac{3x^2+5x-10}{(x^2-4)(x+1)} dx$

9. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+6} dx$

3. $\int \frac{4x-3}{x^2+2x-4} dx$

10. $\int \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-1)(x-1)} dx$

4. $\int \frac{x^2+8x-5}{x^3-x^2} dx$

11. $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-5} dx$

5. $\int \frac{5-2x}{x^2-8x-3} dx$

12. $\int \frac{5x^2-22x+8}{(x-1)(x^2-4)} dx$

6. $\int \frac{x^2-7x-58}{(x^2-x-6)(x+4)} dx$

13. $\int \frac{3x+2}{x^2+6x-12} dx$

7. $\int \frac{5x-6}{x^2-8x+17} dx$

14. $\int \frac{5x^2+11x-6}{(x^2-9)(x+3)} dx$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2-5x+40}{(x^2-2x+10)(x+2)} dx$.

• Так как подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, представим её в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2-5x+40}{(x^2-2x+10)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+10} + \frac{C}{x+2} = \frac{(Ax+B)(x+2)+C(x^2-2x+10)}{(x^2-2x+10)(x+2)}, \text{ откуда}$$

$$(Ax+B)(x+2)+C(x^2-2x+10)=x^2-5x+40.$$

Для нахождения коэффициента C воспользуемся методом частных значений:

$$x=-2: (-2A+B)(-2+2)+C((-2)^2-2(-2)+10)=(-2)^2-5(-2)+40;$$

$$18 \cdot C = 54;$$

$$C = 3.$$

Для нахождения коэффициентов A и B воспользуемся методом сравнения коэффициентов:

$$\begin{aligned} x^2: A + C &= 1, \\ x^1: 2A + B - 2C &= -5, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} A = -2, \\ B = 5. \end{cases}$$

Таким образом, $\int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x^2 - 2x + 10)(x + 2)} dx = \int \left(\frac{-2x + 5}{x^2 - 2x + 10} + \frac{3}{x + 2} \right) dx =$

$$= \int \frac{-2x + 5}{x^2 - 2x + 10} dx + \int \frac{3}{x + 2} dx = \left[\frac{d(x^2 - 2x + 10)}{x^2 - 2x + 10} = (2x - 2) dx \right] = \int \frac{-(2x - 2) + 3}{x^2 - 2x + 10} dx +$$

$$+ \int \frac{3}{x + 2} dx = - \int \frac{(2x - 2) dx}{x^2 - 2x + 10} + \int \frac{3 dx}{(x - 1)^2 + 9} + 3 \int \frac{dx}{x + 2} = - \int \frac{d(x^2 - 2x + 10)}{x^2 - 2x + 10} +$$

$$+ 3 \int \frac{d(x - 1)}{(x - 1)^2 + 9} + 3 \int \frac{d(x + 2)}{x + 2} = - \ln |x^2 - 2x + 10| + \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{3} + 3 \ln |x + 2| + C. \bullet$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{7x - 2}{3x^2 - 5x + 4} dx$.

$$\int \frac{7x - 2}{3x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{84x - 24}{36x^2 - 60x + 48} dx = \int \frac{84x - 24}{(6x - 5)^2 + 23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 6x - 5; \quad du = 6dx; \\ x = \frac{u + 5}{6}; \end{array} \right\} =$$

$$\bullet = \frac{1}{6} \int \frac{14u + 70 - 24}{u^2 + 23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2 + 23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2 + 23} = \frac{7}{6} \ln(u^2 + 23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6} \ln |36x^2 - 60x + 48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x - 5}{\sqrt{23}} + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

8. $\int \frac{dx}{3 + 2\cos x + 5\sin x}$

2. $\int \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$

9. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin x \cos x}$

3. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$

10. $\int \frac{dx}{2 - \sin x + 5\cos x}$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x}$

11. $\int \frac{dx}{6 + \cos^2 x}$

5. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

12. $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$

6. $\int \frac{dx}{5 - \cos x + 2\sin x}$

13. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x - 3\sin^2 x}$

7. $\int \frac{dx}{7 - 2\sin^2 x}$

14. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$.

• Приведём данный интеграл к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3} &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \\ &= \int \frac{2dt}{4t + 3 - 3t^2 + 3 + 3t^2} = \int \frac{2dt}{4t + 6} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t + 3)}{2t + 3} = \frac{1}{2} \ln |2t + 3| = \frac{1}{2} \ln \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C. \bullet \end{aligned}$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

• Т.к. подынтегральная функция является четной относительно синуса и косинуса, приведём данный интеграл к интегралу от рациональной функции с помощью упрощенной тригонометрической подстановки:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \\ x = \operatorname{arctg} t; \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\left(\frac{dt}{1+t^2} \right)}{1 + \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C. \bullet$$

Интегрирование иррациональных функций.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{x+3}{x\sqrt{x-4}} dx$ 2. $\int \frac{\sqrt{3x+2} + \sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt{3x+2}} dx$

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+5}}$ 4. $\int x\sqrt{4x-9} dx$

5. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{2x+10}$ 6. $\int \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}} dx$

7. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{3x+1}}$ 8. $\int \frac{2 + \sqrt[5]{1-2x}}{\sqrt[3]{1-2x}} dx$

9. $\int x\sqrt{5x+11} dx$ 10. $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} dx$

11. $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{5x-4}}$ 12. $\int \frac{5 - \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[6]{3x+1}} dx$

13. $\int x\sqrt{2x+6} dx$ 14. $\int \frac{\sqrt[3]{8x+3} - \sqrt{8x+3}}{\sqrt[4]{8x+3}} dx$

15. $\int \frac{x dx}{\sqrt[7]{3x-5}}$ 16. $\int \frac{\sqrt[7]{2x-5} + 4}{\sqrt{2x-5}} dx$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{3x+1}} dx$.

• Так как $HOK(2,3) = 6$, то

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{3x+1}} dx = \left[\begin{array}{l} 3x+1 = t^6, \quad x = \frac{t^6-1}{3}, \\ t = \sqrt[6]{3x+1}, \quad dx = 2t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^3-1}{t^2+t^3} \cdot 2t^5 dt = 2 \int \frac{t^6-t^3}{1+t} dt.$$

Разделим $t^6 - t^3$ на $t + 1$ «уголком»:

$$\begin{array}{r}
t^6 - t^3 \bigg| t + 1 \\
\hline
t^6 + t^5 \bigg| t^5 - t^4 + t^3 - 2t^2 + 2t - 2 \\
\hline
-t^5 - t^3 \\
- \\
-t^5 - t^4 \\
\hline
t^4 - t^3 \\
- \\
t^4 + t^3 \\
\hline
-2t^3 \\
- \\
-2t^3 - 2t^2 \\
\hline
2t^2 \\
- \\
-2t^2 + 2t \\
\hline
-2t \\
- \\
-2t - 2 \\
\hline
2
\end{array}$$

Тогда $t^6 - t^3 = (t^5 - t^4 + t^3 - 2t^2 + 2t - 2)(t + 1) + 2$, откуда

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}} dx &= 2 \int \frac{(t^5 - t^4 + t^3 - 2t^2 + 2t - 2)(t + 1) + 2}{1 + t} dt = \\
&= 2 \int (t^5 - t^4 + t^3 - 2t^2 + 2t - 2) dt + 4 \int \frac{dt}{t + 1} = 2 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - 2 \frac{t^3}{3} + t^2 - 2t \right) + \\
&+ 4 \ln|t + 1| = \left[\begin{array}{l} \text{делаем обратную} \\ \text{подстановку} \end{array} \right] = \frac{1}{3}(3x + 1) - \frac{2}{5} \sqrt[6]{(3x + 1)^5} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3x + 1)^2} - \\
&- \frac{4}{3} \sqrt{3x + 1} + 2 \sqrt[3]{3x + 1} - 4 \sqrt[6]{3x + 1} + 4 \ln|\sqrt[6]{3x + 1} + 1| + C. \bullet
\end{aligned}$$

Определённый интеграл.

Задание 1. Вычислить определенный интеграл.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_1^6 (1+3x) \ln \frac{1}{x} dx$ | 8. $\int_{-1/9}^0 (5-x) e^{-9x} dx$ |
| 2. $\int_0^{1/4} \operatorname{arctg} 4x dx$ | 9. $\int_{-2}^1 x^3 \sin(x^2+4) dx$ |
| 3. $\int_0^2 \ln(7-3x) dx$ | 10. $\int_0^{1/2} \arcsin 2x dx$ |
| 4. $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ | 11. $\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin 2x dx$ |
| 5. $\int_1^9 \operatorname{arcctg} \sqrt{x} dx$ | 12. $\int_0^{1/3} \arccos 3x dx$ |
| 6. $\int_1^6 (1+3x) \ln \frac{1}{x} dx$ | 13. $\int_{-1/9}^0 (5-x) e^{-9x} dx$ |
| 7. $\int_0^{1/4} \operatorname{arctg} 4x dx$ | 14. $\int_{-2}^1 x^3 \sin(x^2+4) dx$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$.

• Применим метод интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx, \\ dv = \cos \frac{x}{2} dx, \quad v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right] = (x+2) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{x}{2} dx = (\pi+2) \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2} - (0+2) \cdot 2 \sin \frac{0}{2} - 4 \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\pi + 4 + 4 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 2\pi + 4 + 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{0}{2} \right) = 2\pi + 4 + 4(0-1) = 2\pi. \bullet$$

Несобственные интегралы.

Задание 1. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{5 \sin 3x}{\cos 3x} dx$ | 5. $\int_{-\infty}^0 \frac{2x+10}{\sqrt[7]{x^2+10x+26}} dx$ | 9. $\int_{-1/4}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{1+4x}}$ |
| 2. $\int_1^{+\infty} \frac{20x dx}{25x^4-9}$ | 6. $\int_{-5/2}^0 \frac{\ln^3(2x+5)}{2x+5} dx$ | 10. $\int_0^{+\infty} \frac{5+x^2}{x^2+7} dx$ |
| 3. $\int_{4/5}^1 \frac{dx}{(5x-4)^2}$ | 7. $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{5 dx}{x(1+\ln^2 2x)}$ | 11. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{1-x^4}$ |
| 4. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-4x^3} dx$ | 8. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sqrt[5]{(1-\sin 2x)^3}} dx$ | 12. $\int_2^{+\infty} \frac{9x dx}{16x^4-25}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{2x dx}{1+x^4}$ или доказать его расходимость.

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{+\infty} \frac{2x dx}{1+x^4} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{2x dx}{1+x^4} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} b^2 - \operatorname{arctg} 0^2) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b^2 = \frac{\pi}{2}. \bullet \end{aligned}$$

Приложения определённого интеграла.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

- | | |
|--|---|
| 1. $y = x^2 + 4x - 3, y = 5x + 3$ | 8. $y = 2x^2 - 2x - 5, y = x^2 + 2x + 7$ |
| 2. $y = x^2 + 4x - 2, y = -x^2 - 2x + 6$ | 9. $y = -x^2 + 8x + 9, y = 2x - 7$ |
| 3. $y = -x^2 + 6x + 5, y = 4x + 2$ | 10. $y = 2x^2 + 2x - 10, y = x^2 - 5x - 2$ |
| 4. $y = 2x^2 - 2x + 5, y = x^2 + x + 9$ | 11. $y = x^2 + 6x + 12, y = -3x - 8$ |
| 5. $y = x^2 - 2x + 7, y = -5x + 17$ | 12. $y = x^2 + 8x - 9, y = -x^2 + 10x + 15$ |
| 6. $y = x^2 + 2x + 3, y = -x^2 + 6x + 9$ | 13. $y = x^2 + 6x - 5, y = 5x + 7$ |
| 7. $y = -x^2 + 6x - 9, y = -5x + 1$ | 14. $y = 2x^2 + 4x - 3, y = x^2 + 2x + 5$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:
 $y = x^2 + 4x - 2, y = 2x + 1$.

- Уравнение $y = x^2 + 4x - 2$ задает параболу, ветви которой направлены вверх.

Найдем координаты ее вершины:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2, y_0 = y(x_0) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 2 = 4 - 8 - 2 = -6.$$

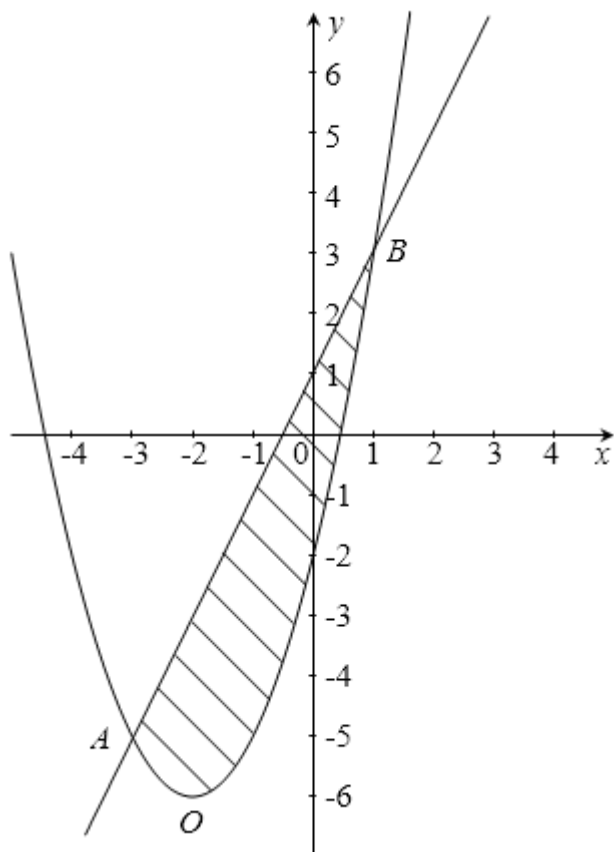
Значит, вершина параболы находится в точке $O(-2; -6)$.

Уравнение $y = 2x + 1$ определяет прямую. Найдем точки пересечения параболы и прямой, для чего составим систему из их уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 2; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 2x + 1; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; \\ x = 1; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; \\ y = -5; \\ x = 1; \\ y = 3. \end{cases} \text{ Значит, } A(-3; -5) \text{ и } B(1; 3) \text{ – искомые точки пересечения.}$$

Построим графики этих функций:



Теперь вычислим площадь заштрихованной фигуры:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-3}^1 (2x + 1 - (x^2 + 4x - 2)) dx = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^1 = \\
 &= \left(-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = \frac{32}{3}. \bullet
 \end{aligned}$$

ГЛАВА VII

Дифференциальные уравнения

ДУ с разделяющимися переменными.

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

- | | |
|--|---|
| 1. $y' = 5^{x^2+y} \cdot 4x$ | 16. $(y + x^2 y) dy = (1 + y^2) dx$ |
| 2. $xy' = 2 - y$ | 17. $\sin x dy = (y \cos x + 2 \cos x) dx$ |
| 3. $\operatorname{tg} x \cos y y' = \operatorname{ctg} y \sin x$ | 18. $e^{2x} \cos y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$ |
| 4. $3xy' + y^2 = 2$ | 19. $\sqrt{1-x^2} dy - x \cos^2 y dx = 0$ |
| 5. $(5 + x^2) y' - x^2 y = 0$ | 20. $(y^2 + 5) dx = x^4 y^2 dy$ |
| 6. $y' \sqrt{x^2 + 9} = e^{4y}$ | 21. $(x^2 + 9) y dx = x(y^2 - 4) dy$ |
| 7. $y' \ln x = \frac{y^2}{x}$ | 22. $\sqrt{1-y^2} \operatorname{arctg} x dx = (1 + x^2) dy$ |
| 8. $y^2 + x^{-1} y^2 = y'$ | 23. $e^{x^2+4y} dy = x dx$ |
| 9. $x^2 y y' = x^2 + 4$ | 24. $\cos x dy = y \ln^3 y dx$ |
| 10. $\sqrt{1-x^2} y' = \frac{\arcsin x}{4^y}$ | 25. $\frac{dy}{7^{x^2}} = x \sqrt{2+y^2} dx$ |
| 11. $e^x y^3 y' = 1 + e^{2x}$ | 26. $\cos y \cos^2 x dy = \sin^2 y \sin x dx$ |
| 12. $\sin y \cos^2 x y' = 2 \sin^2 y$ | 27. $(x^2 y + x^2) dx + y dy = 0$ |
| 13. $5^{x-y} y' = 8$ | 28. $(2x - 3) dy - 2xy dx = 0$ |
| 14. $y' = (9 - 2x) \cdot \operatorname{tg} y$ | 29. $\sqrt{y^2 - 4} dx + y(x^2 + 6) dy = 0$ |
| 15. $(5 + y^2)^3 y' = \frac{e^{2x}}{y}$ | 30. $(y^2 + y) x dx + (x^2 - 1) y dy = 0$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = e^x x^2 (1 + 4y^2)$.

• Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$, запишем уравнения в виде: $dy = e^x x^2 (1 + 4y^2) dx$. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим обе части на выражение $1 + 4y^2 \neq 0$: $\frac{dy}{1 + 4y^2} = e^x x^2 dx$.

Интегрируем: $\int \frac{dy}{1 + 4y^2} = \int e^x x^2 dx$.

К первому интегралу применим метод поднесения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dy}{1+4y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2y)}{1+(2y)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2y) + C_1, \text{ где } C_1 = \text{const}.$$

Ко второму интегралу дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int e^x x^2 dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right] = e^x x^2 - \int (2x) e^x dx = e^x x^2 - 2 \int x e^x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right] = e^x \cdot x^2 - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) = \\ &e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C_2, \text{ где } C_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2y) + C_1 = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C_2, \text{ или, обозначив } C = 2C_2 - 2C_1,$$

$$\operatorname{arctg}(2y) = 2 e^x (x^2 - 2x + 2) + C - \text{общий интеграл ДУ.} \bullet$$

Однородные ДУ первого порядка.

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

- | | |
|---|--|
| 1. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 - y^2} dx$ | 16. $y' = y/x + 5e^{y/x}$ |
| 2. $(4x + y) dx - x dy = 0$ | 17. $x^2 y' + x y y' = x^2 - xy$ |
| 3. $(x^2 + yx) dy - 2xy dx = 0$ | 18. $y^2 - xy = (3x^2 + xy) y'$ |
| 4. $(x^2 - y^2) dx - 3xy dy = 0$ | 19. $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y$ |
| 5. $x dy - y dx = x \cos \frac{y}{x} dx$ | 20. $y'x - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ |
| 6. $2x^2 dx - x^2 dy = 3xy dx$ | 21. $y'x - 6\sqrt{xy} = y$ |
| 7. $y dx - x dy = x \cdot e^{y/x} dx$ | 22. $x \left(y' - \sin \frac{y}{x} \right) = y$ |
| 8. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 - xy} dx$ | 23. $y'x - \sqrt{x^2 + y^2} = y$ |
| 9. $y dx - x dy = y \ln \frac{y}{x} dx$ | 24. $y'x^2 + y^2 y' = xy$ |
| 10. $(yx + y^2) dx - x^2 dy = 0$ | 25. $x + 5y = xy'$ |
| 11. $(y - 4\sqrt{xy}) dx - x dy = 0$ | 26. $4x^2 y + 3y^3 = 4x^3 y'$ |
| 12. $x dy - y dx = x \cos^2 \frac{y}{x} dx$ | 27. $y'x = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$ |
| 13. $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$ | 28. $y'x - \sqrt{x^2 - yx} = y$ |
| 14. $xy dy - 4x^2 dx = y^2 dx$ | 29. $y'x + 4y' = y$ |
| 15. $y^2 dx - x^2 dy = 5xy dx$ | 30. $x^2 (y' + 1) = yx (1 - y')$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x dy - 2y dx = x dx$.

- Из данного уравнения находим: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + x}{x}$.

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка, поэтому применим подстановку $y = x \cdot u(x)$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция. Получаем:

$$u'x + u = \frac{2xu + x}{x} \Leftrightarrow u'x + u = 2u + 1 \Leftrightarrow u'x = u + 1.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx}x = u + 1;$$

$$\frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Делаем обратную подстановку $u = \frac{y}{x}$:

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\frac{y}{x} + 1 = x \cdot C;$$

$y = Cx^2 - x$ – общее решение исходного уравнения. •

Линейные неоднородные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли.

Задание 1. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $(x^2 - 4)y' + 2xy = 3, y(3) = -2$
2. $xy' + 2y = e^x x^3 y^2, y(1) = -1/e$
3. $y' - 2xy - 5e^{x^2} = 0, y(0) = 7$
4. $y' + 2xy = e^{x^2} xy^2, y(0) = -1$
5. $xy' + 4xy = e^{-4x}, y(1) = 1/e^4$
6. $y' - y \cos x = \frac{y^2 \operatorname{tg} x}{e^{\sin x}}, y(0) = 1$
7. $(x^2 + 1)y' + xy = x\sqrt{x^2 + 1}, y(0) = 0$
8. $x^2 yy' + xy^2 = \cos 2x, y(\pi) = 4/\pi$
9. $x^2 y' + xy = x^3 + x^2, y(1) = 5/6$
10. $y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x, y(0) = -1/3$
11. $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}, y(\pi/2) = 3$
12. $xy' + y = xy^3 \sin \frac{1}{x}, y(1/\pi) = \pi$
13. $xy' - y = x^2 \cos x, y(0) = 5$
14. $y' - xy = 2xy^2 e^{x^2/2}, y(0) = 1/2$
15. $(x - 2)y' + y = x^2 - x^4, y(-1) = -13/15$
16. $xy' + 3y = y^2 x^3 \ln x, y(1) = -2$
17. $xy' - y = x \ln x, y(1) = 4$
18. $y' - y = \frac{5y^2}{e^x \cos^2 5x}, y(0) = -1$
19. $y' - y = e^x (\sin x + 4), y(0) = 0$
20. $y' + y \sin x = \sqrt{e^{\cos x}} y, y(0) = e$
21. $\sqrt{9 - x^2} (y' + y) = e^{-x}, y(0) = 1$
22. $y' + 4y = -\frac{6e^{4x} y^2}{\sin^2 6x}, y(\pi/12) = e^{-\pi/3}$
23. $y' + 7y = \frac{e^{-7x}}{\cos^2 x}, y(0) = 5$
24. $y' + y = y^2 \sin(e^{-x}), y(0) = -1/\cos 1$
25. $xy' - (x + 5)y = 5e^x \cdot x^5, y(1) = e$

26. $xy' - 4y = 5xy^2 \cos(x^5)$, $y(1) = -1/\sin 1$
 27. $y' + y \operatorname{tg} x = 3 \sin x$, $y(0) = 0$
 28. $(1+x^2)y' - 2xy = (x^2+x^4)y^2$, $y(0) = 1$
 29. $y' + 2xy = \frac{7x}{e^{x^2}}$, $y(0) = 2$
 30. $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{y^2}{e^{\arcsin x}}$, $y(0) = 1$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения:
 $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 1$.

- Преобразуем уравнение: $y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = x$.

Это линейное ДУ первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – новые неизвестные функции, одна из которых может быть выбрана произвольным образом.

Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2 - 1}v = x;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2 - 1}v\right) = x. \quad (*)$$

Находим функцию $v(x)$, приравнявая выражение в скобках к нулю:

$$v' - \frac{x}{x^2 - 1}v = 0 \text{ – ДУ с разделяющимися переменными;}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2 - 1}v;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{x dx}{x^2 - 1};$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \ln|C|;$$

$$v = C\sqrt{x^2 - 1}.$$

Т.к. функцию $v(x)$ можно выбрать произвольно, положим $C = 1$, тогда $v = \sqrt{x^2 - 1}$. Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*) и находим $u(x)$:

$$u'\sqrt{x^2 - 1} + u \cdot 0 = x;$$

$$\frac{du}{dx} \sqrt{x^2 - 1} = x \text{ – ДУ с разделяющимися переменными;}$$

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\int du = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$u = \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

Тогда $y = uv = (\sqrt{x^2 - 1} + C)\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2 - 1}$ – общее решение исходного уравнения.

