

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по дисциплине
«Численные методы решения задач»

Методические указания
для студентов специальности
7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений
(профилизация «Промышленное и гражданское строительство,
строительство и гражданская инженерия, цифровое
моделирование и проектирование»)

Брест 2024

В методических указаниях представлены лабораторные работы, в которых рассматриваются основы решения численными методами задач расчета строительных конструкций и сооружений с использованием системы компьютерной алгебры MathCAD, включая расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений. Приведено решение задач численными методами, выполнена верификация результатов с использованием компьютерных программ, разработанных на кафедре теоретической и прикладной механики, и программных комплексов *Lira*, *Scad*, *SolidWorks* и *ANSYS*.

Методические указания предназначены для студентов специальности 7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений (профилизация «Промышленное и гражданское строительство, строительство и гражданская инженерия, цифровое моделирование и проектирование»).

Составители:

Бочарова Наталья Владимировна, старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики БрГТУ, к. т. н., доцент

Веремейчик Андрей Иванович, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики БрГТУ, к. ф.-м. н., доцент

Рецензенты:

Кривицкий Павел Васильевич, заведующий отраслевой лабораторией «Научно-исследовательский центр инноваций в строительстве» научно-исследовательской части учреждения образования БрГТУ, к. т. н.

Маслова Наталья Александровна, ООО «Саныч», главный инженер проекта

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы – это методы приближенного решения математических задач, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа более простых алгебраических и арифметических действий, выполняемых как вручную, так и с помощью компьютерной техники.

В процессе выполнения лабораторных работ по дисциплине «Численные методы решения задач» формируются следующие компетенции (компетенция – приобретаемые в процессе обучения и воспитания способности осуществлять деятельность в соответствии с полученным образованием):

- способность к самоорганизации и самообразованию;
- способность применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического исследования;
- владение компьютером как средством для решения поставленных задач, используя и совершенствуя все свои знания в офисных и CAD-программах для хранения, обработки и управления информацией;
- владение методами проектирования элементов конструкций и методами математического (компьютерного) моделирования с использованием программно-вычислительных комплексов (ПК).

В методических указаниях рассматривается применение численных методов к задачам расчета сооружений с использованием методов расчета, которые изучаются в строительной механике, а также проверка в ПК.

Для реализации процедур численных методов при решении задач строительства предлагается применять широко распространенный и современный компьютерный пакет прикладной математики *MathCAD*.

Решение любой практической задачи начинается с математической постановки задачи, включая описание исходных данных, условий и целей на языке математических понятий. Соответственно строится математическая модель.

Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений либо быть выраженной в форме математических структур или соотношений. Математические модели могут быть непрерывными или дискретными. После моделирования производится решение математической задачи и исследование математической модели. Процесс исследования свойств объекта по его модели называется моделированием. После решения задач численными методами, которые являются приближенными методами, производится сопоставление результатов в некоторых ПК.

При решении поставленной инженерной задачи, используя любой программный комплекс, нужно не забывать, что это инструмент, упрощающий сложные расчеты, а составление расчетной модели должно базироваться на методах расчета строительной механики.

Методические указания разработаны для студентов, чтобы они применяли численные методы в расчетах сооружений, а также могли проверить результат в *MathCAD*.

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм

Цель работы: изучить применение общей системы уравнений равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм, определить продольные усилия в стержнях фермы, создать модель и выполнить ее исследование на прочность и деформативность, используя программные комплексы.

Исходные данные: число вертикальных стержней – количество букв в фамилии; значение нагрузок P_i – порядковый номер буквы фамилии в алфавите.

Порядок выполнения работы:

- 1) обозначить приложенную к ферме нагрузку и реакции в опорах;
- 2) пронумеровать стержни фермы;
- 3) вырезая каждый узел фермы, составить общую систему равновесия;
- 4) решить систему уравнений в системе компьютерной алгебры *MathCAD*;
- 5) сделать проверку, используя три уравнения равновесия фермы в целом;
- 6) выполнить верификацию продольных усилий, используя ПК *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*.

Выполнение работы (излагается в порядке выполнения работы).

1. Рассмотрим расчет статически определимой фермы, представленной на рисунке 1.1, статическим методом. Внешнюю нагрузку в виде сосредоточенных сил $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ приложим в узлы верхнего пояса фермы. Пронумеруем стержни фермы (1–29) и обозначим реакции в опорах (R_A, R_B, H_B).

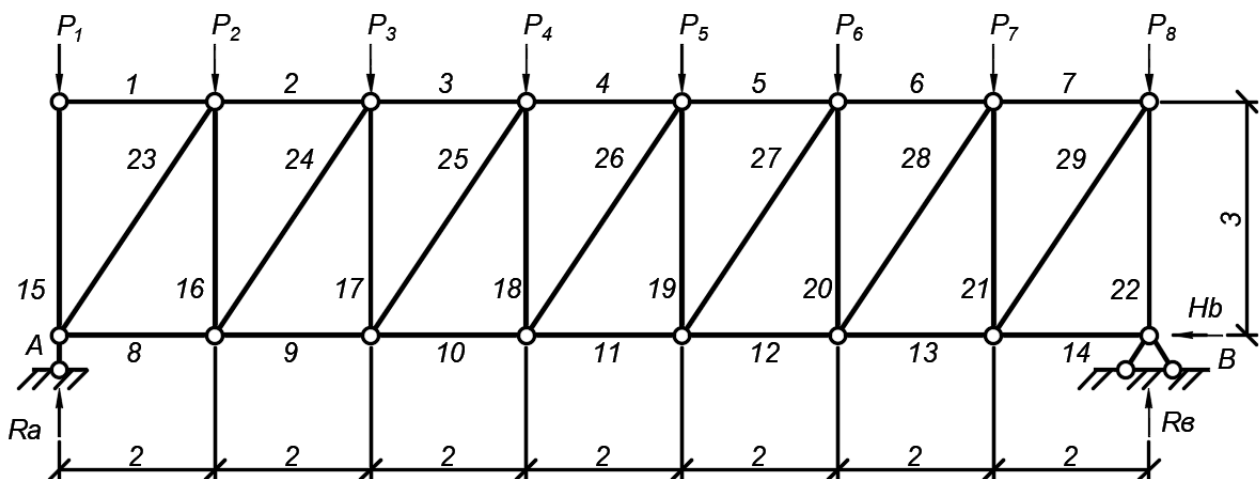


Рисунок 1.1 – Расчетная схема фермы

Вырезая каждый узел фермы, обозначим неизвестные продольные усилия стержней фермы ($N_1, N_2, N_3, \dots$ и т. д., рисунок 1.2).

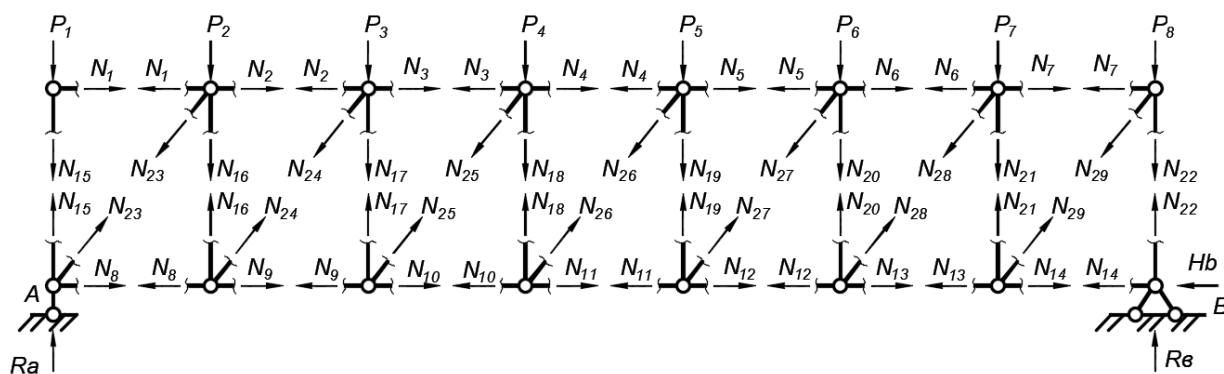
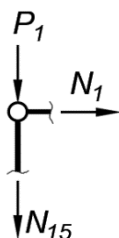
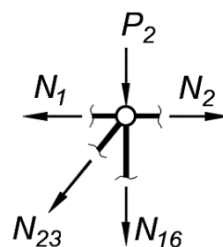


Рисунок 1.2 – Расчетная схема фермы с неизвестными усилиями N

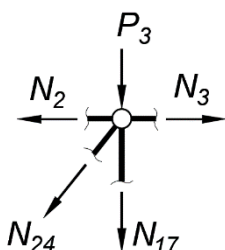
Составим уравнения равновесия для каждого узла фермы ($\sum X = 0; \sum Y = 0$), проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси.



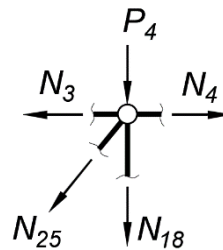
$$\begin{aligned}\sum X &= 0; N_1 = 0; \\ \sum Y &= 0; -P_1 - N_{15} = 0;\end{aligned}$$



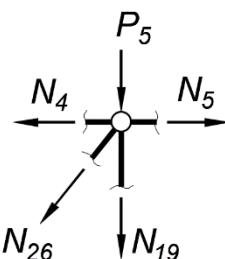
$$\begin{aligned}\sum X &= 0; -N_1 - N_{23} \cdot \cos \beta + N_2 = 0; \\ \sum Y &= 0; -P_2 - N_{16} - N_{23} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



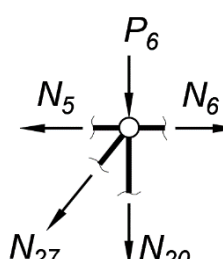
$$\begin{aligned}\sum X &= 0; -N_2 - N_{24} \cdot \cos \beta + N_3 = 0; \\ \sum Y &= 0; -P_3 - N_{17} - N_{24} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



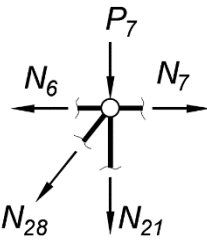
$$\begin{aligned}\sum X &= 0; -N_3 - N_{25} \cdot \cos \beta + N_4 = 0; \\ \sum Y &= 0; -P_4 - N_{18} - N_{25} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



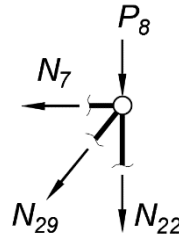
$$\begin{aligned}\sum X &= 0; -N_4 - N_{26} \cdot \cos \beta + N_5 = 0; \\ \sum Y &= 0; -P_5 - N_{19} - N_{26} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



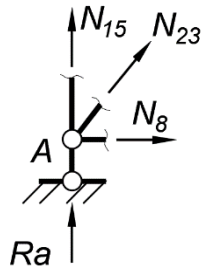
$$\begin{aligned}\sum X &= 0; -N_5 - N_{27} \cdot \cos \beta + N_6 = 0; \\ \sum Y &= 0; -P_6 - N_{20} - N_{27} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



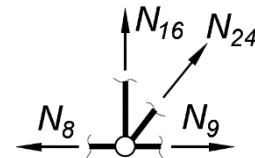
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_6 - N_{28} \cdot \cos \beta + N_7 = 0; \\ \Sigma Y &= 0; -P_7 - N_{21} - N_{28} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



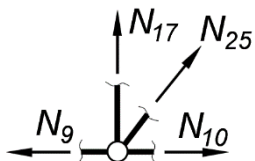
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_7 - N_{29} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; -P_8 - N_{22} - N_{29} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



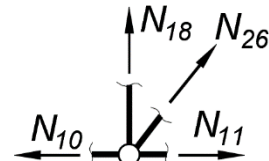
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; N_8 + N_{23} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; R_A + N_{15} + N_{23} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



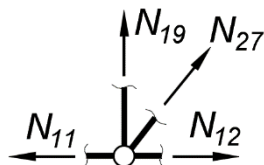
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_8 + N_9 + N_{24} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{16} + N_{24} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



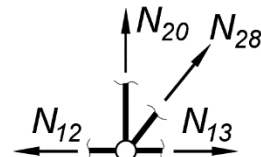
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_9 + N_{10} + N_{25} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{17} + N_{25} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



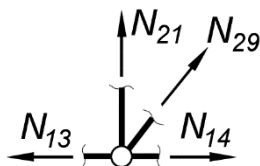
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_{10} + N_{11} + N_{26} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{18} + N_{26} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



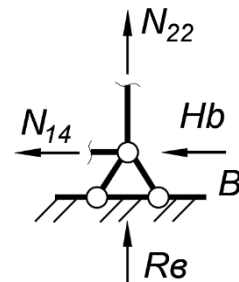
$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_{11} + N_{12} + N_{27} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{19} + N_{27} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_{12} + N_{13} + N_{28} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{20} + N_{28} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_{13} + N_{14} + N_{29} \cdot \cos \beta = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{21} + N_{29} \cdot \sin \beta = 0;\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; -N_{14} - H_B = 0; \\ \Sigma Y &= 0; N_{22} + R_B = 0;\end{aligned}$$

Для определения неизвестных усилий и реакций решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия узлов фермы.

Для проверки расчета составим уравнения равновесия фермы в целом, учитывая найденные ранее значения опорных реакций.

$$\sum M_A = 0; -R_b \cdot 7d + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2d + P_4 \cdot 3d + P_5 \cdot 4d + P_6 \cdot 5d + P_7 \cdot 6d + P_8 \cdot 7d = 0;$$

$$\sum M_B = 0; R_a \cdot 7d - P_1 \cdot 7d - P_2 \cdot 6d - P_3 \cdot 5d - P_4 \cdot 4d - P_5 \cdot 3d - P_6 \cdot 2d - P_7 \cdot d = 0;$$

$$\sum X = 0; H_B = 0.$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

Параметры фермы:

$$d := 2 \quad h := 3 \quad co := \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}} \quad si := \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

Задание переменных:

$$\begin{aligned} R_a &:= 0 & R_b &:= 0 & H_b &:= 0 & N_1 &:= 0 & N_2 &:= 0 & N_3 &:= 0 & N_4 &:= 0 & N_5 &:= 0 \\ N_6 &:= 0 & N_7 &:= 0 & N_8 &:= 0 & N_9 &:= 0 & N_{10} &:= 0 & N_{11} &:= 0 & N_{12} &:= 0 & N_{13} &:= 0 \\ N_{14} &:= 0 & N_{15} &:= 0 & N_{16} &:= 0 & N_{17} &:= 0 & N_{18} &:= 0 & N_{19} &:= 0 & N_{20} &:= 0 & N_{21} &:= 0 \\ N_{22} &:= 0 & N_{23} &:= 0 & N_{24} &:= 0 & N_{25} &:= 0 & N_{26} &:= 0 & N_{27} &:= 0 & N_{28} &:= 0 & N_{29} &:= 0 \end{aligned}$$

Внешняя нагрузка:

$$P_1 := 15 \quad P_2 := 10 \quad P_3 := 12 \quad P_4 := 10 \quad P_5 := 20 \quad P_6 := 10 \quad P_7 := 15 \quad P_8 := 1$$

Система уравнений:

x	Given	y
$N_1 = 0$		$-P_1 - N_{15} = 0$
$-N_1 - N_{23} \cdot co + N_2 = 0$		$-P_2 - N_{16} - N_{23} \cdot si = 0$
$-N_2 - N_{24} \cdot co + N_3 = 0$		$-P_3 - N_{17} - N_{24} \cdot si = 0$
$-N_3 - N_{25} \cdot co + N_4 = 0$		$-P_4 - N_{18} - N_{25} \cdot si = 0$
$-N_4 - N_{26} \cdot co + N_5 = 0$		$-P_5 - N_{19} - N_{26} \cdot si = 0$
$-N_5 - N_{27} \cdot co + N_6 = 0$		$-P_6 - N_{20} - N_{27} \cdot si = 0$
$-N_6 - N_{28} \cdot co + N_7 = 0$		$-P_7 - N_{21} - N_{28} \cdot si = 0$
$-N_7 - N_{29} \cdot co = 0$		$-P_8 - N_{22} - N_{29} \cdot si = 0$
$N_8 + N_{23} \cdot co = 0$		$R_a + N_{15} + N_{23} \cdot si = 0$
$-N_8 + N_9 + N_{24} \cdot co = 0$		$N_{16} + N_{24} \cdot si = 0$
$-N_9 + N_{10} + N_{25} \cdot co = 0$		$N_{17} + N_{25} \cdot si = 0$
$-N_{10} + N_{11} + N_{26} \cdot co = 0$		$N_{18} + N_{26} \cdot si = 0$
$-N_{11} + N_{12} + N_{27} \cdot co = 0$		$N_{19} + N_{27} \cdot si = 0$
$-N_{12} + N_{13} + N_{28} \cdot co = 0$		$N_{20} + N_{28} \cdot si = 0$
$-N_{13} + N_{14} + N_{29} \cdot co = 0$		$N_{21} + N_{29} \cdot si = 0$
$-N_{14} - H_b = 0$		$N_{22} + R_b = 0$

Find(Ra,Rb,Hb,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N15,N16,N17,N18,N19,N20,N21,N22,N23,N24,N25,N26,N27,N28,N29) =

	0
0	51.429
1	41.571
2	0
3	0
4	-24.286
5	-41.905
6	-51.524
7	-54.476
8	-44.095
9	-27.048
10	24.286
11	41.905
12	51.524
13	54.476
14	44.095
15	27.048
16	0
17	-15
18	26.429
19	14.429
20	4.429
21	-15.571
22	-25.571
23	-40.571
24	-41.571
25	-43.782
26	-31.763
27	-17.341
28	-5.322
29	18.715
30	30.733
31	48.761

Проверка опорных реакций

$R_a := 51.429$ $R_b := 41.571$ $H_b := 0$

$$-R_b \cdot 7d + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2d + P_4 \cdot 3d + P_5 \cdot 4d + P_6 \cdot 5d + P_7 \cdot 6d + P_8 \cdot 7d = 6 \times 10^{-3}$$

$$R_a \cdot 7d - P_1 \cdot 7d - P_2 \cdot 6d - P_3 \cdot 5d - P_4 \cdot 4d - P_5 \cdot 3d - P_6 \cdot 2d - P_7 \cdot d = 6 \times 10^{-3}$$

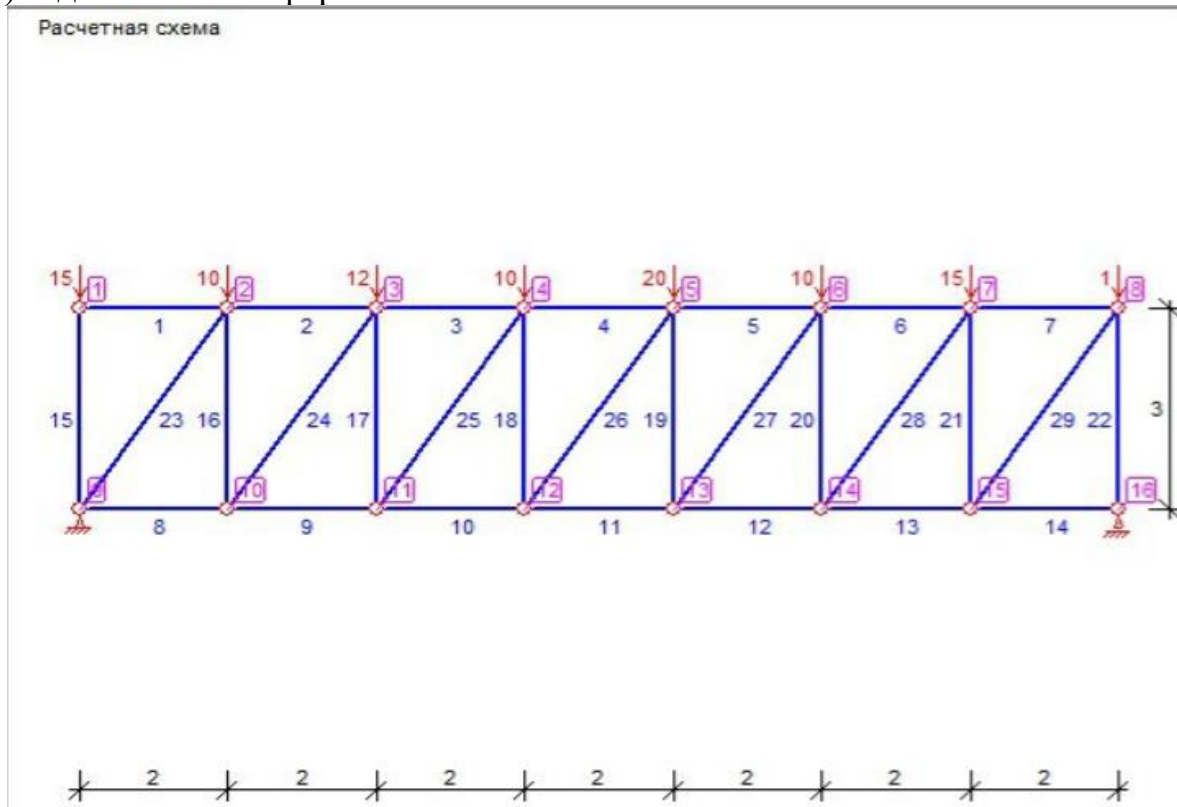
$$H_b = 0$$

1.1 Создание фермы и ее статический расчет в ПК Sirius

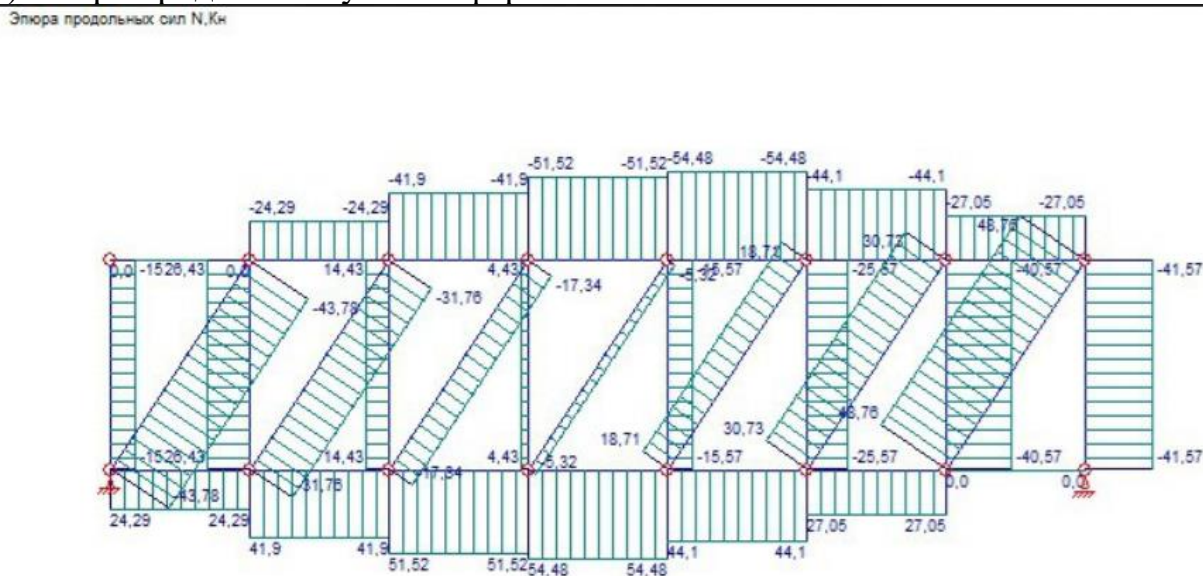
Можно выполнить проверку результатов в программе *Sirius*, в которой интуитивно понятный интерфейс, предназначенной для решения только плоских задач, но дающей нужный результат очень быстро и достоверно. Ввод данных происходит графическим способом, по координатам узлов, но узел сразу предполагается или жестким, или шарнирным. Далее соединяем узлы с помощью стержней, где важно выбрать правильно начальный и конечный узлы. Они соединяются мышкой, а жесткость задана по умолчанию, но при необходимости может изменяться на нужную. Задаем нагрузку на узлы и элементы, связи указываем в виде опор, нажимаем «ОК» – и можем выполнить расчет многопролетной балки. Результаты приведены ниже (рисунок 1.3).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/84-UdFMIRL8?si=7Np-kMcddzI9iBV1>.

а) заданная схема фермы



б) эпюра продольных усилий фермы «N»



а) расчетная схема фермы; б) эпюра внутренних усилий «N»

Рисунок 1.3 – Расчет фермы в программе Sirius

1.2 Создание фермы и ее статический расчет в ПК Lira

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nmS4lKIh9TU?si=LB9kLX0exyzc48Vm>.

Создание расчетной схемы (рисунок 1.4).

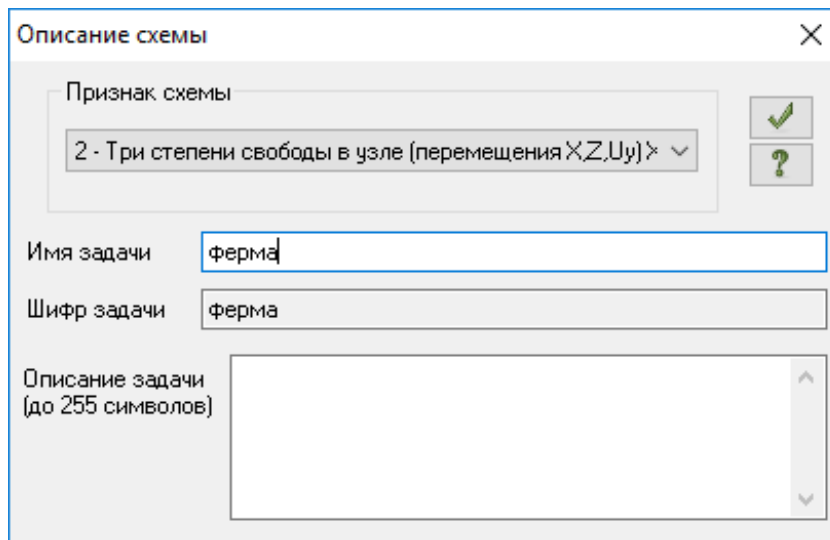


Рисунок 1.4 – Задание признака схемы и имени задачи

Создаем новую задачу, задаем имя и выбираем из выпадающего списка признак схемы. Признак схемы характеризует систему координат, в данном случае – xOz (плоская задача), а также возможные перемещения узлов в этой системе (см. пп. 11.1). Далее задаем по координатам узлы фермы (рисунок 1.5).

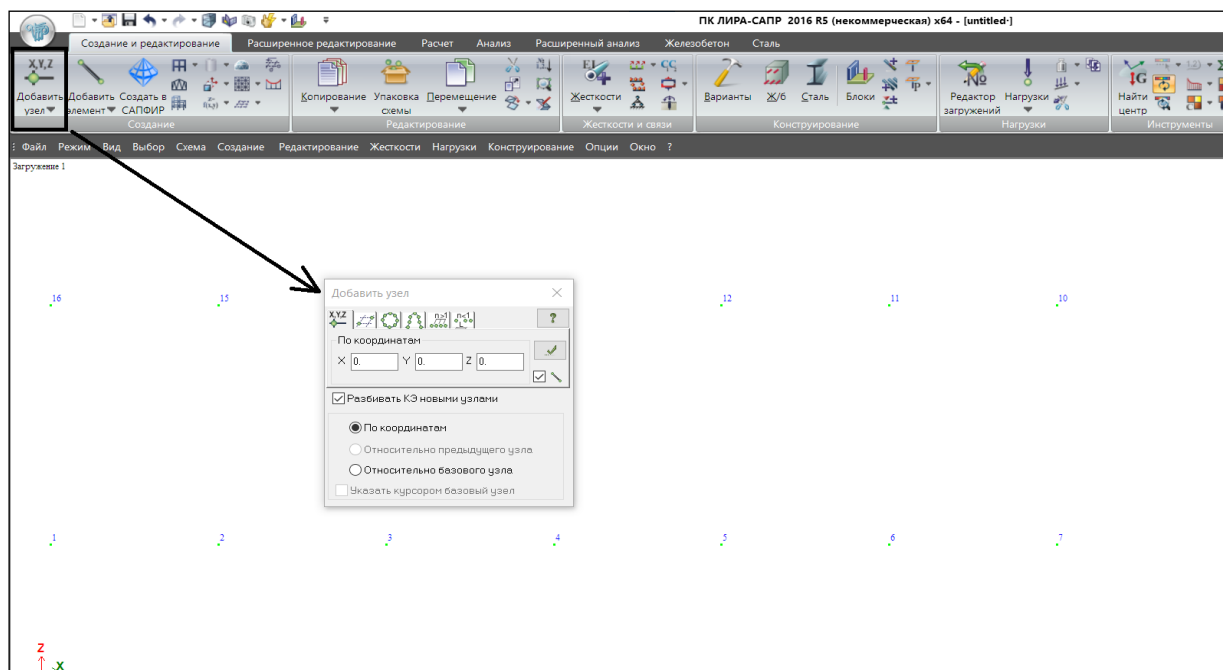


Рисунок 1.5 – Задание узлов фермы по координатам

По координатам в осях xOz задали 16 узлов, далее соединяем узлы стержнями – мышкой выбираем последовательность соединения таким образом, чтобы нумерация стержней совпала с нумерацией при решении этой задачи в лабораторной работе № 1 (для удобства проверки полученного результата), рисунок 1.6.

