

УДК 656.13.05

**ОПТИМИЗАЦИЯ КООРДИНИРОВАННОГО ДВИЖЕНИЯ
ПО МАГИСТРАЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ
ТЕОРИИ ГРУПП**

А. В. Алешко, Е. М. Коцуба

Научный руководитель: А. А. Козинский, доцент
Брестский государственный технический университет,
Республика Беларусь, г. Брест, ул. Московская, 267
tinyseal94@gmail.com

В данной статье рассматривается теоретический и практический аспекты теории групп, которая занимает центральное место в математике и различных научных дисциплинах. Анализируются исторические корни теории групп, ее развитие от первых шагов таких математиков, как Эйлер и Гаусс, до современных приложений в физике и информатике.

Обсуждаются три основных источника формирования теории групп: теория чисел, алгебраические уравнения и геометрия, которые обогатили дисциплину новыми концепциями и подходами. В статье подробно описаны основные свойства групп, такие как замкнутость, ассоциативность, наличие единичного и обратного элементов, а также различные типы групп: абелевы, циклические, конечные и простые. Особое внимание уделяется применению теории групп в конкретном примере — матрице номограммы остатков, которая служит инструментом для оптимизации планирования координации дорожного движения. Рассматривается доказательство принадлежности матрицы к группам, основанное на проверке четырех аксиом, необходимых для определения группы.

Таким образом, работа подчеркивает важность и универсальность теории групп в современном научном контексте, открывая новые горизонты для дальнейших исследований и применения в различных областях знаний.

Ключевые слова: группа, теория групп, номограмма остатков, матрица, ассоциативность, обратный элемент, замкнутость.

**OPTIMIZATION OF COORDINATED TRAFFIC ON A HIGHWAY USING
ELEMENTS OF GROUPS THEORY**

A. V. Aleshko, E. M. Kotsyba

Scientific supervisor: A. A. Kozinsky
Brest State Technical University
Republic of Belarus, Brest, st. Moskovskaya, 267
tinyseal94@gmail.com

This article examines the theoretical and practical aspects of group theory, which occupies a central place in mathematics and various scientific disciplines. The historical

roots of group theory and its development from the first steps of mathematicians such as Euler and Gauss to modern applications in physics and computer science are analyzed.

Three main sources of group theory formation are discussed: number theory, algebraic equations, and geometry, which have enriched the discipline with new concepts and approaches. The article describes in detail the basic properties of groups, such as closure, associativity, the presence of single and inverse elements, as well as various types of groups: Abelian, cyclic, finite and simple. Special attention is paid to the application of group theory in a specific example — the matrix of the nomogram of residues, which serves as a tool for optimizing traffic coordination planning. The proof of the matrix belonging to groups is considered, based on the verification of the four axioms necessary to determine the group.

Thus, the work emphasizes the importance and universality of group theory in the modern scientific context, opening up new horizons for further research and application in various fields of knowledge.

Keywords: group, group theory, nomogram of residues, matrix, associativity, inverse element, closure.

Введение

Понятие группы занимает ключевое место в математике и науке в целом, находя широкое применение не только в чистой алгебре, но и в таких областях, как физика, химия и даже информатика. Теория групп, как одна из старейших дисциплин современной алгебры, сформировалась на стыке различных математических традиций и знаний. Три основных источника ее возникновения – теория чисел, алгебраические уравнения и геометрия – предоставили богатую почву для развития концепций, которые сегодня активно применяются в самых разных научных областях.

На протяжении своей истории теория групп прошла через множество трансформаций и обогатилась новыми идеями. С первых шагов, сделанных такими величинами, как Эйлер, Гаусс и Галуа, до более поздних работ Кляйна и Ли, исследование групп стало важным инструментом для решения сложных задач и создания целых направлений в математике. Группы позволяют описывать симметрии, структурные свойства и взаимодействия объектов, что делает их незаменимыми в математической теории и практической науке [1, 2].

В данной статье рассмотрена история развития теории групп, основные понятия и свойства, а также ее значение в современном научном контексте. Выполнен анализ, как концепция группы возникла и эволюционировала, что способствовало ее унификации. Рассмотрен вопрос, каким образом она продолжает влиять на различные области знания на примере детерминированной модели расчета плана координации по магистрали, а если быть более точным, то одной из ее производных – матрицы номограммы остатков. В данной статье использованы теоретические наработки для доказательства принадлежности номограммы остатков к группам.