Находим значение постоянной C , используя начальное условие $y(\sqrt{2}) = 1$:

$$1 = (\sqrt{2})^2 - 1 + C\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = x^2 - 1$. •

Пример 2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения: $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$, $y(1) = 1$.

• Преобразуем уравнение: $y' + \frac{2}{x}y = -x^4y^3e^x$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ – новые неизвестные функции, одна из которых может быть выбрана произвольным образом.

$$\text{Имеем: } u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = -x^4(uv)^3e^x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = -x^4u^3v^3e^x. \quad (**)$$

Находим функцию $v(x)$, приравняв выражение в скобках к нулю:

$$v' + \frac{2}{x}v = 0 \text{ – ДУ с разделяющимися переменными;}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v;$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -2\ln|x| + \ln|C|,$$

$$v = \frac{C}{x^2}.$$

Так как функцию $v(x)$ можно выбрать произвольно, положим $C = 1$, тогда $v = \frac{1}{x^2}$.

Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (**) и находим $u(x)$:

$$u' \cdot \frac{1}{x^2} + u \cdot 0 = -x^4 u^3 \left(\frac{1}{x^2} \right)^3 e^x;$$

$u' = -u^3 e^x$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$$\frac{du}{-u^3} = e^x dx;$$

$$-\int \frac{du}{u^3} = \int e^x dx;$$

$$\frac{u^{-2}}{2} = e^x + C;$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2e^x + 2C}}.$$

Тогда $y = uv = \left(\frac{1}{\sqrt{2e^x + 2C}} \right) x^{-2} = \frac{1}{x^2 \sqrt{2e^x + 2C}}$ – общее решение исходного уравнения.

Находим значение постоянной C , используя начальное условие $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{1^2 \sqrt{2e^1 + 2C}} \Rightarrow C = 0,5 - e.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = \frac{1}{x^2 \sqrt{2e^x + 1 - 2e}}$. •

ДУ высших порядков.

Задание 1. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

1. $y''' = 18\sin 3x$, $y(\pi/6) = \pi/3$, $y'(\pi/6) = 0$, $y''(\pi/6) = 0$
2. $y''' = 2\cos \frac{x}{3}$, $y(6\pi) = 30\pi$, $y'(6\pi) = -12$, $y''(6\pi) = 0$
3. $y''' = \frac{1}{x^3}$, $y(1) = 1/2$, $y'(1) = 3/2$, $y''(1) = 1/2$
4. $y''' = e^{x/2}$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 3$
5. $y''' = \cos 3x + 1$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8/9$, $y''(0) = 0$
6. $y''' = \sin 2x - 2$, $y(0) = 1/8$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/2$
7. $y'' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$
8. $y'' = (1-x^2)^{-1/2}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$
9. $y'' = 1/x$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 3$
10. $y'' = \sin^2 x \cdot \cos x$, $y(\pi) = -7/9$, $y'(\pi) = 0$
11. $y'' = 3\cos^2 x \cdot \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
12. $y''' = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1/2$
13. $y''' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$, $y(\pi/2) = \pi$, $y'(\pi/2) = 2$, $y''(\pi/2) = -1/2$
14. $y''' = \cos \frac{x}{2} + e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 1$
15. $y'' = \frac{1}{1+4x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
16. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$, $y(0) = 1/9$, $y'(0) = 0$
17. $y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$
18. $y'' = 6x + \sin^3 x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2/3$
19. $y''' = 8e^{2x} - 4\cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$, $y''(0) = 4$
20. $y'' = 3\cos^3 x - e^{x/5}$, $y(0) = -1/3$, $y'(0) = -5$
21. $y''' = 24\sin^2 x - 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 2$
22. $y'' = 4\sin^4 x$, $y(0) = -17/32$, $y'(0) = 0$
23. $y'' = 8\cos^4 x$, $y(0) = -1/16$, $y'(0) = 2$
24. $y'' = 5\sin^4 x \cdot \cos x$, $y(\pi/2) = 3$, $y'(\pi/2) = 1$

25. $y'' = 7 \cos^6 x \cdot \sin x$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 1$
26. $y'' = 12x^2 - \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 5/2$
27. $y''' = 2e^x + \cos 3x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1/9$, $y''(0) = 3$
28. $y''' = -\frac{2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$, $y(\pi/2) = -\pi^2/8$, $y'(\pi/2) = -\pi/2$, $y''(\pi/2) = 0$
29. $y''' = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$
30. $y'' = \frac{1}{1+x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = 1 - \sin 3x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{26}{27}$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = \frac{4}{3}$.

• Найдём y'' : $y'' = \int (1 - \sin 3x) dx = x + \frac{1}{3} \cos 3x + C_1$.

Воспользовавшись начальным условием $y''(0) = \frac{4}{3}$, определим C_1 :

$$\frac{4}{3} = 0 + \frac{1}{3} \cos(3 \cdot 0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 1. \text{ Уравнение примет вид: } y'' = x + \frac{1}{3} \cos 3x + 1.$$

Найдём y' : $y' = \int \left(x + \frac{1}{3} \cos 3x + 1 \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9} \sin 3x + x + C_2$.

Воспользовавшись начальным условием $y'(0) = -2$, определим C_2 :

$$-2 = \frac{0^2}{2} + \frac{1}{9} \sin(3 \cdot 0) + 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Уравнение примет вид: $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9} \sin 3x + x - 2$.

Найдём y : $y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{9} \sin 3x + x - 2 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27} \cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + C_3$.

Воспользовавшись начальным условием $y(0) = \frac{26}{27}$, определим C_3 :

$$\frac{26}{27} = \frac{0^3}{6} - \frac{1}{27} \cos(3 \cdot 0) + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Таким образом, $y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27} \cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ – искомое частное решение ДУ. •

Линейные однородные ДУ 2-го порядка.

Задание 1. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1. $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 8$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 5, y'(0) = -7$
3. $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 4$
4. $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -5$
5. $y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 4, y'(0) = -8$
6. $y'' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 9$
7. $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$
8. $y'' - 9y' + 20y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5$
9. $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$
10. $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 12$
11. $y'' - 10y' + 21y = 0, y(0) = -3, y'(0) = -5$
12. $y'' + 6y' + 10y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2$
13. $y'' + 12y' + 36y = 0, y(0) = -4, y'(0) = 14$
14. $y'' - 49y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 7$
15. $y'' + 12y' + 37y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4$
16. $4y'' - 4y' + y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1/2$
17. $y'' - 2y' = 0, y(0) = 5, y'(0) = 4$
18. $y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 5$
19. $9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 0$
20. $2y'' + 3y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 10y = 0, y(0) = 5, y'(0) = -1$
22. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10$
23. $y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 8, y'(0) = 1$
24. $y'' + 16y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 8$
25. $9y'' - 12y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$
26. $2y'' + 5y' - 3y = 0, y(0) = 9, y'(0) = 1$
27. $y'' + 4y' + 20y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 6$
28. $y'' + 14y' + 49y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -5$
29. $y'' - 10y' + 16y = 0, y(0) = -4, y'(0) = 4$
30. $y'' + 2y' + 17y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 9$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 80y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.

• Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda - 80 = 0$.

Так как его корни $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 10$ являются действительными и различными, то общее решение дифференциального уравнения запишется в виде: $y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{10x}$.

Продифференцируем обе части этого равенства:

$$y' = -8C_1 e^{-8x} + 10C_2 e^{10x}.$$

Найдём частное решение исходного уравнения, воспользовавшись заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 3; \\ y'(0) = -6; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ -8C_1 + 10C_2 = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1; \\ -8C_1 + 10(3 - C_1) = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1; \\ -18C_1 = -36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, искомое частное решение запишется в виде:

$$y = 2e^{-8x} + e^{10x}. \bullet$$

Линейные неоднородные ДУ второго порядка.

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- | | |
|--|---|
| 1. $y'' - 2y' = 4e^{2x}$ | 16. $y'' - 8y' + 15y = 15x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 5x + 11$ |
| 2. $y'' - 2y' + 5y = 100e^{2x} \sin 5x$ | 17. $y'' - 10y' + 29y = (13x^2 + x + 22)e^{2x}$ |
| 3. $y'' + 8y' + 16y = 6e^{-4x}$ | 18. $9y'' + 12y' + 4y = 4\cos 4x - 468\sin 4x$ |
| 4. $y'' + 6y' - 7y = (16x + 10)e^x$ | 19. $y'' + 7y' + 10y = (130x + 24)\cos x$ |
| 5. $y'' + y = 4\cos x + 2\sin x$ | 20. $y'' + 36y = (27x + 54)\sin 3x + 33\cos 3x$ |
| 6. $y'' + 10y' + 25y = (16x - 8)e^{-x}$ | 21. $y'' - 14y' + 49y = (12x^2 - 6x + 2)e^{7x}$ |
| 7. $y'' - 3y' - 4y = -150e^{5x} \cos 3x$ | 22. $y'' - 7y' + 6y = -3\cos 5x + 89\sin 5x$ |
| 8. $y'' + 4y = -17e^{-x} \cos 2x$ | 23. $y'' - 8y' + 25y = -32\cos 4x + 9\sin 4x$ |
| 9. $y'' + 4y' + 4y = 27x^2 e^x$ | 24. $4y'' + 4y' + y = x^4 + 17x^3 + 58x^2 + 14x + 14$ |
| 10. $y'' - 5y' = 6x^2 - 4x - 9$ | 25. $y'' + 7y' + 12y = 65\sin 2x$ |
| 11. $y'' + 49y = 14\sin 7x$ | 26. $y'' - 8y' + 41y = 41x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 41$ |
| 12. $25y'' + 40y' + 16y = 100e^{-4x/5}$ | 27. $y'' - 6y' + 9y = (169x + 182)\sin 2x$ |
| 13. $y'' - 25y = 1500x^2 e^{5x}$ | 28. $y'' - 4y' = 24x^5 - 150x^4 - 8x^3$ |
| 14. $y'' - 2y' + 2y = (34x + 1)e^{-3x}$ | 29. $y'' - 12y' + 37y = 37x^3 + x^2 - 18x + 39$ |
| 15. $y'' - 16y' + 64y = 578e^{3x} \sin 3x$ | 30. $y'' - 12y' + 36y = -676e^{2x} \cos 6x$ |

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- | | |
|--|--|
| 1. $y'' + 10y' + 29y = \frac{1}{e^{5x} \sin 2x}$ | 16. $y'' + 49y = \frac{1}{\sin 7x}$ |
| 2. $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$ | 17. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x^4 e^x}$ |
| 3. $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 4}$ | 18. $y'' - 5y' + 6y = \frac{e^{4x}}{e^{2x} - 9}$ |
| 4. $y'' + 36y = \operatorname{tg} 6x$ | 19. $y'' + 64y = \operatorname{ctg} 8x$ |
| 5. $y'' - 10y' + 25y = e^{-5x} + \frac{e^{5x}}{x}$ | 20. $y'' - 16y' + 64y = \frac{e^{8x}}{x^5} + e^{8x}$ |
| 6. $y'' + y' = e^x \sin(e^x)$ | 21. $y'' - 5y' = e^{-5x} \cos(e^{-5x})$ |
| 7. $y'' - 4y' + 8y = \frac{e^{2x}}{\sin^2 2x}$ | 22. $y'' + 9y = \frac{5}{\cos^2 3x}$ |
| 8. $y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{x^5 e^{2x}}$ | 23. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ |
| 9. $y'' - 4y = \frac{e^{4x}}{e^{4x} - 16}$ | 24. $y'' + 7y' + 12y = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ |

$$\begin{array}{ll}
10. \quad y'' + 25y = \frac{1}{\cos 5x} & 25. \quad y'' - 6y' + 18y = \frac{e^{3x}}{\cos^2 3x} \\
11. \quad y'' - 14y' + 49y = \frac{e^{7x}}{x^7} + e^{7x} & 26. \quad y'' + 12y' + 36y = e^{6x} + \frac{1}{xe^{6x}} \\
12. \quad y'' + y' - 20y = \frac{\sin x + 2}{e^{5x}} & 27. \quad y'' - y' - 2y = e^{2x}(\cos x + 1) \\
13. \quad y'' + 4y = \frac{4}{\sin^2 2x} & 28. \quad y'' + 10y' + 29y = \frac{1}{e^{5x} \cos 2x} \\
14. \quad y'' + 6y' + 9y = \frac{1}{x^3 e^{3x}} & 29. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^8} \\
15. \quad y'' - 3y' = \frac{e^{4x}}{e^{2x} + 4} & 30. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{\sin 5x}{e^x} + e^x
\end{array}$$

Решение типового варианта

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$.

• Общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y^* – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0;$$

$$D = -64 < 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i.$$

Так как корни уравнения являются комплексно-сопряжёнными, то общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$\bar{y} = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Поскольку числа $0 \pm 4i = \pm 4i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = A \cos 4x + B \sin 4x$, где постоянные A и B подлежат определению.

Дважды дифференцируем последнее равенство:

$$(y^*)' = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x;$$

$$(y^*)'' = -16A \cos 4x - 16B \sin 4x.$$

Подставляем y^* и её производные в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
& -16A \cos 4x - 16B \sin 4x - 6 \cdot (-4A \sin 4x + 4B \cos 4x) + \\
& + 25 \cdot (A \cos 4x + B \sin 4x) = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x;
\end{aligned}$$

$$9A \cos 4x + 9B \sin 4x + 24A \sin 4x - 24B \cos 4x = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x.$$

Находим неизвестные A и B , приравнивая коэффициенты при $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} 9B + 24A = 9; \\ 9A - 24B = -24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8A + 3B = 3; \\ 3A - 8B = -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9A - 24B = -24; \\ 64A + 24B = 24; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 73A = 0; \\ 64A + 24B = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0; \\ B = 1. \end{cases}$$

Получаем частное решение исходного неоднородного уравнения в виде $y^* = \sin 4x$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \sin 4x. \bullet$$

Пример 2. Найти общее решение ДУ $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x$.

• Так же, как и в предыдущем примере, общее решение данного уравнения будем искать в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y^* – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0;$$

$$D = 16 > 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3; \quad \lambda_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1.$$

Так как корни уравнения являются действительными и различными, то общее решение соответствующего исходному однородного уравнения запишется в виде:

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

Поскольку правая часть исходного уравнения имеет вид $P_2(x)e^{1 \cdot x}$, где $P_2(x)$ – многочлен второй степени, причем число $a=1$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = x \cdot Q_2(x) \cdot e^{1 \cdot x}$, или $y^* = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x$, где постоянные A , B и C подлежат определению.

Дважды дифференцируем последнее равенство:

$$(y^*)' = (3Ax^2 + 2Bx + C) \cdot e^x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx) \cdot e^x =$$

$$= (Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C) e^x;$$

$$(y^*)'' = (3Ax^2 + 2(3A + B)x + (2B + C)) \cdot e^x + (Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C) \cdot e^x =$$

$$= (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C))e^x.$$

Подставляем y^* и её производные в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} & (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C))e^x + \\ & + 2(Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C)e^x - 3(Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x = \\ & (12x^2 + 6x - 4)e^x. \end{aligned}$$

Разделим обе части равенства на e^x и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях:

$$x^3: A + 2A - 3A = 0;$$

$$x^2: 6A + B + 6A + 2B - 3B = 12;$$

$$x^1: 6A + 4B + C + 4B + 2C - 3C = 6;$$

$$x^0: 2B + 2C + 2C = -4.$$

Получим систему:
$$\begin{cases} 12A = 12; \\ 6A + 8B = 6; \\ 2B + 4C = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1; \\ B = 0; \\ C = -1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение исходного неоднородного уравнения запишется в виде: $y^* = (x^3 - x)e^x$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + (x^3 - x)e^x, \text{ или } y = C_1 e^{-3x} + (x^3 - x + C_2)e^x. \bullet$$

Пример 3. Найти общее решение ДУ $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

• Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Так как его корни $\lambda_{1,2} = -1$ действительны и равны, то общее решение соответствующего однородного уравнения запишется в виде:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

При этом функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = x e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения.

Согласно методу вариации произвольных постоянных будем искать общее решение исходного неоднородного уравнения в виде: $y^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)x e^{-x}$, где неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подлежат определению.

Составляем систему для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x e^{-x} = 0; \\ C_1'(x)(e^{-x})' + C_2'(x)(x e^{-x})' = \frac{e^{-x}}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x e^{-x} = 0; \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(e^{-x} - x e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot (e^{-x} - x e^{-x}) - x e^{-x} \cdot (-e^{-x}) = e^{-2x};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ \frac{e^{-x}}{x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = 0 \cdot (e^{-x} - x e^{-x}) - x e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{x} = -e^{-2x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{e^{-x}}{x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{x} - 0 \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-2x}}{x}.$$

Получаем: $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}} = -1$; $C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{-2x}/x}{e^{-2x}} = \frac{1}{x}$.

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int (-1) dx = -x + C_1; \quad C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = (-x + C_1)e^{-x} + (\ln|x| + C_2)x e^{-x}, \text{ или } y = e^{-x}(-x + x \ln|x| + C_1 + C_2 x). \bullet$$

Системы ДУ.

Задание 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\begin{cases} x' = -3x + 5y \\ y' = 6x - 2y \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$ | 21. $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} x' = -9x + 4y \\ y' = -9x + 6y \end{cases}$ | 22. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 8x + 3y \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} x' = -8x - 11y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$ | 13. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ | 23. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$ |
| 4. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 6x - 5y \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} x' = -2x + 5y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ | 24. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 2x - 6y \end{cases}$ | 25. $\begin{cases} x' = -5x + 3y \\ y' = -8x + 9y \end{cases}$ |
| 6. $\begin{cases} x' = -8x + y \\ y' = 11x + 2y \end{cases}$ | 16. $\begin{cases} x' = -10x - 6y \\ y' = 5x + y \end{cases}$ | 26. $\begin{cases} x' = -4x + 11y \\ y' = -x + 8y \end{cases}$ |
| 7. $\begin{cases} x' = 5x - 9y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$ | 17. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = 2x - 7y \end{cases}$ | 27. $\begin{cases} x' = -6x - 13y \\ y' = 3x + 10y \end{cases}$ |
| 8. $\begin{cases} x' = -x + 7y \\ y' = x + 5y \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} x' = -6x + y \\ y' = -7x + 2y \end{cases}$ | 28. $\begin{cases} x' = 5x + 6y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} x' = -4x + 6y \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$ | 19. $\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$ | 29. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 7x + 6y \end{cases}$ |
| 10. $\begin{cases} x' = -10x + 6y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} x' = -9x - 5y \\ y' = 8x + 5y \end{cases}$ | 30. $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 6x + 7y \end{cases}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти общее решение системы ДУ $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

• Дифференцируем первое уравнение системы:

$$x'' = 6x' + 3y'.$$

Заменим в последнем уравнении y' его выражением из второго уравнения системы:

$$x'' = 6x' + 3 \cdot (-8x - 5y), \text{ или } x'' = 6x' - 24x - 15y.$$

Заменим в последнем равенстве y на выражение $y = \frac{x' - 6x}{3}$ из первого уравнения системы:

$$x'' = 6x' - 24x - 15 \cdot \frac{x' - 6x}{3}, \text{ или } x'' - x' - 6x = 0.$$

Решим последнее однородное ДУ, для чего составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0;$$

$$D = 25 > 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2; \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

Так как корни уравнения являются действительными и различными, то общее решение уравнения запишется в виде:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}.$$

Дифференцируя это равенство по t , получим:

$$x' = 3C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

Находим y из уравнения $y = \frac{x' - 6x}{3}$:

$$y = \frac{3C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-2t} - 6 \cdot (C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t})}{3} = -C_1 e^{3t} - \frac{8}{3} C_2 e^{-2t}.$$

Таким образом, получим:
$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}; \\ y = -C_1 e^{3t} - \frac{8}{3} C_2 e^{-2t}. \end{cases} \bullet$$

ГЛАВА VIII

Числовые и степенные ряды

Знакопостоянные ряды.

Задание 1. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^6}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+4)}{7^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5n - 6}{5n^4 + 7}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3n-1)^4}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+4)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n \cdot 8^n}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5 + 5n}{5n^6 + 3n - 7}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n) \ln^5(3+2n)}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 5n - 6}{5n^3 + 7} \right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2-2n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+n) \ln(3+n) \ln(\ln(3+n))}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{6^n (n+1)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$

Решение типового варианта

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

• Воспользуемся признаком Д'Аламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-n-1} \right)^{-n-1} \right)^{\frac{n}{-n-1}} = \frac{1}{e} < 1, \text{ то есть данный ряд сходится. } \bullet$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^3 + 4}{3n^3 + n - 1} \right)^n$.

- Воспользуемся радикальным признаком Коши. Имеем:

$$a_n = \left(\frac{5n^3 + 4}{3n^3 + n - 1} \right)^n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^3 + 4}{3n^3 + n - 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 4}{3n^3 + n - 1} = \frac{5}{3} > 1,$$

то есть данный ряд расходится. •

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+n)\ln(3+n)}$.

- Воспользуемся интегральным признаком Коши. Для этого исследуем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3+x)\ln(3+x)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(3+x))}{\ln(3+x)} = \ln|\ln(3+x)| \Big|_1^{\infty} = \infty - \ln|\ln 4| = \infty,$$

следовательно, данный интеграл расходится, вместе с ним расходится и ряд. •

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 3n + 1}{5n^7 + 7}$.

- Воспользуемся предельным признаком сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 3n + 1}{5n^7 + 7} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^7} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Докажем, что ряды ведут себя одинаково. Для этого найдем предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \text{ где } a_n = \frac{n^5 + 3n + 1}{5n^7 + 7}; \quad b_n = \frac{1}{n^2}. \text{ Имеем:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^5 + 3n + 1) \cdot n^2}{5n^7 + 7} = \frac{1}{5} \neq 0, \neq \infty \Rightarrow \text{ряды ведут себя одинаково.}$$

$\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится, а следовательно, и исходный ряд также сходится. •

Знакопеременные ряды.

Задание 1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+2)^2}}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 + 6}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{17n+1}{n(n+5)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+7}{5^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+5) \cdot n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5n}{\sqrt{n^4}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+2}}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10n}{7n+5}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+5}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+3}{3^n}$$

Решение типового варианта

Пример 1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующийся

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{5n+1}{4n+7} \right)^n$.

• Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{4n+7} \right)^n$. Исследуем его на сходимость по радикальному признаку Коши.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+1}{4n+7} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{4n+7} = \frac{5}{4} > 1, \text{ то есть ряд расходится. Следовательно,}$$

данный ряд не является абсолютно сходящимся.

Применим к исходному знакочередующемуся ряду признак Лейбница.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+1}{4n+7} \right)^n = \infty \neq 0, \text{ значит первое условие признака Лейбница не выполняется.}$$

Следовательно, исходный ряд является расходящимся. •

Степенные ряды.

Задание 1. Найти область сходимости степенного ряда.

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n \cdot 7^n}{4^n (n+1)}$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n (n+2)}$ |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^{n+1} (n+5)}$ | 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{6^n (3n-2)}$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-3)^{n+1}}{2\sqrt{n+5}}$ | 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^4 (x+9)^{n-1}}{4^n \sqrt[n]{n+2}}$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+9)^n}{2^n \sqrt{2n+5}}$ | 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-3)^{n+1}}{2^n (n+6) \sqrt{n}}$ |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(x-2)^n}{4^n}$ | 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+6)^{n+1}}{2^n (n+5) \sqrt{n}}$ |
| 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3} (x+2)^n$ | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1} (x+1)^n$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{10^n (3n+2)}$ | 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n^2-1} (x+5)^n$ |
| 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5^n} (x+2)^n$ | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{6^n (7n+12)}$ |

Задание 2. Найти разложение функции в степенной ряд по степеням x .