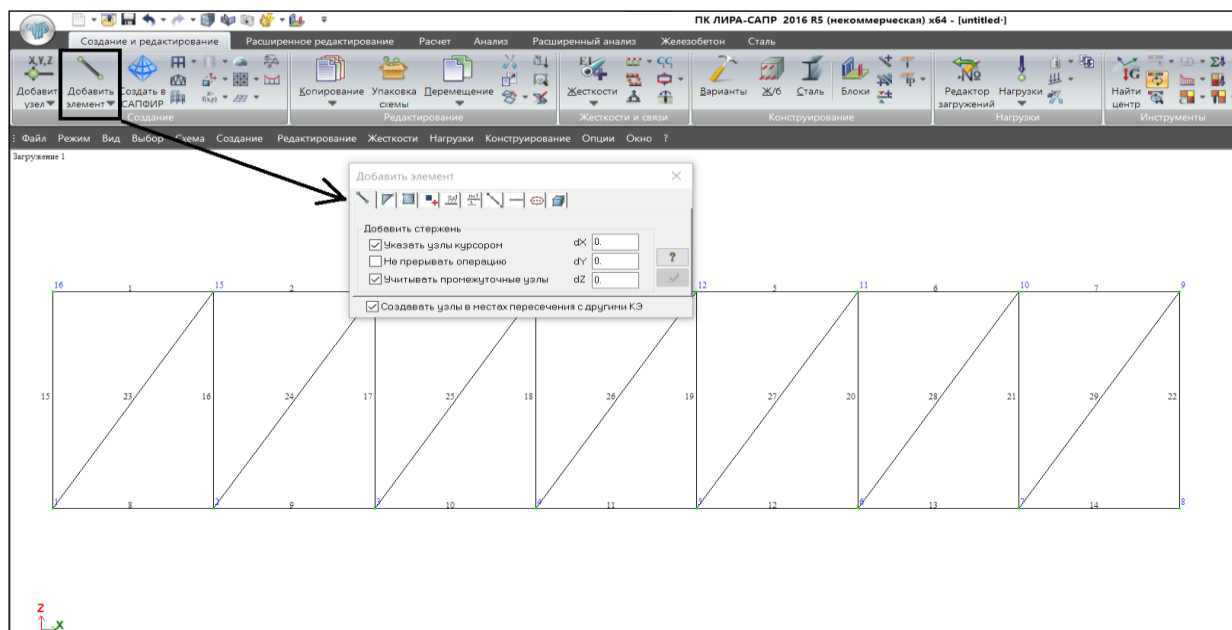


Рисунок 1.6 – Задание элементов фермы

Расчетная схема построена из стержней и узлов, далее необходимо задать опоры и соединения стержней друг с другом. Расчетная схема имеет две опоры – шарнирно подвижную в узле 1 и шарнирно неподвижную в узле 8. Выделяем узел 1 и назначаем связь по оси z , устанавливая соответствующую галочку (рисунок 1.7), запрещая перемещение по оси z . Аналогично задаем опору в узле 8, назначая связи по осям z и x .

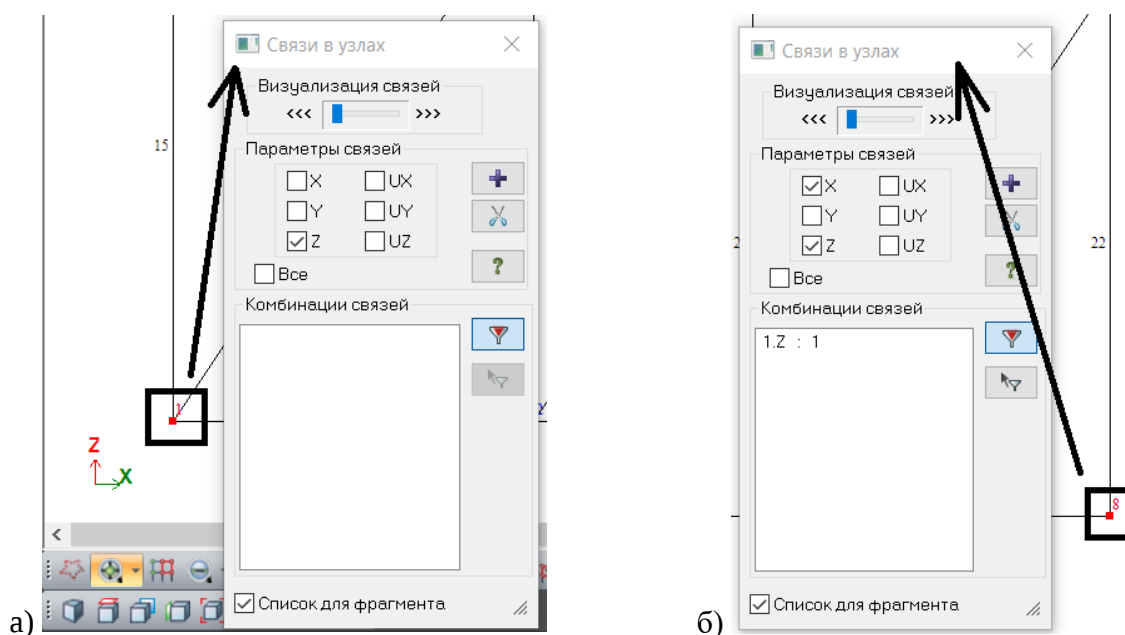
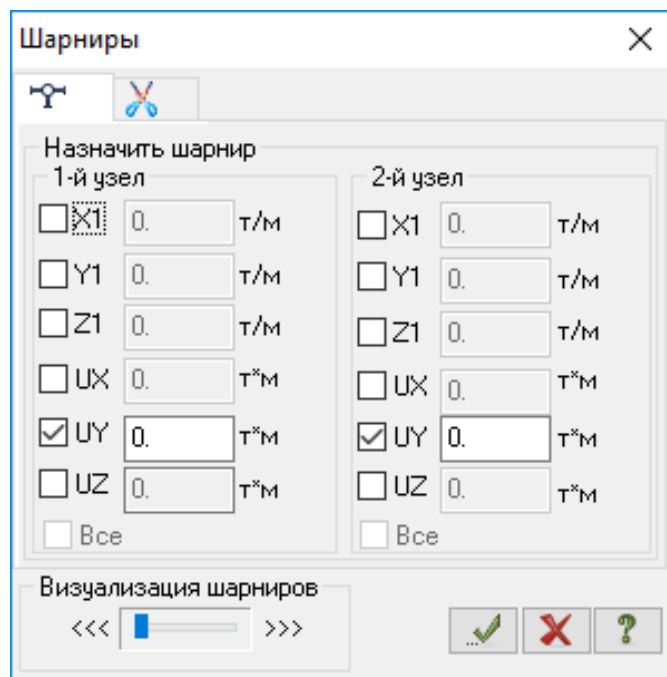


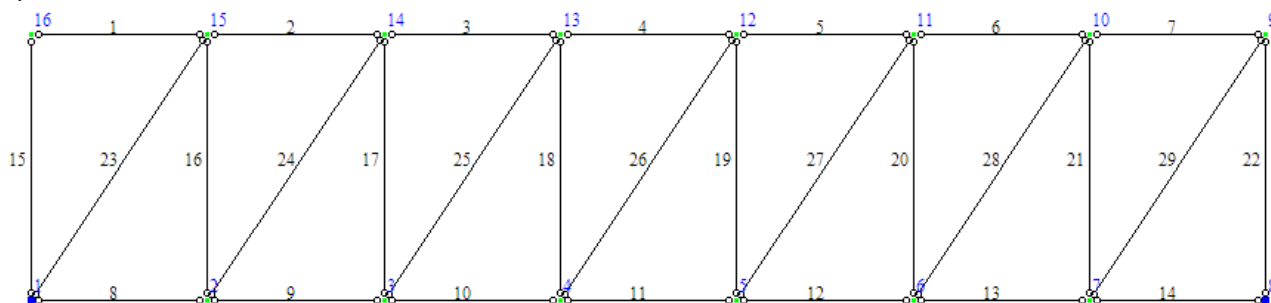
Рисунок 1.7 – Задание связей для опорных узлов фермы

Узлы фермы представляют собой идеальные шарниры, поэтому элементы (стержни) должны иметь шарнирное соединение в узлах. Выделяем элемент фермы и, нажимая правую кнопку мыши, выбираем из выпадающего списка свойство «Шарниры» (рисунок 1.8, а).

а)



б)



а) назначение шарниров;

б) расчетная схема шарнирной фермы

Рисунок 1.8 – Задание шарниров для элементов фермы

Все стержни шарнирно соединены в узлах, это визуализируется маленькими шарнирами на концах стержней (рисунок 1.8, б).

Далее задаем нагрузку на ферму в виде восьми сил в узлы верхнего пояса, для этого открывается вкладка «Задание нагрузок», в которой выбираются соответствующие нагрузки (рисунок 1.9).

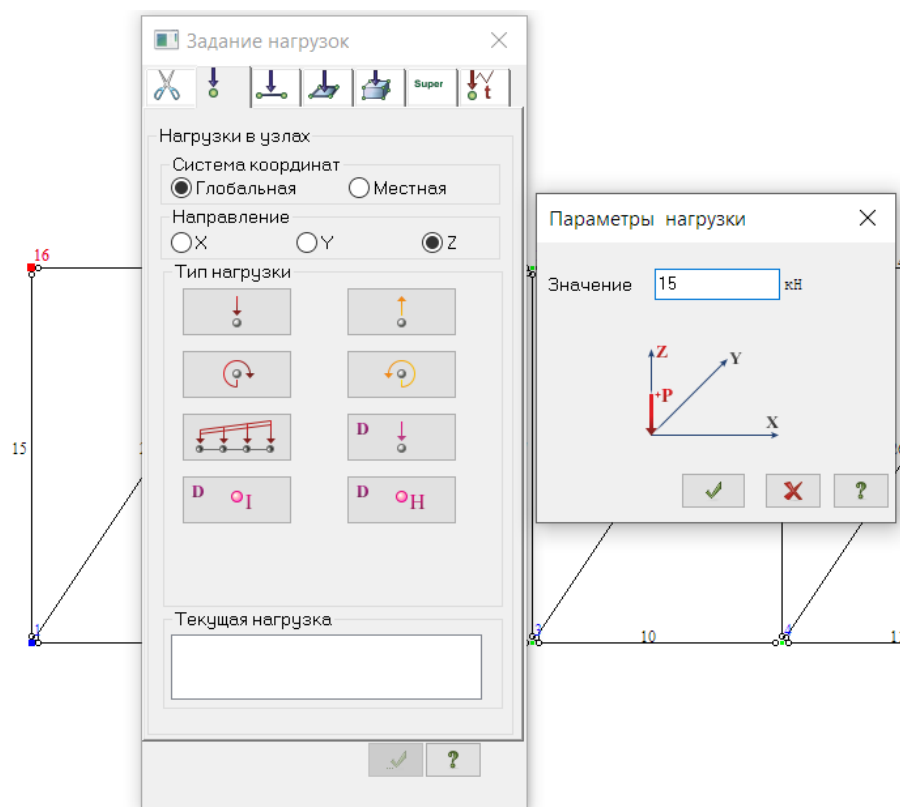


Рисунок 1.9 – Задание внешней нагрузки «Сосредоточенные силы»

Выделяем элементы фермы, отрываем вкладку «Жесткости и материалы» и выбираем для этих элементов материал и форму сечения из предлагаемых вариантов (см. рисунок 1.10) – например, гнутосварной профиль «Молодечно» 100 x 5.

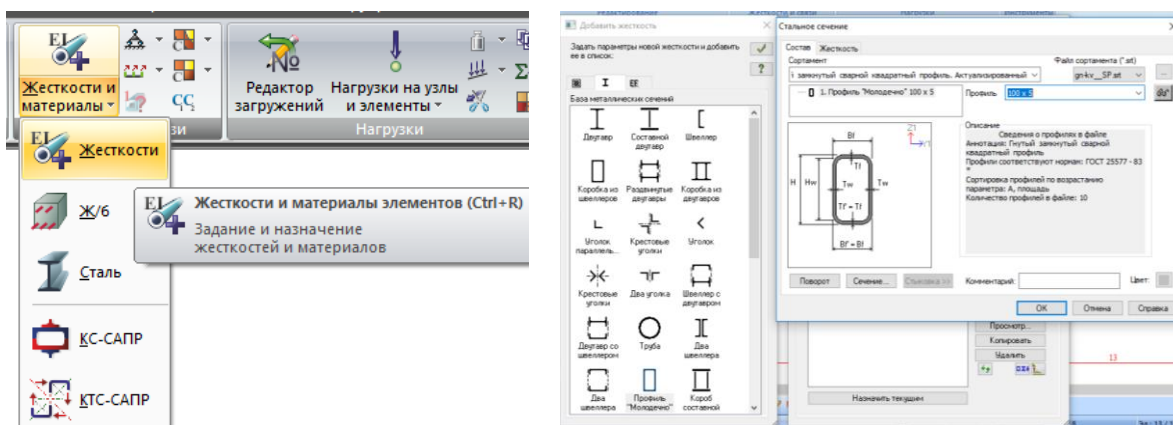


Рисунок 1.10 – Задание жесткости для элементов конструкции

Перед расчетом выделяем схему и выполняем ее упаковку (рисунок 1.11).

Далее может быть выполнен расчет системы активацией вкладки «Расчет» – «Выполнить полный расчет».

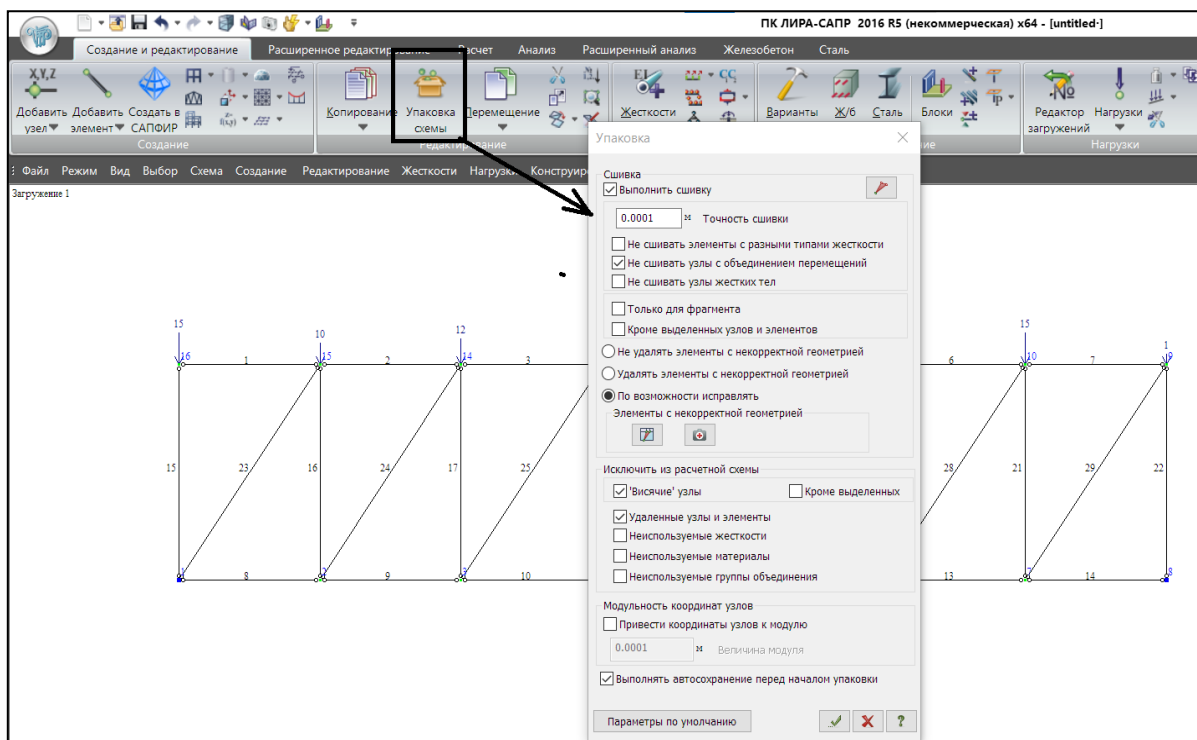


Рисунок 1.11 – Упаковка схемы

Результаты расчета на вкладке «Анализ» (рисунок 1.12).

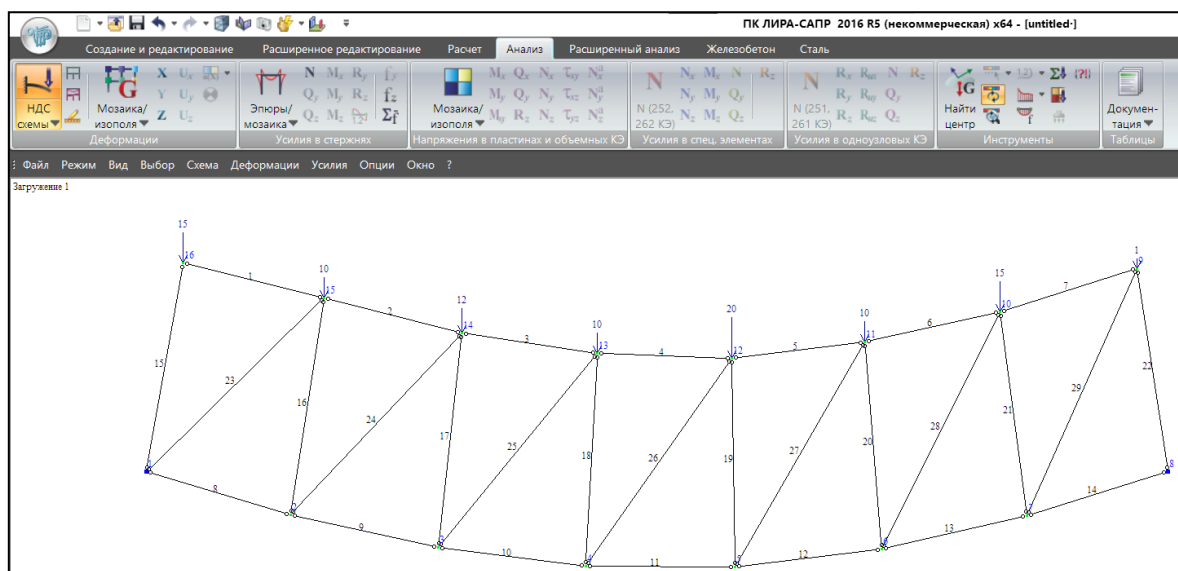
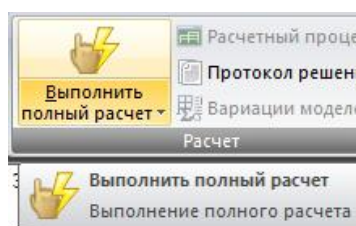


Рисунок 1.12 – Анализ полученных результатов

Результаты расчета представлены в виде деформированной схемы и усилий в стержнях, которые можно визуализировать в виде эпюры N (рисунок 1.13).

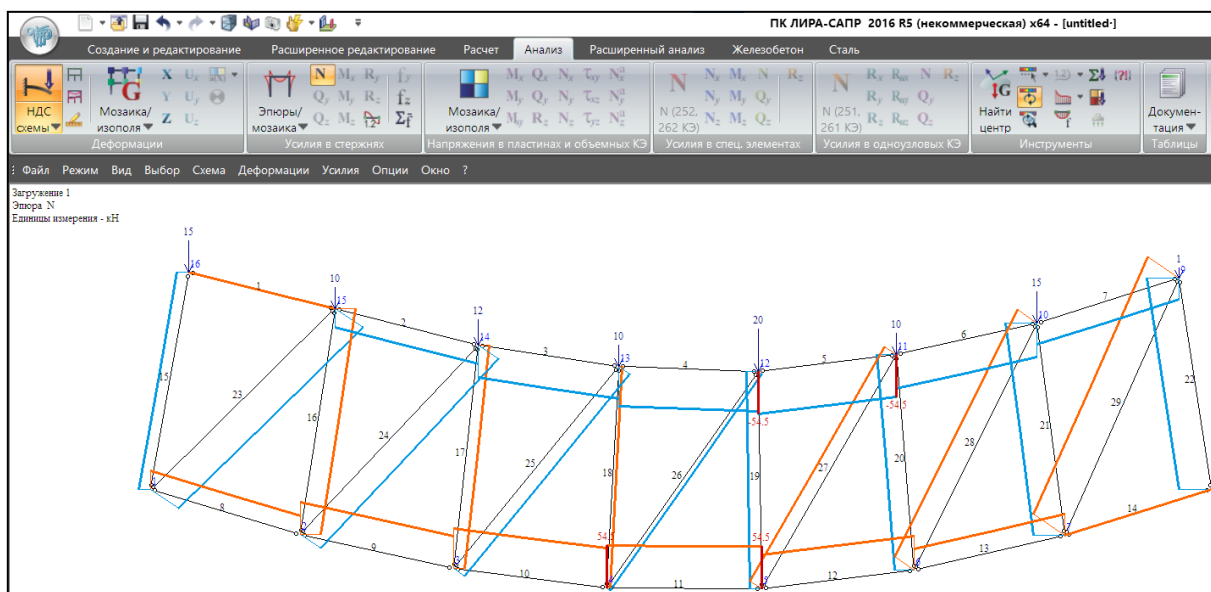


Рисунок 1.13 – Эпюра продольных усилий «N»

Результаты можно представить в виде интерактивной таблицы (рисунок 1.14).

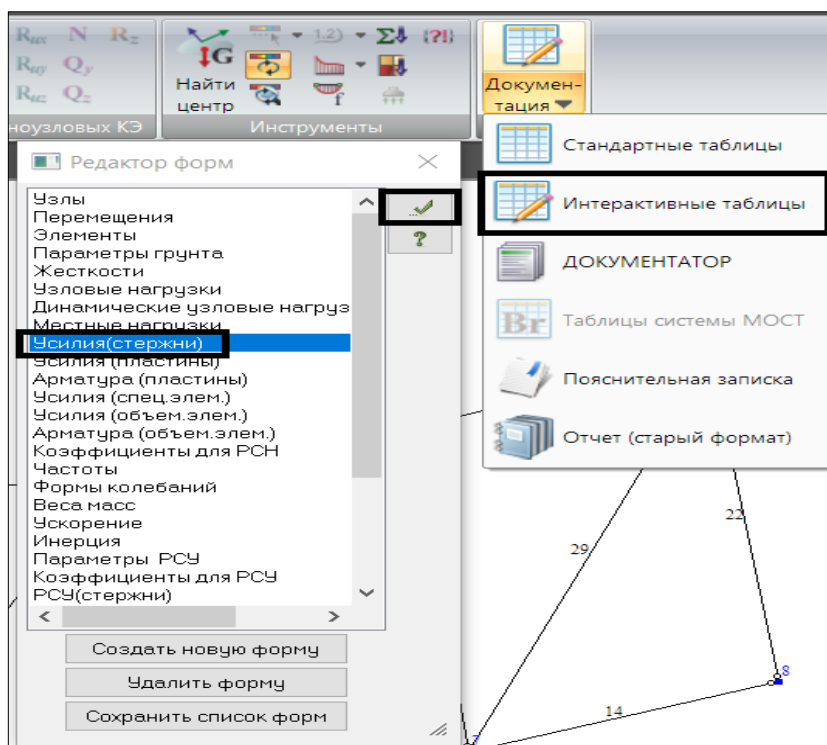


Рисунок 1.14 – Вывод интерактивной таблицы

После выполнения расчета по результатам, полученным в программном комплексе, можно выполнить анализ несущей способности принятых профилей сечения по первой и второй группам предельных состояний (рисунки 1.15–1.17).