Понимание групповых структур и их свойств открывает новые горизонты для исследования и применения, что делает теорию групп актуальной и востребованной в современном научном дискурсе.

Группа и история развития. Понятие группы, несомненно, является одной из центральных идей математики. Существует несколько разделов этой науки, в которых группы используются явно или неявно. Использование групп не ограничивается чистой математикой. Квантовая теория, молекулярная и атомная структуры, кристаллография – вот лишь некоторые из областей науки, в которой важную роль сыграла идея группы как меры симметрии. Теория групп – старейший раздел современной алгебры.

В истории существует три основных источника теории групп: теория чисел, теория алгебраических уравнений и геометрия. Изучение групп, появившихся в теории чисел, началось с Леонарда Эйлера, а позже было развито Карлом Фридрихом Гауссом при изучении модульной арифметики и умножения и сложения, связанных с квадратичной областью. Концепции теории групп впервые были неявно использованы в алгебраической теории чисел.

Ранние результаты по группам замещения появились в работах Джозефа Лагранжа, Поало Руффини и Нильса Абеля. В 1830 году Эваристо Галуа был первым, кто использовал групповой подход для определения разрешимости полиномиальных уравнений. Галуа впервые использовал термин “группа” и установил связь между теорией зарождающихся групп и теорией предметной области. Этот набор теорий теперь называется теорией Галуа. Артур Карлайл и Огюстен Луи Коши продолжили эти исследования и основали теорию групп перестановок.

Третье основное историческое происхождение теории групп происходит из геометрии. Феликс Кляйн использовал точку зрения теории групп, чтобы установить связь между различными геометриями (такими как евклидова геометрия, гиперболическая геометрия и проективная геометрия). В 1884 году София Ли начала изучать группы, которые появлялись в аналитических задачах (теперь называемых «группами Ли»).

Источники, относящиеся к разным областям, привели к различным обозначениям групп. Теория групп была унифицирована примерно с 1880 года. С тех пор влияние теории групп расширялось, способствуя созданию абстрактной алгебры, теории представлений и многих других влиятельных областей в начале XX века. Классификация конечных групп была крупномасштабной работой в середине XX века, в которой были классифицированы все конечные группы.

Основные понятия теории групп. Теория групп является разделом абстрактной алгебры, сосредоточенным на исследовании групп — множества элементов, снабженных двоичной операцией (например, сложением, умножением или возведением в степень), которые подчиняются определенным свойствам.

Представьте, что у вас есть коллекция объектов и способ их объединения. К примеру, можно рассмотреть числа и операцию сложения. Теория групп анализирует такие множества и операции, если они соответствуют установленным правилам:

- 1) замкнутости;
- 2) ассоциативности;
- 3) элемента идентичности;
- 4) обратного элемента.

Группа G определяется как множество, оснащенное двоичной операцией $*$, удовлетворяющей следующим четырем свойствам:

- 1) замкнутость – для любых $a, b \in G$, результат операции $a * b$ также принадлежит G ;
- 2) ассоциативность – для всех $a, b, c \in G$ выполняется $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- 3) идентичность – в группе G существует элемент e , называемый идентичностью, такой, что для любого $a \in G$ верно $a * e = e * a = a$;
- 4) обратный элемент – для каждого элемента $a \in G$ существует элемент $b \in G$, называемый обратным к a , такой, что $a * b = b * a = e$.

Детерминированная модель расчета плана координации по магистрали. Увеличение автопарка, расширение городов, миграция населения в мегаполисы и рост объемов перевозок ведут к повышению интенсивности движения. В городах это часто вызывает транспортные проблемы, такие как потеря времени и образование пробок. Особенно остро эти проблемы проявляются на перекрестках, где увеличиваются задержки транспорта, образуются очереди и заторы, что снижает скорость передвижения, приводит к перерасходу топлива, и увеличивает износ транспортных средств.