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(x) = e^{-x^4}$ | 9. $f(x) = x^3 \arctg x$ |
| 2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ | 10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$ |
| 3. $f(x) = x \cos \sqrt{x}$ | 11. $f(x) = \frac{1}{1-5x}$ |
| 4. $f(x) = e^{6x}$ | 12. $f(x) = x^3 \cos x$ |
| 5. $f(x) = x \sin \sqrt{x}$ | 13. $f(x) = x^3 e^{-x}$ |
| 6. $f(x) = \frac{x}{2} \arctg x$ | 14. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ |
| 7. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ | 15. $f(x) = \cos \frac{2x^2}{3}$ |
| 8. $f(x) = e^{3x}$ | 16. $f(x) = \frac{2}{1+3x^2}$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{n7^n}$.

- Найдем интервал сходимости ряда и исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

$x_0 = -2$, $a_n = \frac{1}{n7^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)7^{n+1}}$. Найдем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)7^{n+1}}{n7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7(n+1)}{n} = 7.$$

Найдем интервал сходимости: $(x_0 - R; x_0 + R) \Rightarrow (-2 - 7; -2 + 7) \Rightarrow (-9; 5)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала $(-9; 5)$.

При $x = -9$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9+2)^{n-1}}{n7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^{n-1}}{n7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n}$.

Это знакочередующийся ряд, применим к нему признак Лейбница:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} = 0$,

2) $\frac{1}{7} > \frac{1}{14} > \frac{1}{21} > \dots$

Оба условия выполняются, значит при $x = -9$ ряд сходится.

При $x = 5$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+2)^{n-1}}{n7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{n7^n} = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Это гармонический ряд, он расходится. Значит при $x = 5$ ряд расходится.

Следовательно, областью сходимости ряда является промежуток $[-9; 5)$. •

Пример 2. Найти разложение функции в степенной ряд по степеням x : $f(x) = xe^{-x}$.

- Используем разложение функции $f(x) = e^x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Заменяя в этой формуле x на $-x$, получаем:

$$e^{-x} = 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + \dots = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + \dots$$

Полученный ряд сходится при всех x .

Разложение $f(x) = xe^{-x}$ имеет вид:

$$xe^{-x} = x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n (x)^{n+1}}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \bullet$$

Приложения степенных рядов.

Задание 1. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенные интегралы с указанной погрешностью $\alpha = 0,001$.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int_{0,3}^{0,5} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx$ | 9. $\int_0^1 \sqrt[5]{1+x^4} dx$ |
| 2. $\int_{0,1}^1 e^{-x^2} dx$ | 10. $\int_0^{0,5} \cos \frac{x^2}{4} dx$ |
| 3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ | 11. $\int_0^{0,5} \sqrt{1-x^2} dx$ |
| 4. $\int_0^{0,25} \sqrt{1+x^3} dx$ | 12. $\int_0^1 x e^{-x^3} dx$ |
| 5. $\int_0^{0,1} e^{-6x^3} dx$ | 13. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ |
| 6. $\int_0^{0,4} \cos(25x^2) dx$ | 14. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^3} dx$ |
| 7. $\int_0^1 \cos 5x dx$ | 15. $\int_0^{0,5} x \cos 3x dx$ |
| 8. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$ | 16. $\int_0^1 \ln(1+x^3) dx$ |

Задание 2. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

- | | |
|---|--|
| 1. $y' = 2y^2 + ye^x, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ | 9. $y' = 3x^2y - \cos 3x + 1, \quad y(0) = 1$ |
| 2. $y' = x + y^2, \quad y(0) = -1$ | 10. $y' = 4xy^2 - x^2y, \quad y(0) = 3$ |
| 3. $y' = x^2 + 2y^2, \quad y(0) = 0,2$ | 11. $y' = e^{3x} + 2xy^2, \quad y(0) = 1$ |
| 4. $y' = x + y + y^2, \quad y(0) = 1$ | 12. $y' = 3xy^2 - \sin 5x, \quad y(0) = 3$ |
| 5. $y' = 2x^2 - xy, \quad y(0) = 0$ | 13. $y' = 4x^2y^2 - 2x + y, \quad y(0) = 4$ |
| 6. $y' = 4\sin x + y^2 + 2x, \quad y(0) = 1$ | 14. $y' = 3\sin x + x^2y + x, \quad y(0) = -2$ |
| 7. $y' = e^x - y^2, \quad y(0) = 0$ | 15. $y' = x + e^y, \quad y(0) = 0$ |
| 8. $y' = 4xy^2 - e^x + 2, \quad y(0) = 0$ | 16. $y' = xy + e^x, \quad y(0) = 0$ |

Решение типового варианта

Пример 1. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл $\int_0^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ с погрешностью $\alpha = 0,0001$.

$$\bullet 1) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

$$\text{откуда } \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots$$

$$2) \int_0^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{1/3} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \dots \right) \Bigg|_0^{1/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 3^2} + \frac{1}{3^5 5^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1} (2n+1)^2} + \dots$$

3) Последний знакочередующийся ряд удовлетворяет признаку Лейбница, поэтому ищем наименьшее n , удовлетворяющее условию $\left| (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1} (2n+1)^2} \right| < \varepsilon = 0,0001$:

$$\frac{1}{3} = 0,33333 > \varepsilon; \quad \frac{1}{3^3 3^2} = 0,00412 > \varepsilon; \quad \frac{1}{3^5 5^2} = 0,00016 > \varepsilon; \quad \frac{1}{3^7 7^2} < \varepsilon.$$

$$\text{Т.о., } \int_0^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx 0,33333 - 0,00412 + 0,00016 = 0,3294. \bullet$$

Пример 2. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0) = 1$ (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

• Искомое решение запишем в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

$$y(0) = 1,$$

$$y'(0) = 2 \cdot 0 + 1 + e^0 = 2,$$

$$y'' = 2 + 2yy' + e^x, \quad y''(0) = 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 7.$$

Подставляя данные значения производных в ряд, получим искомое решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = 1 + \frac{2}{1!} x + \frac{7}{2!} x^2 + \dots = 1 + 2x + 3,5x^2. \bullet$$

ГЛАВА IX

Линейное программирование

Графический метод решения ЗЛП.

Задание 1. Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y .

1. $Z = x + 2y$

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 2x - 3y \leq 10, \\ 3x + 8y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

2. $Z = x - 4y$

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 39, \\ x + 9y \geq 18, \\ x - 3y \geq -9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

3. $Z = -2x - 4y$

$$\begin{cases} 3x - 5y \geq -10, \\ 4x - y \leq 15, \\ x + 4y \geq 8, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

4. $Z = -3x + 2y$

$$\begin{cases} 3x + 8y \geq 32, \\ -x + 2y \leq 12, \\ 7x + 4y \leq 60, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

5. $Z = 2x + 7y$

$$\begin{cases} 5x - y \geq 5, \\ 4x - y \leq 24, \\ -3x + 8y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

6. $Z = x + 3y$

$$\begin{cases} 3x - 5y \leq 12, \\ x + 2y \leq 15, \\ 7x + 3y \geq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

7. $Z = 2x - 4y$

$$\begin{cases} 4x + y \leq 32, \\ -x + 6y \leq 42, \\ 5x + 6y \geq 30, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

8. $Z = -3x - 3y$

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6, \\ 3x - y \leq 21, \\ -x + 3y \leq 9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

9. $Z = 4x - 2y$

$$\begin{cases} 5x - 6y \geq -18, \\ x + y \leq 14, \\ x - y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

10. $Z = -x - 2y$

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 3x - y \leq 15, \\ -x + 7y \leq 35, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

11. $Z = 6x + 5y$

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 2, \\ 3x + 7y \leq 49, \\ 5x + y \geq 5, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

12. $Z = -3x + 6y$

$$\begin{cases} 7x - 3y \geq 14, \\ x - y \leq 6, \\ 5x + 3y \leq 46, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

13. $Z = 3x - 2y$

$$\begin{cases} -3x + 5y \leq 20, \\ 5x + 2y \leq 39, \\ 2x + 7y \geq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

14. $Z = 2x + y$

$$\begin{cases} x + y \geq 3, \\ 4x + 7y \leq 49, \\ 3x - 4y \leq 9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

15. $Z = x - 4y$

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ 3x - 10y \geq -10, \\ 4x - 3y \leq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

16. $Z = 4x + 2y$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4, \\ 7x + 2y \leq 70, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

17. $Z = -x - 5y$

$$\begin{cases} x + 3y \geq 4, \\ 3x + 2y \leq 24, \\ 5x - 3y \geq 2, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

18. $Z = -4x + 3y$

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6, \\ x - y \leq 3, \\ 3x - 8y \geq -21, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$19. Z = 2x - 3y$$

$$\begin{cases} 3x + 8y \geq 35, \\ -4x + 5y \leq 16, \\ 7x + 3y \leq 66, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$20. Z = -5x - 3y$$

$$\begin{cases} 3x + 5y \geq 15, \\ 3x - 2y \leq 15, \\ 2x + 9y \leq 72, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$21. Z = x - 3y$$

$$\begin{cases} -2x + y \leq 4, \\ x + 3y \geq 6, \\ 3x + 4y \leq 27, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$22. Z = 4x + y$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 12, \\ 5x + 4y \geq 20, \\ x + 2y \leq 14, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$23. Z = -x - 5y$$

$$\begin{cases} -3x + 5y \leq 9, \\ 5x + 2y \leq 47, \\ 2x + 7y \geq 25, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$24. Z = x + 3y$$

$$\begin{cases} x + 4y \geq 6, \\ 4x + y \geq 9, \\ 5x + 7y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$25. Z = 4x + 2y$$

$$\begin{cases} -3x + 4y \leq 2, \\ 4x - 3y \leq 16, \\ -2x + 5y \geq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$26. Z = -3x + 2y$$

$$\begin{cases} 6x - y \geq 6, \\ 2x + 3y \leq 22, \\ x - 2y \leq 4, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$27. Z = 4x - 2y$$

$$\begin{cases} -x + y \leq 2, \\ 2x - 3y \leq 10, \\ x + y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$28. Z = x - 3y$$

$$\begin{cases} x - 2y \leq 2, \\ x + 8y \leq 32, \\ x + 2y \geq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$29. Z = 3x + y$$

$$\begin{cases} x - y \leq 8, \\ 2x + 9y \leq 49, \\ 5x + 6y \geq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$30. Z = 4x + 2y$$

$$\begin{cases} 7x - 3y \geq 7, \\ 4x - 3y \leq 20, \\ 3x + 4y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Решение типового варианта.

Пример 1. Найти графическим методом минимальное и максимальное значения

$$Z = x + 2y$$

целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y :

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12, \\ 7x - 2y \leq 42, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

• Неравенства системы ограничений задают в прямоугольной системе координат Oxy полуплоскости, границами которых являются прямые $l_1: 3x + 4y = 12$, $l_2: 7x - 2y = 42$, $l_3: -x + 4y = 20$ и координатные оси.

Построим указанные прямые по двум точкам:

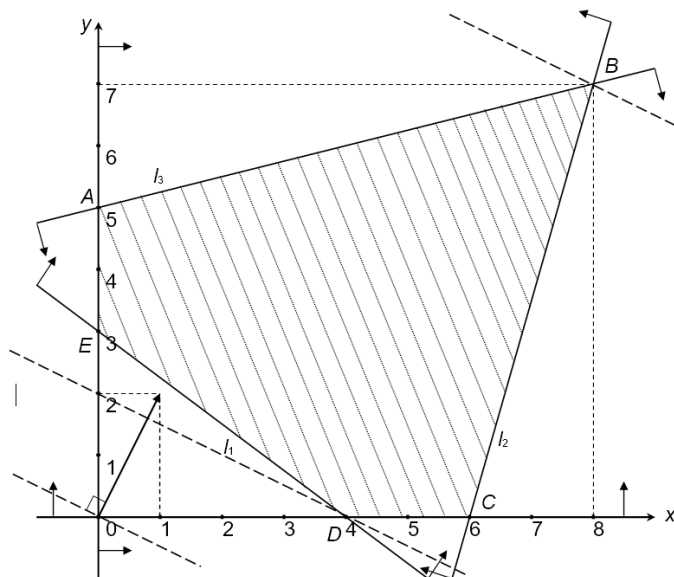
$$l_1: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \quad l_2: \begin{array}{c|c|c} x & 6 & 8 \\ \hline y & 0 & 7 \end{array} \quad l_3: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 5 & 6 \end{array}$$

Каждая из прямых разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Чтобы определить ту полуплоскость, которая содержит область допустимых решений задачи, достаточно подставить в соответствующее неравенство координаты любой точки, не лежащей на прямой. Если получится верное неравенство, то укажем стрелками на полуплоскость, содержащую эту точку. Иначе укажем на другую полуплоскость.

Заметим, что точка $O(0;0)$ не лежит ни на одной из этих прямых. Подставим ее координаты в неравенство $3x + 4y \geq 12$, соответствующее прямой l_1 : $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 12 \Leftrightarrow 0 \geq 12$. Поскольку получили неверное неравенство, то отметим полуплоскость, не содержащую точку $O(0;0)$. Подставим координаты точки $O(0;0)$ в неравенство $7x - 2y \leq 42$, соответствующее прямой l_2 : $7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 42 \Leftrightarrow 0 \leq 42$. Так как получили верное неравенство, то отметим полуплоскость, содержащую точку O . Подставляя координаты точки $O(0;0)$ в неравенство $-x + 4y \leq 20$, соответствующее прямой l_3 , получим $-0 + 4 \cdot 0 \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq 20$. Поэтому также отметим полуплоскость, содержащую точку O .

Наконец, условия неотрицательности $x \geq 0, y \geq 0$ задают полуплоскости, ограниченные координатными осями.

Общей частью отмеченных полуплоскостей является выпуклый пятиугольник $ABCDE$, который и образует область допустимых решений данной задачи.



Направления возрастания и убывания целевой функции Z определим с помощью вектора $\text{grad } Z = (Z'_x; Z'_y)$. Вектор градиента $\text{grad } Z$ показывает направление наискорейшего возрастания, а вектор антиградиента $-\text{grad } Z$ — направление наискорейшего убывания целевой функции Z . Находим вектор $\text{grad } Z = (1; 2)$ и откладываем его от начала координат (при этом конец данного вектора будет находиться в точке с координатами $(1; 2)$). Перпендикулярно вектору градиента

строим линию уровня (например, проводя ее через начало координат).

Будем перемещать линию уровня в направлении вектора $\text{grad } Z$ до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку максимума B , координаты которой находим как решение системы уравнений прямых l_2 и l_3 , проходящих через эту точку:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 42, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 4y = 84, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 104, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 7. \end{cases}$$

Таким образом, $\max Z = Z(8; 7) = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 22$.

Далее будем перемещать линию уровня в противоположном направлении до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку минимума D , которая является точкой пересечения прямой l_1 с

осью Ox . Найдём координаты этой точки: $\begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$

Таким образом, $\min Z = Z(4; 0) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4$. •

Двойственность в линейном программировании.

Задание 1. Построить двойственную задачу к задаче, заданной в общей форме.

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 + x_2 + x_3 \\ 1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 9; \\ 2x_1 + x_3 \geq 4; \end{cases} \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_2 + x_4 \\ 2) \begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 9; \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 5; \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \\ 4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3; \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \\ 5) \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max f &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 6) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + x_3 = 5; \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \\ 7) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \leq 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 9; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 \geq 4; \end{cases} \\ x_1 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min f &= 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \\ 8) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 10; \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7; \end{cases} \\ x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение типового варианта

Пример 1. Построить двойственную задачу к задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 8; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 5; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \geq 7; \end{cases} \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

- Упорядочим запись исходной задачи. Так как требуется найти минимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть записаны с помощью знака $\geq$. Умножив первое и третье неравенства на -1 , приведем систему ограничений к виду

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq -8; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6; \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq -5; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \geq 7. \end{cases}$$

Двойственная задача будет иметь четыре переменные, так как прямая задача содержит четыре ограничения.

Запишем двойственную задачу:

$$\begin{aligned} \max F &= -8y_1 + 6y_2 - 5y_3 + 7y_4 \\ \begin{cases} -3y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 \leq 2; \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 - 5y_4 \leq -1; \\ -y_1 + y_2 - y_3 = 1; \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \leq 1; \\ y_1 - 2y_2 + 3y_4 = -2; \end{cases} \\ y_1 \geq 0; y_3 \geq 0; y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Третье и пятое ограничения двойственной задачи записаны в виде равенства, так как на соответствующие им переменные x_3 и x_5 в исходной задаче не наложено условие неотрицательности. На переменные y_1, y_3 и y_4 наложено условие неотрицательности в связи с тем, что в исходной задаче им соответствуют ограничения в виде неравенств. •

Симплексный метод.

Задание 1. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

1. $\max Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. $\min Z = -2x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 27, \\ 3x_1 - x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. $\max Z = -x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. $\min Z = x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ 3x_1 + x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. $\min Z = -x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 63, \\ 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9. $\max Z = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10. $\min Z = -5x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 \leq 49, \\ 4x_1 + x_2 \leq 37, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 25, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11. $\max Z = x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12. $\min Z = -2x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13. $\max Z = -x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 43, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14. $\min Z = -4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15. $\max Z = -3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 55, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16. $\min Z = 4x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 32, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 10x_2 \leq 50, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 26, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$19. \max Z = -3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$20. \min Z = -2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 25, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$21. \max Z = 5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 8x_1 + x_2 \leq 64, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$22. \min Z = -2x_1 - 4x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + x_2 \leq 23, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$23. \max Z = 4x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 4x_1 - x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$24. \min Z = x_1 - 4x_2$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \leq 14, \\ 3x_1 + x_2 \leq 29, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$25. \max Z = -2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$26. \min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 17, \\ 4x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$27. \max Z = 3x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 49, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$28. \min Z = x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$29. \max Z = 4x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 3x_1 + x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$30. \min Z = -4x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 23, \\ 6x_1 - x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение типового варианта.

Пример. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

• Перейдем к канонической форме записи задачи, добавив к левым частям первых трех неравенств системы ограничений так называемые *балансовые* неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5 . Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (2)$$

Говорят, что ограничение задачи имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным 1, а в остальные ограничения – с коэффициентом, равным 0. Эта переменная называется *предпочтительной*. В нашем случае предпочтительными являются переменные x_3, x_4, x_5 .

Назовем предпочтительные переменные *базисными*, а остальные – *свободными*. Найдем начальный опорный план задачи, приравнявая свободные переменные к нулю и выражая базисные из ограничений-равенств: $X^0 = (0; 0; 3; 9; 8)$.

Дальнейшие рассуждения будем вести с использованием симплексных таблиц.

Будем использовать следующие обозначения: **БП** – столбец базисных переменных;

№	БП	C_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	C/O
				9	6	0	0	0	
0	x_3	0	3	-1	1	1	0	0	–
	x_4	0	9	1	2	0	1	0	$9/1=9$
	x_5	0	8	2	-1	0	0	1	$8/2=4$
	Δ_j		$Z(X^0) = 0$	-9	-6	0	0	0	
1	x_3	0	7	0	0,5	1	0	0,5	$7/0,5=14$
	x_4	0	5	0	2,5	0	1	-0,5	$5/2,5=2$
	x_1	9	4	1	-0,5	0	0	0,5	–
	Δ_j		$Z(X^1) = 36$	0	-10,5	0	0	4,5	
2	x_3	0	6	0	0	1	-0,2	0,6	
	x_2	6	2	0	1	0	0,4	-0,2	
	x_1	9	5	1	0	0	0,2	0,4	
	Δ_j		$Z(X^2) = 57$	0	0	0	4,2	2,4	

C_B – столбец коэффициентов при базисных переменных в целевой функции (1);

A_0 – столбец решений; $A_j (j = \overline{1,5})$ – столбцы коэффициентов при переменной x_j

в уравнениях системы ограничений; $\Delta_j (j = \overline{0,5})$ – индексные оценки (образуют индексную строку); C/O – столбец симплексных отношений.

Заполним симплексную таблицу для нулевой итерации:

В столбцах 5 – 9 в строке под переменными задачи записываем их коэффициенты из целевой функции (1), а ниже (в строках 2, 3, 4) – соответствующие коэффициенты

из уравнений системы ограничений (2). Базисные переменные с их коэффициентами из целевой функции дублируем во 2-м и 3-м столбцах. В 4-м столбце записываем правые части равенств системы ограничений.

Заполним элементы индексной строки. В 4-м столбце записываем значение целевой функции в начальном опорном плане как сумму произведений элементов 3-го и 4-го столбцов:

$$\Delta_0 = Z(X^0) = C_B \cdot A_0 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 8 = 0.$$

Индексную оценку переменной x_1 находим как сумму произведений элементов 3-го и 5-го столбцов минус соответствующий x_1 коэффициент целевой функции, записанный выше в 1-й строке:

$$\Delta_1 = C_B \cdot A_1 - c_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 9 = -9.$$

Аналогичным образом находим индексные оценки других переменных:

$$\Delta_2 = C_B \cdot A_2 - c_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 6 = -6;$$

$$\Delta_3 = C_B \cdot A_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = C_B \cdot A_4 - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_5 = C_B \cdot A_5 - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

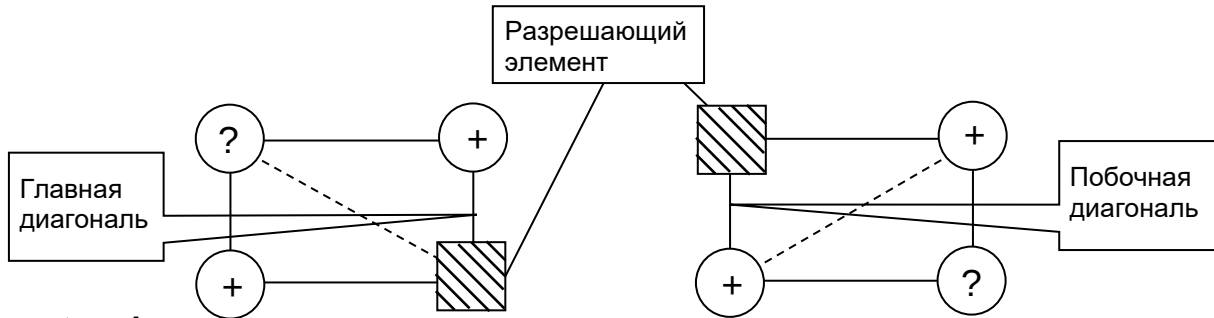
При решении задачи на максимум опорный план является оптимальным, если все индексные оценки – неотрицательны ($\Delta_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5})$). При решении задачи на минимум условием оптимальности опорного плана является неположительность индексных оценок ($\Delta_j \leq 0 \ (j = \overline{1,5})$). Наш начальный план максимальным не является, поскольку $\Delta_1 < 0$ и $\Delta_2 < 0$. Выберем наибольшую по модулю «плохую» оценку $\Delta_1 = -9$ и назовем соответствующий ей 5-й столбец *разрешающим*.

Переменную x_1 будем вводить в базис вместо одной из базисных переменных начального плана. Для определения выводимой из базиса переменной разделим на положительные элементы разрешающего столбца соответствующие элементы 4-го столбца A_0 . Полученные частные запишем в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее: $\theta = \min\{9; 4\} = 4$. Это число соответствует переменной x_5 , соответствующую строку назовем *разрешающей*, а число 2, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, назовем *разрешающим элементом*. Таким образом, переменная x_1 заменит в базисе переменную x_5 . Базисными становятся элементы x_1, x_3, x_4 , а свободными – x_2 и x_5 .

Заполним симплексную таблицу для первой итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной x_5 запишем переменную x_1 , а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 9 из целевой функции. Другие элементы этих столбцов оставим без изменений. Далее разделим элементы разрешающей строки (столбцы 4 – 9) нулевой итерации на разрешающий элемент и запишем полученные частные в соответствующих ячейках новой таблицы. Запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая Δ_1). Остальные элементы таблицы получим с помощью схематического правила (*правила прямоугольника*).