Таблица усилий (стержни)			
№ элем	№ сечен	Усилия	
		N (кН)	Mк (кН*м)
1	1	0.000	0.000
1	2	0.000	0.000
2	1	- 24.286	0.000
2	2	- 24.286	0.000
3	1	- 41.905	0.000
3	2	- 41.905	0.000
4	1	- 51.524	0.000
4	2	- 51.524	0.000
5	1	- 54.476	0.000
5	2	- 54.476	0.000
6	1	- 44.095	0.000
6	2	- 44.095	0.000
7	1	- 27.048	0.000
7	2	- 27.048	0.000
8	1	24.286	0.000
8	2	24.286	0.000
9	1	41.905	0.000
9	2	41.905	0.000
10	1	51.524	0.000
10	2	51.524	0.000
11	1	54.476	0.000
11	2	54.476	0.000
12	1	44.095	0.000
12	2	44.095	0.000
13	1	27.048	0.000
13	2	27.048	0.000
14	1	0.000	0.000
14	2	0.000	0.000
15	1	- 15.000	0.000
15	2	- 15.000	0.000
16	1	26.429	0.000
16	2	26.429	0.000
17	1	14.429	0.000
17	2	14.429	0.000
18	1	4.429	0.000
18	2	4.429	0.000
19	1	- 15.571	0.000
19	2	- 15.571	0.000
20	1	- 25.571	0.000
20	2	- 25.571	0.000
21	1	- 40.571	0.000
21	2	- 40.571	0.000
22	1	- 41.571	0.000
22	2	- 41.571	0.000
23	1	- 43.782	0.000
23	2	- 43.782	0.000
24	1	- 31.763	0.000
24	2	- 31.763	0.000
25	1	- 17.341	0.000
25	2	- 17.341	0.000
26	1	- 5.322	0.000
26	2	- 5.322	0.000
27	1	18.715	0.000
27	2	18.715	0.000
28	1	30.733	0.000
28	2	30.733	0.000
29	1	48.761	0.000
29	2	48.761	0.000

	0
0	51.429
1	41.571
2	0
3	0
4	-24.286
5	-41.905
6	-51.524
7	-54.476
8	-44.095
9	-27.048
10	24.286
11	41.905
12	51.524
13	54.476
14	44.095
15	27.048
16	0
17	-15
18	26.429
19	14.429
20	4.429
21	-15.571
22	-25.571
23	-40.571
24	-41.571
25	-43.782
26	-31.763
27	-17.341
28	-5.322
29	18.715
30	30.733
31	48.761

Рисунок 1.15 – Верификация результатов расчета ПК Lira в табличном виде

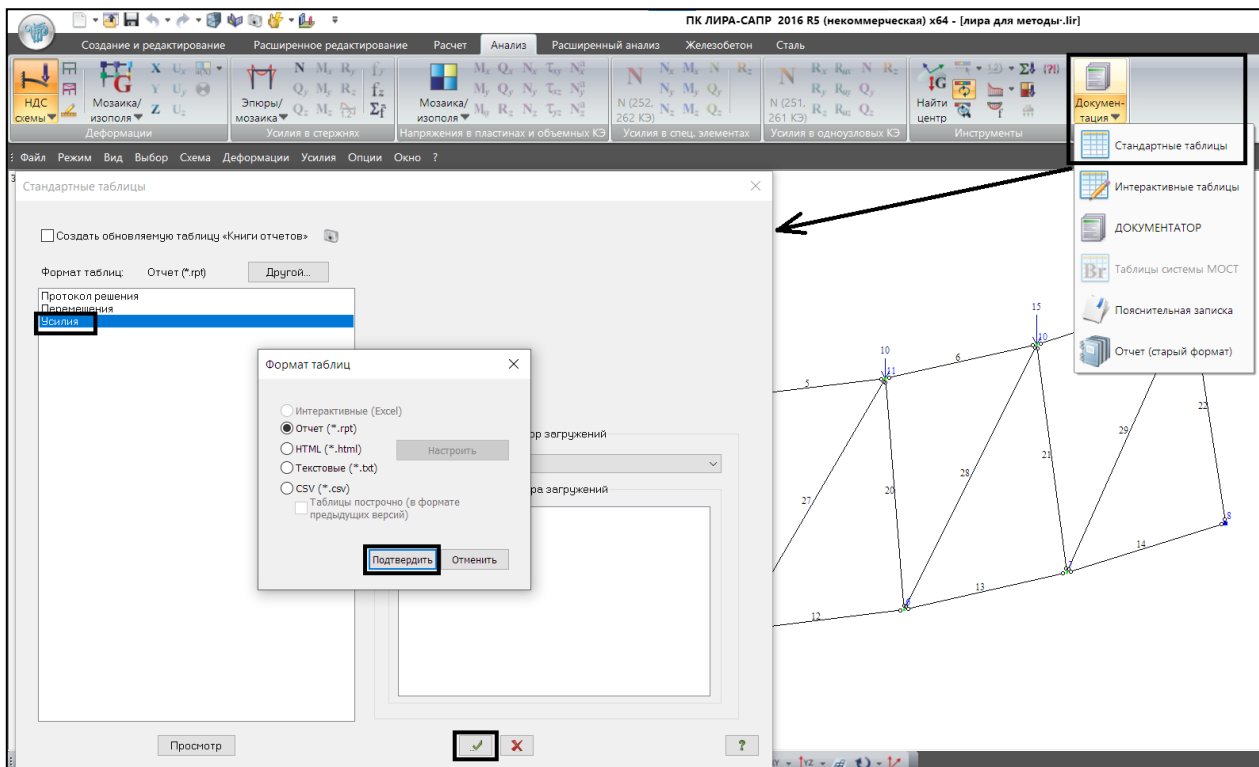


Рисунок 1.16 – Вывод стандартной таблицы

Единицы измерения усилий: кН

Единицы измерения напряжений: кН/м²

Единицы измерения моментов: кН*м

Единицы измерения распределенных моментов: (кН*м)/м

Единицы измерения распределенных перерезывающих сил: кН/м

Единицы измерения перемещений поверхностей в элементах: м

Fri Nov 15 13:50:34 2024 лира для методы- основная схема								
У С И Л И Я / НАПРЯЖЕНИЯ / В ЭЛЕМЕНТАХ								
2	1 - 1	1 - 2	2 - 1	2 - 2	3 - 1	3 - 2	4 - 1	4 - 2
	15	15	14	14	13	13	12	12
	16	16	15	15	14	14	13	13
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
N			-24.2857	-24.2857	-41.9048	-41.9048	-51.5238	-51.5238
2	5 - 1	5 - 2	6 - 1	6 - 2	7 - 1	7 - 2	8 - 1	8 - 2
	11	11	10	10	9	9	1	1
	12	12	11	11	10	10	2	2
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
N	-54.4762	-54.4762	-44.0952	-44.0952	-27.0476	-27.0476	24.2857	24.2857
2	9 - 1	9 - 2	10 - 1	10 - 2	11 - 1	11 - 2	12 - 1	12 - 2
	2	2	3	3	4	4	5	5
	3	3	4	4	5	5	6	6
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
N	41.9048	41.9048	51.5238	51.5238	54.4762	54.4762	44.0952	44.0952
2	13 - 1	13 - 2	14 - 1	14 - 2	15 - 1	15 - 2	16 - 1	16 - 2
	6	6	7	7	1	1	2	2
	7	7	8	8	16	16	15	15
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
N	27.0476	27.0476			-14.9999	-14.9999	26.4285	26.4285
2	17 - 1	17 - 2	18 - 1	18 - 2	19 - 1	19 - 2	20 - 1	20 - 2
	3	3	4	4	5	5	6	6
	14	14	13	13	12	12	11	11
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
N	14.4285	14.4285	4.42854	4.42854	-15.5714	-15.5714	-25.5714	-25.5714

Рисунок 1.17 – Верификация результатов расчета ПК Lira в табличном виде

1.3 Создание фермы и ее статический расчет в ПК Scad

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nmS4lKIh9TU?si=LB9kLX0exyzc48Vm>.

Создаем новый проект, выбираем тип схемы: 2 – «Плоская рама» (рисунок 1.18).

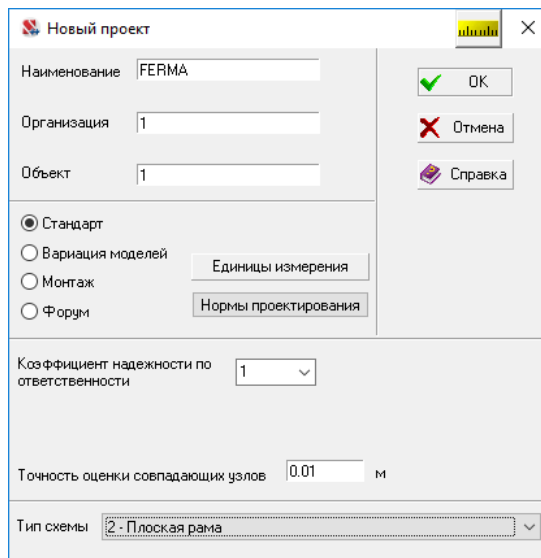


Рисунок 1.18 – Создание нового проекта

Выбираем на вкладке «Управление»:

Расчетная схема → Графический препроцессор → Геометрия.

На вкладке «Узлы и элементы», нажимаем ввод узлов и по координатам вводим все узлы фермы, при этом надо обязательно нажимать «Подтвердить» (рисунок 1.19).

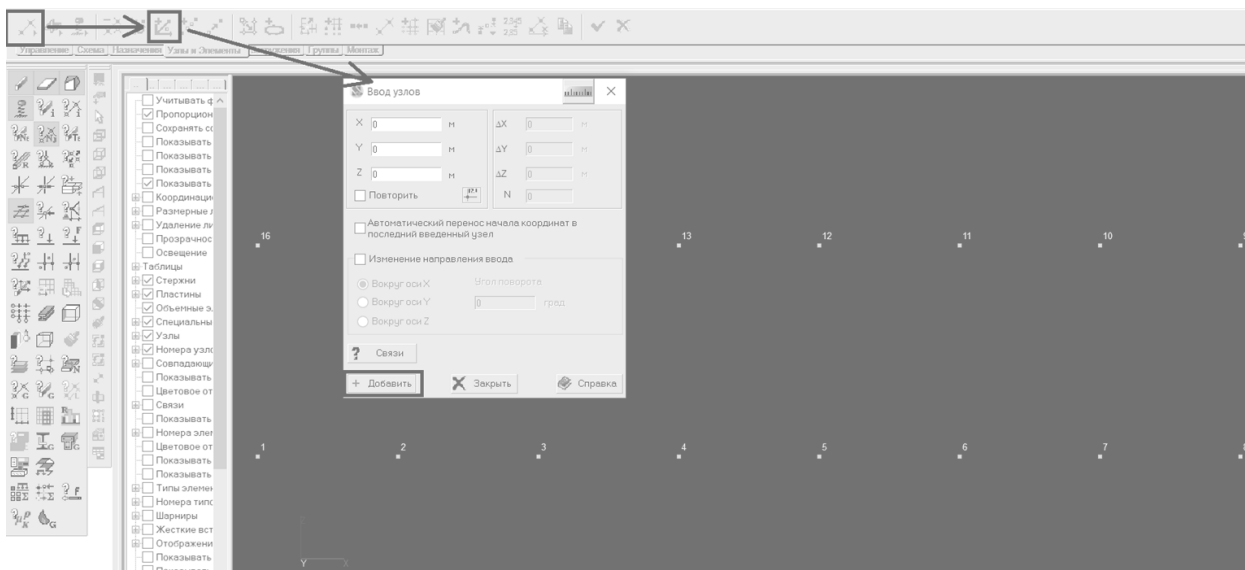


Рисунок 1.19 – Ввод узлов фермы по координатам

При вводе стержней сразу задаем и жесткость элементов, например, профили металлопроката, квадратная труба 100 х 5, как и в *ПК Lira* (рисунок 1.20).

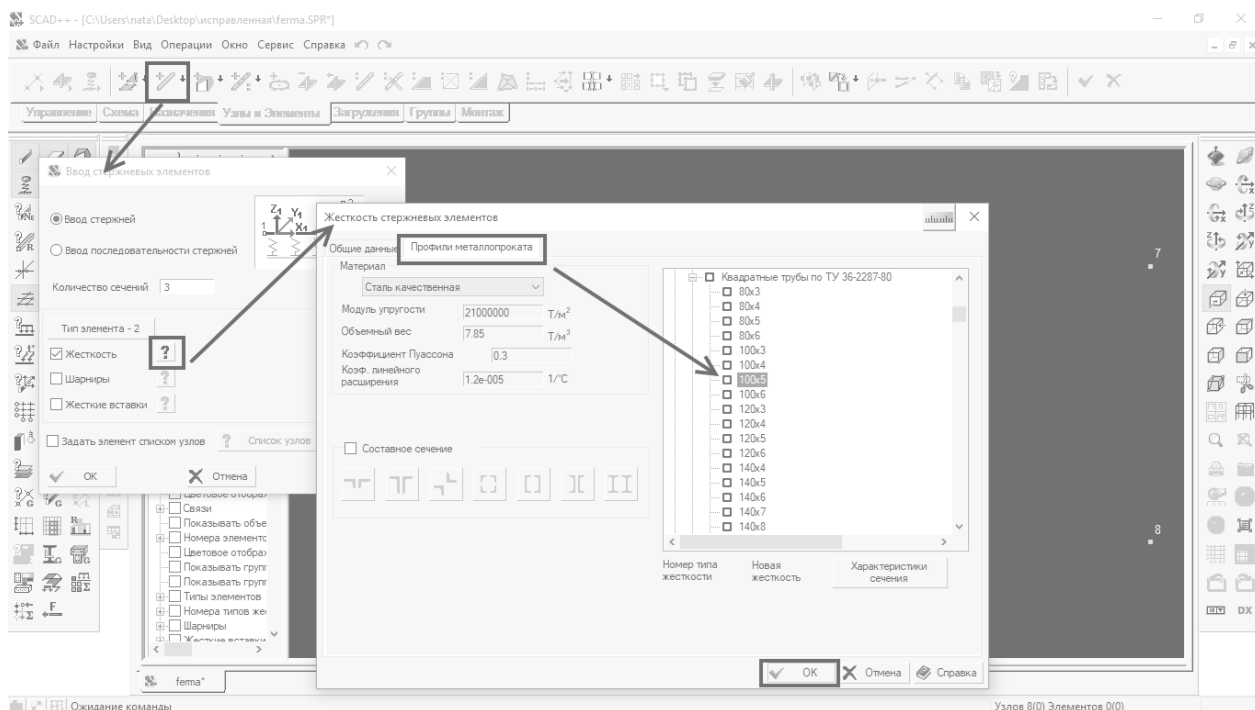


Рисунок 1.20 – Ввод стержней, задание жесткости стержневых элементов

Задаем элемент фермы списком узлов, прописываем начальный и конечный узел или просто соединяем мышкой узлы (рисунок 1.21).

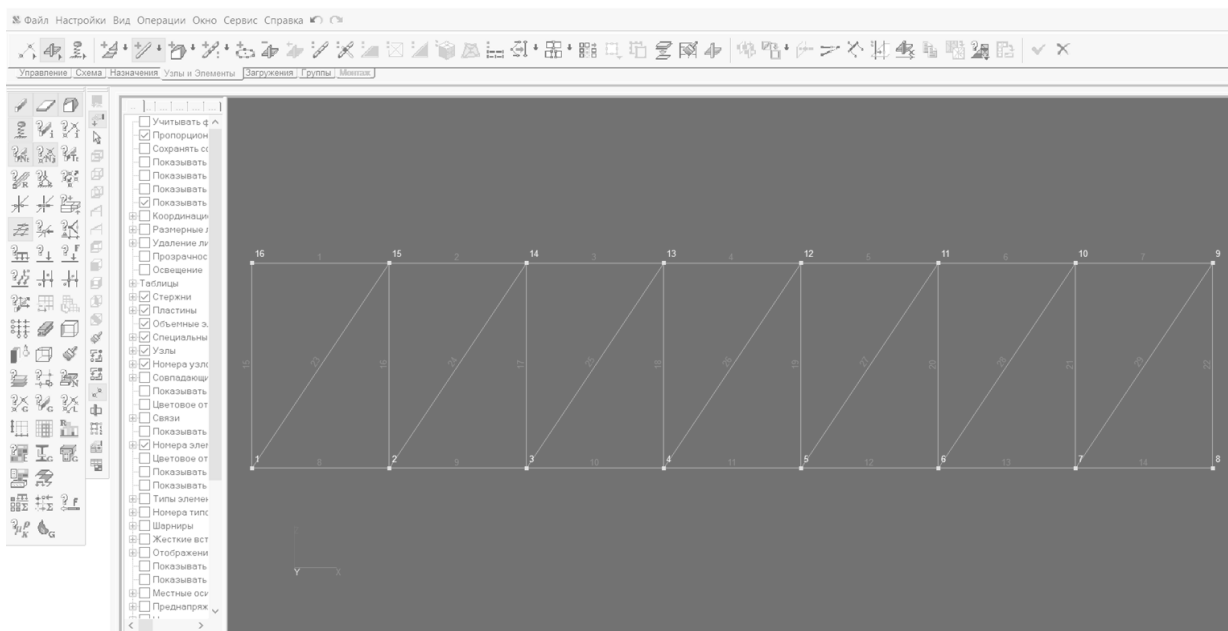


Рисунок 1.21 – Ввод стержней

Назначаем связи для опорных узлов 1 и 8, аналогично как и в *ПК Lira* (рисунок 1.22).

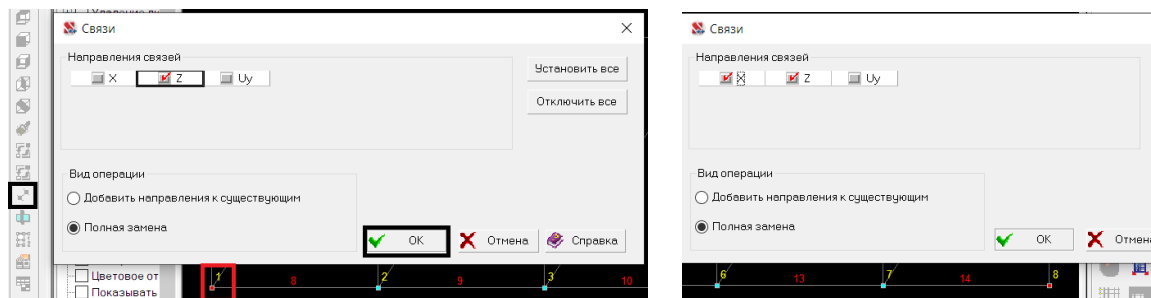


Рисунок 1.22 – Назначение связей опорных узлов

На вкладке «Назначения» выбираем «Установка примыкания стержней» и задаем примыкание стержней друг к другу, предварительно выделив все элементы фермы (рисунок 1.23).

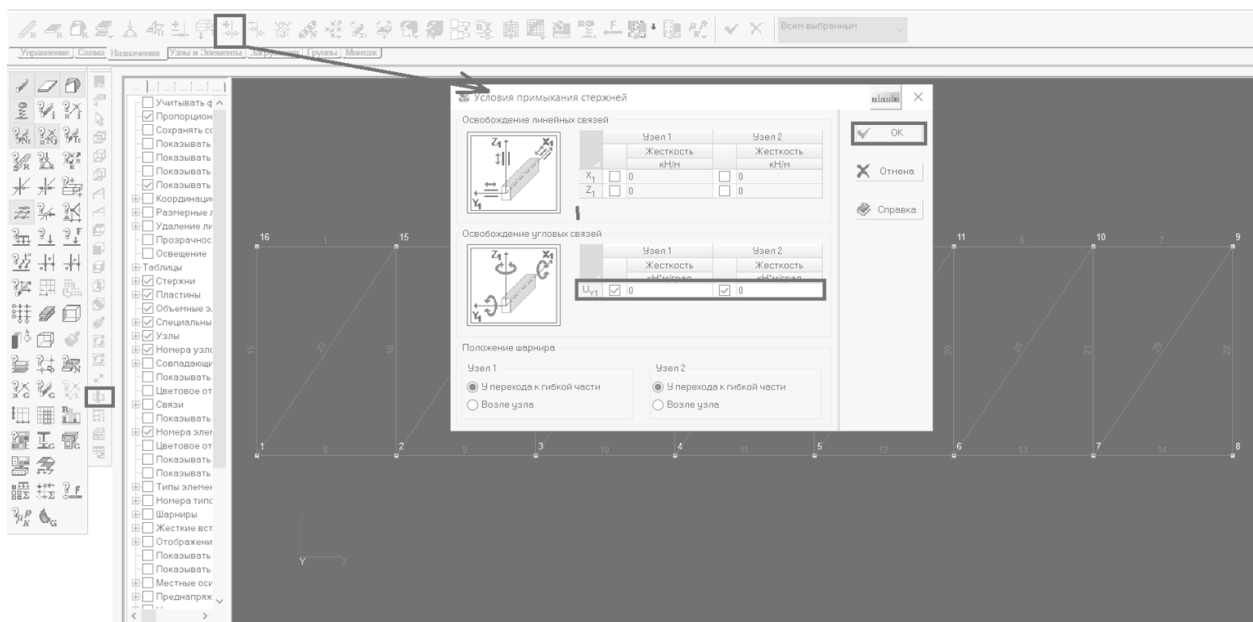


Рисунок 1.23 – Установка примыкания стержней

На вкладке «Загрузка» выбираем «Узловые нагрузки», предварительно выделив узлы верхнего пояса фермы (рисунок 1.24). По оси z задаем узловую нагрузку в глобальной системе координат.

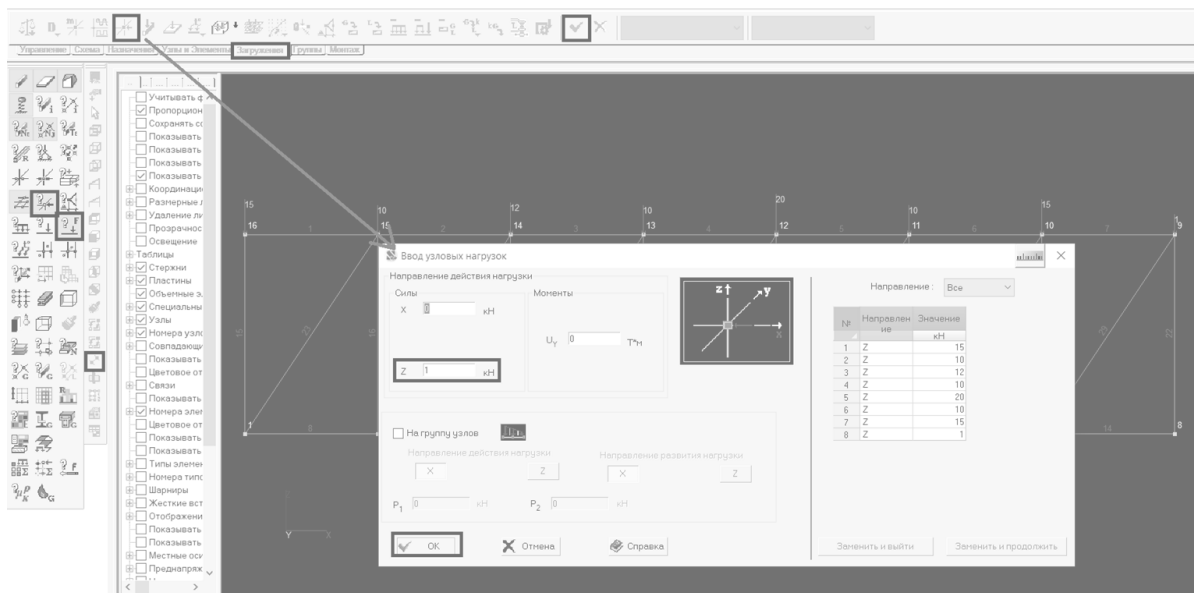


Рисунок 1.24 – Задание узловых нагрузок

Для выполнения расчета выбираем вкладку «Управление», сохраняем текущее нагружение и выполняем линейный расчет (рисунок 1.25).

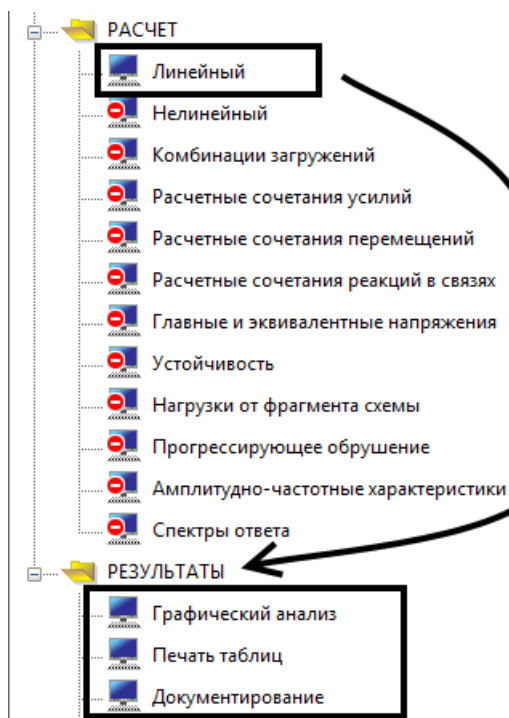
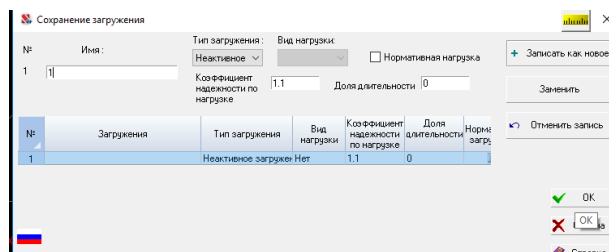


Рисунок 1.25 – Сохранение нагружения и выполнение расчета

Результаты расчета представляются в виде эпюры продольных сил N , сравнивая которые с усилиями в лабораторной работе № 1, получаем их полное совпадение. Результаты приведены на рисунках 1.26, 1.27.

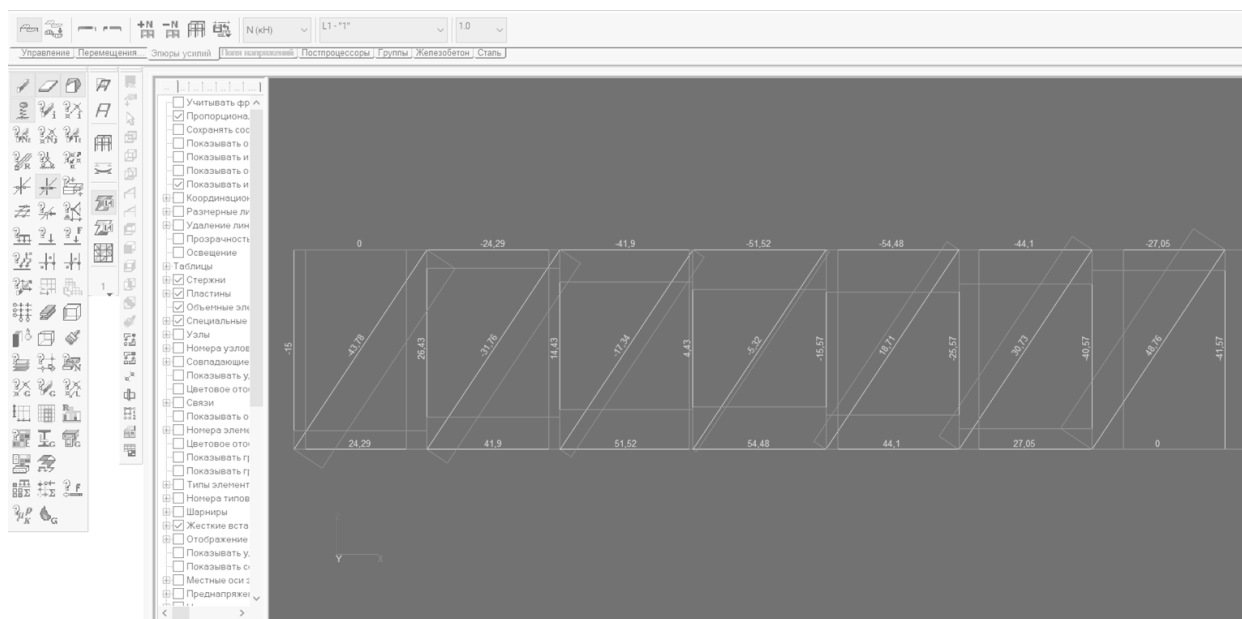
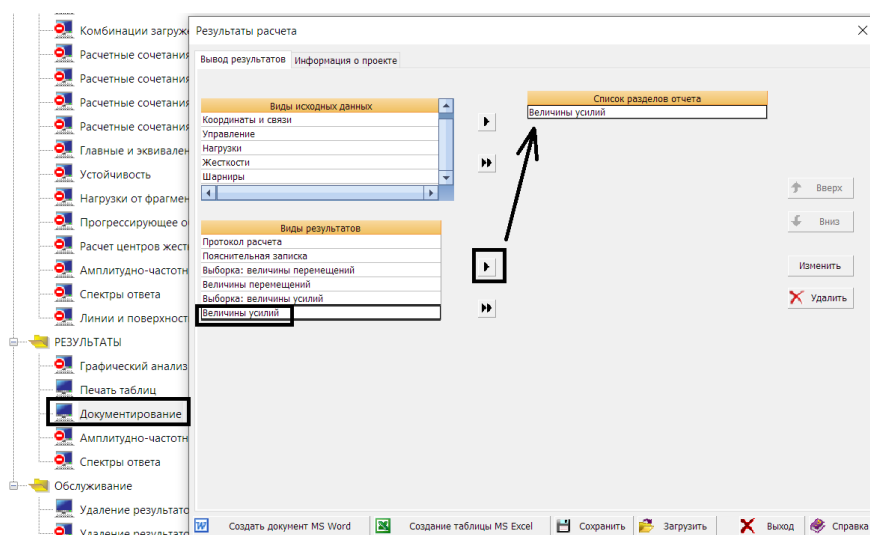


Рисунок 1.26 – Результаты линейного расчета: Эпюра «N»



Величины усилий
 Единицы измерения:
 - Силы: кН
 - Единицы длины для силовых факторов: м
 Параметры выборки:
 Список узлов/элементов: Все
 Список сечений: 1
 Список нагрузок/комбинаций: 1
 Список факторов: N

Величины усилий			
Элемент	Сечение	Загрузка	Значение N
2	1	1	-24,286
3	1	1	-41,905
4	1	1	-51,524
5	1	1	-54,476
6	1	1	-44,095
7	1	1	-27,048
8	1	1	24,286
9	1	1	41,905
10	1	1	51,524
11	1	1	54,476
12	1	1	44,095
13	1	1	27,048
14	1	1	6,181e-014
15	1	1	-15
16	1	1	26,429
17	1	1	14,429
18	1	1	4,429
19	1	1	-15,571
20	1	1	-25,571
21	1	1	-40,571
22	1	1	-41,571
23	1	1	-43,782
24	1	1	-31,763
25	1	1	-17,341
26	1	1	-5,322
27	1	1	18,715
28	1	1	30,733
29	1	1	48,761

Рисунок 1.27 – Вывод значений усилий N в табличном виде

1.4 Создание фермы и ее статический расчет в автоматизированной системе проектирования SolidWorks

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/g1MOucJqlZQ?si=vnpGmX2EZegkkdlP>.

Создаем новую деталь . На плоскости «Спереди» нарисуем эскиз фермы и нанесем ее размеры (рисунок 1.28).

