Доклады Национальной академии наук Беларуси

2013 **ноябрь–декабрь** **Том 57 № 6**

УДК 517.9

А. И. ЖУК, О. Л. ЯБЛОНСКИЙ

НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 23.10.2013*

В настоящей работе рассматривается следующая система уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке $T = [0, a] \subset R$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), \; i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где f^{ij}, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, – липшицевы функции; $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, $x_0 \in R^p$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1, q}$.

При решении нелинейных задач возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Существующие подходы к трактовке подобного рода систем уравнений можно классифицировать следующим образом.

Первый подход связан с попытками исследования задачи (1)–(2) в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t)$. В работах [1; 2] вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения.

Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., напр., [3]), где интеграл понимается в определенном смысле, например, в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса и т. д. Однако при таком толковании решение интегрального уравнения зависит от типа интеграла и определения функции $x(t)$ в точках разрыва $L(t)$.

Третий подход (см., напр., [2]) опирается на идею аппроксимации искомого решения задачи (1), (2) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения, полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря, различны.

Еще один подход связан с алгебрами новых обобщенных функций. Впервые алгебра была построена в [4], а общий метод построения подобных алгебр описан в [5]. В данной работе используется алгебра, определенная в [6] (см. также [7]). Согласно этим работам, уравнение (1) заменяется уравнением в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Решением последнего будет новая обобщенная функция. Важнейшая особенность новых обобщенных функций состоит в том, что они определяются как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1), (2) с помощью трех описанных выше подходов. Подобные задачи в одномерном случае рассматривались в [7; 8].

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см., [6; 7]).

$$d_{\tilde{h}}\tilde{x}^i(\tilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\tilde{f}^{ij}(\tilde{t},\tilde{x}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}),\ i=\overline{1,p}, \tag{3}$$

с начальным условием $\tilde{x}\big|_{[\tilde{0},\tilde{h})}=\tilde{x}^0$, где $\tilde{h}=[\{h_n\}]\in H$, $\tilde{a}=[\{a\}]\in T$ и $\tilde{t}=[\{t_n\}]\in\tilde{T}$, $\tilde{x}=[\{x_n(t)\}]$, $\tilde{f}=[\{f_n(x)\}]$, $\tilde{x}^0=[\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde{L}=[\{L_n(t)\}]$ и $x_{n0}\to x(0)$.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q}f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\ i=\overline{1,p}, \tag{4}$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t). \tag{5}$$

Здесь $L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}}L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds,\ j=\overline{1,q}$, где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t),\ \rho^j\geq 0$, $\mathrm{supp}(\rho^j)\subseteq[0,1]$, $\int_0^1\rho^j(s)ds=1$, а $f_n=f*\tilde{\rho}_n$, где $\tilde{\rho}_n(x_0,x_1,...,x_p)=n^p\tilde{\rho}(nx_0,nx_1,...,nx_p)$, $\tilde{\rho}\in C^\infty(R^{p+1})$, $\tilde{\rho}\geq 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}}\tilde{\rho}(x_0,x_1,...,x_p)dx_0dx_1...dx_p=1$, $\mathrm{supp}(\tilde{\rho})\subset[0,1]^{p+1}$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t\in[0,h_n)$, $m_t\in N$. Несложно видеть, что решение системы (4), (5) можно записать в виде

$$x_n^i(t)=x_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{ij}(\tau_t+kh_n,x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^j(\tau_t+kh_n)], \tag{6}$$

где $i=\overline{1,p}$.

В одномерном случае в работах [7; 8] показано, что предел последовательности (6) зависит от связи между $\gamma^j(n)$ и h_n. Данная работа посвящена изучению общей ситуации.

Для описания предельного поведения задачи (4), (5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(s,x(s))dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\leq t}S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),\ i=\overline{1,p}, \tag{7}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$; μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r)=L^d(\mu_r+)-L^d(\mu_r-)$ – величина скачка. $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из вспомогательной системы уравнений

$$\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{b}u^j\int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s-,\mu,x,u))dH(s-1)+\sum_{j=b+1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))ds,\ i=\overline{1,p}.$$

Здесь $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$, $H(s)$ – функция Хевисайда, т. е. $H(s)=1$ при $s\geq 0$, $H(s)=0$ при $s<0$. Существование и единственность решения системы (7) для всех значений параметров $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$ доказаны в [11].

Отметим некоторые частные случаи системы (7). Если $b=q$, то (7) можно записать в виде (8). Такие уравнения рассматривались в [2; 9]. Если $b=0$, то вспомогательная ситема имеет вид (9). Подобное исследовалось в [2; 8; 10].

Т е о р е м а 1. *Пусть* f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ $\gamma^j(n)\to\infty$ *так, что для* $j=\overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ *и для* $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n\to 0$, *решение* $x_n(t)$ *зада-*

чи Коши (4), (5) сходится к решению $x(t)$ *системы уравнений (7) в* $L^1(T)$, *если* $\int\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|dt\to 0$ *для всех* $t\in T$.

В частных случаях аналогичные результаты были получены в [9; 10].

Случай Ито. Для описания предельного поведения задачи (4), (5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^{t+}f^{ij}(s,x(s-))dL^j(s),\ i=\overline{1,p}. \tag{8}$$

Существование и единственность решения системы (8) для линшицевых функций f^{ij} доказано в [11].

Т е о р е м а 2 ([9]). *Пусть* f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, *– непрерывные справа функии ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *так, что* $1/n=o(h_n)$, *для всех* $t\in T$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4), (5) сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений (8), если для любого* $t\in T$ *выполняется* $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0.$

В случае Стратоновича для описания предельного поведения задачи (4), (5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^{t}f^{ij}(s,x(s))dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\le t}S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),\ i=\overline{1,p}, \tag{9}$$

где $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, где $x\in R^p$, $u\in R^q$, $\mu\in T$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))ds$, $i=\overline{1,p}$. Из результатов статьи [11] вытекает, что решение системы (9) существует и единственно.