Элемент (?) новой итерации есть разность произведений элементов предыдущей итерации на главной и на побочной диагоналях, деленная на разрешающий элемент:



Столбец A_0 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{3 \cdot 2 - (-1) \cdot 8}{2} = 7;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{9 \cdot 2 - 1 \cdot 8}{2} = 5.$$

Столбец A_2 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)}{2} = 0,5;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2} = 2,5.$$

Столбец A_3 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0}{2} = 1;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2} = 0.$$

Столбец A_4 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 0}{2} = 0;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2} = 1.$$

Столбец A_5 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1}{2} = 0,5;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2} = -0,5.$$

Элементы индексной строки можно находить тем же способом, что и в нулевой итерации, а можно воспользоваться правилом прямоугольника:

$$\Delta_0 = Z(X^1) = \frac{0 \cdot 2 - 8 \cdot (-9)}{2} = 36;$$

$$\Delta_2 = \frac{-6 \cdot 2 - (-1) \cdot (-9)}{2} = -10,5; \quad \Delta_3 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot (-9)}{2} = 0;$$

$$\Delta_4 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot (-9)}{2} = 0; \quad \Delta_5 = \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot (-9)}{2} = 4,5.$$

Поскольку $\Delta_2 < 0$, то опорный план $X^1 = (4; 0; 7; 5; 0)$ также не является оптимальным. Единственная отрицательная индексная оценка определяет в качестве разрешающего 6-й столбец. Разделим элементы 4-го столбца A_0 на соответствующие элементы разрешающего столбца, запишем положительные результаты в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее: $\theta = \min\{14; 2\} = 2$. Это число соответствует переменной X_4 , поэтому 2-я строка таблицы первой итерации будет разрешающей, а число 2,5, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, будет разрешающим элементом. Итак, переменная X_2 заменит в базисе переменную X_4 . Базисными становятся элементы X_1, X_2, X_3 , а свободными — X_4 и X_5 .

Заполним симплексную таблицу для второй итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной x_4 запишем переменную x_2 , а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 6 из целевой функции. Далее разделим элементы разрешающей строки первой итерации на разрешающий элемент, заполнив строку новой таблицы, и запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая Δ_2). Остальные элементы таблицы (включая элементы индексной строки) получим с помощью правила прямоугольника:

Столбец A_0 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{7 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 5}{2,5} = 6; \quad \text{3-й элемент: } \frac{4 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 5}{2,5} = 5.$$

Столбец A_1 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 0}{2,5} = 0; \quad \text{3-й элемент: } \frac{1 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0}{2,5} = 1.$$

Столбец A_3 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{1 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 0}{2,5} = 1; \quad \text{3-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0}{2,5} = 0.$$

Столбец A_4 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 1}{2,5} = -0,2; \quad \text{3-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 1}{2,5} = 1.$$

Столбец A_5 :

$$\begin{aligned} \text{1-й элемент: } & \frac{0,5 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0,5}{2,5} = 0,6; \\ \text{3-й элемент: } & \frac{0,5 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot (-0,5)}{2,5} = 0,4. \end{aligned}$$

Индексная строка:

$$\Delta_0 = Z(X^2) = \frac{36 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 5}{2,5} = 57;$$

$$\Delta_1 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 0}{2,5} = 0;$$

$$\Delta_3 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 0}{2,5} = 0;$$

$$\Delta_4 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 1}{2,5} = 4,2;$$

$$\Delta_5 = \frac{4,5 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot (-0,5)}{2,5} = 2,4.$$

Так как все $\Delta_j \geq 0$ ($j = \overline{1,5}$), то опорный план $X^2 = (5; 2; 6; 0; 0)$ является оптимальным. Оптимальным планом исходной задачи является план $X^* = (5; 2)$ и $\max Z = Z(X^*) = 57$. •

Транспортная задача

Задание 1. У поставщиков A_i имеется некоторый груз в количествах a_i , который требуется перевезти потребителям B_j в количествах b_j по ценам ден. ед. за перевозку единицы груза от A_i к B_j . Составить математическую модель задачи минимизации суммарных затрат на перевозки и найти оптимальный план ее.

Вариант 1 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	152
A_2	7	10	12	6	173
A_3	8	11	7	8	175
b_j	93	116	126	165	

Вариант 1 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	150
A_2	7	10	12	6	170
A_3	8	11	7	8	180
b_j	190	130	100	80	

Вариант 2 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	141
A_2	5	9	11	4	177
A_3	10	6	8	9	182
b_j	81	102	174	143	

Вариант 2 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	250
A_2	5	9	11	4	110
A_3	10	6	8	9	140
b_j	120	130	100	150	

Вариант 3 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	148
A_2	8	9	12	4	166
A_3	6	4	9	11	186
b_j	120	131	104	145	

Вариант 3 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	150
A_2	8	9	12	4	170
A_3	6	4	9	11	180
b_j	120	200	100	80	

Вариант 4 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	8	6	134
A_2	10	5	7	4	179
A_3	9	7	9	5	187
b_j	143	91	102	164	

Вариант 4 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	8	6	230
A_2	10	5	7	4	170
A_3	9	7	9	5	100
b_j	140	90	110	160	

Вариант 5 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	24	19	17	13	157
A ₂	21	16	19	14	166
A ₃	14	17	12	17	177
b _j	101	179	164	206	

Вариант 5 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	24	19	17	13	120
A ₂	21	16	19	14	190
A ₃	14	17	12	17	260
b _j	120	170	150	130	

Вариант 6 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	27	23	18	14	205
A ₂	25	18	14	16	198
A ₃	17	19	26	15	247
b _j	151	192	139	168	

Вариант 6 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	27	23	18	14	140
A ₂	25	18	14	16	200
A ₃	17	19	26	15	310
b _j	150	190	140	170	

Вариант 7 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	25	26	21	19	220
A ₂	24	15	19	21	190
A ₃	12	17	15	22	240
b _j	185	163	207	95	

Вариант 7 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	25	26	21	19	220
A ₂	24	15	19	21	190
A ₃	12	17	15	22	240
b _j	180	230	100	140	

Вариант 8 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	18	17	16	14	223
A ₂	17	16	14	18	196
A ₃	16	14	18	17	231
b _j	208	170	182	90	

Вариант 8 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	18	17	16	14	220
A ₂	17	16	14	18	190
A ₃	16	14	18	17	240
b _j	210	200	110	130	

Вариант 9 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	13	12	9	6	201
A ₂	12	11	14	8	154
A ₃	9	9	12	11	245
b _j	123	171	132	174	

Вариант 9 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	13	12	9	6	210
A ₂	12	11	14	8	150
A ₃	9	9	12	11	240
b _j	80	130	140	250	

Вариант 10 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	11	12	9	9	213
A ₂	8	14	11	12	152
A ₃	6	9	12	13	235
b _j	158	187	101	154	

Вариант 10 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	11	12	9	9	210
A ₂	8	14	11	12	150
A ₃	6	9	12	13	240
b _j	90	120	200	190	

Вариант 11 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	15	12	14	16	200
A ₂	10	13	11	9	152
A ₃	7	8	10	13	248
b _j	180	120	150	150	

Вариант 11 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	15	12	14	16	210
A ₂	10	13	11	9	150
A ₃	7	8	10	13	240
b _j	150	60	170	220	

Вариант 12 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	7	13	8	4	216
A ₂	9	11	13	7	148
A ₃	11	9	6	14	236
b _j	164	136	193	107	

Вариант 12 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	7	13	8	4	210
A ₂	9	11	13	7	150
A ₃	11	9	6	14	240
b _j	170	190	140	100	

Вариант 13 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	31	28	27	21	210
A ₂	26	24	21	18	225
A ₃	20	19	28	29	115
b _j	182	191	53	124	

Вариант 13 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	31	28	27	21	260
A ₂	26	24	21	18	110
A ₃	20	19	28	29	180
b _j	180	190	50	130	

Вариант 14 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	27	26	21	18	204
A ₂	23	24	26	19	235
A ₃	17	24	23	15	111
b _j	98	127	201	124	

Вариант 14 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	27	26	21	18	240
A ₂	23	24	26	19	150
A ₃	17	24	23	15	180
b _j	90	130	200	130	

Вариант 15 а.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	19	21	15	11	203
A ₂	14	17	19	13	231
A ₃	10	13	12	15	116
b _j	90	133	152	175	

Вариант 15 б.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	19	21	15	11	100
A ₂	14	17	19	13	120
A ₃	10	13	12	15	330
b _j	100	130	150	170	

Вариант 17 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	13	12	9	6	201
A ₂	12	11	14	8	154
A ₃	9	9	12	11	245
b _j	123	171	172	174	

Вариант 18 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	13	12	9	6	250
A ₂	12	11	14	8	160
A ₃	9	9	12	11	240
b _j	80	130	140	250	

Вариант 19 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	11	12	9	9	213
A ₂	8	14	11	12	152
A ₃	6	9	12	13	235
b _j	158	187	151	154	

Вариант 20 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	11	12	9	9	240
A ₂	8	14	11	12	170
A ₃	6	9	12	13	240
b _j	90	120	200	190	

Вариант 21 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	15	12	14	16	200
A ₂	10	13	11	9	152
A ₃	7	8	10	13	248
b _j	180	120	190	150	

Вариант 22 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	15	12	14	16	240
A ₂	10	13	11	9	180
A ₃	7	8	10	13	240
b _j	150	60	170	220	

Вариант 23 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	7	13	8	4	216
A ₂	9	11	13	7	148
A ₃	11	9	6	14	236
b _j	164	136	193	167	

Вариант 24 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	7	13	8	4	210
A ₂	9	11	13	7	170
A ₃	11	9	6	14	280
b _j	170	190	140	100	

Вариант 25 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	31	28	27	21	210
A ₂	26	24	21	18	225
A ₃	20	19	28	29	115
b _j	182	191	53	124	

Вариант 26 в.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	31	28	27	21	290
A ₂	26	24	21	18	170
A ₃	20	19	28	29	180
b _j	180	190	50	130	

Вариант 27 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	26	21	18	204
A_2	23	24	26	19	235
A_3	17	24	23	15	111
b_j	98	127	241	124	

Вариант 28 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	26	21	18	280
A_2	23	24	26	19	180
A_3	17	24	23	15	180
b_j	90	130	200	130	

Вариант 29 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	21	15	11	203
A_2	14	17	19	13	231
A_3	10	13	12	15	116
b_j	90	183	152	175	

Вариант 30 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	21	15	11	140
A_2	14	17	19	13	150
A_3	10	13	12	15	330
b_j	100	130	150	170	

Решение типового варианта.

Пример 1. У поставщиков A_i имеется некоторый груз в количествах a_i , который требуется перевезти потребителям B_j в количествах b_j по ценам ден. ед. за перевозку единицы груза от A_i к B_j . Составить математическую модель задачи минимизации суммарных затрат на перевозки и найти оптимальный план ее.

• *Вариант а).*

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	146
A_2	5	9	11	4	172
A_3	10	6	8	9	182
b_j	85	105	170	140	500 500

• Опорный план транспортной задачи имеет $n + m - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ базисных переменных, которые записывают в соответствующие внутренние клетки таблицы. Остальные клетки свободных переменных, равных нулю, оставляют пустыми. Рассмотрим метод северо-

западного угла, согласно которому вначале определяем $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(146, 85) = 85$. При этом уменьшаем на 85 единиц запас первого поставщика и вычеркиваем потребность первого потребителя (остальные клетки перевозок к нему будут свободными). Получим таблицу. В верхних углах внутренних клеток мелким шрифтом записаны стоимости c_{ij} :

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	12 85	10	13	6	146 61
A ₂	5	9	11	4	172
A ₃	10	6	8	9	182
b _j	85 0	105	170	140	

В оставшейся части таблицы «северо-западная» клетка расположена в первой строке и во втором столбце. Аналогично находим соответствующий ей минимум потребности и оставшегося запаса $x_{12} = \min(a'_1, b_1) = \min(61, 105) = 61$. Значит, запасы первого поставщика исчерпаны, и остальные клетки первой строки будут свободными. Теперь получим:

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	12 85	10 61	13	6	146 61 0
A ₂	5	9	11	4	172
A ₃	10	6	8	9	182
b _j	85 0	105 44	170	140	

Следующая «северо-западная» клетка расположена во второй строке и втором столбце. Продолжая аналогично, получим таблицу перевозок с первоначальным планом. Последней будет заполнена «юго-восточная» клетка.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	12 85	10 61	13	6	146 61 0
A ₂	5	9 44	11 128	4	172 128 0
A ₃	10	6	8 42	9 140	182 140 0
b _j	85 0	105 44 0	170 42 0	140 0	

По этому плану X_0 осуществляются следующие перевозки: от A_1 к B_1 – 85 единиц и к B_2 – 61 единицу груза, от A_2 к B_2 – 44 единицы и к B_3 – 128 единиц, от A_3 к B_3 – 42 единицы и к B_4 – 140 единиц груза. Общая стоимость их будет равна $f(X_0) = 12 \cdot 85 + 10 \cdot 61 + 9 \cdot 44 + 11 \cdot 128 + 8 \cdot 42 + 9 \cdot 140 = 5030$ денежных единиц.

Для проверки на оптимальность полученного опорного плана применим так называемый *метод потенциалов* (иначе, *модифицированный распределительный метод – МОДИ*). Каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j приписываются соответственно числа u_i и v_j , называемые их *потенциалами*.

X_0	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	u_i
A ₁	12 85	10 61	13	6	$u_1 = 0$
A ₂	5	9 44	11 128	4	$u_2 = -1$
A ₃	10	6	8 42	9 140	$u_3 = -4$
v_j	$v_1=12$	$v_2=10$	$v_3=12$	$v_4=13$	

Для базисных перевозок рассматриваемого опорного плана должны выполняться равенства $u_i + v_j = c_{ij}$. В нашем случае получим систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 12, \\ u_1 + v_2 = 10, \\ u_2 + v_2 = 9, \\ u_2 + v_3 = 11, \\ u_3 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_4 = 9. \end{cases}$$

Так как число потенциалов на единицу меньше, чем число уравнений полученной системы, то один из них выбирают произвольно. Например, $u_1 = 0$. Тогда из системы легко получим: $v_1 = 12, v_2 = 10, u_2 = -1, v_3 = 12, u_3 = -4, v_4 = 13$. После этого для всех свободных клеток подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорный план оптимален, если нет, то можно перейти к новому опорному плану с меньшим значением функции цели.

В нашем случае

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= 0 + 12 - 13 = -1, \\ \Delta_{14} &= 0 + 13 - 6 = 7, \\ \Delta_{21} &= -1 + 12 - 5 = 6, \\ \Delta_{24} &= -1 + 13 - 4 = 8, \text{ (max)} \\ \Delta_{31} &= -4 + 12 - 10 = -2, \\ \Delta_{32} &= -4 + 10 - 6 = 0. \end{aligned}$$

План X_0 не оптимален.

Переход к новому опорному плану связан с введением перевозки с наибольшим $\Delta_{24} = 8$ в число базисных перевозок. Построим цикл пересчета свободной клетки (2; 4). Он представляет собой замкнутую ломаную линию, одна вершина которой лежит в выбранной клетке, а остальные в базисных клетках. При этом вершинам цикла поочередно приписываются знаки «плюс» или «минус», начиная со знака «плюс» у выбранной свободной клетки. Если в клетках со знаком «плюс» добавить, а со знаком «минус» отнять одно и то же число, сохраняя неотрицательность переменных, то получим допустимый план перевозок. Чтобы план был опорным, это должна быть минимальная из перевозок, стоящих в клетках со знаком «минус». Минимум в отрицательных клетках равен 128. Проводим

X_0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	¹² 85	¹⁰ 61	¹³	⁶	0
A_2	⁵	⁹ 44	¹¹ 128 -	⁴ +	-1
A_3	¹⁰	⁶	⁸ 42 +	⁹ 140 -	-4
v_j	12	10	12	13	

изменения вдоль цикла на эту величину. Получим новый опорный план X_1 , в котором клетка (2; 3) станет свободной (см. ниже). Вычислим общую стоимость $f(X_1) = 12 \cdot 85 + 10 \cdot 61 + 9 \cdot 44 + 4 \cdot 128 + 8 \cdot 170 + 9 \cdot 12 = 4006$. Обратите внимание на то, что изменение общей стоимости равно $5030 - 4006 = 1024 = \Delta_{24} \cdot 128 = 8 \cdot 128$.

Аналогично проверим на оптимальность план X_1 .

□

X_1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 85	10 61	13	6	0
A_2	5	9 - 44	11	4 + 128	-1
A_3	10	6 + 0	8 170	9 12 -	4
v_j	12	10	4	5	

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 12, \\ u_1 + v_2 = 10, \\ u_2 + v_2 = 9, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_4 = 9. \end{cases}$$

□

$$\Delta_{13} = 0 + 4 - 13 = -9,$$

$$\Delta_{14} = 0 + 5 - 6 = -1,$$

$$\Delta_{21} = -1 + 12 - 5 = 6,$$

$$\Delta_{23} = -1 + 4 - 11 = -8,$$

$$\Delta_{31} = 4 + 12 - 10 = 6,$$

$$\Delta_{32} = 4 + 10 - 6 = 8. (\max)$$

Положив $u_1 = 0$, находим остальные потенциалы. Далее :

План X_1 не оптимален. Вводим в базисные клетку (3; 2). Аналогично получим опорный план X_2 , для которого

$$f(X_2) = 12 \cdot 85 + 10 \cdot 61 + 9 \cdot 32 + 4 \cdot 140 + 6 \cdot 12 + 8 \cdot 170 = 3910.$$

Составление системы для потенциалов и их вычисление представляем читателю сделать самостоятельно. После этого вычисляем оценки:

X_2	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 - 85	10 + 61	13	6	0
A_2	5 + 0	9 - 32	11	4 140	-1
A_3	10	6 12	8 170	9	-4
v_j	12	10	12	5	

$$\Delta_{13} = 0 + 12 - 13 = -1,$$

$$\Delta_{14} = 0 + 5 - 6 = -1,$$

$$\Delta_{21} = -1 + 12 - 5 = 6, (\max)$$

$$\Delta_{23} = -1 + 12 - 11 = 0,$$

$$\Delta_{31} = -4 + 12 - 10 = -2,$$

$$\Delta_{34} = -4 + 5 - 9 = -8.$$

Минимум по отрицательным клеткам равен 32. После пересчета по циклу получим новый опорный план X_3 , для которого $f(X_3) = 12 \cdot 53 + 10 \cdot 93 + 5 \cdot 32 + 4 \cdot 140 + 6 \cdot 12 + 8 \cdot 170 = 3718$ (см. таблицу на следующей странице). Вычислим оценки :

X_3	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 53	10 93	13	6 +	0
A_2	5 32+	9	11	4 140-	-7
A_3	10	6 12	8 170	9	-4
v_j	12	10	12	11	

$$\Delta_{13} = 0 + 10 - 10 = 0,$$

$$\Delta_{23} = -7 + 12 - 11 = -6,$$

$$\Delta_{14} = 0 + 11 - 6 = 5, \text{ (max)}$$

$$\Delta_{31} = -4 + 12 - 10 = -2,$$

$$\Delta_{22} = -7 + 10 - 9 = -6,$$

$$\Delta_{34} = -4 + 11 - 9 = -2.$$

Строим цикл для клетки (1; 4) и переходим к новому опорному плану. Делаем сдвиг по циклу на 53 ед.. Подсчитываем потенциалы и оценки для плана X_4 .

X_4	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12	10 93	13	6 53	0
A_2	5 85	9	11	4 87	-2
A_3	10	6 12	8 170	9	-4
v_j	7	10	12	6	

$$\Delta_{11} = 0 + 7 - 12 = -5,$$

$$\Delta_{13} = 0 + 12 - 13 = -1,$$

$$\Delta_{22} = -2 + 10 - 9 = -1,$$

$$\Delta_{23} = -2 + 12 - 11 = -1,$$

$$\Delta_{31} = -4 + 7 - 10 = -7,$$

$$\Delta_{34} = -4 + 6 - 9 = -7.$$

Так как все $\Delta_{ij} \leq 0$, то план X_4 оптимален и

$$f_{\min} = f(X_4) = 10 \cdot 93 + 6 \cdot 53 + 5 \cdot 85 + 4 \cdot 87 + 6 \cdot 12 + 8 \cdot 170 = 3453.$$

По этому плану следует перевезти от A_1 к B_2 93 ед. и к B_4 53 ед., от A_2 к B_1 85 ед. и к B_4 87 ед., от A_3 к B_2 12 ед. и к B_3 170 единиц груза.

Вариант б). Рассмотрим задачу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	8	9	5	100
A_2	7	10	13	6	160
A_3	6	11	7	9	200
b_j	140	120	110	90	460 460

Составим первоначальный опорный план методом северо-западного угла. Через три шага этого метода мы придем к следующей таблице:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14 100	8	9	5	100 0
A_2	7 40	10 120	13	6	160 120 0
A_3	6	11	7	9	200
b_j	140 40 0	120 0	110	90	

Мы столкнулись с ситуацией, когда одновременно закончились запасы поставщика A_2 и удовлетворены потребности B_2 . Далее, согласно методу, остается распределить 200 единиц груза между B_3 и B_4 . И мы получим план, содержащий пять (!) вместо шести базисных клеток. Чтобы избежать этого, в такой ситуации (у нас после заполнения клетки (2; 2)) в следующую правую или нижнюю клетку записывают перевозку, равную нулю (логичнее выбрать клетку с меньшей стоимостью). Далее процесс продолжается как обычно.

В итоге получим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14 100	8	9	5	100 0
A_2	7 40	10 120	13	6	160 120 0
A_3	6	11 0	7 110	9 90	200
b_j	140 40 0	120 0	110	90	

Опорный план, содержащий нулевые базисные перевозки, называется *вырожденным*. В дальнейшем при переходе к новым опорным планам эта нулевая перевозка может перемещаться в другие клетки или стать ненулевой. Рассмотрим систему уравнений для потенциалов:

X_0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	¹⁴ 100 ₋	⁸ ₋	⁹ ₋	⁵ ₊	0
A_2	⁷ 40 ₊	¹⁰ 120 ₋	¹³ ₋	⁶ ₋	-7
A_3	⁶ ₊	¹¹ 0 ₊	⁷ 110 ₋	⁹ 90 ₋	-6
v_j	14	17	13	15	

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 14, \\ u_2 + v_1 = 7, \\ u_2 + v_2 = 10, \\ u_3 + v_2 = 11, (!) \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_3 + v_4 = 9. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\Delta_{12} = 0 + 17 - 8 = 9, \Delta_{13} = 0 + 13 - 9 = 4, \Delta_{14} = 0 + 15 - 5 = 10 \text{ (max)},$$

$$\Delta_{23} = -7 + 13 - 13 = -7, \Delta_{24} = -7 + 15 - 6 = 2, \Delta_{31} = -6 + 14 - 6 = 2.$$

После сдвига по циклу для свободной клетки (1; 4) получим уже невырожденный план. Предлагаем читателю проверить это и продолжить решение задачи самостоятельно. Заметим, может случиться так, что при переходе к новому опорному плану в нескольких отрицательных клетках перевозки одновременно обращаются в ноль. В этом случае только одну из них делают свободной, а остальные оставляют как нулевые базисные.