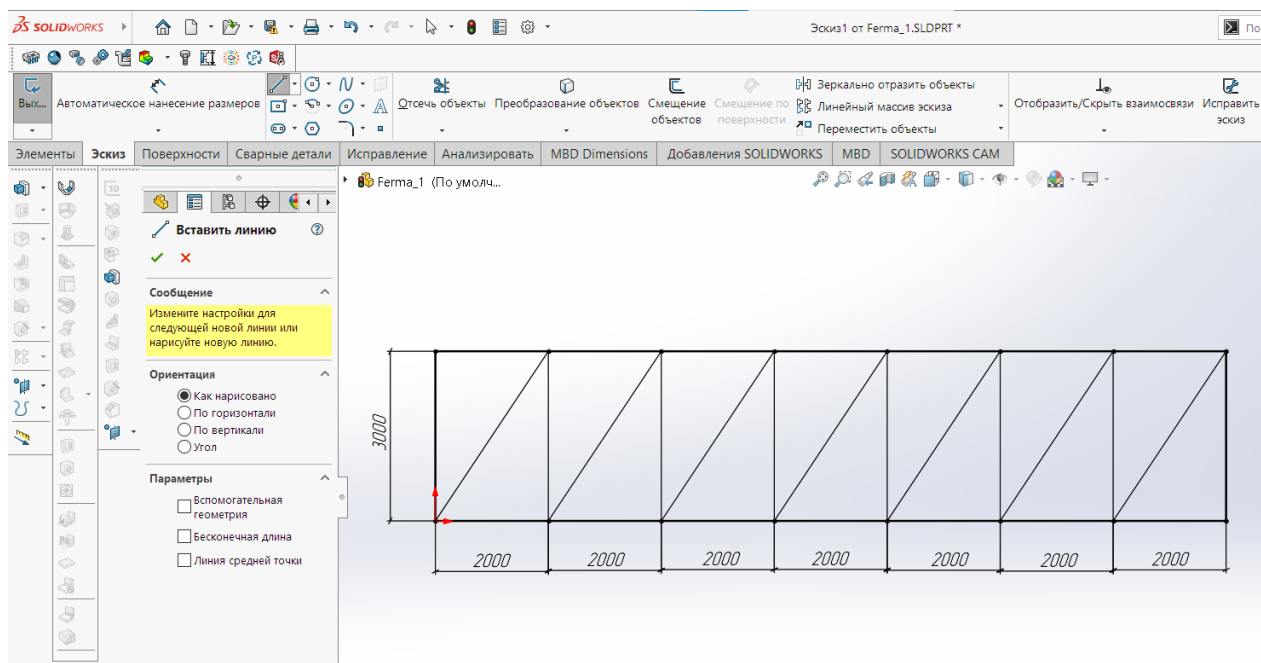


Рисунок 1.28 – Создание эскиза детали и его определение (задание размеров)

Затем в пункте меню «Вставка» активируем компоненты «Сварные детали», «Конструкции» (рисунок 1.29).

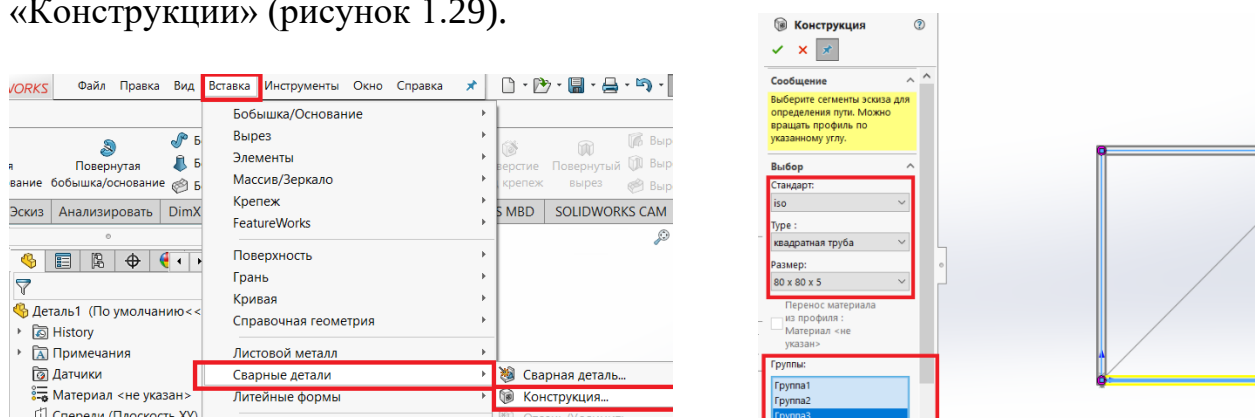


Рисунок 1.29 – Активация компонента «Конструкции» и задание жесткости элементов

На вкладке «Конструкции» выбираем стандарт – «ISO»; тип – квадратная труба; размер профилей – 100 x 100 x 5. Создаем группу элементов для верхнего и нижнего поясов и для решетки фермы и закрепляем выбор, нажимая «ОК».

Для выполнения корректного расчета конструкции необходимо указать, как профили соединяются в углах – для этого используется команда «Отсечь/удлинить», которая активируется:

- Вставка → Сварные детали → Отсечь/удлинить;
- выбираются: элементы фермы, тип угла.

Нужно задать последовательно все углы для узлов конструкции фермы и определить их соединение профилей в углах, как представлено на рисунке 1.30.

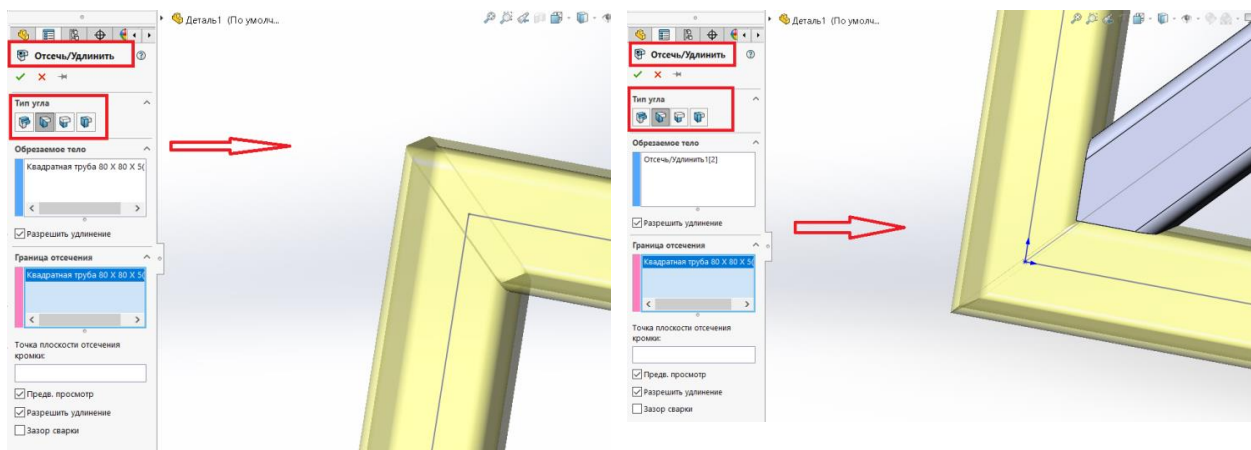


Рисунок 1.30. – Задание соединения углов конструкции

Для выполнения исследования фермы активируем на вкладке «Добавление» компонент «Simulation» («Исследование»), затем «Новое исследование» (рисунок 1.31).

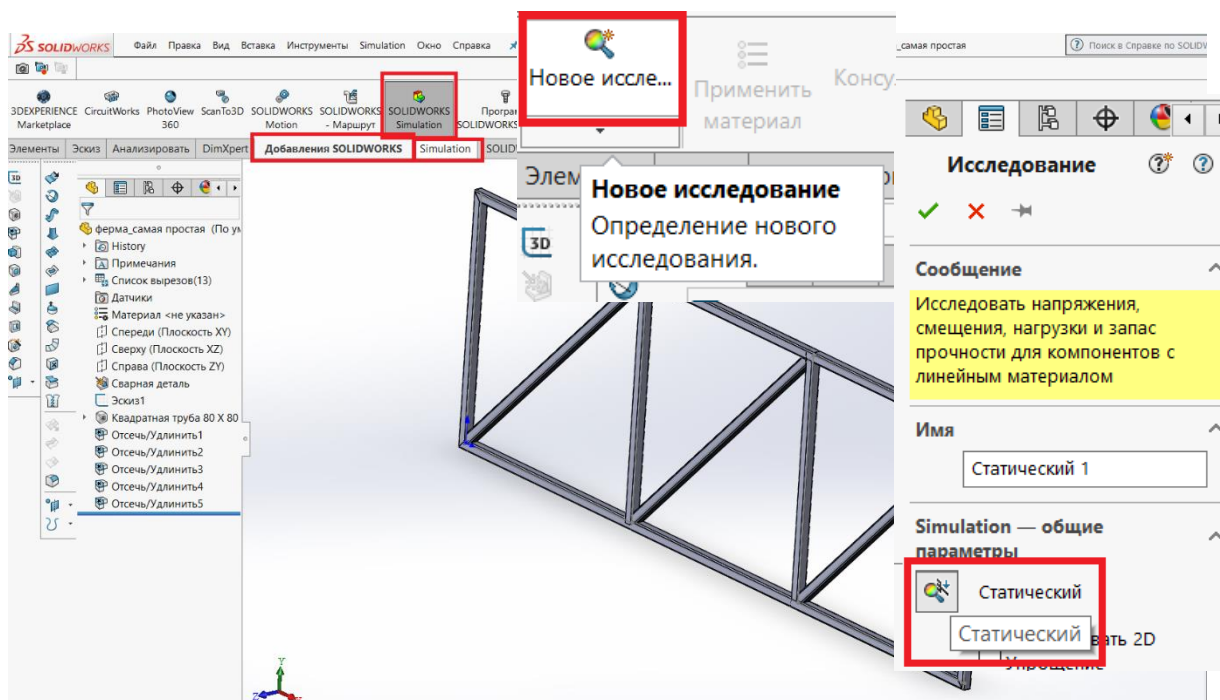


Рисунок 1.31 – Активация компонента «Simulation»

Из предложенных параметров выбираем параметр «Статический», после чего необходимо задать начальные параметры для выполнения исследования:

- материалы для детали/деталей (рисунок 1.32);
- ограничения по перемещениям для узлов или плоскостей (рисунки 1.34, 1.35);
- «тип контакта», если детали соединены между собой;
- внешние силы (рисунок 1.36): сосредоточенные, распределенные нагрузки;
- создать сетку по заданным параметрам.

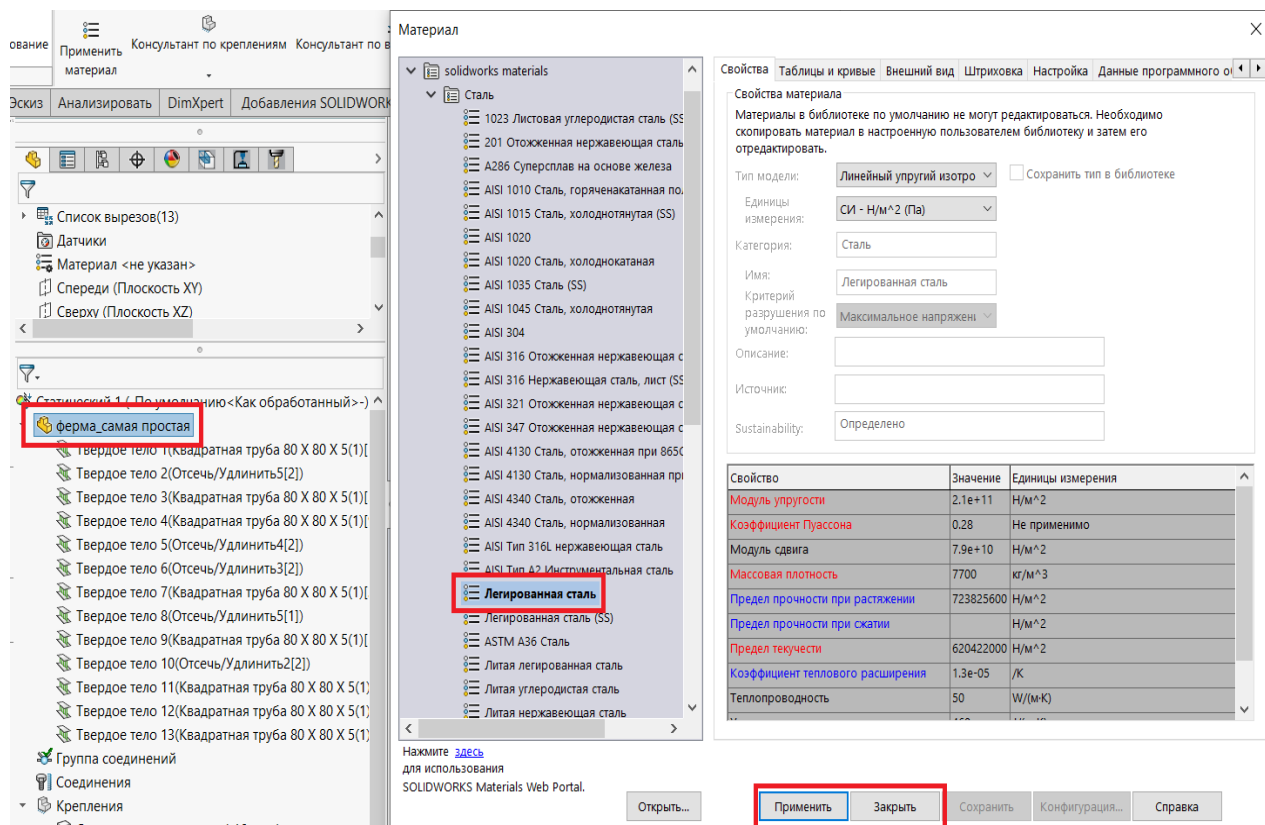


Рисунок 1.32 – Задание материала для элементов фермы

В свойствах компонента «Крепления» выбираем «Использовать справочную геометрию», далее выбираем мышкой все узлы, и необходимо выбрать плоскость, в которой возможны перемещения – «Плоскость Спереди», далее необходимо указать – смещения равны «0» перпендикулярно плоскости.

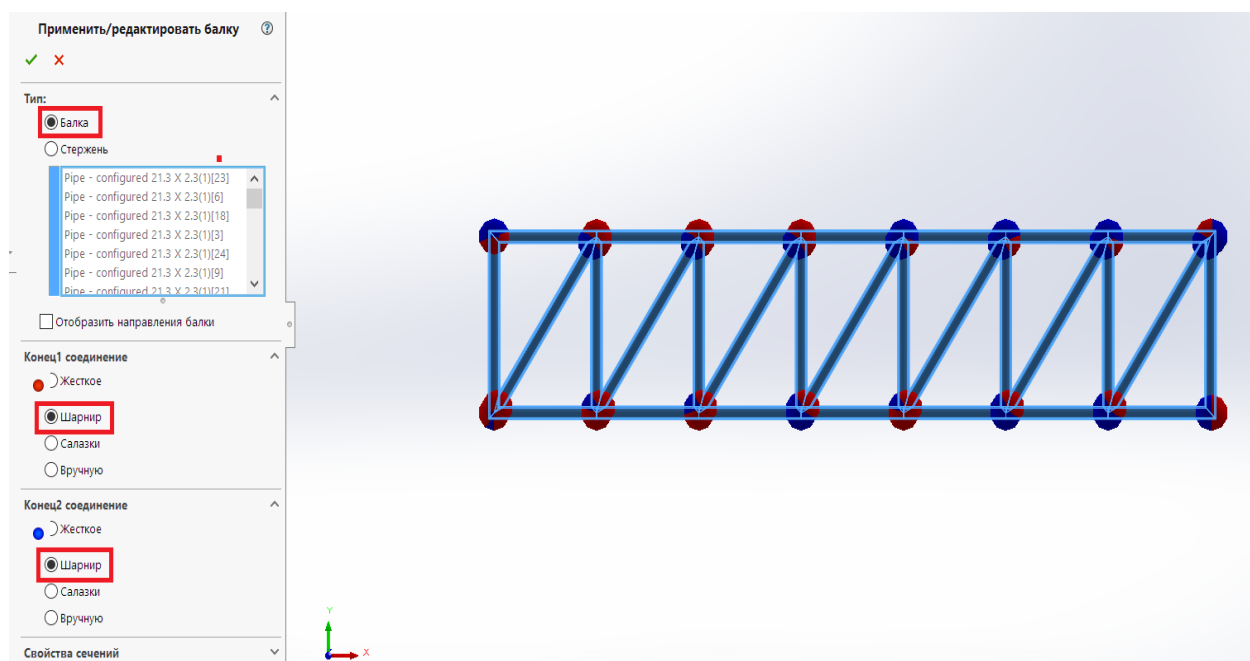


Рисунок 1.33 – Задание шарнирного соединения в узлах фермы

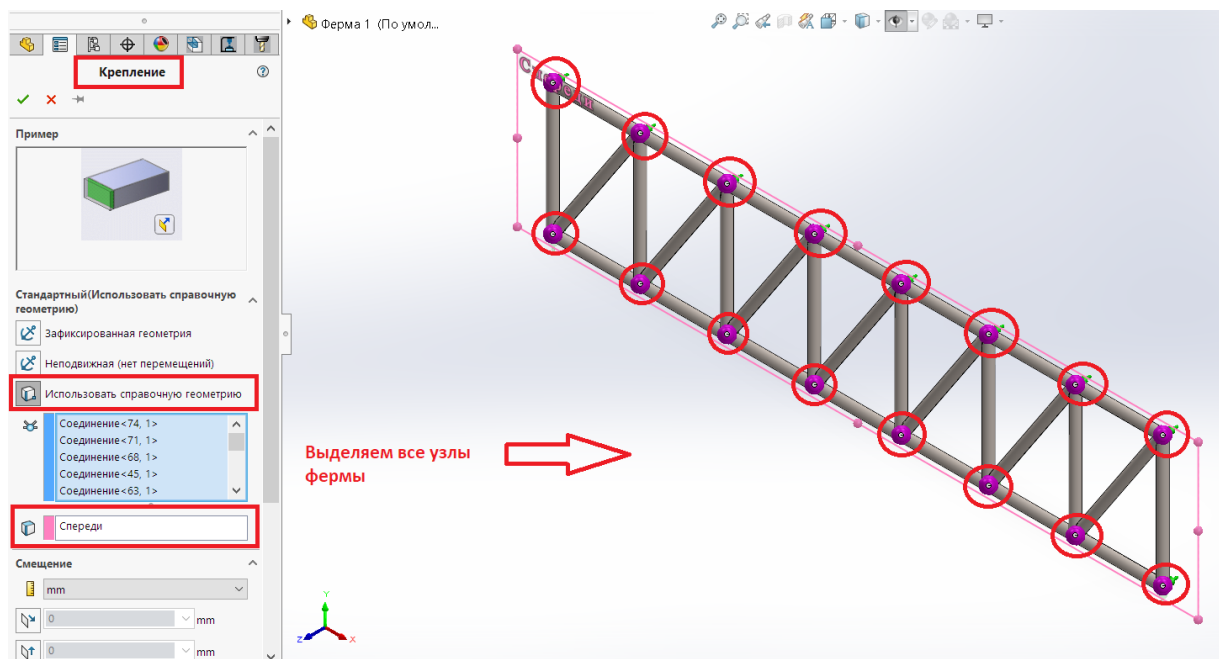
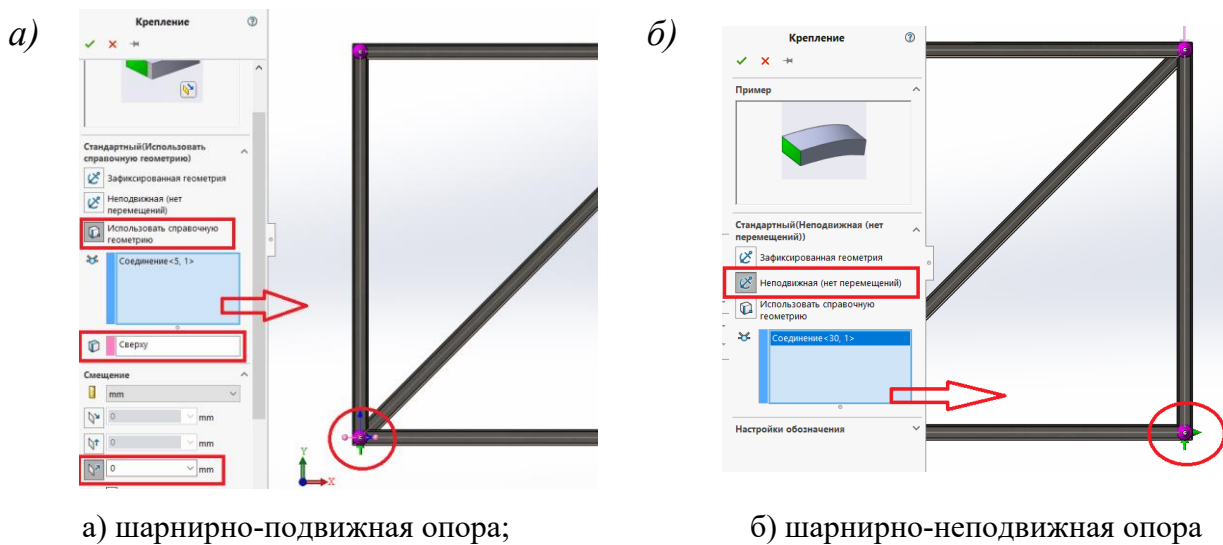


Рисунок 1.34 – Закрепление узлов во фронтальной плоскости

Указываем ограничения перемещений для опорных узлов:



а) шарнирно-подвижная опора;

б) шарнирно-неподвижная опора

Рисунок 1.35 – Назначение связей опорных узлов

В свойствах статического исследования нажимаем правой кнопкой на «внешние нагрузки» из выпадающего списка выбираем:

«Сила» → задаем плоскость: «Сверху» → значение силы – «1» N (перпендикулярно плоскости сверху) → и закрепляем выбор нажатием «ОК».

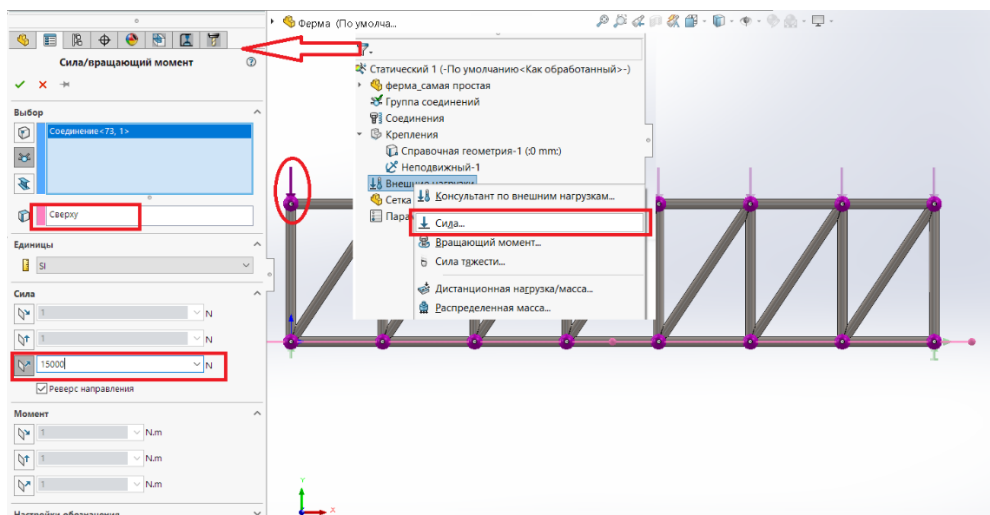


Рисунок 1.36 – Задание внешней нагрузки на ферму

Когда все начальные условия определены, запускаем исследование. От точности описания расчетной модели зависит правильность полученного результата (рисунки 1.37, 1.38).

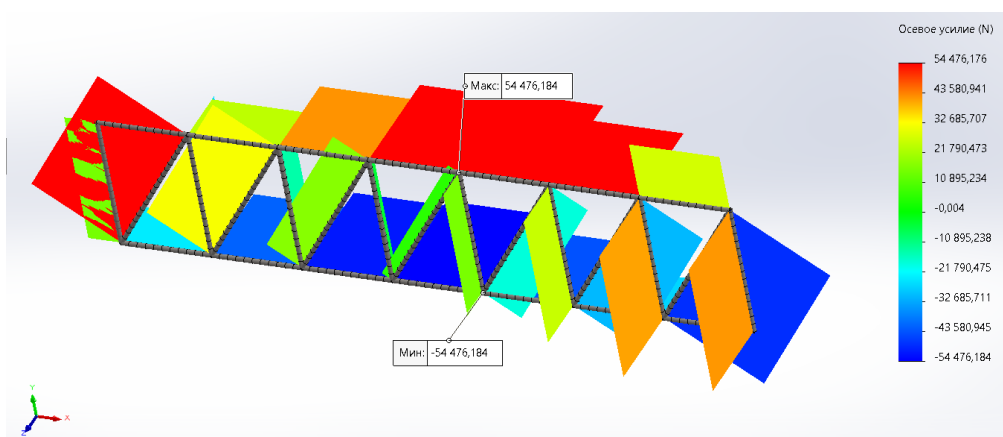


Рисунок 1.37 – Эпюра продольных усилий «N»

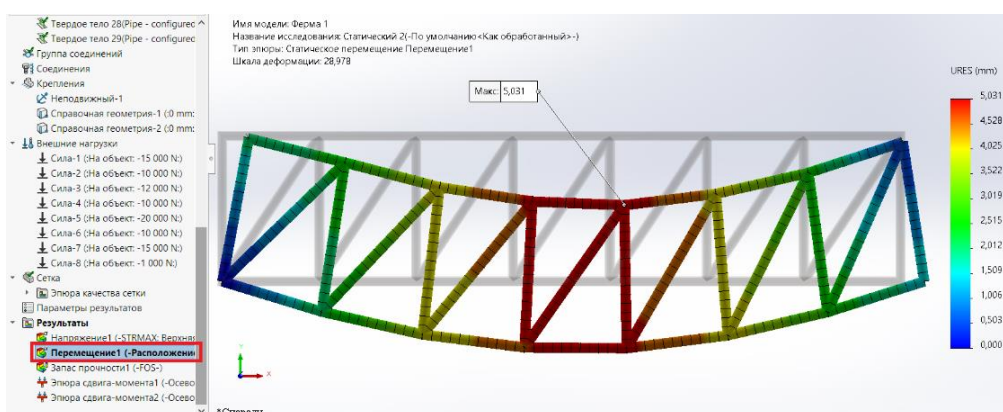


Рисунок 1.38 – Эпюра перемещений

Для оценки запаса прочности выбираем этот пункт меню в разделе «Результаты» (рисунки 1.39, 1.40).

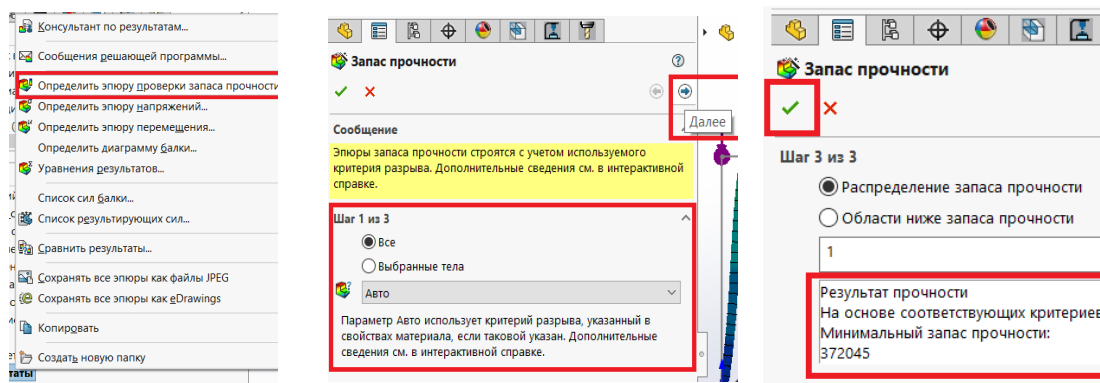


Рисунок 1.39 – Эпюра проверки запаса прочности

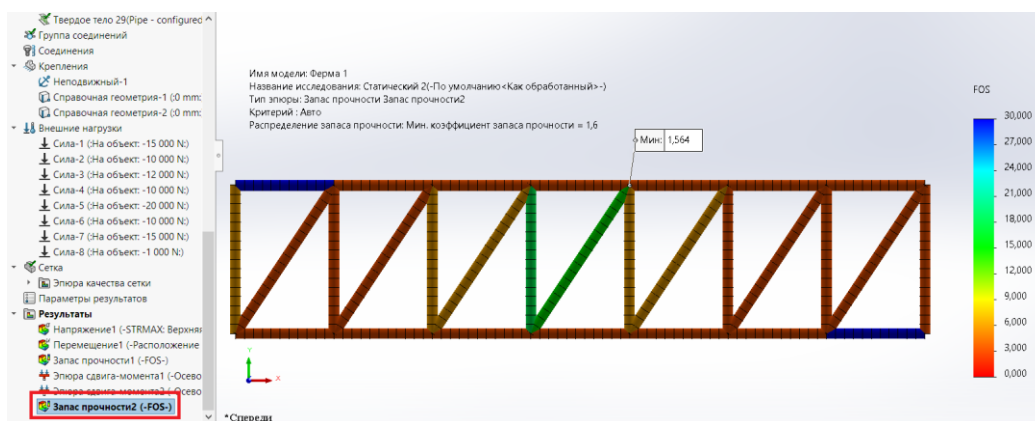


Рисунок 1.40 – Оценка запаса прочности фермы

Коэффициент запаса прочности для в общем случае должен быть больше 1, что означает выполнение условия прочности в сечении. Если коэффициент запаса прочности меньше 1, это свидетельствует о разрушении элемента или конструкции в этом сечении.