Т е о р е м а 3. *Пусть* f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, *– непрерывные справа функии ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *так, что* $h_n=o(1/n)$, *для всех* $t\in T$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4), (5) сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений (9) для всех* $t\in T$, *если* $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ *для любого* $t\in T$.

П р и м е р. Рассмотрим следующую систему уравнений с обобщенными коэффициентами:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=a_{11}\delta(t)x_1(t)+a_{12}\delta(t)x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=a_{21}\delta(t)x_1(t)+a_{22}\delta(t)x_2(t),\end{cases} \tag{10}$$

где $a_{ij}\in R;\delta(t)$ – функция Дирака и $x(-1)=1.$ Так как $\delta(t)=\dot{H}(t)$, где

$$H(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t\ge 0,\\ 0, & \text{если } t<0,\end{cases}$$

тогда из теоремы 1 следует, что последовательность решений x_n соответствующего уравнения (6) сходится к решению системы уравнений (7), которая в этом случае имеет вид

$$\begin{cases}x_1(t)=1+H(t)S^1(x(0-),\Delta H(0)),\\ x_2(t)=1+H(t)S^2(x(0-),\Delta H(0)).\end{cases} \tag{11}$$

Так как $S^i(x,u)=\varphi^i(1,x,u)-\varphi^i(0,x,u)$, а $\varphi^i(\tau,x,u)$ находится из системы уравнений

$$\begin{cases}\varphi^1(\tau,x,u)=x^1+u^1\int_0^\tau a_{11}\varphi^1(s-,x,u)dH(s-1)+u^2\int_0^\tau a_{12}\varphi^2(s,x,u)ds,\\ \varphi^2(\tau,x,u)=x^2+u^1\int_0^\tau a_{21}\varphi^1(s-,x,u)dH(s-1)+u^2\int_0^\tau a_{22}\varphi^2(s,x,u)ds,\end{cases}$$

то найдем $\varphi(\tau,x,u).$ Рассмотрим данную систему при $\tau<1$:

$$\begin{cases}\varphi^1(\tau,x,u)=x^1+u^2\int_0^\tau a_{12}\varphi^2(s,x,u)ds,\\ \varphi^2(\tau,x,u)=x^2+u^2\int_0^\tau a_{22}\varphi^2(s,x,u)ds.\end{cases}$$

Решением является следующая система:

$$\begin{cases} \varphi^1(\tau, x, u) = x^1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} x^2 (e^{u^2 a_{22}\tau} - 1), \\ \varphi^2(\tau, x, u) = x^2 e^{u^2 a_{22}\tau}. \end{cases}$$

Если $\tau = 1$, имеем

$$\begin{cases} \varphi^1(1, x, u) = x^1 + u^1 a_{11}(x^1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} x^2 (e^{u^2 a_{22}} - 1)) + u^2 \int\limits_0^1 a_{12}\varphi^2(s, x, u)ds, \\ \varphi^2(1, x, u) = x^2 + u^1 a_{21} x^2 e^{u^2 a_{22}} + u^2 \int\limits_0^1 a_{22}\varphi^2(s, x, u)ds. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} \varphi^1(1, x, u) = x^1 + u^1 a_{11}(x^1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} x^2 (e^{u^2 a_{22}} - 1)) + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} x^2 (e^{u^2 a_{22}} - 1), \\ \varphi^2(1, x, u) = x^2 + u^1 a_{21} x^2 e^{u^2 a_{22}} + x^2 (e^{u^2 a_{22}} - 1). \end{cases}$$

При $t < 0$ решение (11) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = 1, \\ x_2(t) = 1, \end{cases}$$

тогда при $t \geq 0$ система (11) запишется

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + a_{11} + \dfrac{a_{12}}{a_{22}}(1 + a_{11})(e^{a_{22}} - 1), \\ x_2(t) = a_{21} e^{a_{22}} + e^{a_{22}}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + H(t)(a_{11} + \dfrac{a_{12}}{a_{22}}(1 + a_{11})(e^{a_{22}} - 1)), \\ x_2(t) = 1 + H(t)(a_{21} e^{a_{22}} + e^{a_{22}} - 1) \end{cases}$$

является решением системы уравнений (10).

Литература

1. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* // Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М., 1976. С. 311.
2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* // Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991. С. 256.
3. *Das P. C., Sharma R. R.* // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22, N 1. P. 145–158.
4. *Colombeau J.* // Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam, 1985.
5. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 2. С. 267–270.
6. *Лазакович Н. В.* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 23–27.
7. *Yablonski A.* // Nonlinear Analysis. 2005. Vol. 63. P. 171–197.
8. *Ковальчук А. Н., Новохрост В. Г., Яблонский О. Л.* // Известия вузов. Математика. 2005. № 3. С. 23–31.
9. *Жук А. И., Яблонский О. Л.* // Тр. Ин-та математики. 2011. Т. 19, № 2. С. 43–51.
10. *Жук А. И., Яблонский О. Л.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 12 –16.
11. *Groh J.* // Illionois J. Math. 1980. Vol. 24(2). P. 244–263.

A. I. ZHUK, A. L. YABLONSKI

aizhuk85@mail.ru, yablonski@bsu.by

NONAUTONOMOUS SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED COEFFICIENTS IN THE ALGEBRA OF GENERALIZED FUNCTIONS

Summary

Some nonautonomous systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of generalized functions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.