Вариант в). Рассмотрим две транспортные задачи:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	213
A_2	8	14	11	12	152
A_3	6	9	12	13	235
b_j	158	187	151	154	600 / 650

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	250
A_2	8	14	11	12	170
A_3	6	9	12	13	240
b_j	90	120	200	190	660 / 600

В первой $\sum_i a_i = 600 < 650 = \sum_j b_j$, во второй $\sum_i a_i = 660 > 600 = \sum_j b_j$. В этих случаях

транспортная задача называется *открытой*. Чтобы сделать их закрытыми, в первой вводят в рассмотрение *фиктивного поставщика* с запасами груза $a_4 = \sum_j b_j - \sum_i a_i = 50$,

а во второй – *фиктивного потребителя* с потребностью $b_5 = \sum_i a_i - \sum_j b_j = 60$, с ценами перевозок, равными 0.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	11	12	9	9	213
A ₂	8	14	11	12	152
A ₃	6	9	12	13	235
A ₄	0	0	0	0	50
b _j	158	187	151	154	

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	a _i
A ₁	11	12	9	9	0	250
A ₂	8	14	11	12	0	170
A ₃	6	9	12	13	0	240
b _j	90	120	200	190	60	

Решая их по алгоритму, описанному выше, получим оптимальные планы:

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	a _i
A ₁	11	12	9	9	213
A ₂	8	14	11	12	152
A ₃	6	9	12	13	235
A ₄	0	0	0	0	50
b _j	158	187	151	154	

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	a _i
A ₁	11	12	9	9	0	250
A ₂	8	14	11	12	0	170
A ₃	6	9	12	13	0	240
b _j	90	120	200	190	60	

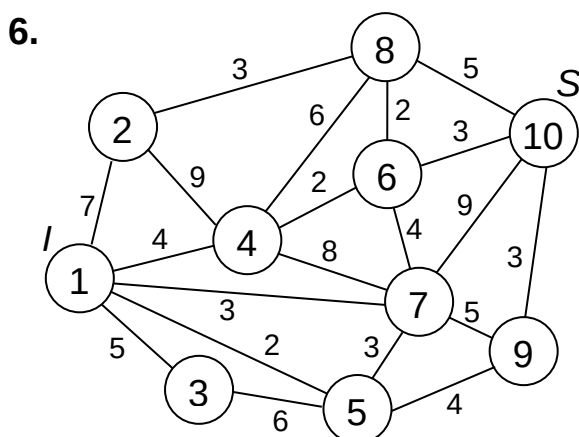
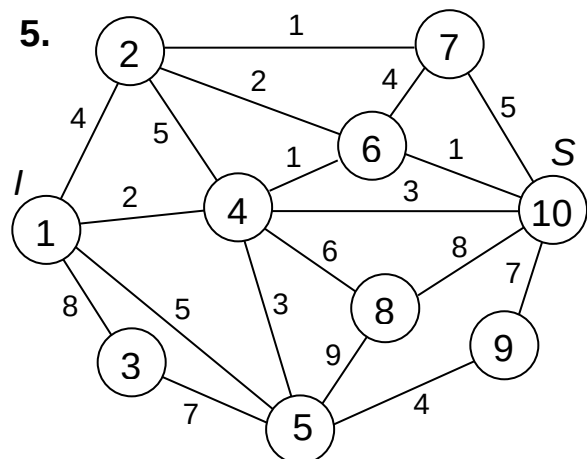
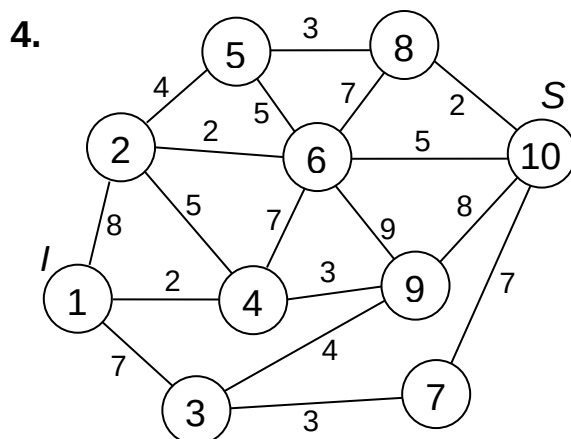
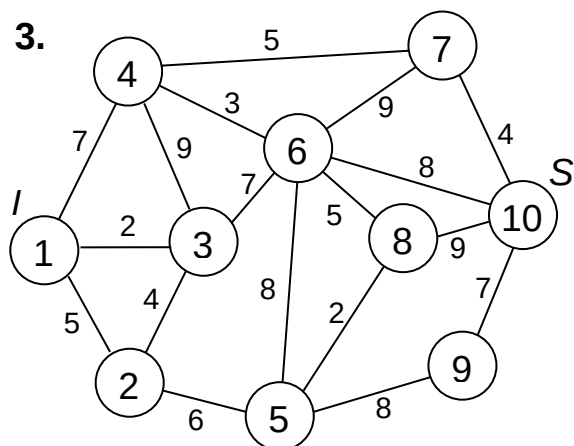
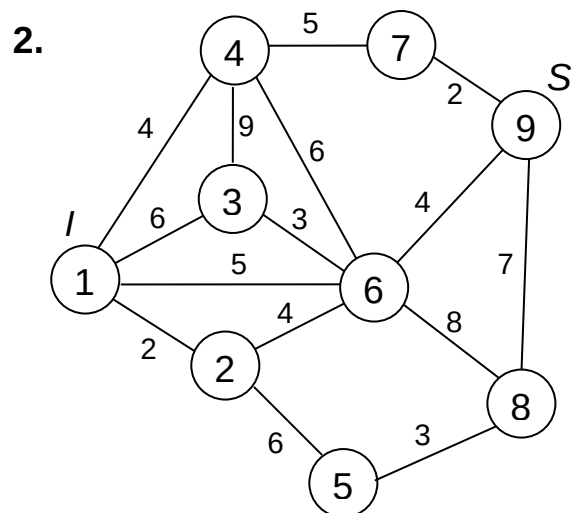
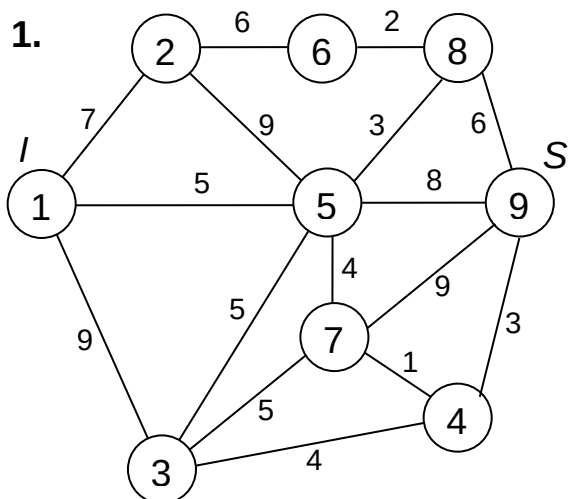
В первом случае в условиях нехватки запасов недостающие у поставщиков 50 единиц груза недополучит потребитель B₂, а потребности остальных будут удовлетворены полностью. В втором случае при избытке груза лишние 60 единиц груза останутся у поставщиков A₂ и A₃ (по 30 единиц у каждого), то есть они останутся на этих складах. От поставщика A₁ все будет вывезено. При этом минимум общих затрат на перевозки в первом случае составит 5230 ден. ед., а во втором – 5410 ден. ед. •

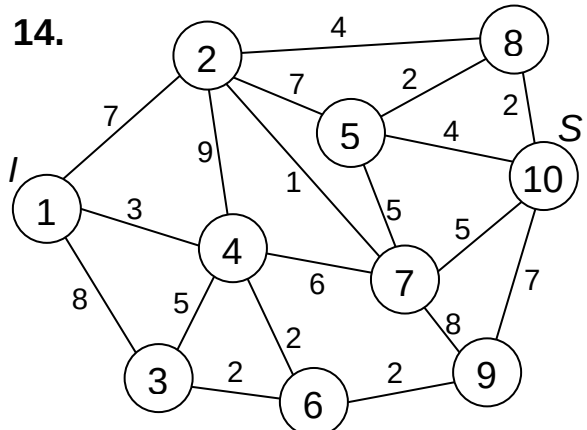
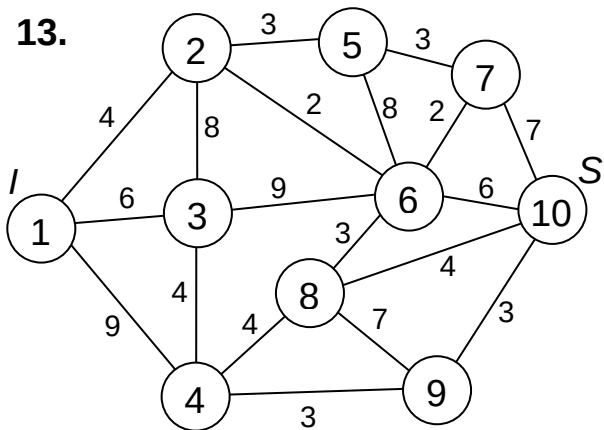
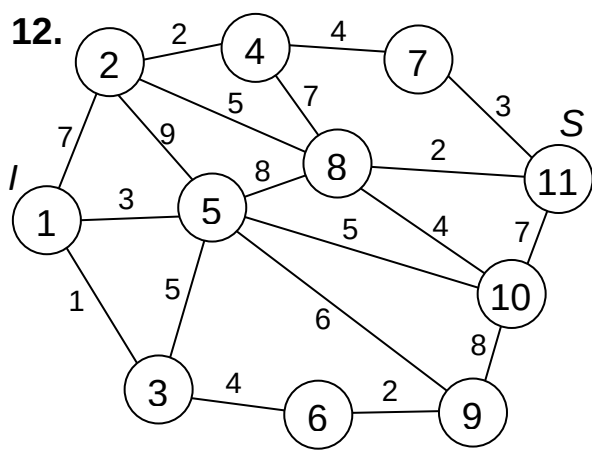
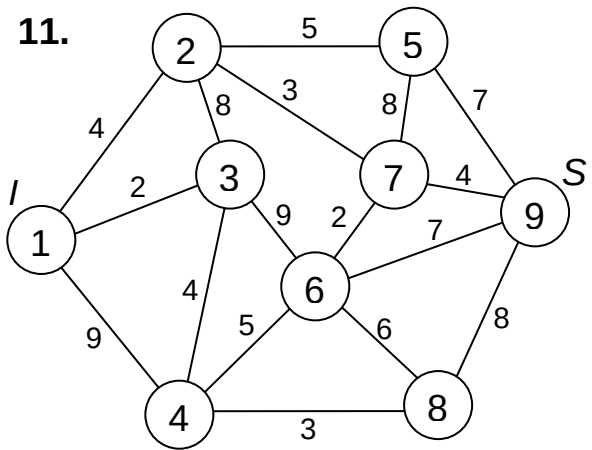
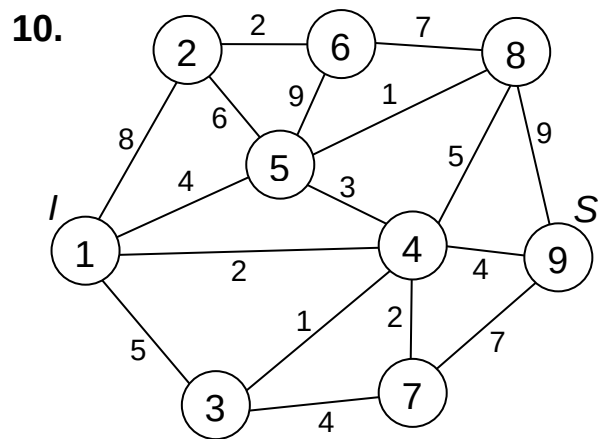
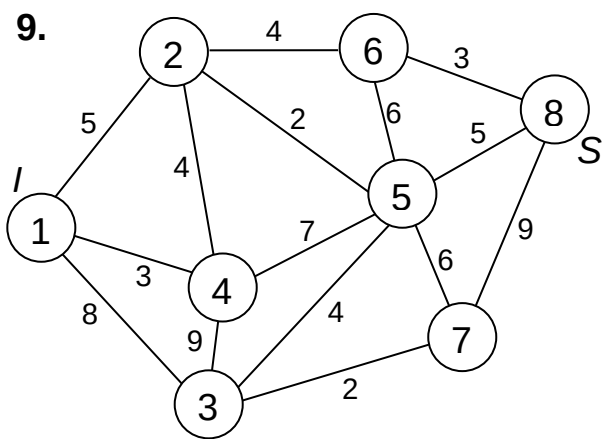
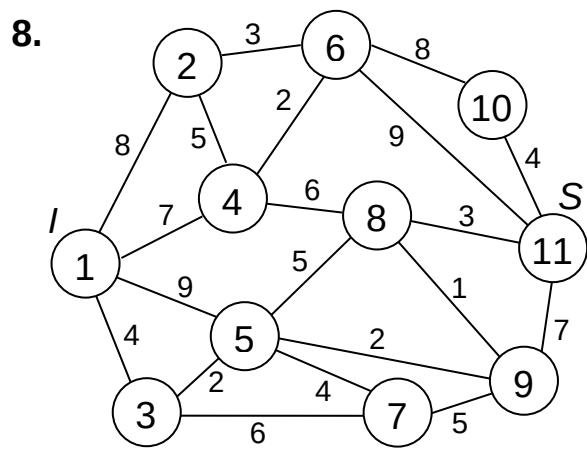
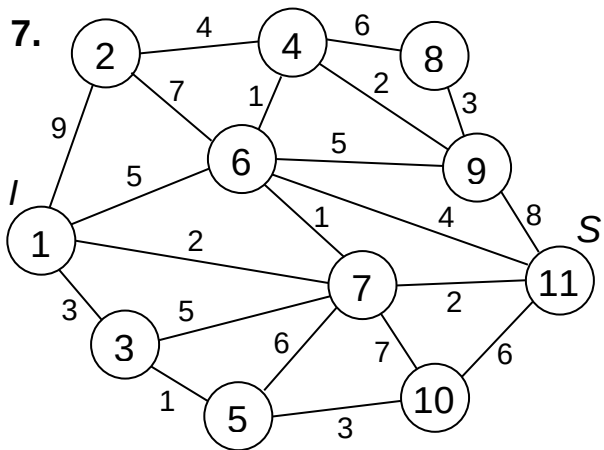
ГЛАВА X

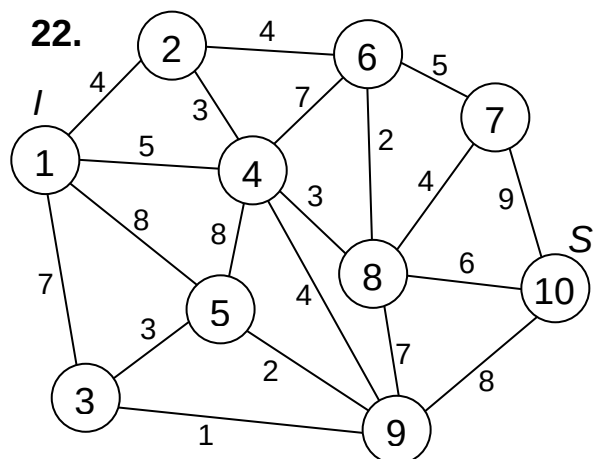
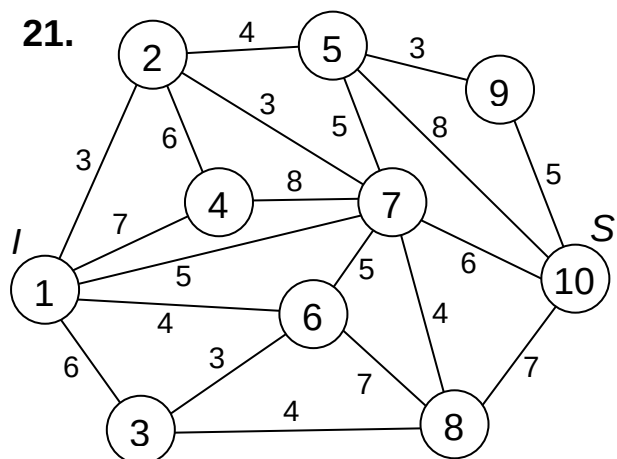
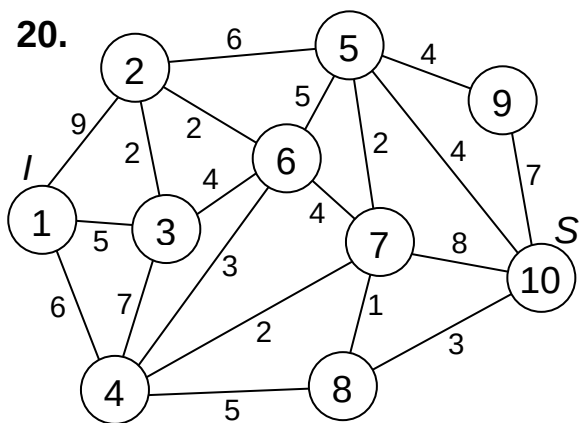
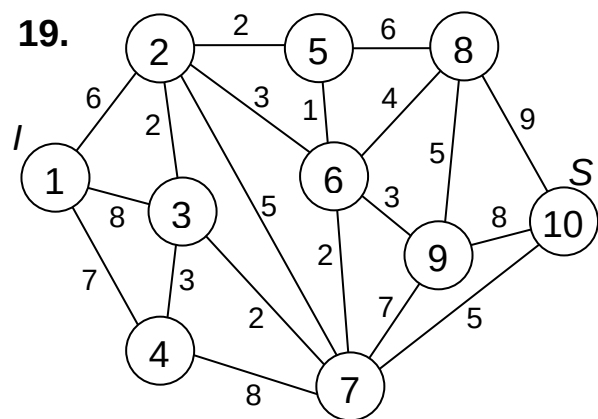
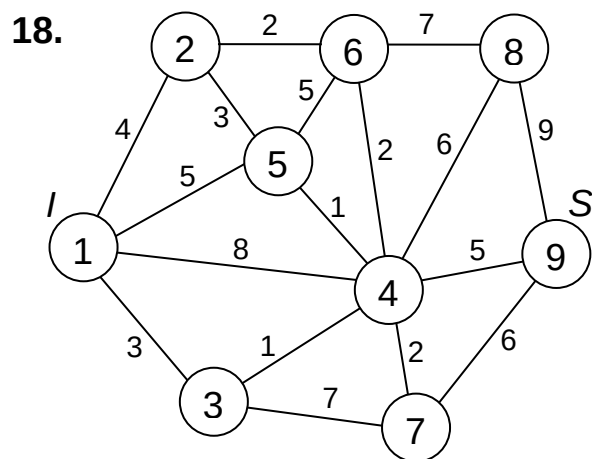
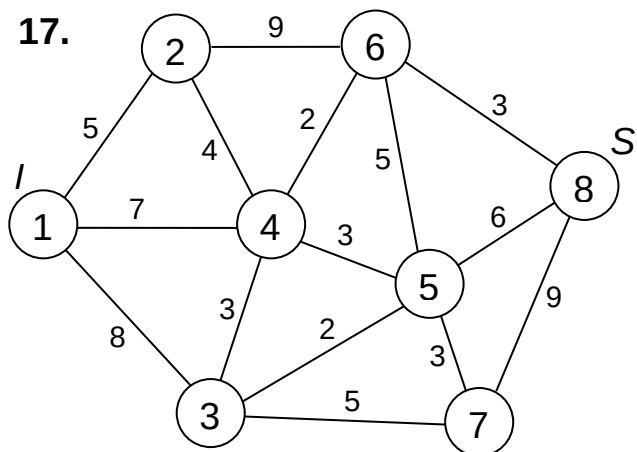
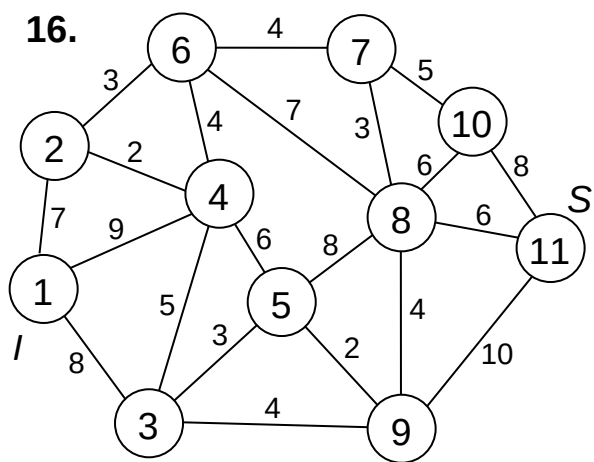
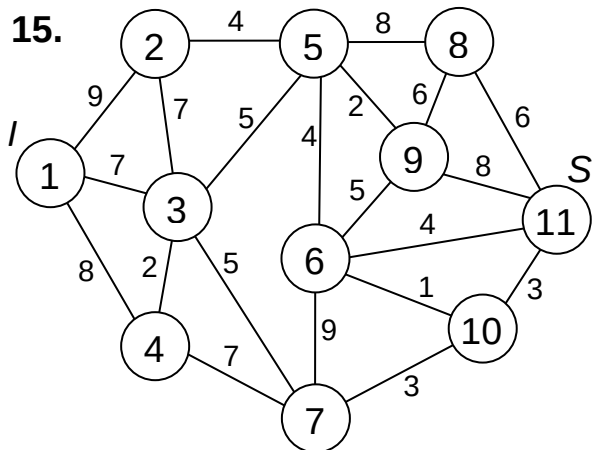
Программирование на сетях

Задача о максимальном потоке.

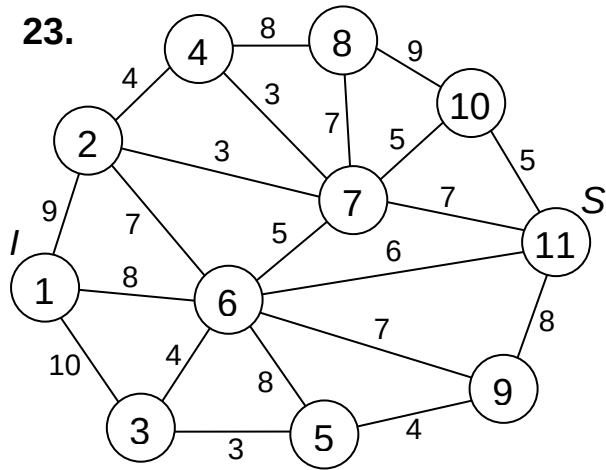
Задание 1. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S . Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



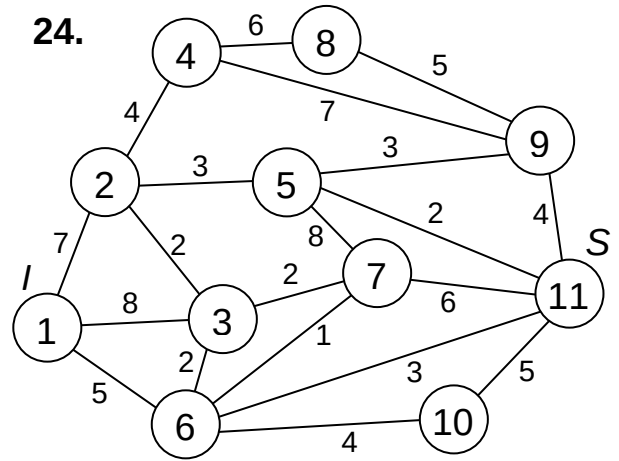




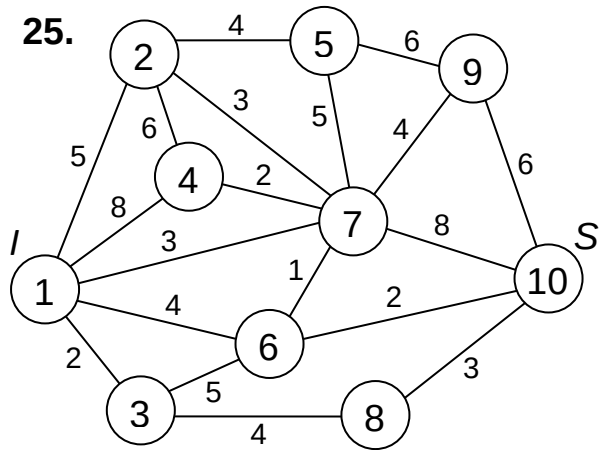
23.