Для определения значений опорных реакций в свойствах «Эпюры перемещений» выбираем отображения «Силы реакций Y», вид «N» и нажимаем «ОК» (рисунок 1.41). Используя функцию «Зондирование», выделим узлы, в которых будут действовать реакции, и получим табличку со значениями реакций (рисунок 1.42).

Значения реакций в опорных узлах совпадают с полученными ранее в *MathCAD*.

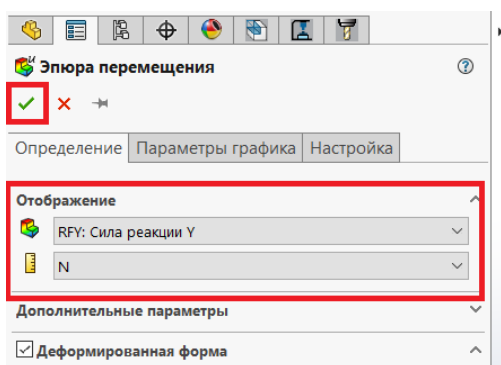


Рисунок 1.41 – Реакции опор

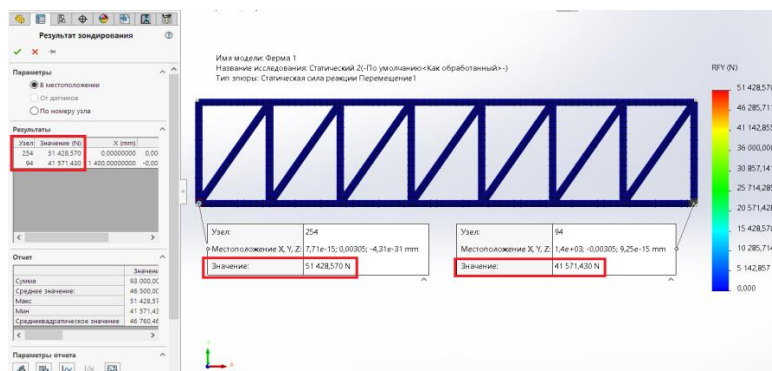


Рисунок 1.42 – Значение реакций в опорных узлах

На рисунке 1.43 приведены результаты расчетов значений усилий N .

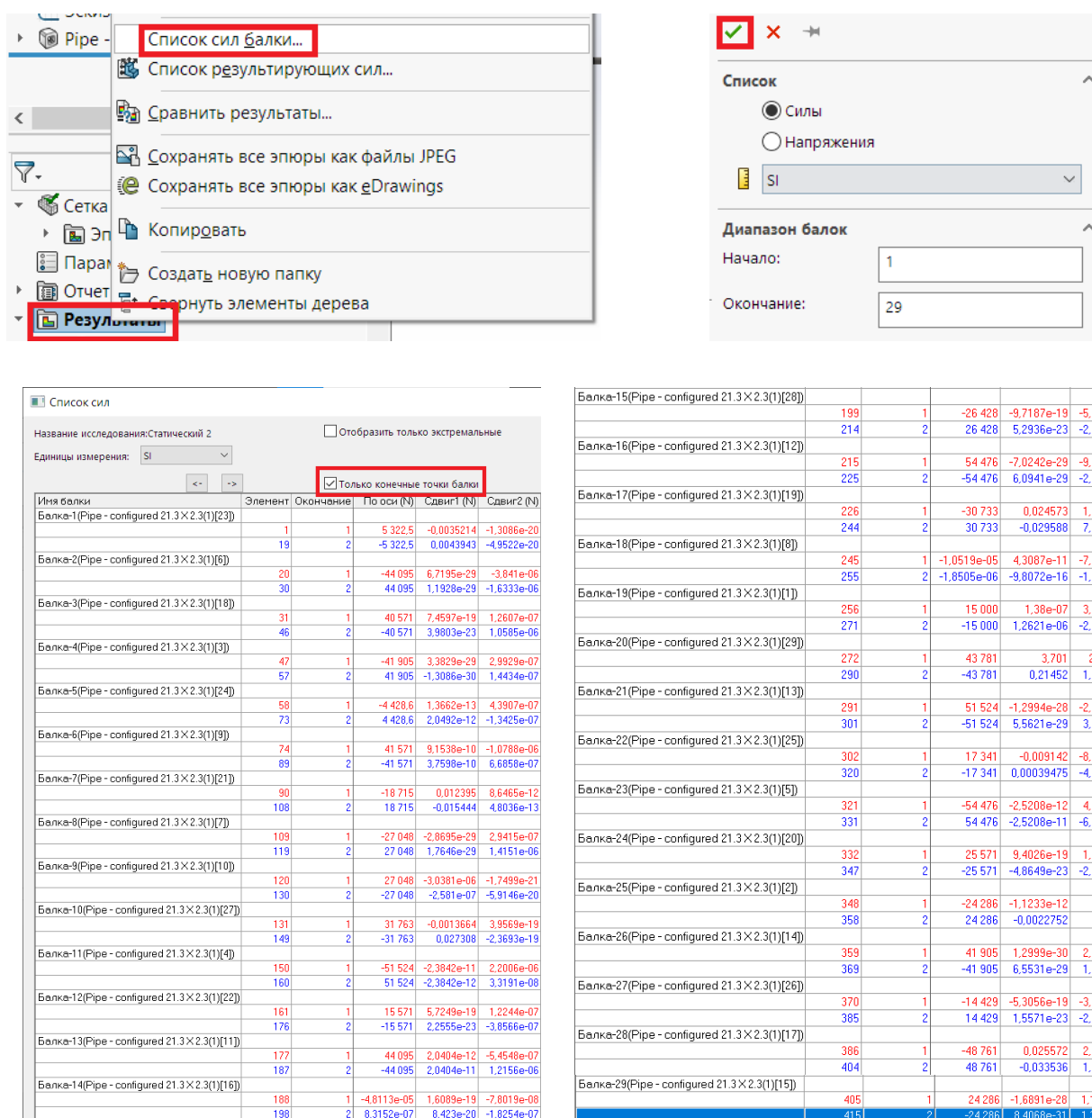
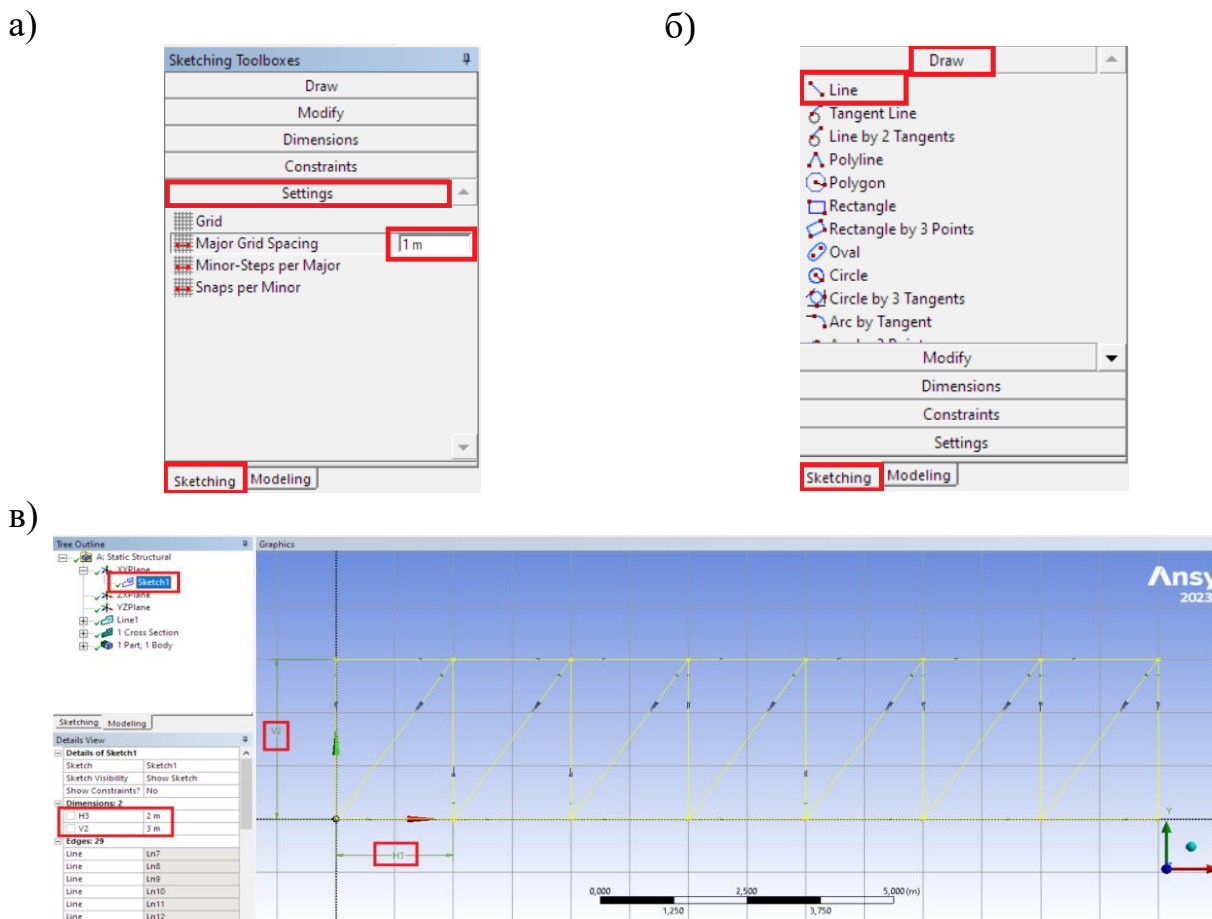


Рисунок 1.43 – Вывод значений усилий N в табличном виде

1.5 Создание фермы и ее статический расчет в ПК ANSYS

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/xsMUj5iG1Hw?si=h-SNtCcSSu-1eaUI>.

Создание расчетной схемы показано на рисунках 1.44, 1.45.



а) задание сетки; б) инструмент для создания эскиза;
в) задание размеров элементов фермы

Рисунок 1.44 – Создание расчетной схемы

Нажимаем на ось «Z», для отображения эскиза во фронтальной плоскости. Используя команду *Line* по узлам сетки формируем плоский эскиз фермы.

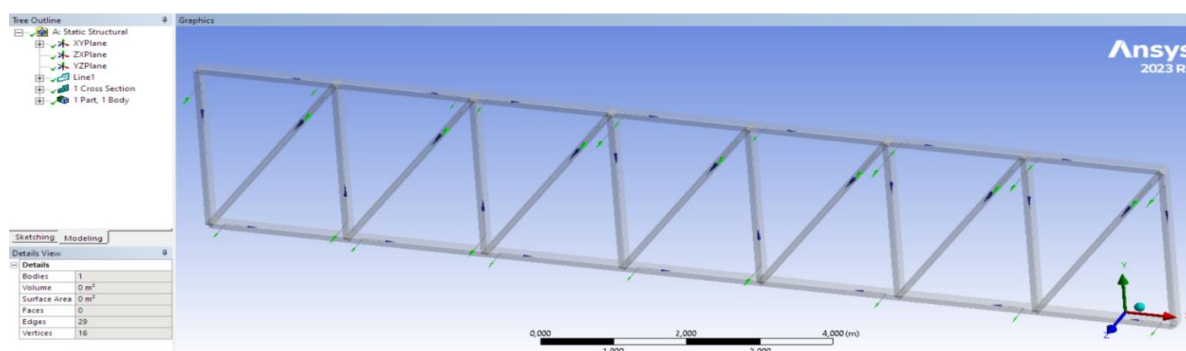


Рисунок 1.45 – Назначение материала элементов фермы

На рисунке 1.46 показано задание внешней нагрузки.

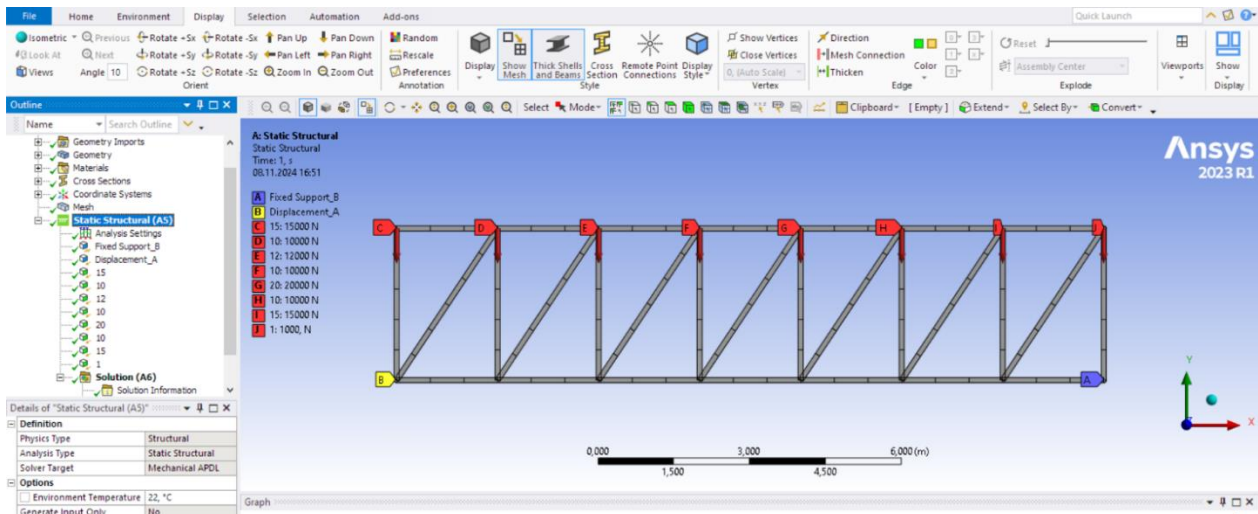


Рисунок 1.46 – Задание внешней нагрузки на ферму

Результаты расчетов представлены на рисунках 1.47–1.50.

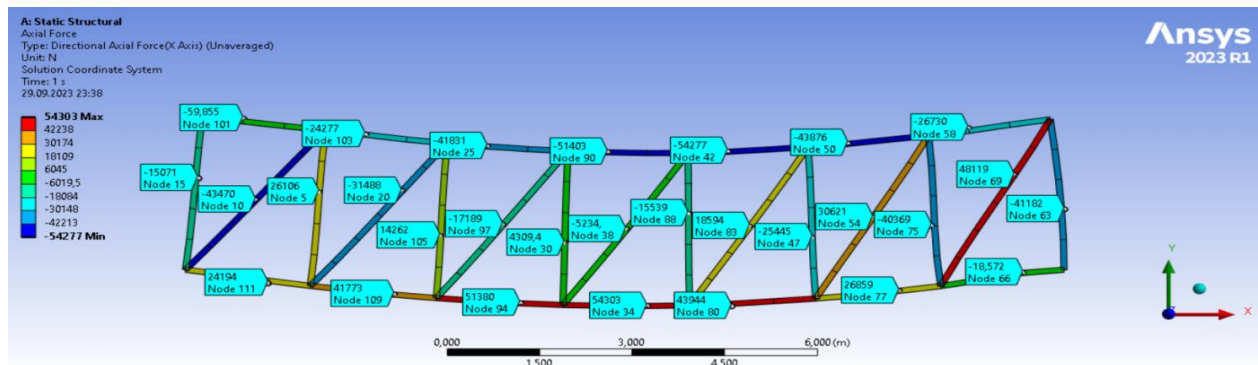


Рисунок 1.47 – Значения продольных усилий в стержнях фермы

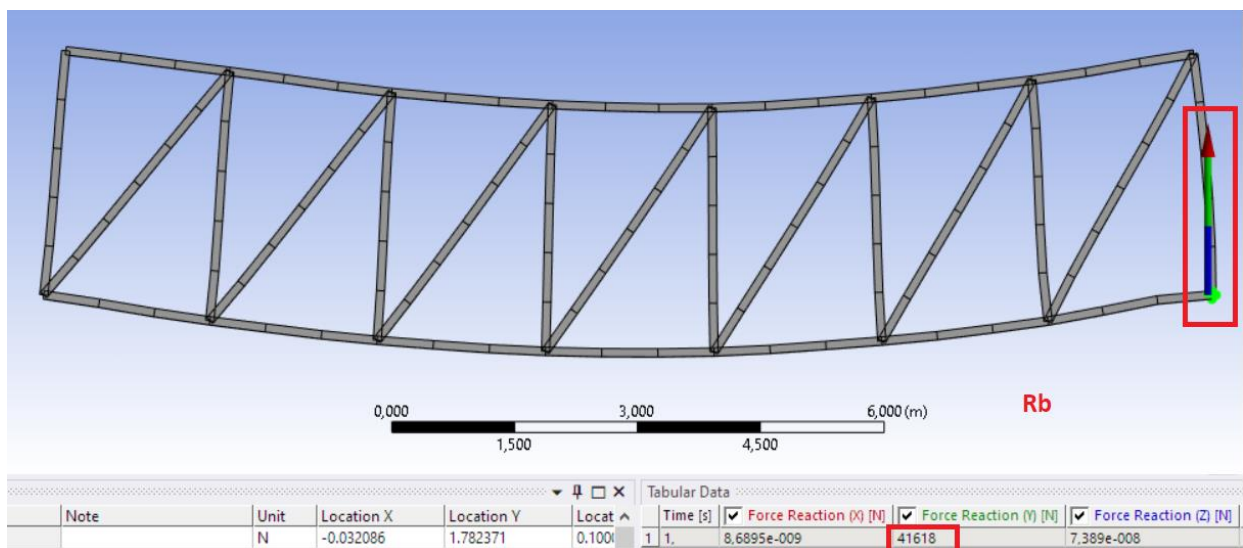


Рисунок 1.48 – Значение реакции правой опоры

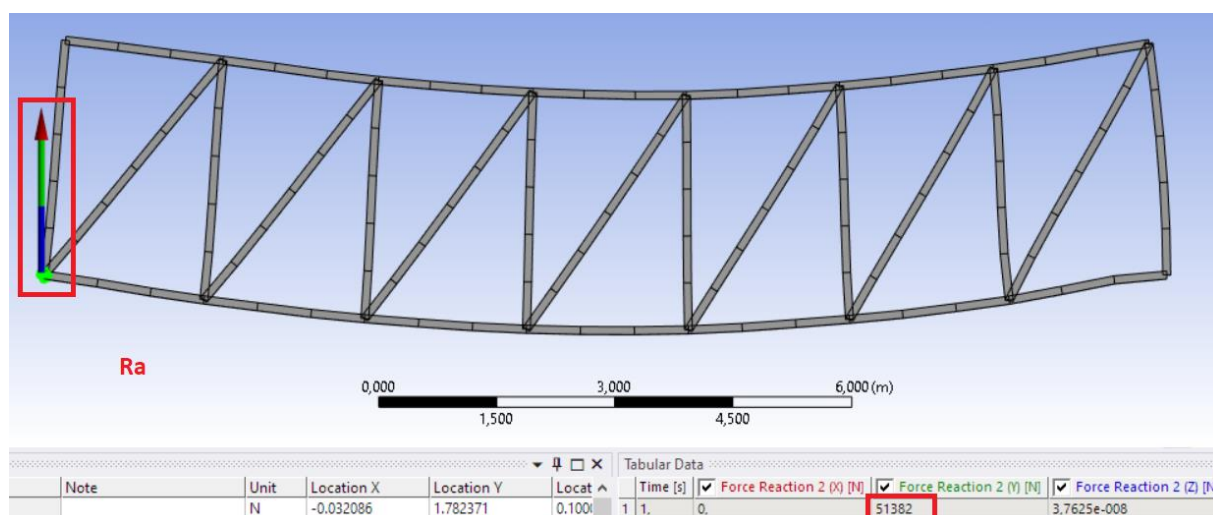


Рисунок 1.49 – Значение реакции левой опоры

Graphics Annotations							
Type	Value	Note	Unit	Location X	Location Y	Location Z	Node ID
Result	-15071		N	-0.032086	1.782371	0.100000	15
Result	-59,855		N	0.695475	2.946857	0.100000	101
Result	-43470		N	0.891779	1.359234	0.100000	10
Result	24194		N	1.094096	-0.266126	0.100000	111
Result	26106		N	1.921491	1.508210	0.100000	5
Result	-24277		N	2.680699	2.636710	0.100000	103
Result	-31488		N	3.263302	1.536112	0.100000	20
Result	41773		N	3.139112	-0.486568	0.100000	109
Result	14262		N	3.891205	0.654783	0.100000	105
Result	-41831		N	4.649964	2.408529	0.100000	25
Result	-17189		N	4.901544	0.872683	0.100000	97
Result	51380		N	5.188259	-0.655754	0.100000	94
Result	4309,4		N	5.903254	0.514194	0.100000	30
Result	-51403		N	6.604037	2.293392	0.100000	90
Result	-5234,		N	6.905055	0.783999	0.100000	38
Result	54303		N	7.242660	-0.706928	0.100000	34
Result	-15539		N	7.909824	1.089487	0.100000	88
Result	-54277		N	8.550623	2.304424	0.100000	42
Result	18594		N	8.904150	0.840063	0.100000	83
Result	43944		N	8.612600	-0.714865	0.100000	80
Result	-25445		N	9.916338	0.622044	0.100000	47
Result	-43876		N	10.498791	2.460472	0.100000	50
Result	30621		N	10.900596	1.019475	0.100000	54
Result	26859		N	11.324219	-0.412759	0.100000	77
Result	-40369		N	11.851688	0.853765	0.100000	75
Result	-26730		N	12.451492	2.764396	0.100000	58
Result	48119		N	13.190935	1.846476	0.100000	69
Result	-18,572		N	13.333340	-0.062138	0.100000	66
Result	-41182		N	14.009071	1.178065	0.100000	63

Рисунок 1.50 – Вывод значений продольных усилий стержней в табличном виде

Вывод

Изучил применение общей системы уравнений равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм, выполнил верификацию продольных усилий, используя программные комплексы *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks* и *ANSYS*. Результаты расчетов во всех программных комплексах совпадают.

2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Использование матриц влияния в расчетах ферм

Цель работы: изучить использование матриц влияния на примере расчета статически определимых ферм.

Исходные данные: см. лабораторную работу № 1.

Порядок выполнения работы:

- 1) составить матрицу влияния для заданной фермы;
- 2) рассчитать усилия фермы с единичной нагрузкой во всех узлах фермы, а также рассчитать 2–4 примера с различной заданной нагрузкой (симметричной и несимметричной);
- 3) для всех примеров сделать рисунки с изображением полученных внутренних усилий в ферме;
- 4) сравнить полученные результаты расчета с результатами, полученными с помощью методики расчета фермы лабораторной работы № 1;
- 5) сделать выводы (проанализировать в каких стержнях возникает наибольшее усилие).

Методика расчета. При проведении расчетов, ориентированных на компьютерные технологии, в строительной механике применяют дискретные расчетные схемы и методы матричного исчисления. Для примера такого подхода рассмотрим расчет фермы с помощью матрицы влияния продольных усилий.

Действующие на ферму нагрузки представим в виде вектора нагрузок, компонентами которого являются значения заданных нагрузок ($P_1..P_t$), пронумерованных в определенном порядке. Результатом расчета будет служить вектор усилий, в котором в заданном порядке будут перечислены значения продольных усилий в конкретных стержнях фермы ($N_1..N_s$).

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_t \end{Bmatrix}; \quad \{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_s \end{Bmatrix},$$

где t – количество действующих нагрузок; s – количество стержней фермы.

Матрица влияния продольных усилий фермы записывается в виде

$$[L_N] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1t} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{s1} & n_{s2} & \cdots & n_{st} \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент n_{ik} матрицы влияния представляет собой величину продольного усилия в i -ом стержне фермы при действии на ферму только одной единичной нагрузки $P_k = 1$.

Вектор продольных усилий в стержнях фермы $\{N\}$ будет определяться произведением матрицы влияния фермы $[L_N]$ на вектор нагрузок $\{P\}$.

$$\{N\} = [L_N] \cdot \{P\}. \quad (2.1)$$

Пример расчета. Для примера рассмотрим расчет фермы, рассмотренной ранее в лабораторной работе № 1 (рисунок 2.1).

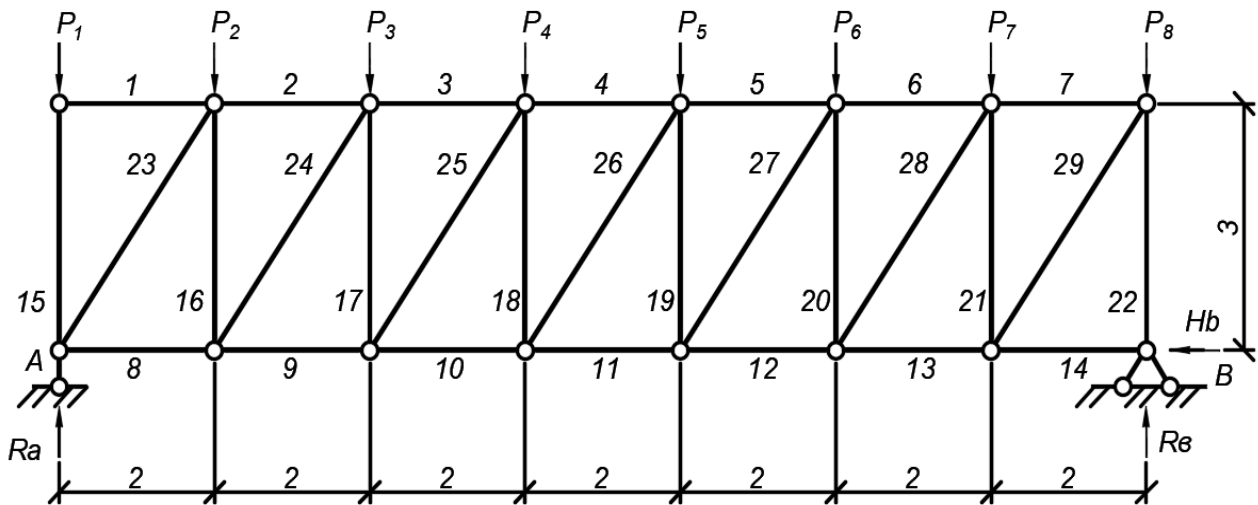


Рисунок 2.1 – Заданная расчетная схема фермы

Составим матрицу влияния фермы. Так как в данной ферме 29 стержней и к ней приложено 8 внешних силы, то матрица влияния будет иметь размеры 8 x 29.

$$[L_N] = \begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & \cdots & n_{1,8} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \cdots & n_{2,8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{29,1} & n_{13,2} & \cdots & n_{29,8} \end{bmatrix}.$$

Для определения элементов $n_{i,k}$ матрицы влияния данной фермы необходимо поочередно просчитать значения внутренних усилий в каждом i -ом стержне фермы при поочередном действии на ферму единичных нагрузок $P_k = 1$, параллельно заполняя соответствующие столбцы матрицы влияния:

при $P_1 = 1; P_2 = 0; P_3 = 0; P_4 = 0; P_5 = 0; P_6 = 0; P_7 = 0; P_8 = 0$ (1 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 1; P_3 = 0; P_4 = 0; P_5 = 0; P_6 = 0; P_7 = 0; P_8 = 0$ (2 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 1; P_4 = 0; P_5 = 0; P_6 = 0; P_7 = 0; P_8 = 0$ (3 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 0; P_4 = 1; P_5 = 0; P_6 = 0; P_7 = 0; P_8 = 0$ (4 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 0; P_4 = 0; P_5 = 1; P_6 = 0; P_7 = 0; P_8 = 0$ (5 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 0; P_4 = 0; P_5 = 0; P_6 = 1; P_7 = 0; P_8 = 0$ (6 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 0; P_4 = 0; P_5 = 0; P_6 = 0; P_7 = 1; P_8 = 0$ (7 столбец);

при $P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 0; P_4 = 0; P_5 = 0; P_6 = 0; P_7 = 0; P_8 = 1$ (8 столбец).