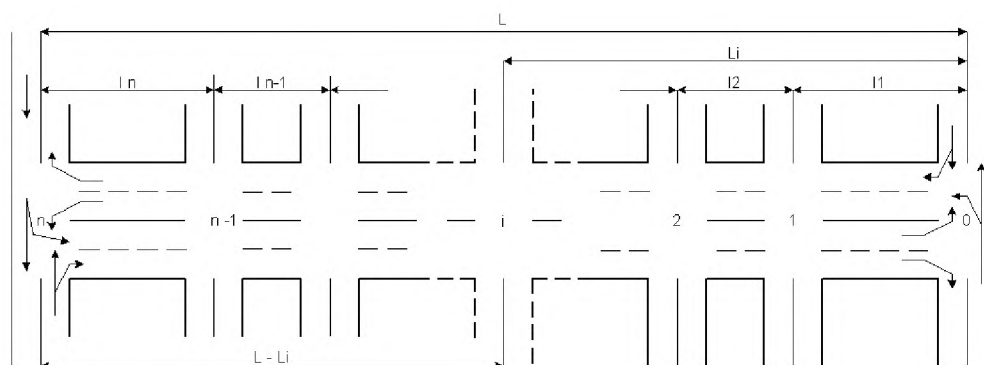


Рисунок 1 – Схема магистрали с $n+1$ перекрестками

С развитием компьютерных технологий стало возможным автоматизировать управление дорожным движением. В последнее время все большее распространение находят адаптивные методы управления [3–6].

Для упрощения модели введены следующие ограничения [7, 8].

1. **Поток автомобилей.** На Т-образных перекрестках автомобили въезжают и выезжают в равночисленных пачках. Размер пачки определяется длительностью зеленого сигнала светофора. Считается, что на Т-образных перекрестках всегда достаточно автомобилей для формирования пачки заданного размера. Количество въезжающих и выезжающих пачек на обоих концах магистрали одинаково.

2. **Скорость движения.** Автомобили в пачке движутся с одинаковой скоростью v , без эффекта диффузии пачки. Размер пачки остается постоянным.

3. **Длительность цикла.** Длительность светофорного цикла T_u равна времени, необходимому для прохождения переднего края пачки длиной $l_{пач}$ по самому короткому участку магистрали:

$$l_k = \min_{i=1}^n \{l_1, l_2, \dots, l_n\} \quad (1)$$

4. **Светофоры.** Все светофоры работают с одинаковым временем цикла. Светофоры на начальном и конечном перекрестках (СФО0 и СФOn) синхронизированы, а остальные могут иметь фазовый сдвиг относительно базовых светофоров при необходимости [9–11].

5. **Длина пачки.** Длина пачки $l_{пач}$ автомобилей, формируемых на входах магистрали (СФО0, СФOn), определяется как $l_{пач} = v * t_3$ (2), где t_3 – время зеленого сигнала на входных светофорах СФО0 и СФOn.

6.

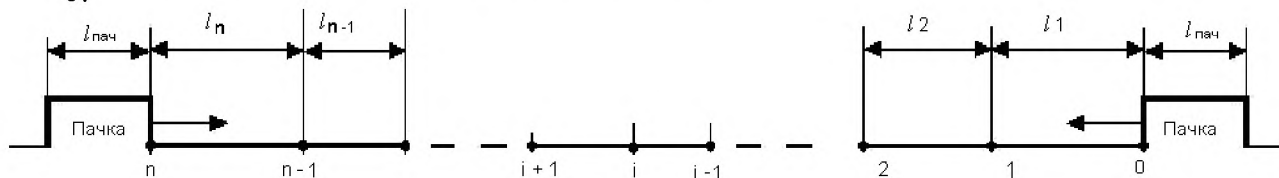


Рисунок 2 – Въезд пачек автомобилей на магистраль

Основная цель координации светофоров – обеспечение непрерывного движения транспорта, что экономически важно для снижения расхода топлива, выбросов и шума [12–14]. План координации состоит из сдвига фаз, длительности фаз и цикла регулирования. Возможны три топологии магистрали: равные расстояния между перекрестками, кратные минимальному расстоянию и некрatные отрезки.

В последнем случае расчеты сводятся к определению фазового сдвига светофоров, чтобы колонны автомобилей могли без остановок проезжать магистраль. Остаток r_i от деления расстояния до светофора на базисный отрезок определяет задержку зеленого сигнала.

Самый короткий отрезок магистрали l_k , который является базисным (по нему рассчитывалась длительность цикла). Разделим этот отрезок на десять равных частей и обозначим полученный дискрет длины:

$$\Delta l = l_k / 10. \quad (3)$$

Ему соответствует временной дискрет:

$$\Delta t = T_y / 10. \quad (4)$$

Рассчитаем остаток от деления расстояния L_i до i -го светофора на l_k :

$$L_i = p * l_k + r_i, \quad (5)$$

где p – частное от деления на l_k , а r_i – остаток, расстояние меньше $2l_k$, т. е. $0 < r_i < l_k$.