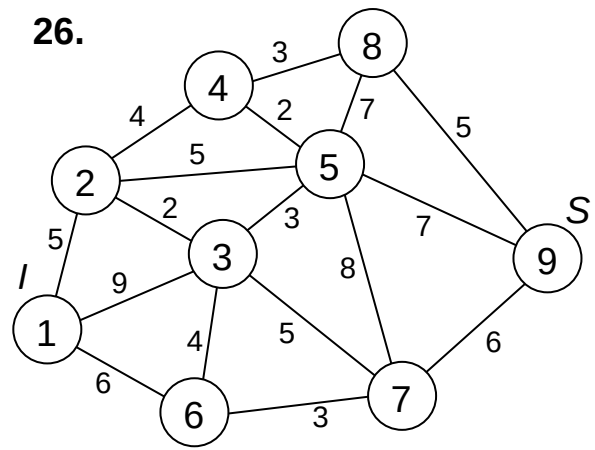
24.



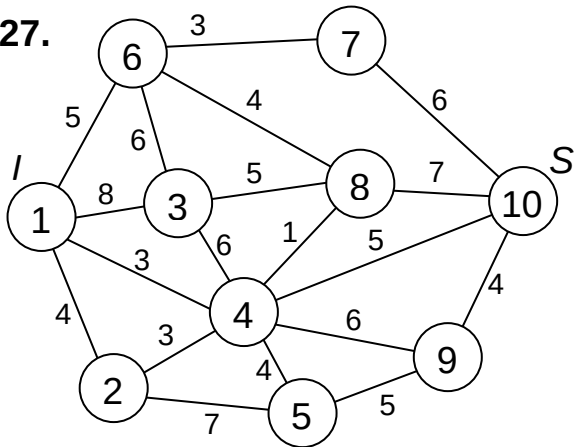
25.



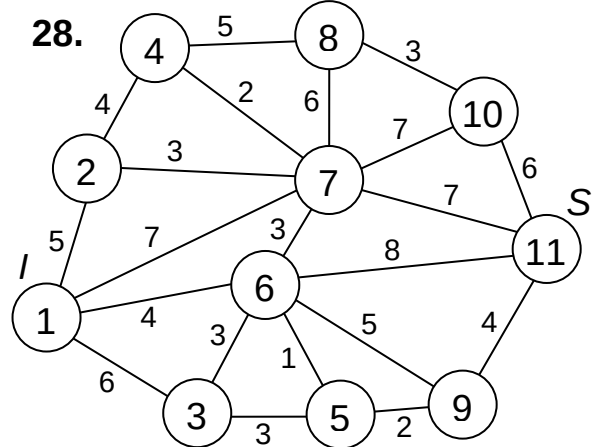
26.



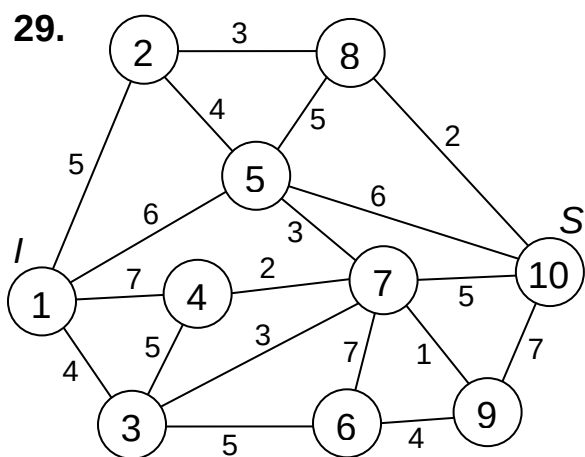
27.



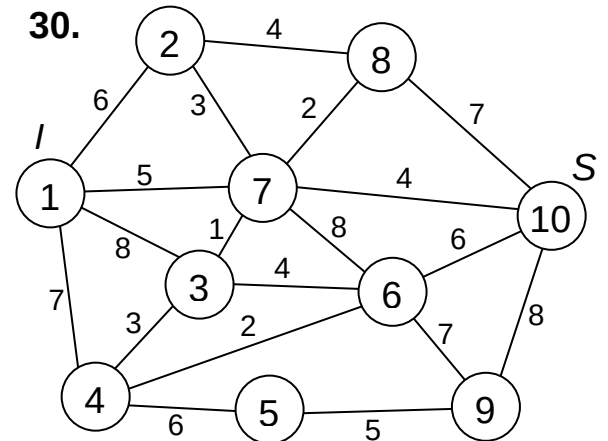
28.



29.

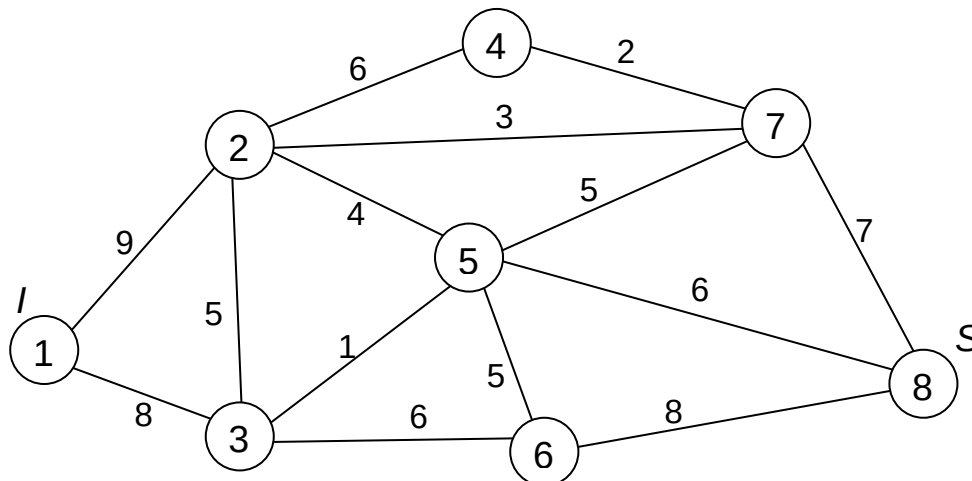


30.



Решение типового варианта.

Пример 1. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S . Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



• Вершина 1 (I) является *истоком*, а вершина 8 (S) – *стоком* данной сети. Максимальное количество r_{ij} вещества (груза, информации и т.п.), которое может пропустить за единицу времени ребро $(i; j)$, называется его *пропускной способностью*. По условию задачи $r_{ij} = r_{ji}$, например, $r_{13} = r_{31} = 8$, $r_{35} = r_{53} = 1$ и т.д. При этом полагают все $r_{ii} = 0$.

Пропускные способности сети запишем в квадратной матрице R 8-го порядка (порядок равен количеству вершин). Для наглядности клетки с нулевыми пропускными способностями оставим пустыми.

R	1	2	3	4	5	6	7	8
1		9	8					
2	9		5	6	4		3	
3	8	5			1	6		
4		6					2	
5		4	1			5	5	6
6			6		5			8
7		3		2	5			7
8					6	8	7	

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро $(i; j)$ в единицу времени, называется *потоком по ребру $(i; j)$* . Считается, что $x_{ij} = -x_{ji}$. Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем ребрам сети называют *потоком по сети*, а функция $f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}$

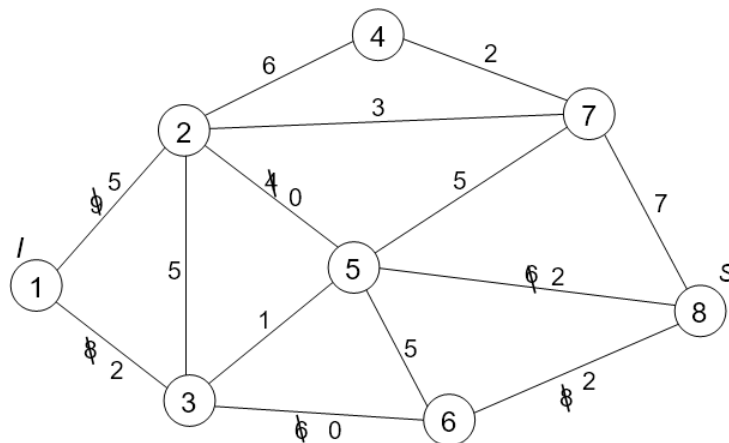
(общее количество вещества, вытекающее из истока, и общее количество, втекающее в сток) называется *мощностью потока* на сети. Ребро $(i; j)$ называется *ненасыщенным*, если $x_{ij} < r_{ij}$, и *насыщенным*, если $x_{ij} = r_{ij}$.

Сформируем на сети начальный поток X^0 . Будем составлять пути из I в S по ненасыщенным ребрам. При этом будем следить, чтобы потоки формировались в одном направлении.

Рассмотрим путь $1 - 3 - 6 - 8$. Так как $\min(8; 6; 8) = 6$, то по этому пути пропустим 6 ед. вещества. Ребро $(3; 6)$ станет насыщенным.

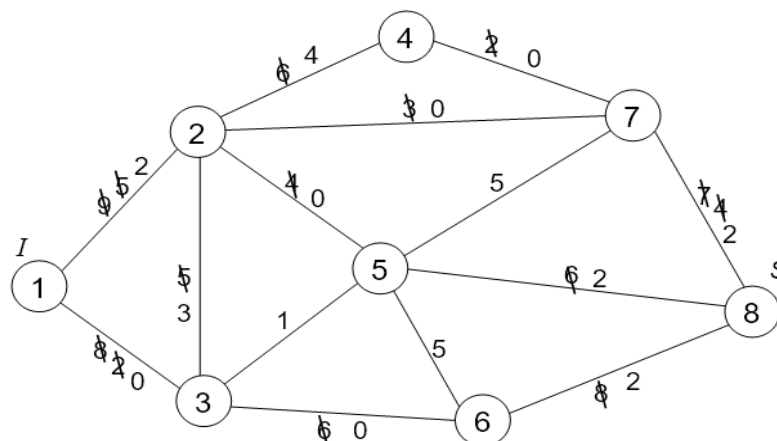
Для пути $1 - 2 - 5 - 8$ $\min(9; 4; 6) = 4$, поэтому пропустим по данному пути 4 ед. вещества. Ребро $(2; 5)$ – насыщенное.

Будем отмечать резервы пропускных способностей ребер на сети, перечеркивая «старые» значения пропускных способностей:



Далее пропустим по пути $1 - 2 - 7 - 8$ $\min(5; 3; 7) = 3$ ед. вещества, а по пути $1 - 3 - 2 - 4 - 7 - 8$ $\min(2; 5; 6; 2; 4) = 2$ ед. При этом ребра $(2; 7)$ и $(1; 3)$ станут насыщенными.

Отообразим изменения на сети.



Пути, которые формируют начальный поток X^0 , можно находить до тех пор, пока существует проход по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Получаем следующий начальный поток X^0 (в скобках будем указывать количество вещества, пропускаемого по данному пути):

$1 - 3 - 6 - 8$ (6)

$1 - 2 - 5 - 8$ (4)

$$1 - 2 - 7 - 8 \quad (3)$$

$$1 - 3 - 2 - 4 - 7 - 8 \quad (2)$$

Найдем мощность потока $X^0: f(X^0) = 6 + 4 + 3 + 2 = 15$ ед.

Запишем поток X^0 в виде матрицы:

X^0	1	2	3	4	5	6	7	8
1		7	8					
2	-7		-2	2	4		3	
3	-8	2				6		
4		-2					2	
5		-4						4
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-4	-6	-5	

Например, через ребро (1;3) проходит $6 + 2 = 8$ единиц. Значит, в клетку (1;3) матрицы X^0 записываем $x_{13} = 8$, а в клетку (3;1) – $x_{31} = -8$. Через ребро (5;8) проходит 4 единицы, поэтому в клетку (5;8) записываем $x_{58} = 4$, а в клетку (8;5) – $x_{85} = -4$. И т.д.

Составляем матрицу $R - X^0$, элементы которой $r_{ij} - x_{ij}$ позволяют судить о насыщенности ребер сети:

$$r_{ij} - x_{ij} = \begin{cases} = 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ насыщено,} \\ \neq 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ ненасыщено.} \end{cases}$$

$R - X^0$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2						
2	16		7	4				
3	16	3			1			
4		8						
5		8	1			5	5	2
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					10	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Для этого просматриваем 1-ю строку матрицы $R - X^0$. Из вершины 1 по ненасыщенному ребру можно попасть только в вершину 2. Из вершины 2 – в вершины 1 (которую мы игнорируем, так как она уже рассматривалась), 3 и 4. Из вершины 3 можно попасть лишь в вершину 5, а из нее – в вершину 8. В итоге получаем следующий список вершин, достижимых из истока по путям, состоящим из ненасыщенных ребер:

1: 2

2: 3, 4

3: 5

5: 8

Так как сток находится в этом списке, то начальный поток не является максимальным и его можно улучшить.

Получили путь $1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{7} 3 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{2} 8$. Находим величину $\Delta = \min(2; 7; 1; 2) = 1$, на которую нужно увеличить поток по ребрам (1;2), (2;3), (3;5) и (5;8), чтобы получить более мощный поток.

В результате получим поток X^1 , мощность которого равна $f(X^1) = f(X^0) + \Delta = 15 + 1 = 16$.

X^1	1	2	3	4	5	6	7	8
1		8	8					
2	-8		-1	2	4		3	
3	-8	1			1	6		
4		-2					2	
5		-4	-1					5
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-5	-6	-5	

Проверим этот поток на максимальность, для чего найдем матрицу $R - X^1$:

$R - X^1$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1						
2	17		6	4				
3	16	4						
4		8						
5		8	2			5	5	1
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					11	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток:

1: 2

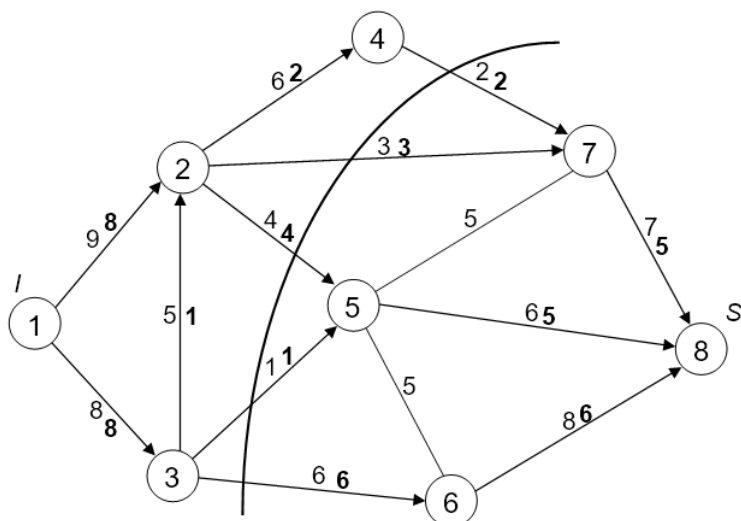
2: 3, 4

3: ×

4: ×

Такого пути нет, поэтому поток $X^* = X^1$ – максимальный и его мощность равна $f_{\max} = f(X^*) = 16$.

Нанесем этот поток на сеть с указанием величин (выделим полужирным) и направления потоков по отдельным ребрам:



Проверим правильность построенного максимального потока с помощью теоремы Форда - Фалкерсона, согласно которой максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего исток от стока.

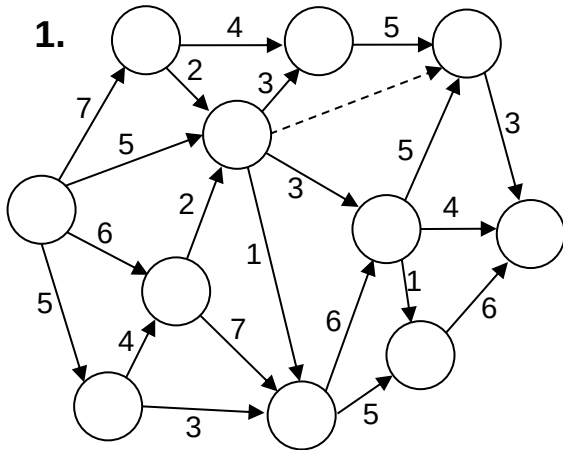
Ребра (4;7), (2;7), (2;5), (3;5), (3;6), очевидно, образуют искомый разрез, так как пропускная способность ребер разреза равна $r_{47} + r_{27} + r_{25} + r_{35} + r_{36} = 2 + 3 + 4 + 1 + 6 = 16$ ед., что совпадает с максимальной мощностью на сети. Значит, максимальный поток построен верно.

$$\text{Следовательно, } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -6 & -5 & 0 \end{bmatrix}; f_{\max} = f(X^*) = 16. \bullet$$

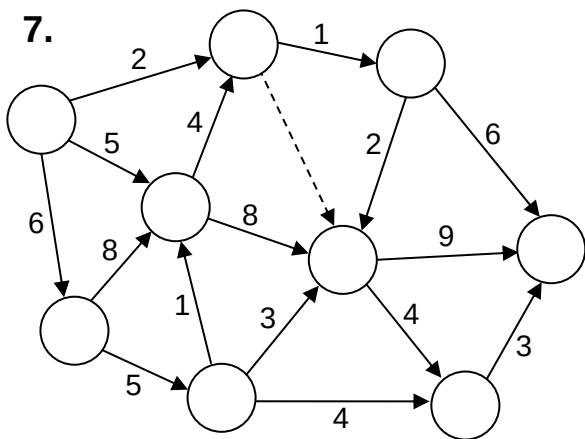
Элементы сетевого планирования.

Задание 1. Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

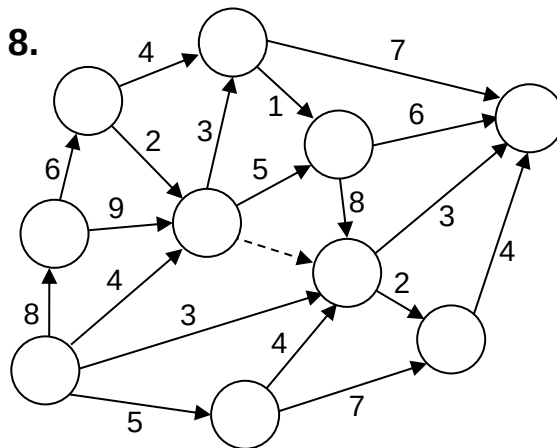
1. исходное событие I и завершающее событие S ;
2. номера вершин в натуральном порядке;
3. ранние сроки свершения событий;
4. поздние сроки свершения событий;
5. резервы времени событий;
6. время выполнения комплекса и критический путь.



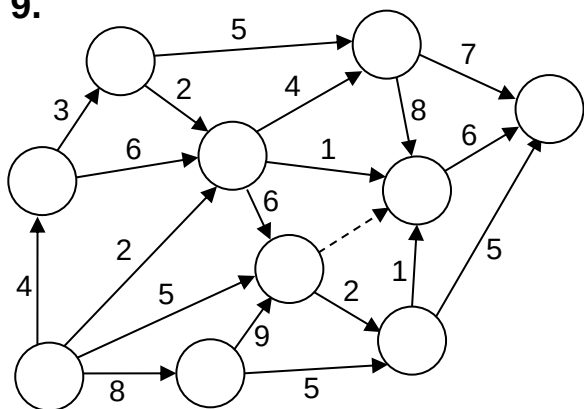
7.



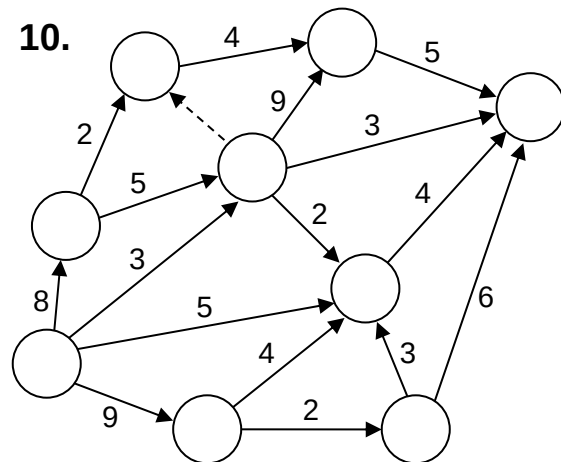
8.



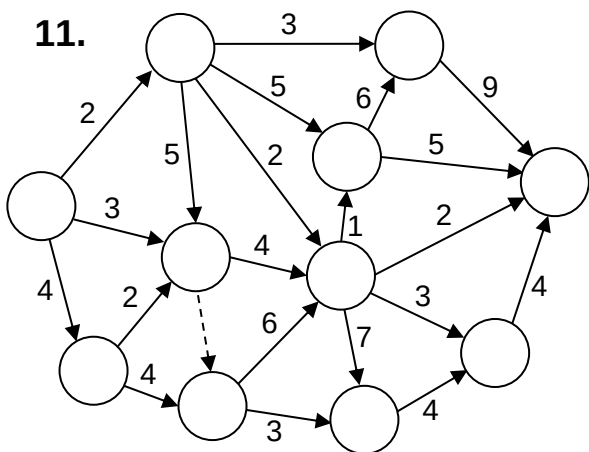
9.



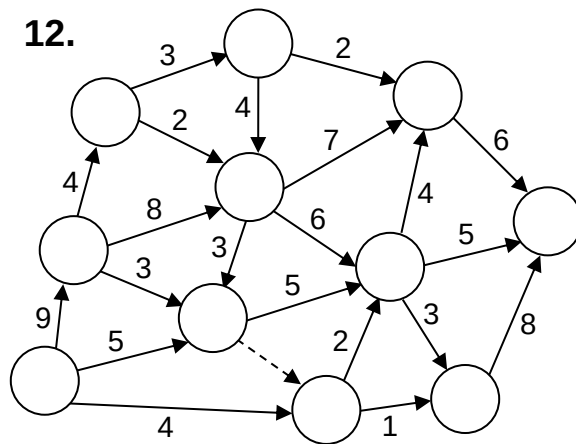
10.



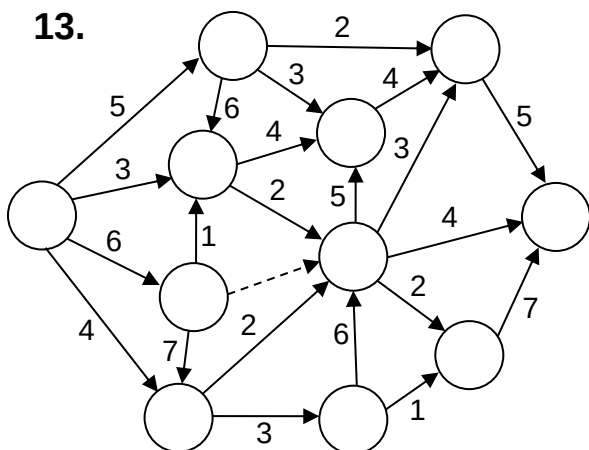
11.



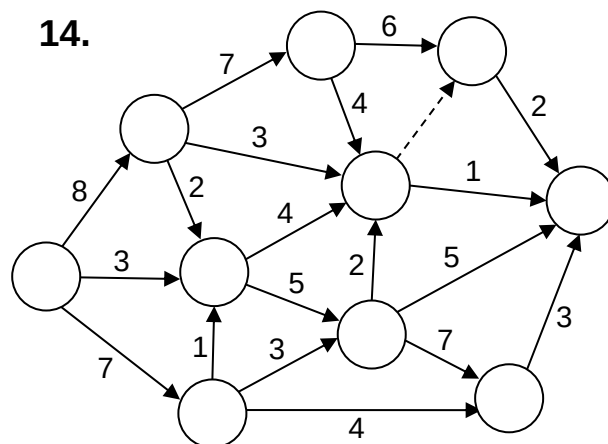
12.