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

$$\begin{aligned}
 & \text{LN} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.571 & -0.476 & -0.381 & -0.286 & -0.19 & -0.095 & 0 \\ 0 & -0.476 & -0.952 & -0.762 & -0.571 & -0.381 & -0.19 & 0 \\ 0 & -0.381 & -0.762 & -1.143 & -0.857 & -0.571 & -0.286 & 0 \\ 0 & -0.286 & -0.571 & -0.857 & -1.143 & -0.762 & -0.381 & 0 \\ 0 & -0.19 & -0.381 & -0.571 & -0.762 & -0.952 & -0.476 & 0 \\ 0 & -0.095 & -0.19 & -0.286 & -0.381 & -0.476 & -0.571 & 0 \\ 0 & 0.571 & 0.476 & 0.381 & 0.286 & 0.19 & 0.095 & 0 \\ 0 & 0.476 & 0.952 & 0.762 & 0.571 & 0.381 & 0.19 & 0 \\ 0 & 0.381 & 0.762 & 1.143 & 0.857 & 0.571 & 0.286 & 0 \\ 0 & 0.286 & 0.571 & 0.857 & 1.143 & 0.762 & 0.381 & 0 \\ 0 & 0.19 & 0.381 & 0.571 & 0.762 & 0.952 & 0.476 & 0 \\ 0 & 0.095 & 0.19 & 0.286 & 0.381 & 0.476 & 0.571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.143 & 0.714 & 0.571 & 0.429 & 0.286 & 0.143 & 0 \\ 0 & -0.143 & -0.286 & 0.571 & 0.429 & 0.286 & 0.143 & 0 \\ 0 & -0.143 & -0.286 & -0.429 & 0.429 & 0.286 & 0.143 & 0 \\ 0 & -0.143 & -0.286 & -0.429 & -0.571 & 0.286 & 0.143 & 0 \\ 0 & -0.143 & -0.286 & -0.429 & -0.571 & -0.714 & 0.143 & 0 \\ 0 & -0.143 & -0.286 & -0.429 & -0.571 & -0.714 & -0.857 & 0 \\ 0 & -0.143 & -0.286 & -0.429 & -0.571 & -0.714 & -0.857 & -1 \\ 0 & -1.03 & -0.858 & -0.687 & -0.515 & -0.343 & -0.172 & 0 \\ 0 & 0.172 & -0.858 & -0.687 & -0.515 & -0.343 & -0.172 & 0 \\ 0 & 0.172 & 0.343 & -0.687 & -0.515 & -0.343 & -0.172 & 0 \\ 0 & 0.172 & 0.343 & 0.515 & -0.515 & -0.343 & -0.172 & 0 \\ 0 & 0.172 & 0.343 & 0.515 & 0.687 & -0.343 & -0.172 & 0 \\ 0 & 0.172 & 0.343 & 0.515 & 0.687 & 0.858 & -0.172 & 0 \\ 0 & 0.172 & 0.343 & 0.515 & 0.687 & 0.858 & 1.03 & 0 \end{pmatrix} \\
& \text{P} := \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \text{N} := \text{LN} \cdot \text{P} \\
& \text{N} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & -24.277 \\ \hline 2 & -41.884 \\ \hline 3 & -51.524 \\ \hline 4 & -54.477 \\ \hline 5 & -44.082 \\ \hline 6 & -27.035 \\ \hline 7 & 24.277 \\ \hline 8 & 41.884 \\ \hline 9 & 51.524 \\ \hline 10 & 54.477 \\ \hline 11 & 44.082 \\ \hline 12 & 27.035 \\ \hline 13 & 0 \\ \hline 14 & -15 \\ \hline 15 & 26.433 \\ \hline 16 & 14.433 \\ \hline 17 & 4.433 \\ \hline 18 & -15.567 \\ \hline 19 & -25.567 \\ \hline 20 & -40.567 \\ \hline 21 & -41.567 \\ \hline 22 & -43.776 \\ \hline 23 & -31.756 \\ \hline 24 & -17.344 \\ \hline 25 & -5.324 \\ \hline 26 & 18.716 \\ \hline 27 & 30.726 \\ \hline 28 & 48.756 \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

Вывод

Изучил использование матриц влияния на примере расчета статически определимых ферм, результаты продольных усилий совпадают с результатами лабораторной работы № 1.

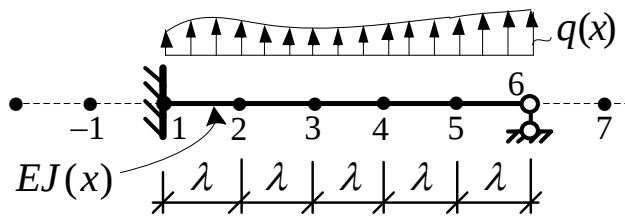
3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Расчет балок методом конечных разностей

Цель работы: изучить применение метода конечных разностей для расчета балочных систем, проверить результаты в программах *Lira*, *Scad*, *SolidWorks* и *ANSYS*. Оценить погрешность по максимальному значению момента и прогиба.

Исходные данные: длина балки (количество букв в фамилии–1)– 2; значение распределенной нагрузки в узлах q_i – порядковый номер буквы фамилии в алфавите.

Для расчета стержневых изгибаемых систем могут использоваться три варианта дифференциальных уравнений равновесия:



$$1) \quad y'' - \frac{M(x)}{EJ(x)} = 0; \quad (3.1)$$

$$2) \quad M'' - q(x) = 0, \quad (3.2)$$

$$3) \quad y^{IV} - \frac{q(x)}{EJ(x)} = 0, \quad (3.3)$$

Рисунок 3.1 – Стержневая система

которые в конечных разностях для i -ой точки (рисунок 3.1) имеют вид:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{M_i}{EJ} \cdot \lambda^2; \quad (3.4)$$

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = q_i \lambda^2; \quad (3.5)$$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{q_i}{EJ} \lambda^2. \quad (3.6)$$

Переходя от дифференцирования к конечным разностям мы должны разбить систему (балку) на заданное число конечных участков, граничные точки между которыми принимаются за расчетные точки (сечения). Для расчетных точек, в которых определяемые величины (перемещения, усилия) неизвестны, и необходимо записывать уравнения (3.4–3.6). При этом, как несложно увидеть, в уравнениях будут появляться перемещения (усилия) в так называемых законтурных точках (например, в точках –1 и 7 на рисунке 3.1). Для определения этих величин могут использоваться граничные условия сооружений, то есть известные значения перемещений и усилий на границах сооружения, связанные с условиями закрепления крайних точек системы.

Шарнирное опирание (рисунок 3.2): $y_i = 0$

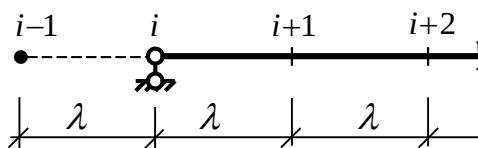


Рисунок 3.2 – Шарнирное опирание

Рассмотрим применение метода конечных разностей к решению задачи изгиба двухопорной балки, нагруженной распределенной (по треугольному закону) нагрузкой (рисунок 3.3).

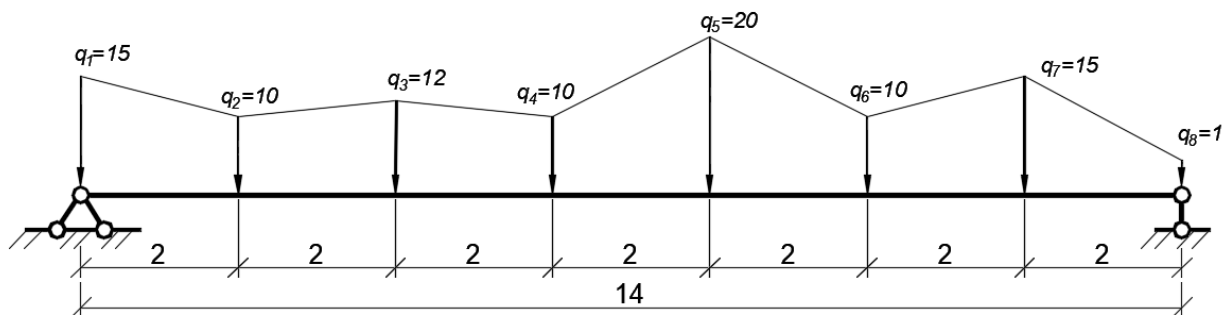


Рисунок 3.3 – Заданная расчетная схема балки

Определим вначале изгибающие моменты в системе, для чего воспользуемся вначале уравнением (3.2) – $M'' - q(x) = 0$, которое в конечных разностях представлено в (3.5).

Разобьем балку на пять частей ($\lambda = \frac{l}{n}$ м) и составим уравнения (3.5) для точек 1–6 (последовательно принимая i равным номерам этих точек).

$\begin{cases} M_0 - 2 \cdot M_1 + M_2 = q_1 \cdot \lambda^2 \\ M_1 - 2 \cdot M_2 + M_3 = q_2 \cdot \lambda^2 \\ M_2 - 2 \cdot M_3 + M_4 = q_3 \cdot \lambda^2 \\ M_3 - 2 \cdot M_4 + M_5 = q_4 \cdot \lambda^2 \\ M_4 - 2 \cdot M_5 + M_6 = q_5 \cdot \lambda^2 \\ M_5 - 2 \cdot M_6 + M_7 = q_6 \cdot \lambda^2 \end{cases}$	Согласно граничным условиям при этом будем иметь: $M_0 = 0$ и $M_7 = 0$ $\text{Find}(M1, M2, M3, M4, M5, M6) = \begin{pmatrix} 145.714 \\ 251.429 \\ 309.143 \\ 326.857 \\ 264.571 \\ 162.286 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$
--	--

Для определения прогибов системы воспользуемся теперь уравнением (3.1), которое в конечных разностях для произвольного i -го узла имеет вид (3.4). Записав уравнение (3.4) для точек 1–6, получим систему уравнений:

$\begin{cases} y_0 - 2 \cdot y_1 + y_2 = \frac{M_1}{EI} \cdot \lambda^2 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 + y_3 = \frac{M_2}{EI} \cdot \lambda^2 \\ y_2 - 2 \cdot y_3 + y_4 = \frac{M_3}{EI} \cdot \lambda^2 \\ y_3 - 2 \cdot y_4 + y_5 = \frac{M_4}{EI} \cdot \lambda^2 \\ y_4 - 2 \cdot y_5 + y_6 = \frac{M_5}{EI} \cdot \lambda^2 \\ y_5 - 2 \cdot y_6 + y_7 = \frac{M_6}{EI} \cdot \lambda^2 \end{cases}$	решая которую, с учетом граничных условий ($y_0 = 0$ и $y_7 = 0$), найдем $\text{Find}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = \begin{pmatrix} -25.31 \\ -45.498 \\ -56.848 \\ -57.33 \\ -46.322 \\ -26.013 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$
--	---

Процедура расчета рассматриваемой задачи в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

С примером составления *MathCAD*-программы можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/Ubxg1Gw0rGs?si=J5ki_YoPd-Uwsfw1.

Перевод единиц измерения

кН := 1 м := 1 Н := 0.001кН мм := 0.001м

$L_m := 14\text{м}$ длина балки $n := 7$ число участков $EI := 113788\text{кН} \cdot \text{м}^2$

$\lambda := \frac{L}{n} = 2\text{м}$ длина участка

Определение изгибающих моментов

Нагрузки в точках

Н	И	К	И	Т	И	Н	А
$q_0 := -15 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_1 := -10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_2 := -12 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_3 := -10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_4 := -20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_5 := -10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_6 := -15 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$q_7 := -1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$

Обозначим искомые неизвестные изгибающие моменты в сечениях разбивки

$M_0 := 0$ $M_1 := 0$ $M_2 := 0$ $M_3 := 0$ $M_4 := 0$ $M_5 := 0$ $M_6 := 0$ $M_7 := 0$

Запишем систему уравнений метода конечных разностей и граничных условий для изгибающих моментов

Given

$M_0 - 2 \cdot M_1 + M_2 = q_1 \cdot \lambda^2$

$M_1 - 2 \cdot M_2 + M_3 = q_2 \cdot \lambda^2$

$M_2 - 2 \cdot M_3 + M_4 = q_3 \cdot \lambda^2$

$M_3 - 2 \cdot M_4 + M_5 = q_4 \cdot \lambda^2$

$M_4 - 2 \cdot M_5 + M_6 = q_5 \cdot \lambda^2$

$M_5 - 2 \cdot M_6 + M_7 = q_6 \cdot \lambda^2$

$M_0 = 0$ $M_7 = 0$ граничные условия

$$\text{Find}(M1, M2, M3, M4, M5, M6) = \begin{pmatrix} 145.714 \\ 251.429 \\ 309.143 \\ 326.857 \\ 264.571 \\ 162.286 \end{pmatrix} \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определение перемещений

Значения изгибающих моментов в точках определены выше и равны

$$M0 := 0 \quad M1 := 145.714 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M2 := 251.429 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M3 := 309.143 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M4 := 326.857 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M5 := 264.571 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M6 := 162.286 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M7 := 0$$

Обозначим искомые перемещения в сечениях

$$y0 := 0 \quad y1 := 0 \quad y2 := 0 \quad y3 := 0 \quad y4 := 0 \quad y5 := 0 \quad y6 := 0 \quad y7 := 0$$

Запишем систему уравнений метода конечных разностей и граничных условий для перемещений

Given

$$y0 - 2 \cdot y1 + y2 = \frac{M1}{EI} \cdot \lambda^2$$

$$y1 - 2 \cdot y2 + y3 = \frac{M2}{EI} \cdot \lambda^2$$

$$y2 - 2 \cdot y3 + y4 = \frac{M3}{EI} \cdot \lambda^2$$

$$y3 - 2 \cdot y4 + y5 = \frac{M4}{EI} \cdot \lambda^2$$

$$y4 - 2 \cdot y5 + y6 = \frac{M5}{EI} \cdot \lambda^2$$

$$y5 - 2 \cdot y6 + y7 = \frac{M6}{EI} \cdot \lambda^2$$

$$y0 = 0 \quad y7 = 0 \quad \text{Вертикальные перемещения сечения}$$

$$\text{Find}(y1, y2, y3, y4, y5, y6) = \begin{pmatrix} -25.31 \\ -45.498 \\ -56.848 \\ -57.33 \\ -46.322 \\ -26.013 \end{pmatrix} \text{ мм}$$

Выполним проверку результатов расчета в программе *Lira*.

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/UA6Ip74d1E0?si=gykNuEZyrD_Krvoh.

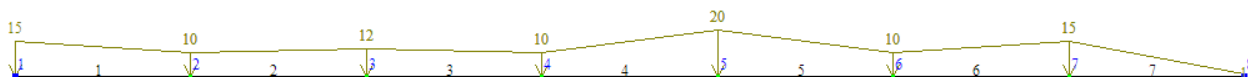


Рисунок 3.4 – Расчетная схема

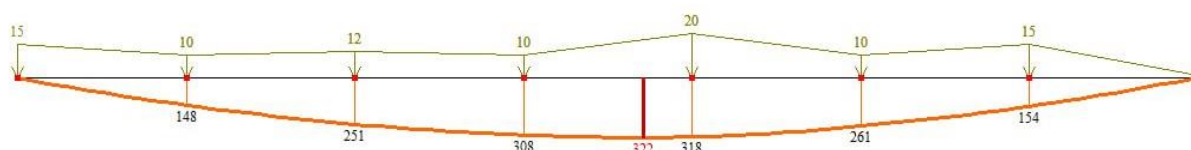


Рисунок 3.5 – Эпюра изгибающих моментов в балке

Результаты расчета в программе *Lira* представим в виде таблиц.

Таблица усилий (стержни)

№ элем	№ сечен	Усилия			
		N (кН)	Mk (кН*м)	Mu (кН*м)	Qz (кН)
1	1	0.000	0.000	0.000	87.191
1	2	0.000	0.000	147.714	62.191
2	1	0.000	0.000	147.714	62.191
2	2	0.000	0.000	250.762	40.190
3	1	0.000	0.000	250.762	40.190
3	2	0.000	0.000	308.476	18.190
4	1	0.000	0.000	308.476	18.190
4	2	0.000	0.000	318.191	-11.810
5	1	0.000	0.000	318.191	-11.810
5	2	0.000	0.000	261.238	-41.810
6	1	0.000	0.000	261.238	-41.810
6	2	0.000	0.000	154.286	-66.810
7	1	0.000	0.000	154.286	-66.810
7	2	0.000	0.000	0.000	-82.810

Единицы измерения усилий: кН

Единицы измерения напряжений: кН/м²

Единицы измерения моментов: кН*м

Единицы измерения распределенных моментов: (кН*м)/м

Единицы измерения распределенных перерезывающих сил: кН/м

Единицы измерения перемещений поверхностей в элементах: м

Таблица узлов

№ узла	Перемещения					
	X (мм)	Y (мм)	Z (мм)	UX рад*1000	UY рад*1000	UZ рад*1000
1	0.000	0.000	0.000	0.000	12.826	0.000
2	0.000	0.000	-24.712	0.000	11.454	0.000
3	0.000	0.000	-44.356	0.000	7.887	0.000
4	0.000	0.000	-55.319	0.000	2.907	0.000
5	0.000	0.000	-55.566	0.000	-2.690	0.000
6	0.000	0.000	-44.835	0.000	-7.872	0.000
7	0.000	0.000	-25.053	0.000	-11.598	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	-13.001	0.000

Fri Nov 22 14:50:47 2024 для метода: основная схема								
У С И Л И Я / НАПРЯЖЕНИЯ / В ЭЛЕМЕНТАХ								
2	1 - 1	1 - 2	2 - 1	2 - 2	3 - 1	3 - 2	4 - 1	4 - 2
	1	1	2	2	3	3	4	4
	2	2	3	3	4	4	5	5
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
M		147.714	147.714	250.762	250.762	308.476	308.476	318.190
Q	87.1905	62.1905	62.1905	40.1905	40.1905	18.1904	18.1904	-11.8095
2	5 - 1	5 - 2	6 - 1	6 - 2	7 - 1	7 - 2		
	5	5	6	6	7	7		
	6	6	7	7	8	8		
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
M	318.190	261.238	261.238	154.285	154.285			
Q	-11.8095	-41.8095	-41.8095	-66.8095	-66.8095	-62.8095		

Единицы измерения линейных перемещений: мм

Единицы измерения угловых перемещений: RD*1000

Fri Nov 22 14:51:47 2024 для метода: основная схема								
П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В								
Номера узлов:	1	2	3	4	5	6	7	8
1 - ЗАГРУЖЕНИЕ 1								
Z		-24.712	-44.356	-55.318	-55.565	-44.834	-25.053	
UY	12.826	11.454	7.8870	2.9065	-2.6901	-7.8716	-11.597	-13.000

Рисунок 3.6 – Верификация результатов расчета ПК *Lira* в табличном виде

Максимальное значение $M_{max} = 322$ кН*м, перемещение в $z_{max} = 55,57$ мм. Выполним проверку результатов расчета в программе *Scad*.

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/pon78RCx09M?si=OysjV4ngE2aunL6F>.

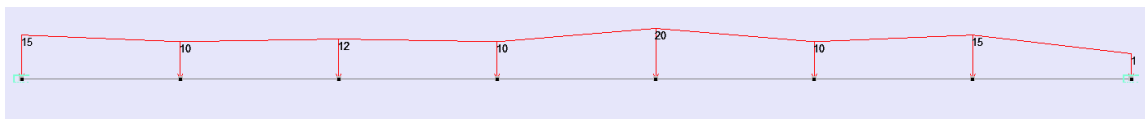


Рисунок 3.7 – Расчетная схема балки в программе *Scad*

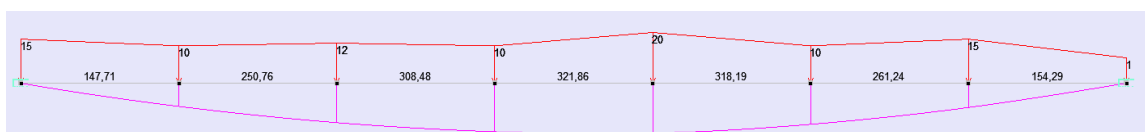


Рисунок 3.8 – Эпюра изгибающих моментов

Результаты расчета в программе *Scad* представим в виде таблиц.

Разработан SCAD Soft
10.10.2023 15:33:00 балка основная схема 6.0001

У С И Л И Я / НАПРЯЖЕНИЯ / В ЭЛЕМЕНТАХ										
002_	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3	4-1
	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5
L1 - "распределенная нагрузка"										
My	80.1071	147.714	147.714	204.738	250.761	250.761	285.119	308.476	308.476	
Qz	87.1904	73.4404	62.1904	51.6904	40.1904	40.1904	28.6904	18.1904	18.1904	
002_	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	6-1	6-2	6-3	7-1	7-2
	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
L1 - "распределенная нагрузка"										
My	320.833	318.19	318.19	297.214	261.238	261.238	214.011	154.285	154.285	81.1428
Qz	5.69047	-11.8095	-11.8095	-29.3095	-41.8095	-41.8095	-53.0595	-66.8095	-66.8095	-78.3095

Разработан SCAD Soft
10.10.2023 15:36:57 балка основная схема 5.0001

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В							
	1	2	3	4	5	6	7
L1 - "распределенная нагрузка"							
Z	-24.7045	-44.342	-55.3008	-55.5476	-44.8204	-25.0451	
UY	0.73464	0.65607	0.45175	0.16647	-0.15408	-0.45086	-0.74464

Величины усилий

Единицы измерения:

- Силы: кН

- Единицы длины для силовых факторов: м

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: Все

Список сечений: Все

Список загружений/комбинаций: Все

Список факторов: Все

Величины усилий					
Элемент	Сечение	Загружение	Значение		
			N	My	Qz
1	1	1	0	3,893e-013	87,19
1	2	1	0	80,107	73,44
1	3	1	0	147,714	62,19
2	1	1	0	147,714	62,19
2	2	1	0	204,738	51,69
2	3	1	0	250,762	40,19
3	1	1	0	250,762	40,19
3	2	1	0	285,119	28,69
3	3	1	0	308,476	18,19
4	1	1	0	308,476	18,19
4	2	1	0	320,833	5,69
4	3	1	0	318,19	-11,81
5	1	1	0	318,19	-11,81
5	2	1	0	297,214	-29,31
5	3	1	0	261,238	-41,81
6	1	1	0	261,238	-41,81
6	2	1	0	214,012	-53,06
6	3	1	0	154,286	-66,81
7	1	1	0	154,286	-66,81
7	2	1	0	81,143	-78,31
7	3	1	0	0	-82,81

Величины перемещений

Единицы измерения:

- Линейные перемещения: мм

- Угловые перемещения: град

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: Все

Список загружений/комбинаций: Все

Список факторов: Все

Величины перемещений				
Узел	Загружение	Значение		
		X	Z	Uy
1	1	0	0	0,735
2	1	0	-24,705	0,656
3	1	0	-44,342	0,452
4	1	0	-55,301	0,166
5	1	0	-55,548	-0,154
6	1	0	-44,82	-0,451
7	1	0	-25,045	-0,664
8	1	0	0	-0,745

Рисунок 3.9 – Верификация результатов расчета ПК Scad в табличном виде

Максимальное значение $M_4 = 320,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$; перемещение в $z_4 = 55,55 \text{ мм}$.

Выполним проверку результатов расчета в программе *SolidWorks* (рисунки 3.10–3.12).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/_E_zQpSbVv8?si=kcno7amihctoeUvL.

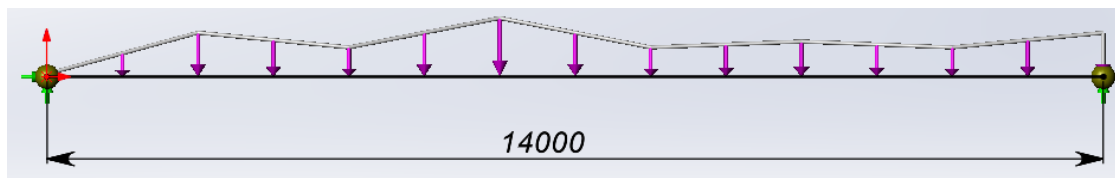


Рисунок 3.10 – Расчетная схема балки в программе *SolidWorks*

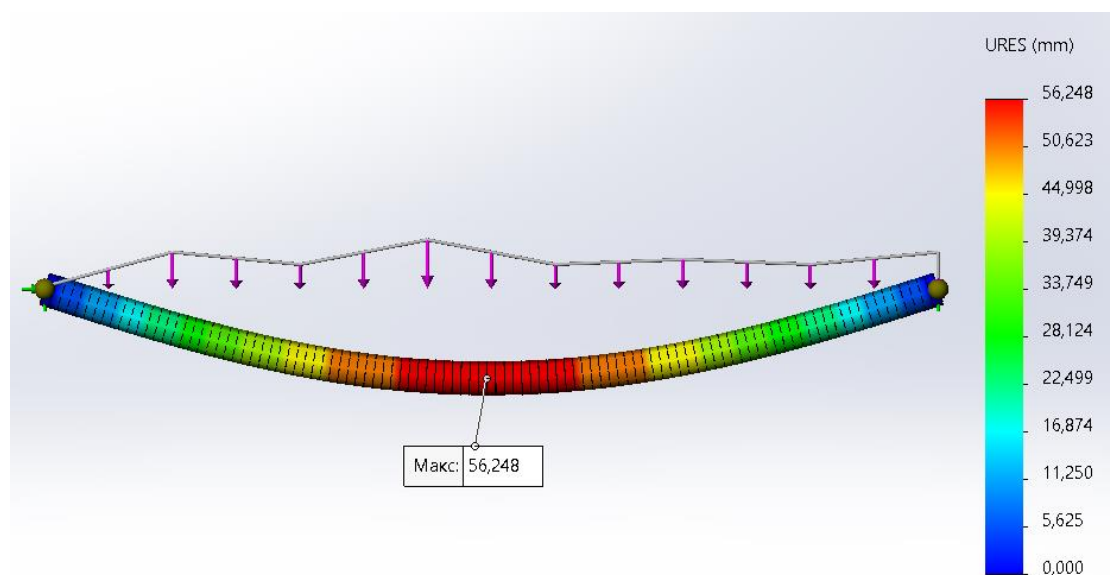


Рисунок 3.11 – Результаты расчета «Перемещения» ($z_{\max} = 56,25 \text{ мм}$)

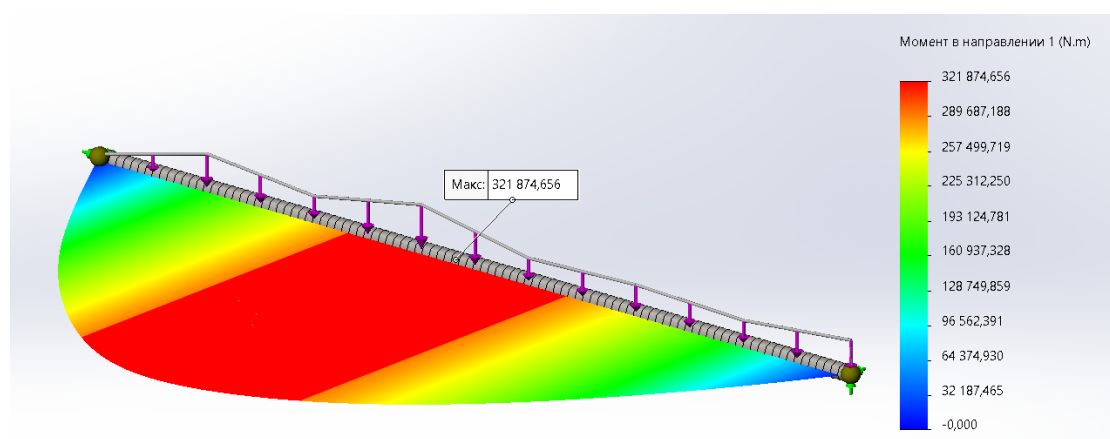


Рисунок 3.12 – Результаты расчета «Момент» ($M_{\max} = 321 874,656 \text{ Н} \cdot \text{м}$)

Выполним проверку результатов расчета в программе *ANSYS* (рисунки 3.13–3.20).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/h5U0r3BOrE8?si=9zwhjMJZbRzfdiIB>.