Аналогичная ситуация наблюдается и при встречном движении, то есть от СФО n и до СФО i :

$$L - L_i = m * l_k + c_i. \quad (6)$$

Построение номограммы транспортных потерь (остатков) показывает, что светофорный объект может быть удачно или неудачно расположен на магистрали. Потери зеленой фазы светофорного цикла могут быть полупродуктивными

(проезд потока в одном направлении) и непродуктивными (отсутствие проезжающих автомобилей).

Матрица потерь Qi размером 10×10 учитывает остатки r_i и c_i . Эти данные используются для оптимального распределения времени светофорного цикла, чтобы минимизировать транспортные потери и обеспечить эффективное управление движением.

Формулы для расчета времени зеленого сигнала $tз$ и времени для бокового направления $tзб$ позволяют определить оптимальные светофорные фазы для максимальной эффективности использования магистрали

Время горения зеленого сигнала по магистрали $tз$ должно быть

$$Tз = Qi + l_{нач}/v. \quad (7)$$

На конкурирующее направление (боковое) остается время

$$tзб = Tц - (Qi + l_{нач}/v). \quad (8)$$

Формулы (6), (7) являются достаточными для расчета светофорных фаз.

$$Q1 = [| c_1 - r_1 |] = 0 < 5.$$

$$Q2 = [| c_2 - r_2 |] = 0 < 5.$$

$$Q3 = [10 - | c_3 - r_3 |] = 10 - 7 = 3.$$

Таблица 1 – Матрица-номограмма остатков

Движение слева направо	c\г	0	-1	-2	-3	-4	5(+5)	6(+4)	7(+3)	8(+2)	9(+1)
	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1
	-1	1	0	1	2	3	4	5	4	3	2
	-2	2	1	0	1	2	3	4	5	4	3
	-3	3	2	1	0	1	2	3	4	5	4
	-4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
	5(+5)	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
	6(+4)	4	5	4	3	2	1	0	1	2	3
	7(+3)	3	4	5	4	3	2	1	0	1	2
	8(+2)	2	3	4	5	4	3	2	1	0	1
	9(+1)	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0

Исследование матрицы (номограммы остатков) на принадлежность к группе. Исследуем матрицу номограммы остатков на принадлежность к группам (таблица 1).

Для доказательства того, что матрица номограммы остатков образует группу необходимо проверить выполнение четырех аксиом, которые определяют группу.

1. Замкнутость – для любых двух элементов (матриц) в группе результат их операции (обычно это сложение или умножение) также должен принадлежать группе.

Насколько можно видеть из таблицы 1, эта аксиома верна для номограммы остатков (сумма любых двух элементов так же принадлежит матрице).

2. Ассоциативность – операция между элементами должна быть ассоциативной.

Проверим это для элементов 3, 4, 5: $(3 * 4) * 5 = 3 * (4 * 5) = 60$

3. Наличие единичного элемента – должен существовать элемент, который при операции с любым другим элементом группы возвращает этот элемент.

Для номограммы остатков таким элементов будет являться 0 ($0 + 3 = 3, 0 + 4 = 4, 0 + 5 = 5$).

4. Наличие обратных элементов – для каждого элемента группы должен существовать элемент, который, будучи объединенным с данным, дает единичный элемент.

Для любого элемента (матрицы) a в группе остатков по модулю n существует обратный элемент по сложению – это матрица, полученная путем умножения всех элементов на -1 . Таким образом, $a + (-a) = 0$.

Заключение

Теория групп, с ее глубокой историей и многогранными приложениями, продолжает оставаться одной из краеугольных камней современной математики и науки в целом. На протяжении веков концепция группы претерпела значительные изменения, обогащаясь новыми идеями и подходами. Как видно ее истоки лежат в различных областях, от теории чисел до геометрии, что подчеркивает ее универсальность и способность к интеграции.

Изучение свойств групп и их структур позволяет не только решать абстрактные математические задачи, но и находить практическое применение в самых разных областях, от квантовой физики до теории информации. В частности, данная работа продемонстрировала, как теоретические знания могут быть применены для анализа матрицы номограммы остатков, что открывает новые горизонты для исследований в области оптимизации и управления.