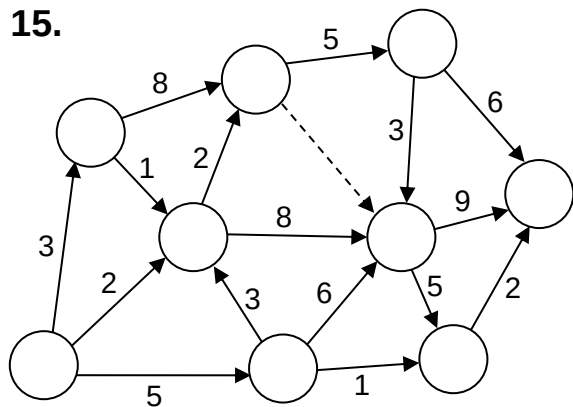
13.



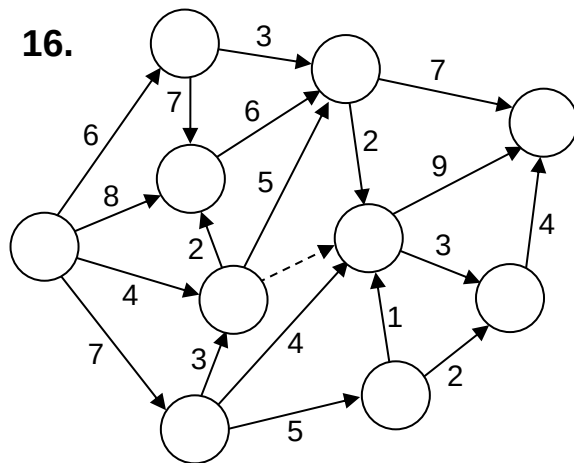
14.



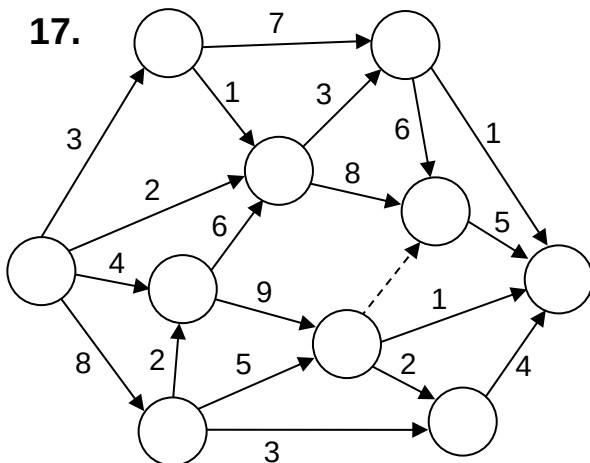
15.



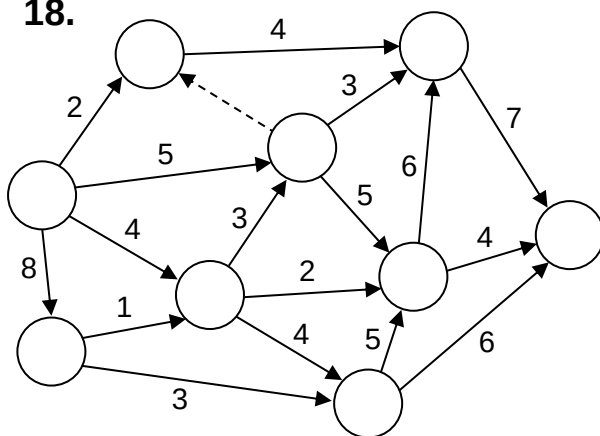
16.



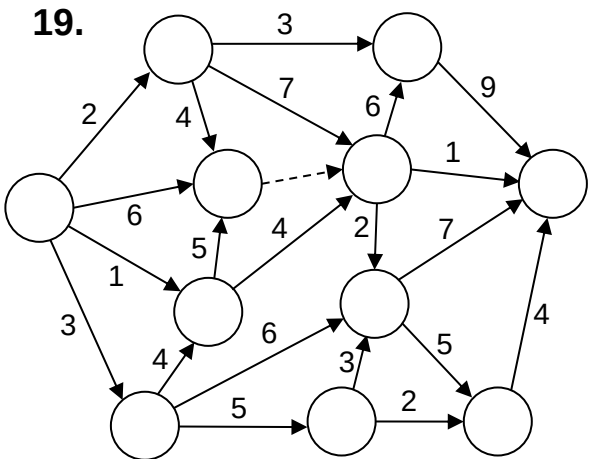
17.



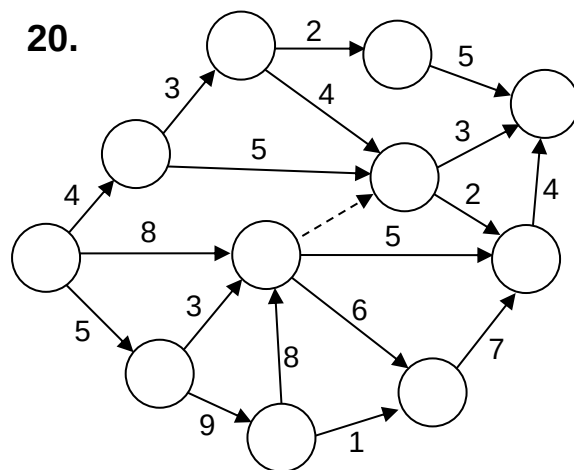
18.



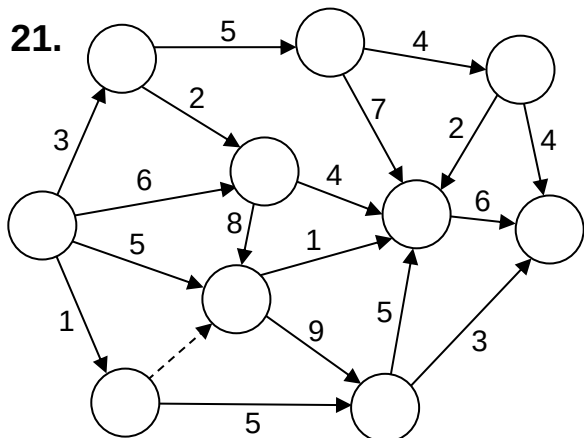
19.



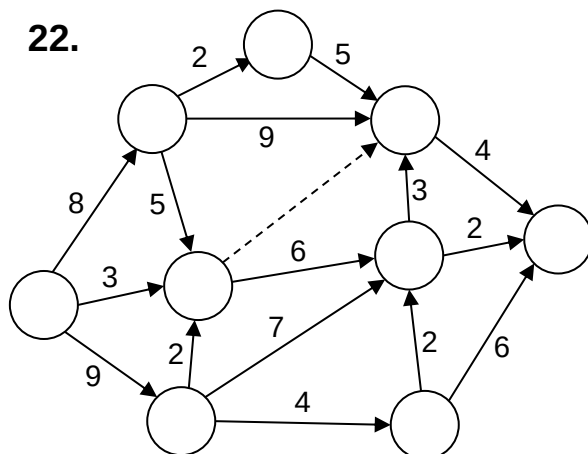
20.



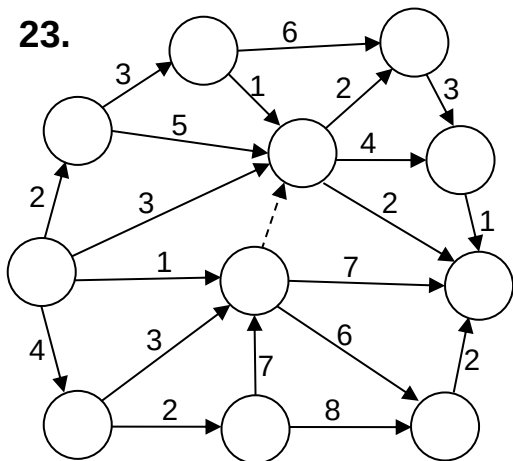
21.



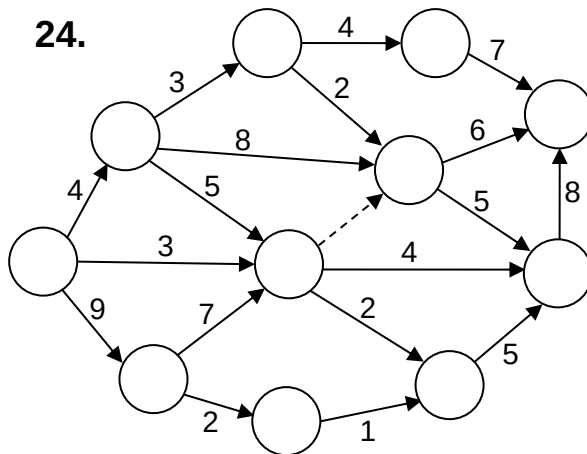
22.



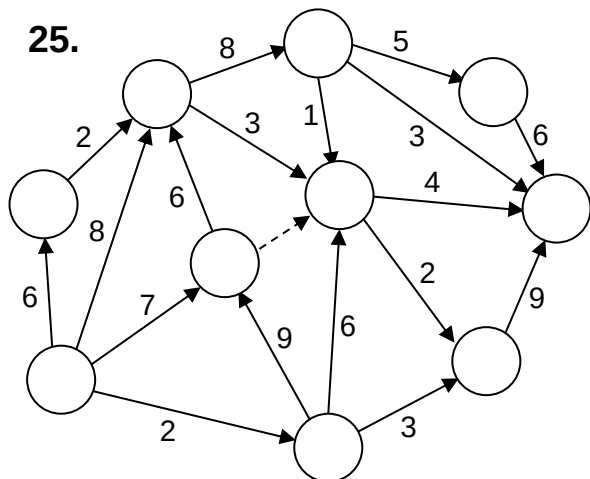
23.



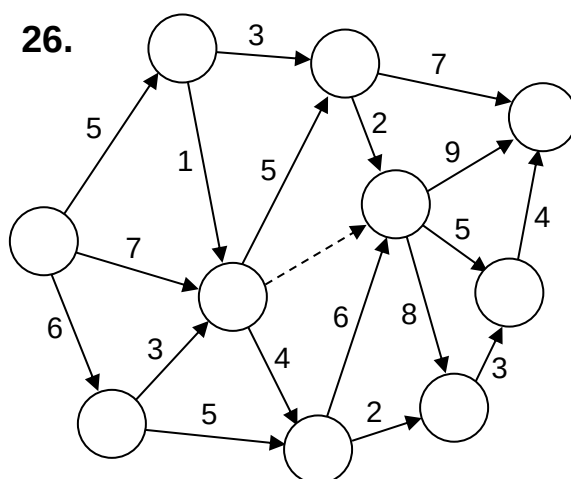
24.



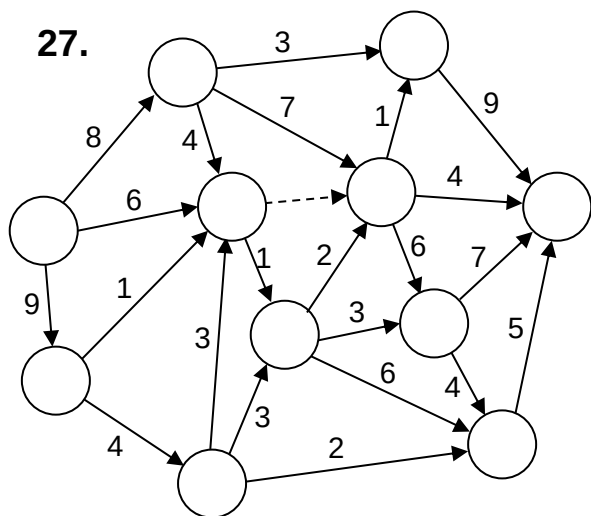
25.



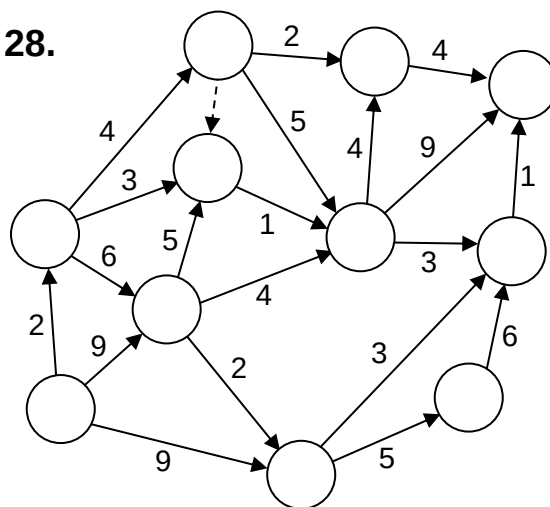
26.



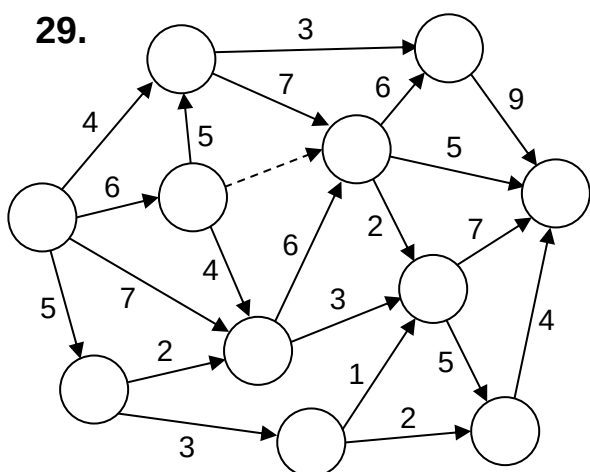
27.



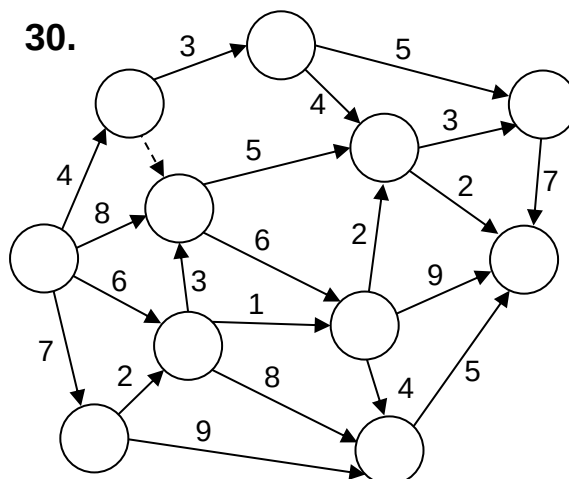
28.



29.



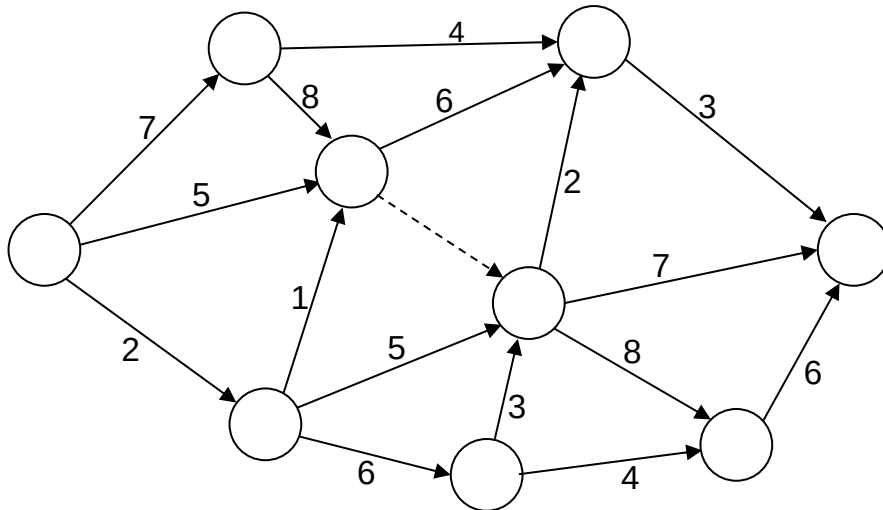
30.



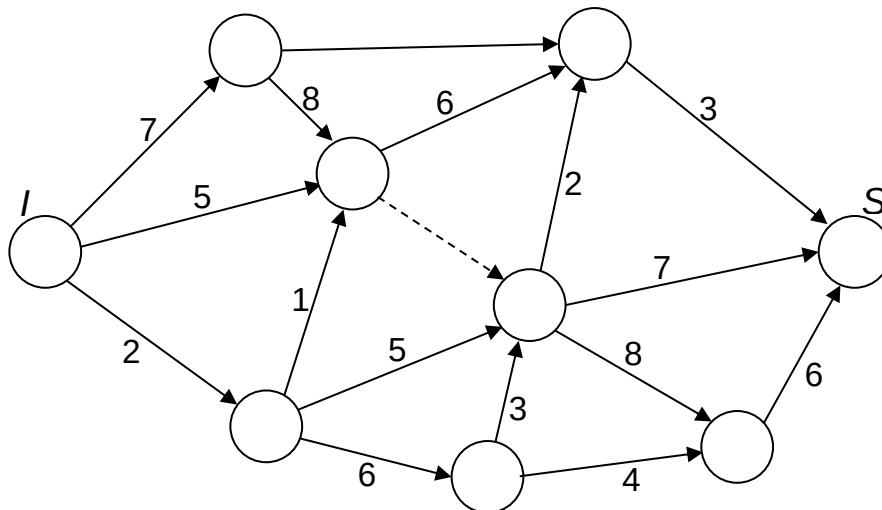
Решение типового варианта.

Пример 1. Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

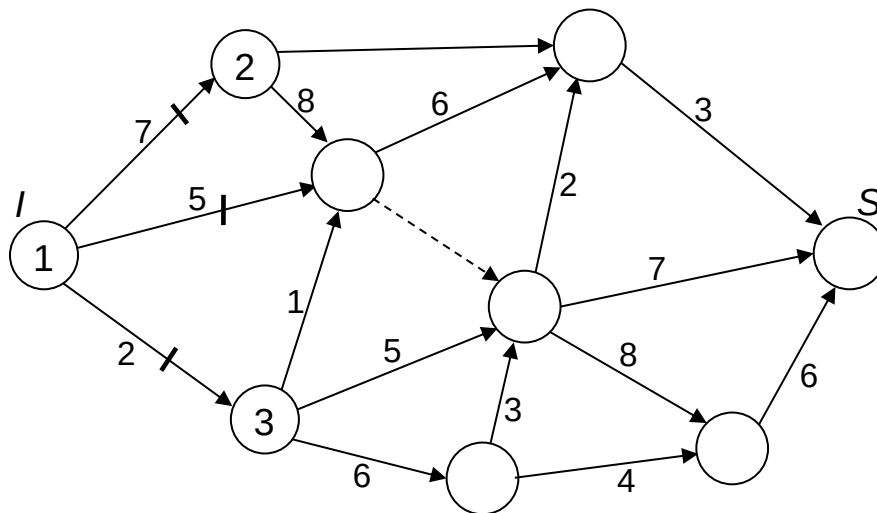
1. исходное событие I и завершающее событие S ;
2. номера вершин в натуральном порядке;
3. ранние сроки свершения событий;
4. поздние сроки свершения событий;
5. резервы времени событий;
6. время выполнения комплекса и критический путь.



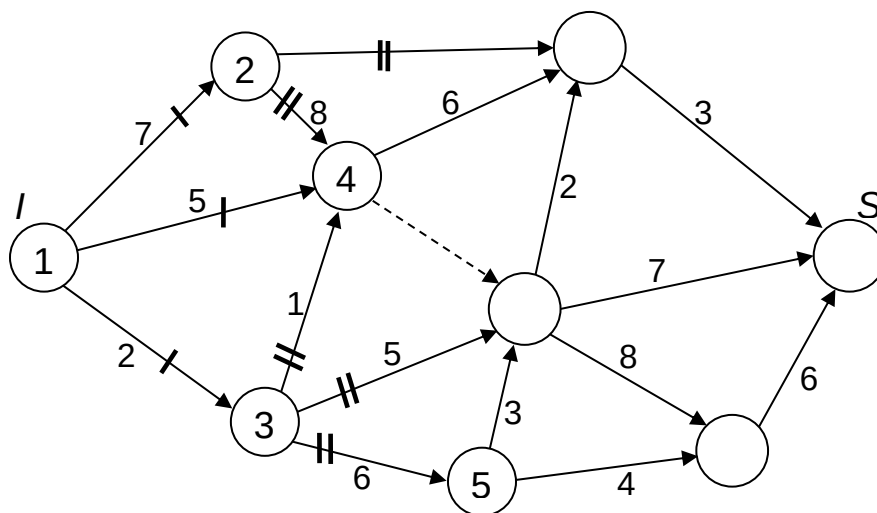
• **1.** *Исходным событием I* является первое слева событие как не имеющее предшествующих вершин, а *завершающим событием S* является последнее правое как не имеющее последующих вершин:



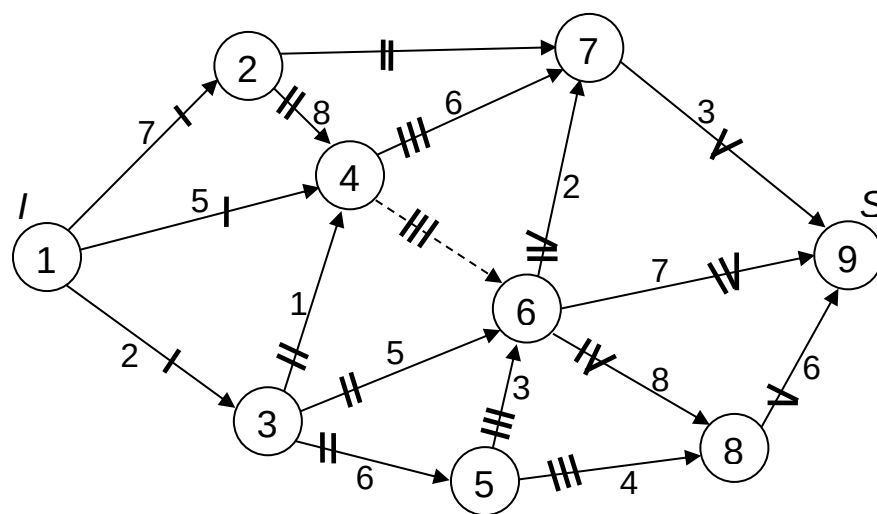
2. Нумерация вершин начинается с присвоения номера 1 исходному событию I . На первом шаге зачеркнем все работы, начинающиеся в этой вершине (одной чертой) и будем считать, что они выполнены. Продолжим нумерацию тех вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ. Это будут вершины 2 и 3. Назовем их *вершинами первого уровня*:



На втором шаге зачеркнем двумя чертами работы, начинающиеся в вершинах первого уровня, и аналогично продолжим нумерацию вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ (опять же считая выполненными все вычеркнутые работы). Это будут вершины 4 и 5 – *вершины второго уровня*:

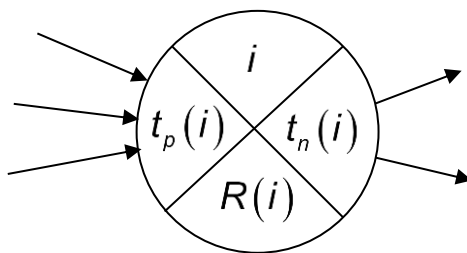


Продолжая аналогично, получим нумерацию вершин в натуральном порядке. Номер вершины начала любой из работ меньше номера вершины ее окончания.



Из вершины 4 в вершину 6 идет пунктирная линия. Это означает, что 6-я работа наступает после 4-й с нулевыми затратами времени.

3. Для дальнейшей работы с графом каждую вершину разобьем на четыре части. В верхней части указывается номер события i , в левой – ранний срок $t_p(i)$ свершения события i , в правой – поздний срок $t_n(i)$ свершения события i , в нижней – резерв $R(i)$ времени этого события.



Сначала рассчитываются ранние сроки свершения событий (для события I его полагают равным 0). Для остальных событий (в порядке возрастания номеров) эти сроки подсчитываются по формуле

$$t_p(j) = \max_{(i;j) \in U_j^+} [t_p(i) + t(i;j)],$$

где U_j^+ – множество работ, входящих в j -е событие; $t_p(i)$ – ранний срок наступления начального события работы $(i;j)$ с продолжительностью $t(i;j)$.