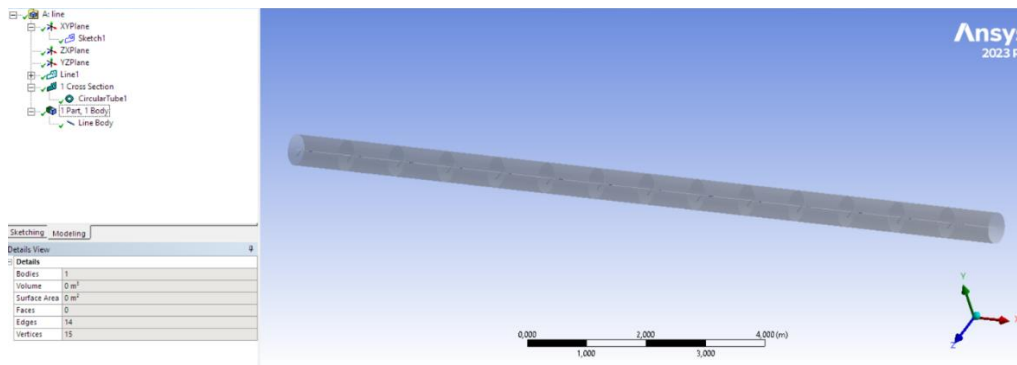


Рисунок 3.13 – Стержневая модель балки

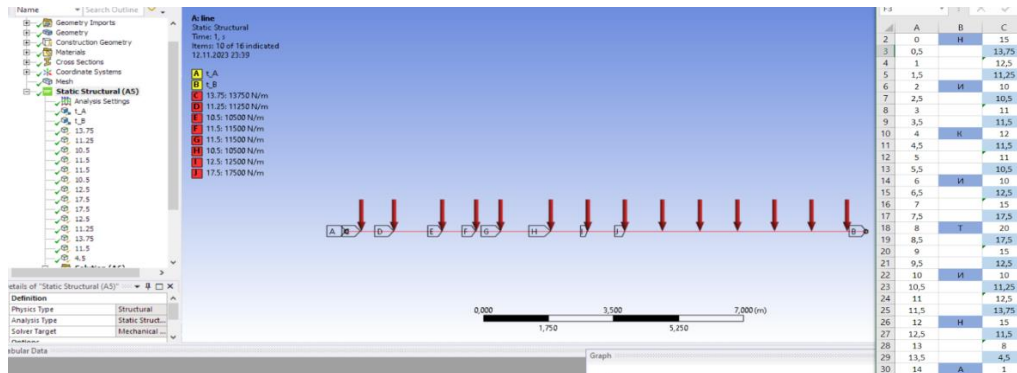


Рисунок 3.14 – Задание распределенной нагрузки на балку

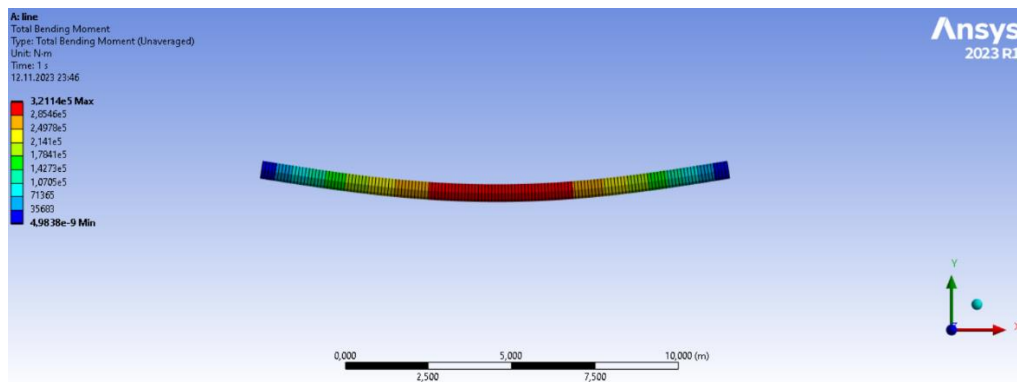


Рисунок 3.15 – Изгибающий момент балки ($M_{\max} = 321,14 \text{ Н} \cdot \text{м}$)

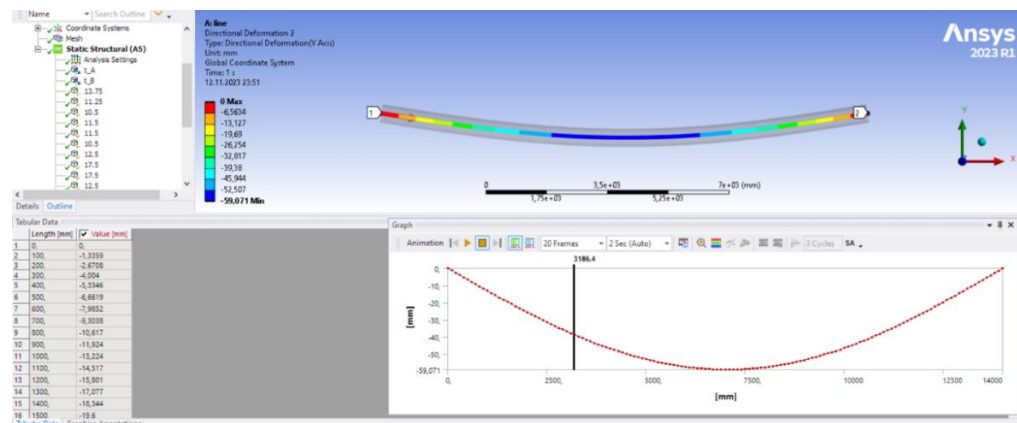


Рисунок 3.16. – Перемещение по оси y ($y_{\max} = 59,051 \text{ мм}$)

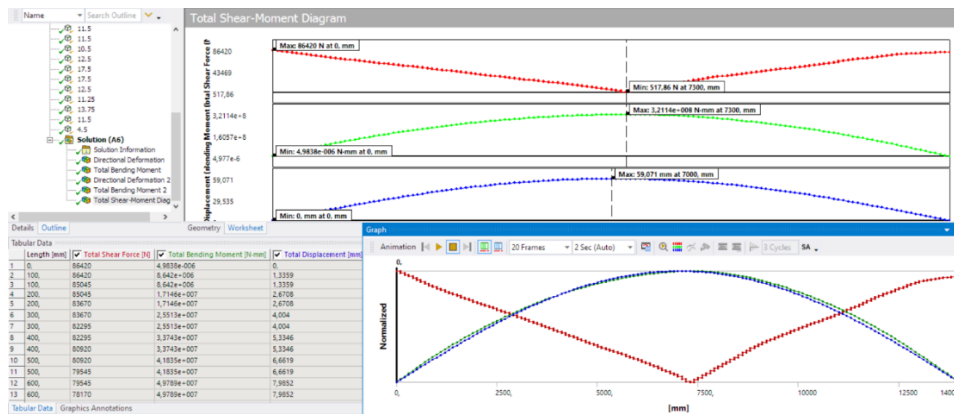


Рисунок 3.17 – Вывод значений изгибающих моментов, поперечных сил и перемещений балки в табличном и графическом видах

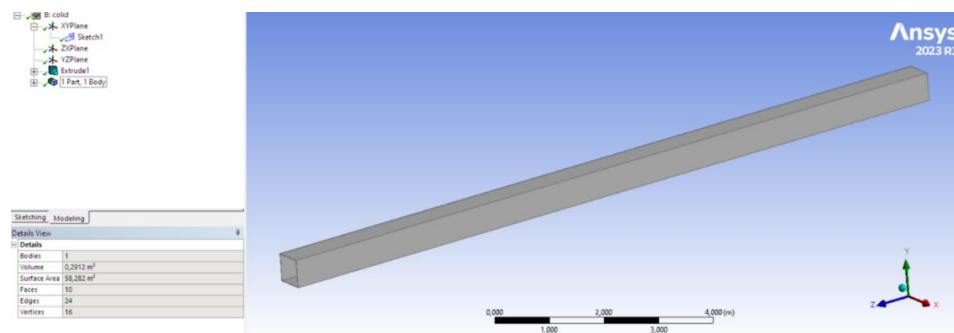


Рисунок 3.18 – Твёрдотельная модель балки

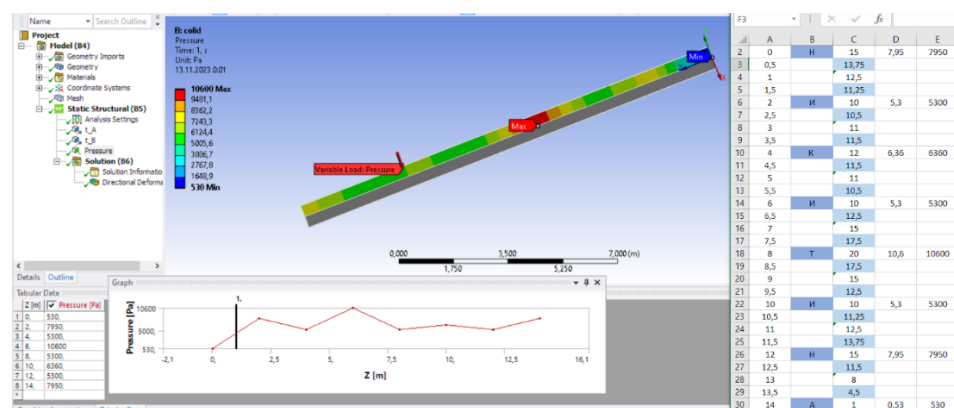


Рисунок 3.19 – Внешняя нагрузка в виде давления на балку

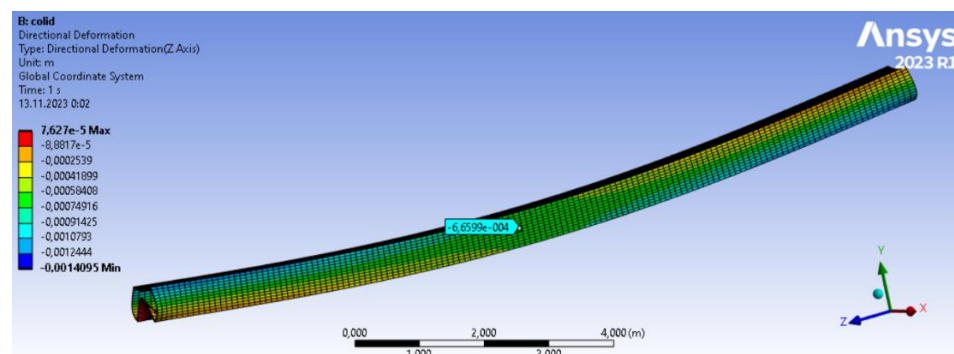


Рисунок 3.20 – Деформированный вид балки

По полученным результатам строим эпюру изгибающих моментов и график прогибов балки (рисунок 3.21).

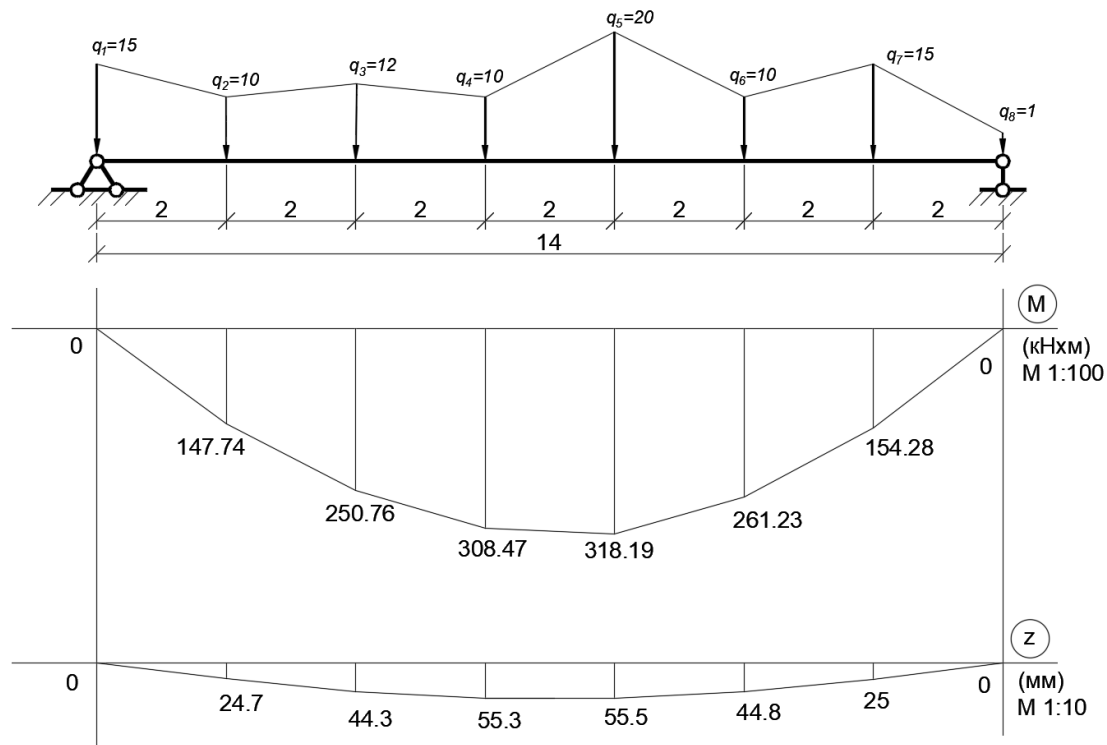


Рисунок 3.21 – Эпюры изгибающего момента « M » и прогибов балки « z »

Вывод

Изучил применение метода конечных разностей для расчета балочных систем, проверил результаты в программах *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*. (Погреш-

ность значения момента: $\Delta = \frac{326,86 - 318,19}{318,19} \cdot 100 \% = 2,72 \%$. Погрешность зна-

чения перемещения: $\Delta = \frac{57,3 - 55,5}{55,5} \cdot 100 \% = 3,24 \%$, т. к. результат перемещений в *MathCAD* получается из исходных данных – «моментов», погрешность накладывается).

4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок и решение систем линейных алгебраических уравнений и выполнить верификацию усилий в ПК *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*.

Исходные данные: см. приложение 1.

Порядок выполнения работы:

- 1) разделить балку по шарнирам на простые балки (получим в качестве неизвестных в шарнирах внутренние силы и опорные реакции), показав усилия взаимодействия между ними;
- 2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждой простой балки;
- 3) определить усилия в простых балках и опорные реакции, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры *MathCAD*;
- 4) построить эпюры усилий M , Q , N для каждой балки в отдельности и для всей многопролетной балки;
- 5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку; верификацию усилий в ПК *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*.

Рассмотрим расчет многопролетной балки, показанной на рисунке 4.1.

№	L1	L2	L3	L4	L5	L6	a1	a2	P1	P2	q	α1	α2
19	4,3	8,1	6,8	5,3	2,7	5,7	4	5	27	24	17	30	70

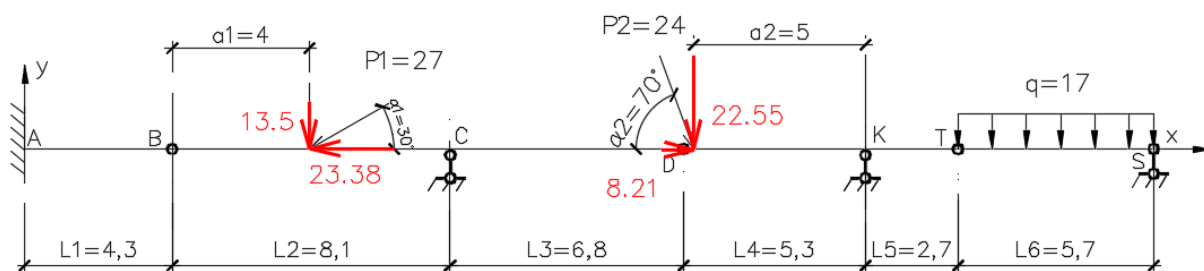


Рисунок 4.1 – Заданная расчетная схема балки

Каждая из простых балок – это диск, равновесие которого описывается тремя уравнениями равновесия. Каждый шарнир, соединяющий балки, имеет две связи и при его разрезании в нем возникает соответственно две внутренние реактивные силы. Рассматриваемая многопролетная балка состоит из четырех простых балок, и для них соответственно можно составить двенадцать уравнений равновесия. Разделив многопролетную балку по трем шарнирам B , D , T на простые балки, получим в качестве неизвестных шесть внутренних реактивных сил и шесть опорных реакций в опорах.

Обозначим реакции опор R_A, R_C, R_D, R_S и неизвестные в шарнирах $X_B, Y_B, X_D, Y_D, X_T, Y_T$ (рисунок 4.2).

Используя общий подход, следует составить уравнения равновесия для каждой из простых балок.

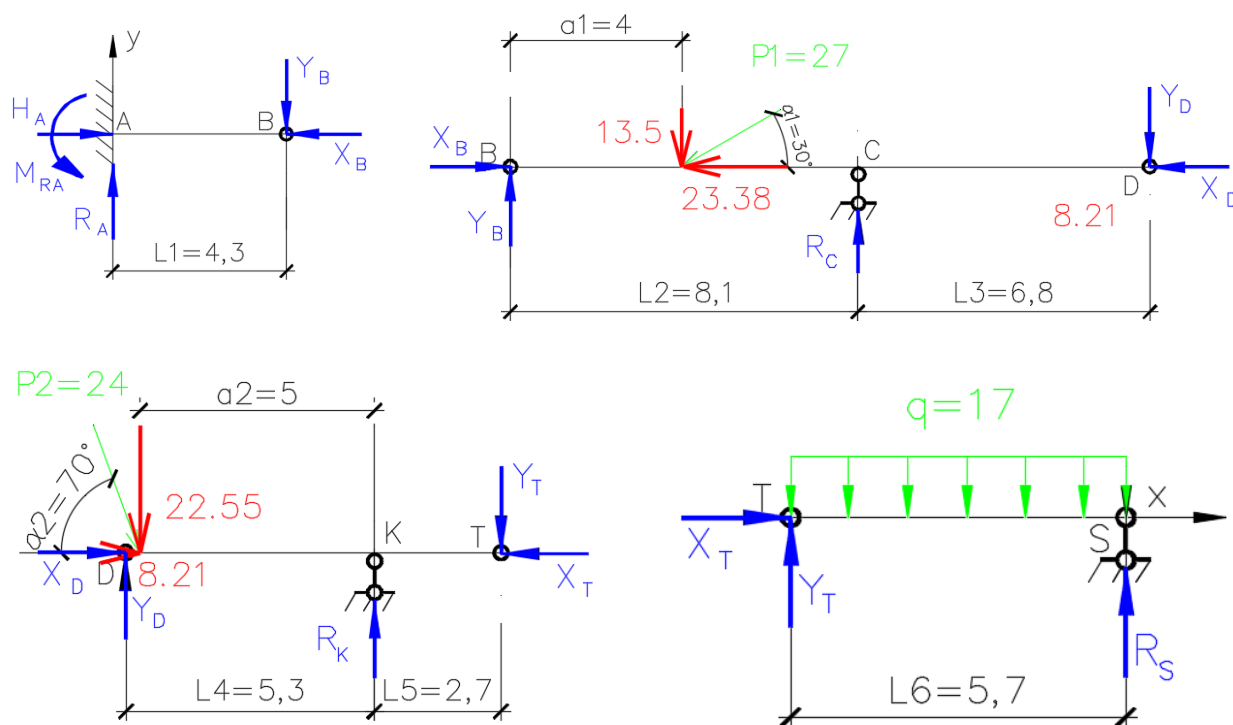


Рисунок 4.2 – Составные части балки – простые балки

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную уравнений равновесия для простых балок.

$$\begin{cases}
 H_A - X_B = 0; \\
 R_A - Y_B = 0; \\
 -M_{RA} + Y_B \cdot L_1 = 0;
 \end{cases}
 \left. \vphantom{\begin{cases} H_A - X_B = 0; \\ R_A - Y_B = 0; \\ -M_{RA} + Y_B \cdot L_1 = 0; \end{cases}} \right\} \text{Уравнение равновесия балки AB}$$

$$\begin{cases}
 X_B - P_1 \cdot \cos \alpha_1 - X_D = 0; \\
 Y_B - P_1 \cdot \sin \alpha_1 + R_C - Y_D = 0; \\
 P_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot a_1 - R_C \cdot L_2 + Y_D \cdot (L_2 + L_3) = 0;
 \end{cases}
 \left. \vphantom{\begin{cases} X_B - P_1 \cdot \cos \alpha_1 - X_D = 0; \\ Y_B - P_1 \cdot \sin \alpha_1 + R_C - Y_D = 0; \\ P_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot a_1 - R_C \cdot L_2 + Y_D \cdot (L_2 + L_3) = 0; \end{cases}} \right\} \text{Уравнение равновесия балки BCD}$$

$$\begin{cases}
 X_D - X_T + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0; \\
 Y_D + R_K - Y_T - P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0; \\
 P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (L_4 - a_2) - R_K \cdot L_4 + Y_T \cdot (L_4 + L_5) = 0;
 \end{cases}
 \left. \vphantom{\begin{cases} X_D - X_T + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0; \\ Y_D + R_K - Y_T - P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0; \\ P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (L_4 - a_2) - R_K \cdot L_4 + Y_T \cdot (L_4 + L_5) = 0; \end{cases}} \right\} \text{Уравнение равновесия балки DKT}$$

$$\begin{cases}
 X_T = 0; \\
 Y_T + R_S - q \cdot (L_6) = 0; \\
 q \cdot (L_6)^2 \cdot 0,5 - R_S \cdot L_6 = 0;
 \end{cases}
 \left. \vphantom{\begin{cases} X_T = 0; \\ Y_T + R_S - q \cdot (L_6) = 0; \\ q \cdot (L_6)^2 \cdot 0,5 - R_S \cdot L_6 = 0; \end{cases}} \right\} \text{Уравнение равновесия балки TS}$$

После определения значений усилий, строим эпюры M , Q , N (рисунок 4.3). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

С примером составления MathCAD-программы можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/WlDkH2FNAvE?si=gA0jyvyV6OHfeNzn>.

Перевод единиц измерения $\text{кН} := 1$ $\text{Н} := 0.001\text{кН}$ $\text{м} := 1$

Параметры балки

$L1 := 4.3$ $L2 := 8.1$ $L3 := 6.8$ $L4 := 5.3$ $L5 := 2.7$ $L6 := 5.7$ $a1 := 4$ $a2 := 5$

Задание переменных

$Mra := 0$ $Ra := 0$ $Ha := 0$ $Rc := 0$ $Rk := 0$ $Rs := 0$ $Xb := 0$ $Yb := 0$ $Xd := 0$ $Yd := 0$ $Xt := 0$ $Yt := 0$

Внешняя нагрузка

$P1 := 27\text{кН}$ $P2 := 24\text{кН}$ $q := 17 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ $\alpha1 := \frac{\pi}{6}$ $\alpha2 := \frac{\pi}{2.571}$

Задание системы уравнений

Given

$$\sum_n F_x = 0 \quad Ha - Xb = 0$$

$$\sum_n F_y = 0 \quad Ra - Yb = 0$$

$$\sum_n Ma = 0 \quad -Mra + Yb \cdot L1 = 0$$

$$\sum_n F_x = 0 \quad Xb - P1 \cdot \cos(\alpha1) - Xd = 0$$

$$\sum_n F_y = 0 \quad Yb - P1 \cdot \sin(\alpha1) + Rc - Yd = 0$$

$$\sum_n Ma = 0 \quad P1 \cdot \sin(\alpha1) \cdot a1 - Rc \cdot L2 + Yd \cdot (L2 + L3) = 0$$

$$\sum_n F_x = 0 \quad Xd - Xt + P2 \cdot \cos(\alpha2) = 0$$

$$\sum_n F_y = 0 \quad Yd + Rk - Yt - P2 \cdot \sin(\alpha2) = 0$$

$$\sum_n Ma = 0 \quad P2 \cdot \sin(\alpha2) \cdot (L4 - a2) - Rk \cdot L4 + Yt \cdot (L4 + L5) = 0$$

$$\sum_n F_x = 0 \quad Xt = 0$$

$$\sum_n F_y = 0 \quad Yt + Rs - q \cdot L6 = 0$$

$$\sum_n Ma = 0 \quad q \cdot L6 \cdot \frac{L6}{2} - Rs \cdot L6 = 0$$

$\begin{pmatrix} Mra \\ Ra \\ Ha \\ Rc \\ Rk \\ Rs \\ Xb \\ Yb \\ Xd \\ Yd \\ Xt \\ Yt \end{pmatrix} := \text{Find}(Mra, Ra, Ha, Rc, Rk, Rs, Xb, Yb, Xd, Yd, Xt, Yt)$

$$M_{ra} = 41.673 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad R_a = 9.691 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad H_a = 15.179 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad R_c = 0.404 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad R_k = 74.409 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad R_s = 48.45 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$X_b = 15.179 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad Y_b = 9.691 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad X_d = -8.204 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad Y_d = -3.404 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad X_t = 0 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad Y_t = 48.45 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

ПРОВЕРКА

$$\sum_n F_x = 0 \quad H_a - P_1 \cdot \cos(\alpha_1) + P_2 \cdot \cos(\alpha_2) = 0$$

$$\sum_n F_y = 0 \quad R_a - P_1 \cdot \sin(\alpha_1) - P_2 \cdot \sin(\alpha_2) + R_c + R_k + R_s - q \cdot L_6 = 0$$

$$\sum_n M_a = 0 \quad -M_{ra} + P_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot (L_1 + a_1) + P_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot [L_1 + L_2 + L_3 + (L_4 - a_2)] + q \cdot L_6 \cdot \left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + \frac{L_6}{2} \right) - R_c \cdot (L_1 + L_2) - R_k \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - R_s \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) = 2.274 \times 10^{-13}$$

Получим эпюры внутренних сил M , Q , N для многопролетной балки (рисунок 4.3).

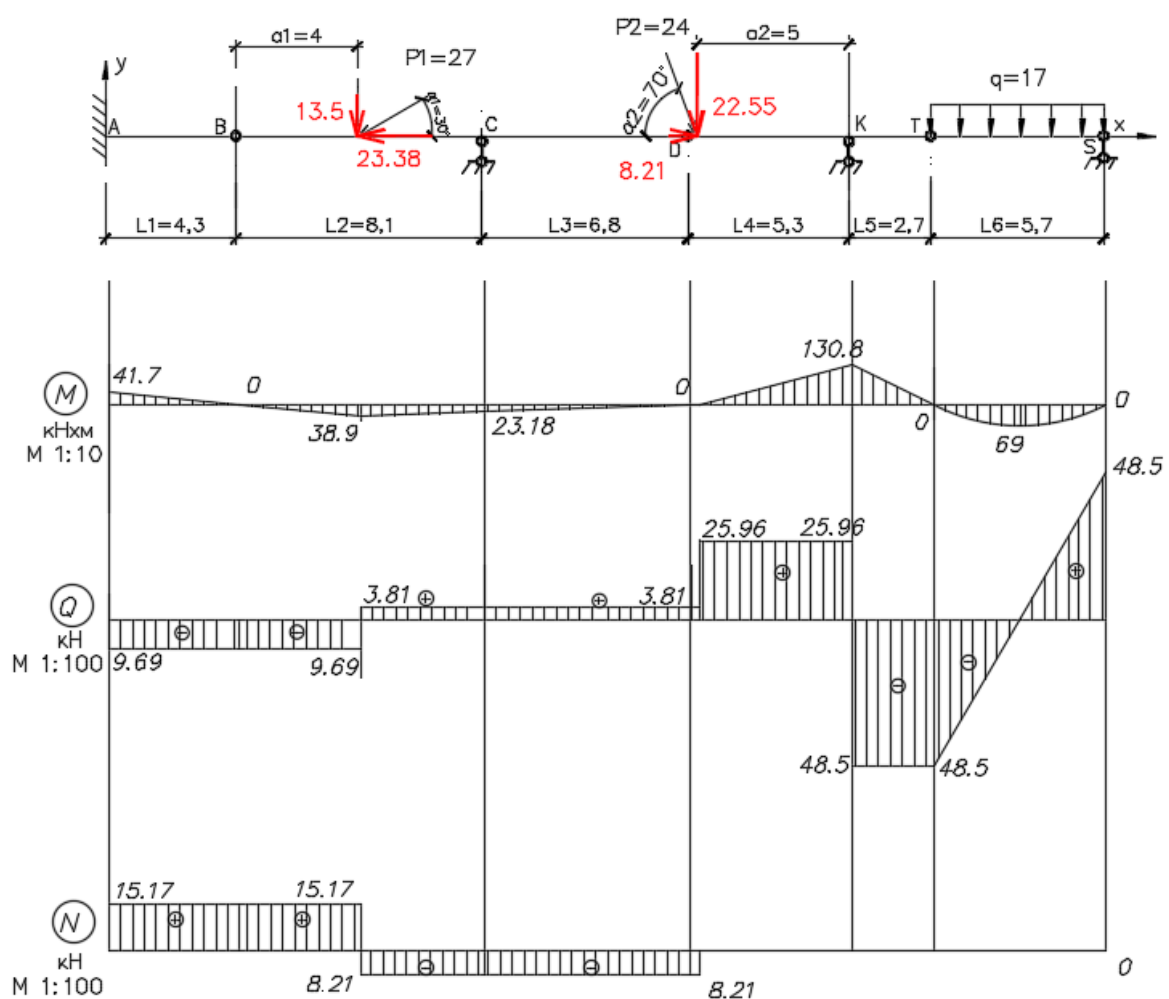


Рисунок 4.3 – Эпюры «M», «Q», «N» для многопролетной балки

Проверим достоверность результатов, используя программный комплекс *Sirius* (рисунки 4.4, 4.5).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/LEbSQ-HeNfE?si=SVD2AwuBs2Sqk2VC>.