Таким образом, понимание групповых структур не только углубляет наше знание о математических концепциях, но и способствует развитию новых технологий и методов в науке. Теория групп остается актуальной и востребованной, продолжая вдохновлять ученых и исследователей на поиски новых решений и открытий.

Список использованных источников

1. Исаев, А. П. Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. / А. П. Исаев, В. А. Рубаков. – М. : URSS, 2018. – 491 с.

2. Ляховский, В. Д. Группы симметрии и элементарные частицы / В. Д. Ляховский, А. А. Болохов. – Л. : ЛГУ, 1983.

3. Войцехович, О. Ю. Жесткое и адаптивное управление автотранспортом / О. Ю. Войцехович, В. Н. Шуть // Совершенствование организации дорожного движения и перевозок пассажиров и грузов : сб. науч. трудов. – Минск : НИЦ ДД БНТУ, 2011. – С. 159–164.

4. Иванов, В. П. Детерминированная модель координированного регулирования движения автотранспорта на магистрали / В. П. Иванов, В. Н. Шуть, О. Ю. Войцехович // Вестник БНТУ, 2011. – № 3. – С. 33–37.

5. Анфилец, С. В. Оценка эффективности светофорного регулирования на перекрестке при использовании адаптивного управления на основе нейросетевого прогнозирования транспортных потоков / С. В. Анфилец, В. В. Касьяник, В. Н. Шуть // Нейроинформатика-2011 : сб. науч. трудов XIII Всеросс. науч.-технич. конфер. / С. В. Анфилец. – Москва, 2011. – Ч. 1.

6. Шуть, В. Н. Оптимизация и координация управления светофорными объектами / В. Н. Шуть, О. Ю. Войцехович // Совершенствование организации дорожного движения и перевозок пассажиров и грузов : сб. науч. ст. Междунар. науч.-практич. конфер., 23–24 окт. 2010 г., г. Минск. – С. 69–73.
 7. Войцехович, О. Ю. Стратегия оптимизации движения автомобилей по магистрали города с использованием бинарного дерева решений / О. Ю. Войцехович, В. Н. Шуть // Информационные технологии и системы—188.
 8. Шуть, В. Н. Модель магистрали для компьютерного расчета планов координации / В. Н. Шуть // Проблемы и перспективы развития евроазиатских транспортных систем : материалы третьей Междунар. науч.-практич. конфер., 12 мая 2011 г., г. Челябинск ; под ред. О. Н. Ларина, Ю. В. Рождественского. – Челябинск : ЮУрГУ. – С. 256–261.
 9. Anfilets, S. Application of algorithms for searching motion in the frame for the detection of vehicles/ S. Anfilets, V. Kasyanik, V. Shuts // PRIP' 2011 : proceedings of the 11 International Conference. – Minsk, 2011. – P. 378–380.
 10. Anfilets, S. V. Adaptive Control Algorithm Based on a Phased Set of Traffic Lights on Main Street / S. V. Anfilets, V. N. Shuts // Transbaltica-2011 : proceedings of the 7th International Scientific Conference – P. 7–10.
 11. Vaitsekhovich, O. Real-time strategy of arterial traffic movement optimization with binary tree building / O. Vaitsekhovich, V. Shuts // Transbaltica-2011 : proceedings of the 7th International scientific conference, 5–6 May 2011 г., Vilnius : 2011. – P. 142–148.
 12. Shuts, V. N. Determined Model and Scale Diagrams to Investigate Problem of Transport Delays / V. N. Shuts, O. Vaitsekhovich // Transport and Telecommunication // Volum 12. – No 4. – 2011. – P. 52–60.
 13. Shuts, V. Determined model of coordination for an arterial highway. / V. Shuts, O. Vaitsekhovich // Reliability and Statistics in Transportation and Communication (RelStat'11) : proceedings of the 11th International Conference, 19–22 October 2011, Riga, Latvia.ю – P. 135–139.
 14. Shuts, V. A new approach to solve crosswalk problems / V. Shuts, O. Vaitsekhovich // International Congress Of Heavy Vehicles, Road Trains And Urban Transport. – Минск : 2010. – С. 176–181.
- © Aleshko A.V., Kotsyba E.M., 2024