Ранний срок $t_p(i)$ свершения события i – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

В нашем случае будем иметь:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1;2) = 0 + 7 = 7;$$

$$t_p(3) = t_p(1) + t(1;3) = 0 + 2 = 2;$$

$$\begin{aligned} t_p(4) &= \max(t_p(2) + t(2;4); t_p(1) + t(1;4); t_p(3) + t(3;4)) = \\ &= \max(7 + 8; 0 + 5; 2 + 1) = \max(15; 5; 3) = 15; \end{aligned}$$

$$t_p(5) = t_p(3) + t(3;5) = 2 + 6 = 8;$$

$$\begin{aligned} t_p(6) &= \max(t_p(4) + t(4;6); t_p(3) + t(3;6); t_p(5) + t(5;6)) = \\ &= \max(15 + 0; 2 + 5; 8 + 3) = \max(15; 7; 11) = 15; \end{aligned}$$

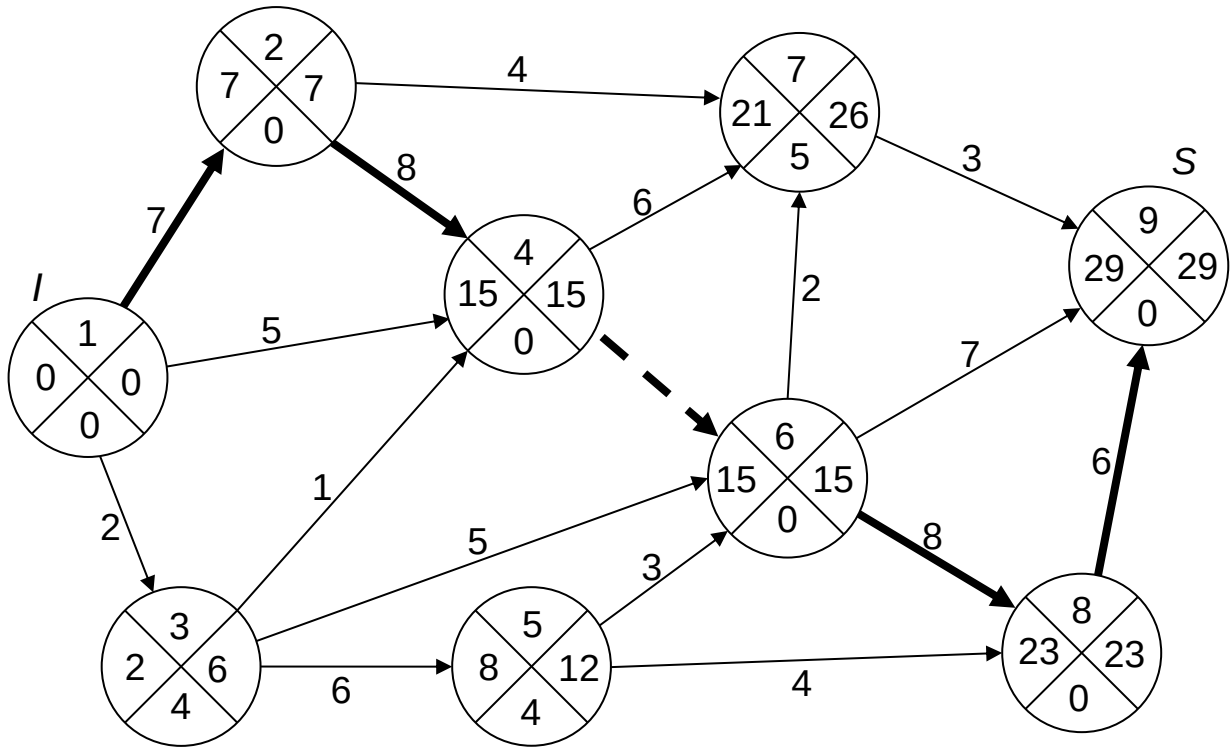
$$\begin{aligned} t_p(7) &= \max(t_p(2) + t(2;7); t_p(4) + t(4;7); t_p(6) + t(6;7)) = \\ &= \max(7 + 4; 15 + 6; 15 + 2) = \max(11; 21; 17) = 21; \end{aligned}$$

$$t_p(8) = \max(t_p(6) + t(6;8); t_p(5) + t(5;8)) = \max(15 + 8; 8 + 4) = \max(23; 12) = 23;$$

$$\begin{aligned} t_p(9) &= \max(t_p(7) + t(7;9); t_p(6) + t(6;9); t_p(8) + t(8;9)) = \\ &= \max(21 + 3; 15 + 7; 23 + 6) = \max(24; 22; 29) = 29. \end{aligned}$$

В итоге получено число $t_{крит} = 29$ – минимальное время, за которое можно выполнить весь комплекс работ.

4. Найдем поздние сроки свершения событий.



Считается, что поздний срок свершения завершающего события равен критическому сроку: $t_n(9) = t_p(9) = t_{крит} = 29$. Затем, в порядке убывания вершин, поздние сроки свершения событий находим по формуле:

$$t_n(i) = \min_{(i;j) \in U_i^-} [t_n(j) - t(i;j)],$$

где U_i^- – множество работ, выходящих из i -го события, а $t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы $(i;j)$.

Поздний срок $t_n(i)$ наступления i -го события – это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае будем иметь:

$$t_n(8) = t_n(9) - t(8;9) = 29 - 6 = 23;$$

$$t_n(7) = t_n(9) - t(7;9) = 29 - 3 = 26;$$

$$\begin{aligned} t_n(6) &= \min(t_n(7) - t(6;7); t_n(9) - t(6;9); t_n(8) - t(6;8)) = \\ &= \min(26 - 2; 29 - 7; 23 - 8) = \min(24; 22; 15) = 15; \end{aligned}$$

$$t_n(5) = \min(t_n(6) - t(5;6); t_n(8) - t(5;8)) = \min(15 - 3; 23 - 4) = \min(12; 19) = 12;$$

$$t_n(4) = \min(t_n(7) - t(4;7); t_n(6) - t(4;6)) = \min(26 - 6; 15 - 0) = \min(20; 15) = 15;$$

$$t_n(3) = \min(t_n(4) - t(3;4); t_n(6) - t(3;6); t_n(5) - t(3;5)) = \\ = \min(15 - 1; 15 - 5; 12 - 6) = \min(14; 10; 6) = 6;$$

$$t_n(2) = \min(t_n(7) - t(2;7); t_n(4) - t(2;4)) = \min(26 - 4; 15 - 8) = \min(22; 7) = 7;$$

$$t_n(1) = \min(t_n(2) - t(1;2); t_n(4) - t(1;4); t_n(3) - t(1;3)) = \\ = \min(7 - 7; 15 - 5; 6 - 2) = \min(0; 10; 4) = 0.$$

5. Резервы времени событий найдем по формуле

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

и внесем их в нижние четверти вершин:

$$R(1) = 0 - 0 = 0; \quad R(2) = 7 - 7 = 0; \quad R(3) = 6 - 2 = 4;$$

$$R(4) = 15 - 15 = 0; \quad R(5) = 12 - 8 = 4; \quad R(6) = 15 - 15 = 0;$$

$$R(7) = 26 - 21 = 5; \quad R(8) = 23 - 23 = 0; \quad R(9) = 29 - 29 = 0.$$

6. Ранее было найдено время выполнения комплекса: $t_{крит} = 29$.

Для работ критического пути все резервы времени равны 0, поэтому критическим является путь $L_{крит} : 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 9$ (выделен на графе). •

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Материалы текущей аттестации по дисциплине
«Высшая математика»

**Список теоретических вопросов
промежуточной аттестации по дисциплине «Высшая математика»
для специальностей**

**6-05-0311-02 Экономика и управление,
6-05-0411-01 Бухгалтерский учет, анализ и аудит,
6-05-0411-02 Финансы и кредит,
6-05-0412-03 Логистика,
6-05-0412-04 Маркетинг**

1. Числовая последовательность и её предел.
2. Предел функции в точке.
3. I замечательный предел.
4. II замечательный предел.
5. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.
6. Непрерывность функции в точке.
7. Непрерывность функции в интервале и на отрезке.
8. Определение производной. Правила дифференцирования.
9. Производные показательной, логарифмической и степенной функций.
10. Производные тригонометрических функций.
11. Производные обратных тригонометрических функций.
12. Производные гиперболических функций.
13. неявно и параметрически заданные функции. Их производные.
14. Дифференциал функции и его приложения к приближённым вычислениям.
15. Теоремы о среднем.
16. Правило Лопиталя.
17. Возрастание и убывание функции.
18. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке.
19. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
20. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции.
21. Матрицы. Действия над матрицами.
22. Определители. Свойства определителей.
23. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы и его свойства.
24. Обратная матрица и её свойства.
25. Основные понятия, связанные с СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли.
26. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера.
27. Метод Гаусса. Однородные системы.
28. Собственные векторы и собственные значения матрицы.
29. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства.
30. Скалярное произведение векторов и его свойства.
31. Векторное и смешанное произведения векторов и их свойства.
32. Виды уравнений прямой на плоскости.
33. Угол между прямыми на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

34. Окружность. Эллипс.
35. Гипербола. Парабола.
36. Виды уравнений плоскости в пространстве.
37. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
38. Виды уравнений прямой в пространстве.
39. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых в пространстве.
40. Функции нескольких переменных. Основные понятия.
41. Частные производные ф.н.п. Теорема Шварца.
42. Дифференциалы ф.н.п. и их приложения.
43. Производные сложной и неявно заданной ф.н.п.
44. Производная по направлению и градиент ф.н.п.
45. Экстремум ф.н.п. Необходимые и достаточные условия экстремума.
46. Первообразная функции. Неопределённый интеграл и его свойства.
47. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
48. Интегрирование рациональных функций.
49. Интегрирование тригонометрических функций.
50. Интегрирование иррациональных функций.
51. Определённый интеграл и его свойства.
52. Методы вычисления определённого интеграла.
53. Геометрические приложения определённого интеграла.
54. Физические приложения определённого интеграла.
55. Основные понятия, связанные с ДУ 1-го порядка.
56. ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ 1-го порядка.
57. Линейные ДУ 1-го порядка. Уравнение Бернулли.
58. ЛОДУ второго порядка. Структура общего решения.
59. ЛНДУ высших порядков: структура общего решения.
60. ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
61. Основные понятия, связанные с системами ДУ.
62. Основные понятия и свойства числовых рядов.
63. Ряд геометрической прогрессии. Гармонический ряд.
64. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения.
65. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.
66. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
67. Функциональные ряды.
68. Степенные ряды.
69. Задачи линейного программирования.
70. Графический метод решения ЗЛП.
71. Двойственность в ЛП.
72. Симплексный метод.
73. Транспортная задача.
74. Потоки на сетях.
75. Элементы сетевого планирования.

**Примерный перечень практических задач по дисциплине
«Высшая математика» для специальностей**

6-05-0311-02 Экономика и управление;

6-05-0411-01 Бухгалтерский учет, анализ и аудит;

6-05-0411-02 Финансы и кредит;

6-05-0412-03 Логистика;

6-05-0412-04 Маркетинг

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Найти матрицу $A^T \cdot (2B - A)$, если $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы A и указать какой-либо её базисный минор:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 5 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 4 \\ -5 & 8 & -5 & -6 & -8 \end{bmatrix}.$$

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 2x - y + 4z = 4, \\ 5x - 4y + z = -5, \\ 2x - 2y + 3z = 4. \end{cases}$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 0, \\ 5x - y + 6z = 0, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

8. Даны векторы $\vec{a} = (-2; 3; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$. Вычислить $(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + \vec{b})$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(6; -2)$ и $B(-5; 3)$.

10. Найти расстояние от точки $D(-2; 3; 2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(-2; 4; 3)$, $B(-1; -4; -4)$ и $C(-3; 2; 1)$.

11. Найти пределы, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x - x^3}{5 + 3x^2 - x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 - 2x - 15}$.

12. Найти пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\arcsin x}$. в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 1} \right)^{4 - 3x}$.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить график:

$$f(x) = \begin{cases} -7, & x < -3, \\ -x^2 + 2, & -3 \leq x < 1, \\ 3x - 5, & x \geq 1. \end{cases}$$

14. Найти производную функции: $y = 5\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} + 7x^3 - 4$.

15. Найти производные функций: $y = 2^{\lg x} \cdot \arcsin(\log_2 3x)$.

16. Найти производную функции: $y = (\sin 3x)^{\arccos \sqrt{x}}$.

17. Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

18. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума функции, промежутки вогнутости и выпуклости, точки перегиба графика функции: $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$.

19. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = 3xy^2 - 4x^2y^3 + 2x^5 - y^3 - 6.$$

20. Найти полный дифференциал функции $z(x; y) = \operatorname{tg}^3 \left(\frac{x^5}{\sqrt[3]{y^2}} \right)$.

21. Вычислить производную функции $z(x; y) = 2x^2y^4 - 3xy^5 + 5x^2 + 5y^2$ в точке $M(3; 1)$ в направлении вектора $\vec{a} = (-12; -5)$.

22. Исследовать функцию $z = 2y^3 - 6xy - 6y + 3x^2 - 30x + 177$ на экстремум.

23. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{7x - 4 + 2\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx$.

24. Найти неопределённый интеграл $\int x \sqrt[3]{6x - 2} dx$.

25. Найти неопределённый интеграл $\int \arcsin x dx$.

26. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{11 - 19x}{(x^2 + 5x - 14)(x - 1)} dx$.

27. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{2 + 3x - x^2}} dx$.

28. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - 14$ и $y = x^2 + 10x - 9$.

29. Найти общее решение (общий интеграл) ДУ $y'(7 + x) = y^3(x + 2)$.

30. Найти общее решение (общий интеграл) ДУ

$$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

31. Найти частное решение (частный интеграл) ДУ

$$y' - \frac{2}{x}y = 3e^{3x-6}x^2, \quad y(2) = 8.$$

32. Найти общее решение ДУ $9y'' - 6y' + y = 0$.

33. Найти общее решение ДУ

$$y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74.$$

34. Решить систему ДУ $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

35. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 8^n}{16^n}$.

36. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 1}{7n^2 + 3n + 4} \right)^{2n}$.

37. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}.$$

38. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{5^n(3n-1)}$.

39. Найти графическим способом макс. и мин. значения целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные.

$$Z = x + 3y;$$

$$\begin{cases} -2x + 3y \leq 6, \\ 4x - y \leq 8, \\ 4x + 3y \geq 12, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$\max z = 4x_1 + 2x_2;$$

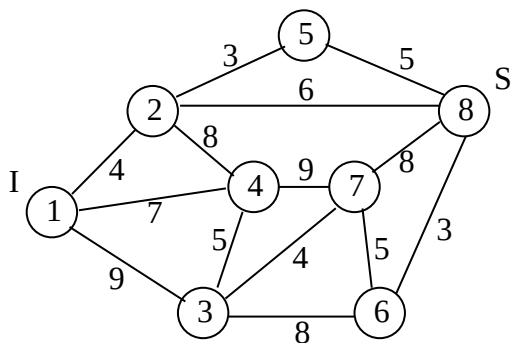
40. Найти оптимальный план задачи симплекс методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

41. Составить мат. модель задачи минимизации суммарных затрат на перевозки и найти опт. план. Найти общую стоимость перевозок.

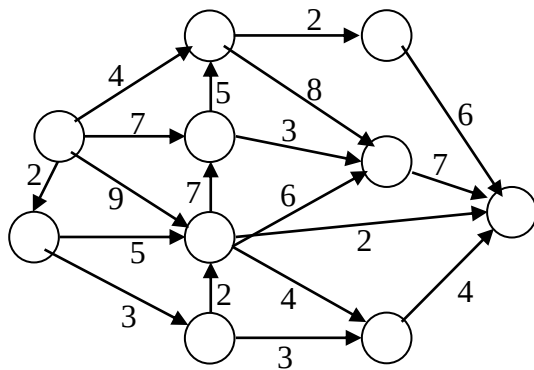
	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	2	1	30
A_2	1	5	2	70
A_3	1	3	4	50
b_j	40	90	20	

42. На заданной сети указаны пропускные способности рёбер. Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из I в S.



43. Задан сетевой график выполнения некоторого комплекса работ и продолжительности выполнения работ. Требуется рассчитать:

1. Номера вершин в натуральном порядке.
2. Ранние и поздние сроки свершения событий.
3. Резервы времени и критический путь.



ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Учебно-методическая карта
и перечень литературы по дисциплине
«Высшая математика»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
для очной формы получения высшего образования

Номер раздела	Название раздела	Количество аудиторных часов		Количество часов самост. работы	Формы контроля знаний: 1. Устный опрос 2. Контрольная работа 3. Аттестационная работа 4. Зачет 5. Экзамен
		Лекции	Практич. занятия		
	1-й семестр	30	30	60	
1	Математический анализ	8	6	14	1, 2, 3, 4
2	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	8	10	18	1, 2, 3, 4
3	Матричное исчисление и векторная алгебра	10	8	18	1, 2, 3,4
4	Аналитическая геометрия	4	6	10	1, 2, 3,4
	2-й семестр	30	30	60	
5	Функции нескольких переменных	6	4	10	1, 2, 3, 5
6	Интегральное исчисление функций одной переменной	10	12	22	1, 2, 3, 5
7	Дифференциальные уравнения	8	8	16	1, 2, 3, 5
8	Числовые и степенные ряды	6	6	12	1, 2, 3, 5
	3-й семестр	16	16	56	
9	Линейное программирование	10	8	30	1, 2, 3, 4
10	Программирование на сетях	6	8	26	1, 2, 3, 4

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для заочной формы получения высшего образования (в т. ч. интегрированного со средним специальным образованием)

Номер раздела	Название раздела	Количество аудиторных часов		Количество часов самост. работы	Формы контроля знаний: 1. Устный опрос 2. Обуч. контр. работа 3. Провер. контр. работа 4. Зачет 5. Экзамен
		Лекции	Практич. занятия		
	1-й семестр	8	8	104	
1	Математический анализ	2	2	26	1, 2, 3, 4
2	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	2	2	26	1, 2, 3, 4
3	Матричное исчисление и векторная алгебра	2	2	26	1, 2, 3,4
4	Аналитическая геометрия	2	2	26	1, 2, 3,4
	2-й семестр	8	8	104	
5	Функции нескольких переменных	2	2	26	1, 2, 3, 5
6	Интегральное исчисление функций одной переменной	2	2	26	1, 2, 3, 5
7	Дифференциальные уравнения	2	2	26	1, 2, 3, 5
8	Числовые и степенные ряды	2	2	26	1, 2, 3, 5
	3-й семестр	8	8	72	
9	Линейное программирование	4	4	36	1, 2, 3, 4
10	Программирование на сетях	4	4	36	1, 2, 3, 4

ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Астровский, А. И. Высшая математика : учебник : в 2 частях / А. И. Астровский, М. П. Дымков. – Минск : БГЭУ, 2022 – Часть 1 – 415 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
2. Костевич, Л. С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений / Л. С. Костевич. – Минск : Новое знание, 2003. – 424 с.
3. Высшая математика : учебник / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск: Вышэйшая школа, 2018 – 398 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
4. Высшая математика. Практикум : учебное пособие : в 2 частях / О. М. Матейко [и др.] ; под ред. С. А. Самаля. – Минск : РИВШ, 2020 – Часть 1–2. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
5. Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы : учебное пособие / О. А. Кастрица [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2015 – 389 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
6. Кузнецов, А. В. Высшая математика: Математическое программирование : учеб. для студентов экономических специальностей вузов / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. проф. А. В. Кузнецова. – Минск : Выш. шк., 2001. – 351 с.
7. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. проф. А. В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 2001. – 448 с.
8. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра. Практикум : учебное пособие / Г. П. Размыслович, А. В. Филиппов, В. М. Ширяев. – Минск : Вышэйшая школа, 2018 – 382 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
9. Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи : учебное пособие : в 5 частях / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2017 – Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 303 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
10. Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи : учебное пособие : в 5 частях / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2016 – Часть 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. – 271 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).
11. Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи : учебное пособие : в 5 частях / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2017 – Часть 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы. – 319 с. – (Гриф Министерства образования Республики Беларусь).

Дополнительная учебная литература

12. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учеб. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – 6-е изд., испр. – М. : Дело, 2008. – 720 с.
13. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : в 2 ч. / Н. Ш. Кремер, И. М. Тришин, Б. А. Путко ; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2010. – 893 с.
14. Малыхин, В. И. Математика в экономике : учеб. пособие / В. И. Малыхин. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 352 с.
15. Малыхин, В. И. Математическое моделирование экономики : учеб.-практ. пособие / В. И. Малыхин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во URSS, 2014. – 206 с.
16. Солодовников, А. С. Математика в экономике : учеб. для экон. специальностей вузов : в 2 ч. / А. С. Солодовников [и др.]. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2013. – Ч. 1 : Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование. – 383 с. : ил.
17. Солодовников, А. С. Математика в экономике : учеб. для экон. Специальностей вузов : в 2 ч. / А. С. Солодовников [и др.]. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2013. – Ч. 2 : Математический анализ. – 560 с. : ил.

Дополнительная учебно-методическая литература

18. Гладкий, И. И. Практикум по высшей математике : в 2 ч. / И. И. Гладкий, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, М. П. Сидоревич. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2003. – Ч. 1 : Линейная алгебра в экономике. Производная в экономике. – 68 с.
19. Гладкий, И. И. Практикум по высшей математике : в 2 ч. / И. И. Гладкий, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, М. П. Сидоревич. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2003. – Ч. 2 : Функции нескольких переменных. Неопределенные интегралы. Дифференциальные уравнения. – 64 с.
20. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические указания и варианты заданий для студентов экономических специальностей дневной формы обучения : в 2 ч. / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, Г. В. Шамова. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2008. – Ч. 2. – 36 с.
21. Гладкий, И. И. Высшая математика : задания и методические рекомендации по выполнению заданий из курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей дневной формы обучения : в 2 ч. / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, Т. Ю. Юхимук. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – Ч. 1. – 28 с.
22. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса

дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной) / И. И. Гладкий, Н. А. Дерачиц, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 32 с.

23. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические указания и варианты заданий для студентов экономических специальностей дневной формы обучения : в 2 ч. / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Е. В. Кузьмина, Л. П. Махнист, С. Н. Наумовец. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2012. – Ч. 2. – 36 с.

24. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические указания и варианты заданий по разделам: функции нескольких переменных, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды / И. И. Гладкий, А. И. Жук, Л. П. Махнист, Т. Н. Осопрелко, Т. Ю. Юхимук. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2013. – 40 с.

25. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной) / И. И. Гладкий, Н. А. Дерачиц, С. Ф. Лебедь, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 28 с.

26. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа» и «Основы дифференциального исчисления функции одной переменной» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / И. И. Гладкий, Т. А. Артющеня, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист, А. В. Дворниченко. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2017. – 32 с.

27. Годунов, Б. А. Математическое программирование : задания, методические указания / Б. А. Годунов, С. Т. Гусева, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2002. – 56 с.

28. Дворниченко, А. В. Высшая математика : конспект лекций для студентов первого курса экономических специальностей заочной формы обучения / А. В. Дворниченко, С. Ф. Макарук. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2007. – 68 с.

29. Лебедь, С. Ф. Высшая математика : методические указания для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (первый курс, второй семестр) / С. Ф. Лебедь, Т. А. Тузик. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2007. – 56 с.

30. Тузик, Т. А. Математическое программирование : методические указания и задания к контрольной работе по курсу «Высшей математики» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Т. А. Тузик, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2003. – 48 с.

31. Юхимук, Т. Ю. Математическое программирование : методические рекомендации и варианты заданий для студентов экономических специальностей / Т. Ю. Юхимук, М. М. Юхимук, Л. П. Махнист, В. П. Черненко, Т. М. Сукасян. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2019. – 44 с.