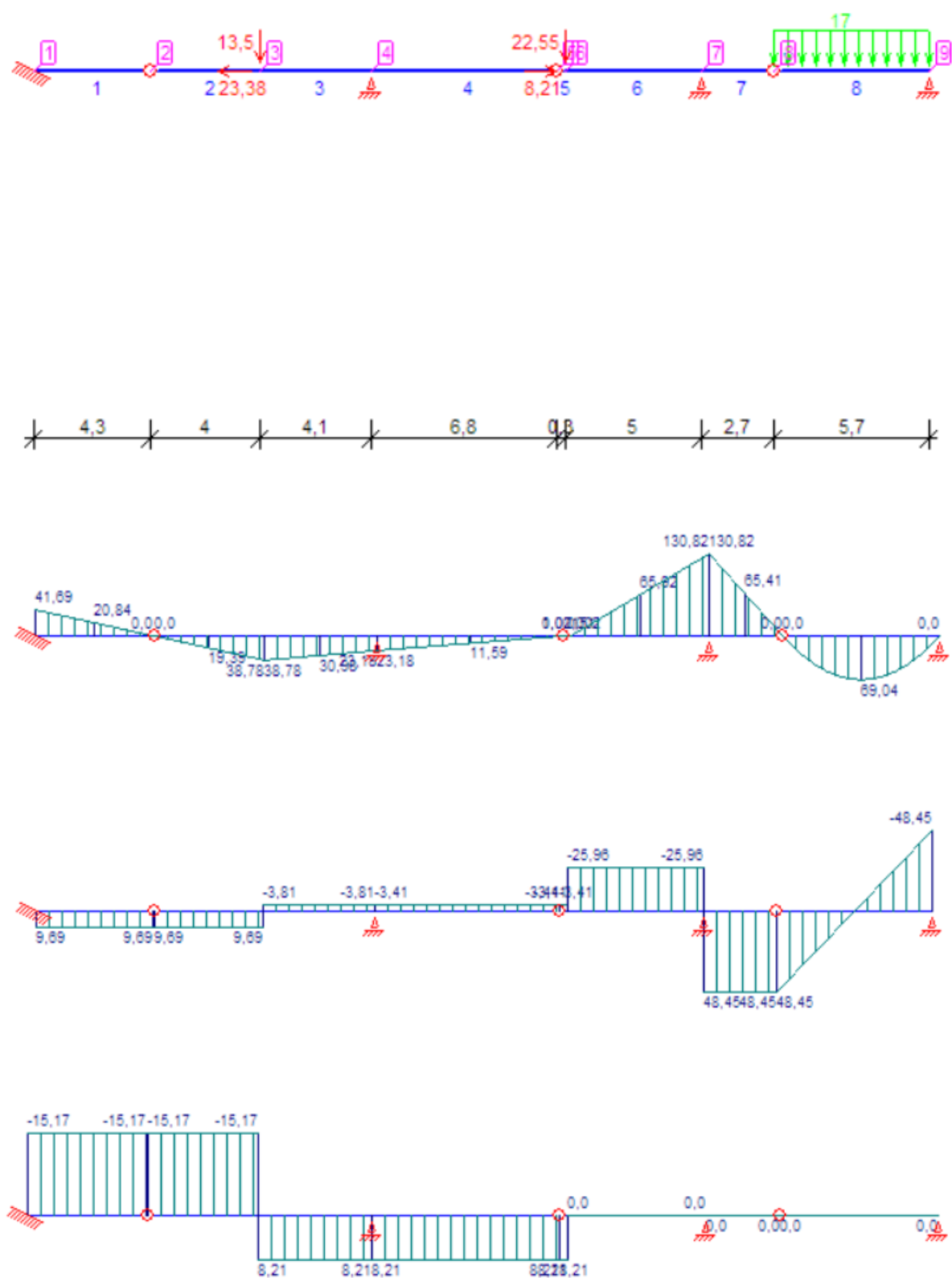


Рисунок 4.4 – Расчетная схема балки и эпюры внутренних сил « M », « Q », « N » в ПК Sirius

Усилия и моменты в стержнях									
№		Изгибающий момент M, Кнм			Поперечная сила Q, Кн		Нормальная сила N, Кн		№ жест. характ.
Нач.	Кон.	Начало	Середина	Конец	Начало	Конец	Начало	Конец	
1	2	-41,6876	-20,8438	0,00	9,6948	9,6948	-15,17	-15,17	1
2	3	0,00	19,3896	38,7791	9,6948	9,6948	-15,17	-15,17	1
3	4	38,7791	30,9784	23,1777	-3,8052	-3,8052	8,21	8,21	1
4	5	23,1777	11,5889	0,00	-3,4085	-3,4085	8,21	8,21	1
5	6	0,00	-0,5113	-1,0225	-3,4085	-3,4085	8,21	8,21	1
6	7	-1,0225	-65,9188	-130,815	-25,9585	-25,9585	0,00	0,00	1
7	8	-130,815	-65,4075	0,00	48,45	48,45	0,00	0,00	1
8	9	0,00	69,0413	0,00	48,45	-48,45	0,00	0,00	1

Рисунок 4.5 – Значения внутренних сил «M», «Q», «N» в табличном виде

Результаты расчета в *SIRIUS* полностью совпадают с результатами расчета в *MathCAD*.

Проверим достоверность результатов, используя программный комплекс *Lira* (рисунки 4.6, 4.7).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/LEbSQ-HeNfE?si=SVD2AwuBs2Ssqk2VC>.

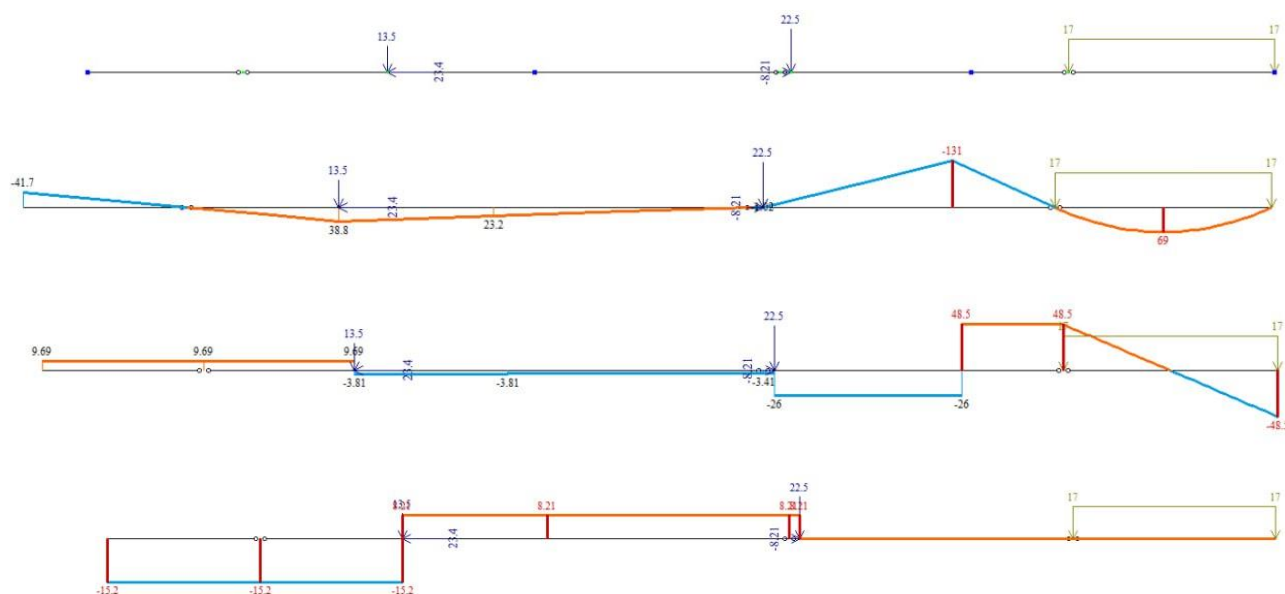


Рисунок 4.6 – Расчетная схема балки и эпюры «M», «Q», «N» в ПК *Lira*

Таблица усилий (стержни)					
№ элем	№ сечен	Усилия			
		N (кН)	Mx (кН*м)	My (кН*м)	Qz (кН)
1	1	- 15.170	0.000	- 41.688	9.695
1	2	- 15.170	0.000	0.000	9.695
2	1	- 15.170	0.000	0.000	9.695
2	2	- 15.170	0.000	38.779	9.695
3	1	8.210	0.000	38.779	- 3.805
3	2	8.210	0.000	23.178	- 3.805
4	1	8.210	0.000	23.178	- 3.409
4	2	8.210	0.000	0.000	- 3.409
5	1	8.210	0.000	0.000	- 3.409
5	2	8.210	0.000	- 1.023	- 3.409
6	1	0.000	0.000	- 1.023	- 25.959
6	2	0.000	0.000	- 130.815	- 25.959
7	1	0.000	0.000	- 130.815	48.450
7	2	0.000	0.000	0.000	48.450
8	1	0.000	0.000	0.000	48.450
8	2	0.000	0.000	0.000	- 48.450

Рисунок 4.7 – Значения внутренних сил «M», «Q», «N» в табличном виде

Результаты расчета в ПК *Lira* полностью совпадают с результатами расчета в *MathCAD*.

Проверим достоверность результатов, используя программный комплекс *Scad* (рисунки 4.8, 4.9).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/LEbSQ-HeNfE?si=SVD2AwuBs2Sqk2VC>.

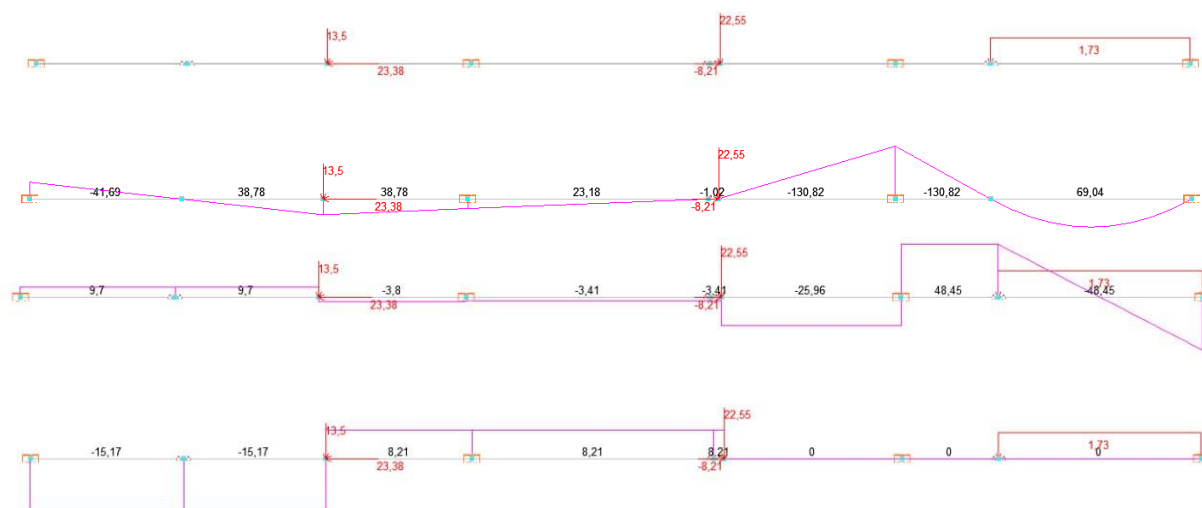


Рисунок 4.8 – Расчетная схема балки и эпюры внутренних сил «M», «Q», «N» в ПК *Scad*

Величины усилий					
Элемент	Сечение	Загружение	Значение		
			N	M_y	Q_z
1	1	1	-15,17	-41,691	9,696
1	2	1	-15,17	-20,846	9,696
1	3	1	-15,17	0	9,696
2	1	1	-15,17	0	9,696
2	2	1	-15,17	19,391	9,696
2	3	1	-15,17	38,783	9,696
3	1	1	8,21	38,783	-3,804
3	2	1	8,21	30,984	-3,804
3	3	1	8,21	23,185	-3,804
4	1	1	8,21	23,185	-3,41
4	2	1	8,21	11,592	-3,41
4	3	1	8,21	0	-3,41
5	1	1	8,21	0	-3,41
5	2	1	8,21	-0,511	-3,41
5	3	1	8,21	-1,023	-3,41
6	1	1	0	-1,023	-25,96
6	2	1	0	-65,922	-25,96
6	3	1	0	-130,821	-25,96
7	1	1	0	-130,821	48,452
7	2	1	0	-65,41	48,452
7	3	1	0	0	48,452
8	1	1	0	0	48,452
8	2	1	0	69,044	-1,455e-014
8	3	1	0	-2,91e-014	-48,452

Рисунок 4.9 – Значения внутренних сил « M », « Q », « N » в табличном виде

Результаты расчета в ПК *Scad* полностью совпадают с результатами расчета в *MathCAD*.

Проверим достоверность результатов, используя ПК *SolidWorks* (рисунки 4.10, 4.11).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/LEbSQ-HeNfE?si=SVD2AwuBs2Sqk2VC>.

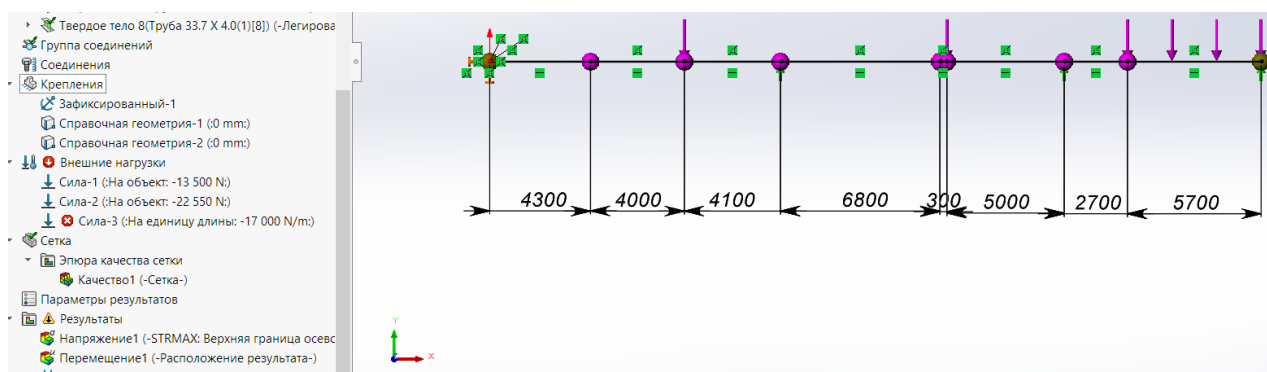
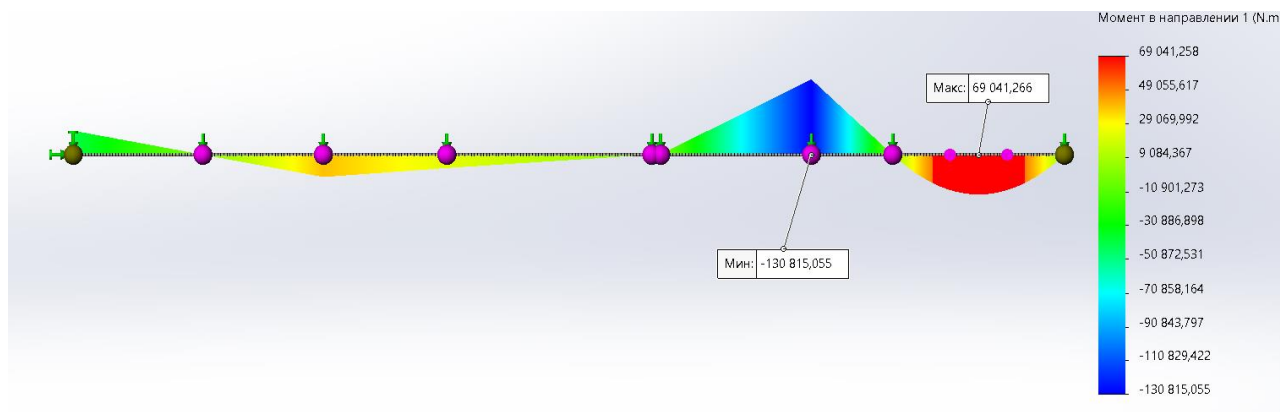
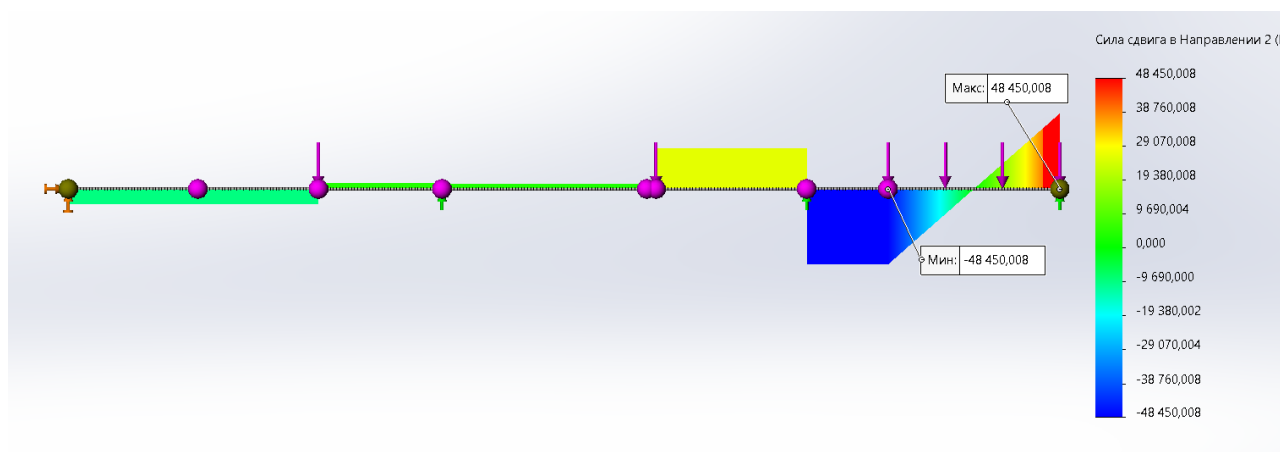


Рисунок 4.10 – Расчетная схема балки в ПК *SolidWorks*

а)



б)



- а) эпюра изгибающих моментов M ;
б) эпюра поперечных сил « Q »

Рисунок 4.11 – Эпюры внутренних сил « M » и « Q » в ПК SolidWorks

Вывод

Изучил применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок и решение систем линейных алгебраических уравнений и выполнил верификацию усилий в ПК *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*. Расчеты статически определимой многопролетной балки в *MathCAD* полностью совпадают с расчетами в остальных программах, а это означает, что расчеты выполнены правильно.

5 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

5.1 Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам и решение систем линейных алгебраических уравнений, выполнить верификацию результатов расчета в программах *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*.

Исходные данные: см. приложение 2.

Порядок выполнения работы:

- 1) разбить раму на простые стержни (прямолинейные элементы, в пределах которых нет изменения нагрузок), показав усилия взаимодействия между ними;
- 2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждого из стержней;
- 3) определить усилия в стержнях рамы, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
- 4) построить эпюры усилий M , Q , N рамы;
- 5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку, выполнить верификацию результатов расчета в программах *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*.

Рассмотрим расчет рамы, представленной на рисунке 5.1.

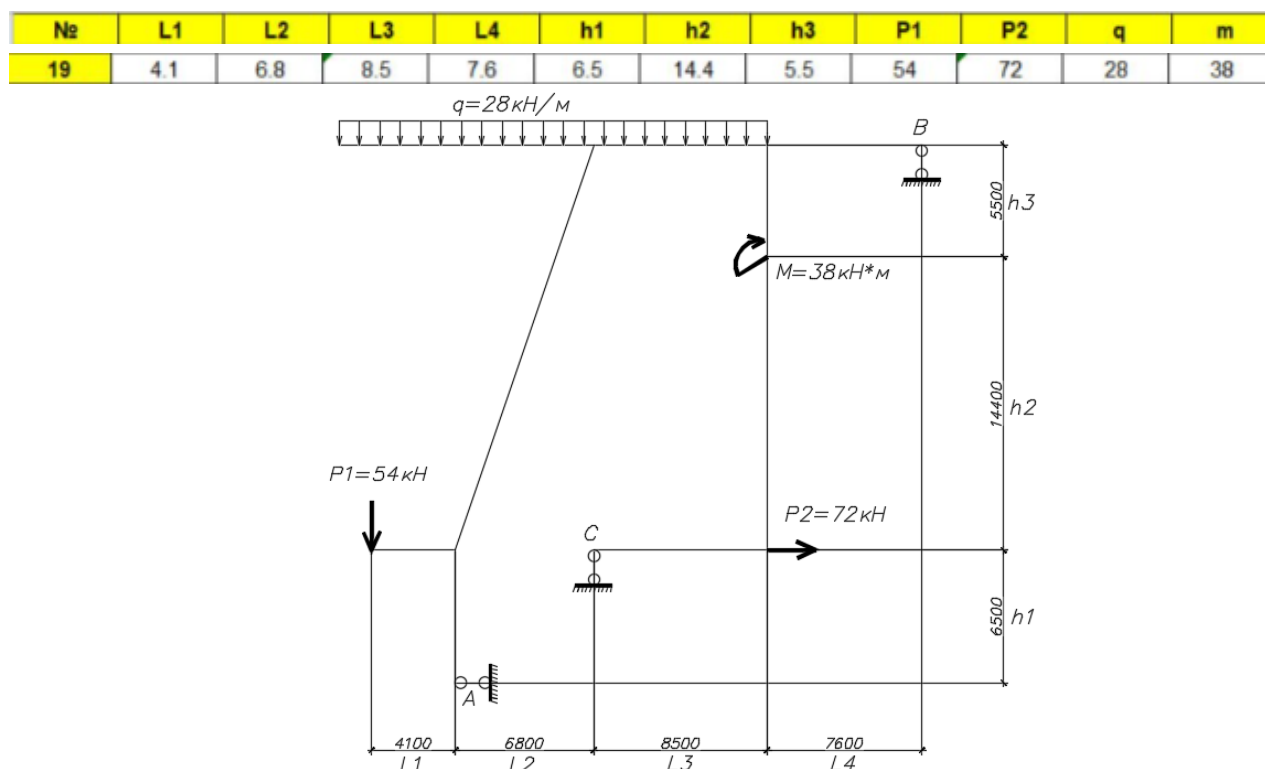


Рисунок 5.1 – Заданная простая рама

Разобьем раму на простые стержни, нумеруя узлы их соединения (1–9). Обозначим реакции опор R_a , R_b , R_c (рисунок 5.2).

Вырезая каждый стержень, обозначим неизвестные внутренние усилия стержней рамы в характерных сечениях через x_i , y_i (продольные и поперечные

усилия) и z_i (моменты), где i – номер характерного сечения (рисунок 5.2). В случае соединения трех стержней в одном узле, вторую пару внутренних усилий будем обозначать через x'_i, y'_i, z'_i (см. узлы 2, 5).

При наличии сосредоточенной нагрузки или момента в узле, относим их к тому стержню, конечная точка которого примыкает к данному сечению (в нашем примере: внешний момент m относим к стержню 7–5; сосредоточенную нагрузку $P2$ – к стержню 7–8).

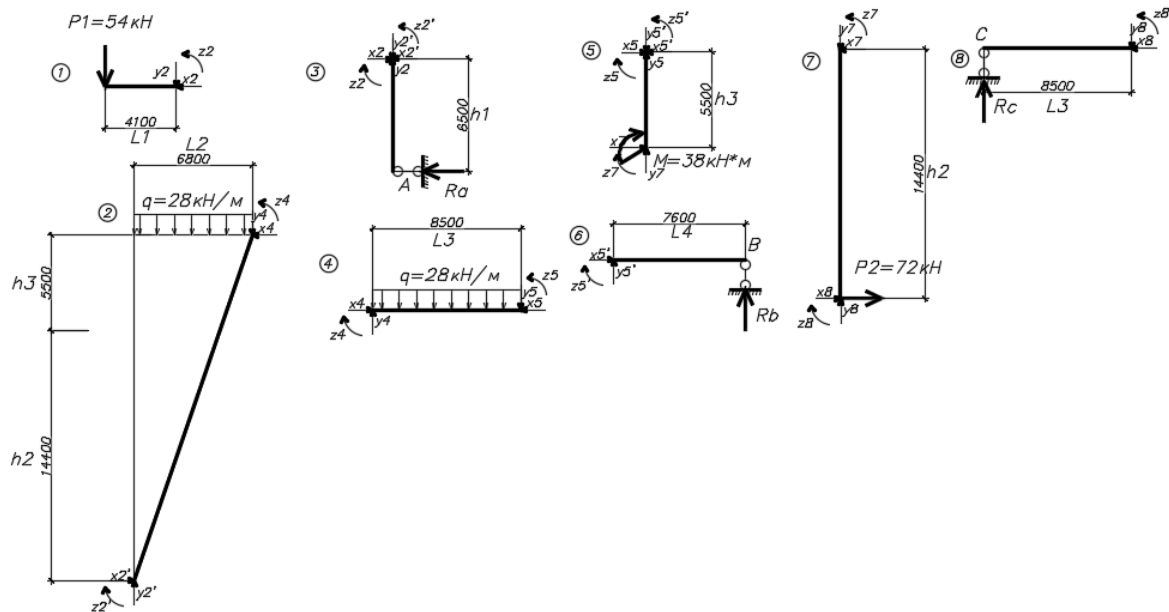


Рисунок 5.2 – Разделение рамы на простые стержни

Составим уравнения равновесия для каждого стержня рамы, проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси. Суммы моментов берем относительно начальных или конечных сечений стержней.

Стержень 1–2 $\sum M_1 = 0; y_2 \cdot L_1 - z_2 = 0;$ $\sum X = 0; -x_2 = 0;$ $\sum Y = 0; -y_2 - P_1 = 0;$	Стержень 2–3 $\sum M_2 = 0; R_a \cdot h_1 + z_2 - z_2' = 0;$ $\sum X = 0; -R_a - x_2' + x_2 = 0;$ $\sum Y = 0; y_2 - y_2' = 0;$
Стержень 2–4 $\sum M_2 = 0; q \cdot \frac{L_2^2}{2} + y_4 \cdot L_2 - x_4 \cdot (h_3 + h_2) + z_2' - z_4 = 0;$ $\sum X = 0; x_2' - x_4 = 0;$ $\sum Y = 0; y_2' - y_4 - q \cdot L_2 = 0;$	Стержень 4–5 $\sum M_4 = 0; q \cdot \frac{L_3^2}{2} + y_5 \cdot L_3 - z_5 = 0;$ $\sum X = 0; x_4 - x_5 = 0;$ $\sum Y = 0; y_4 - y_5 - q \cdot L_3 = 0;$
Стержень 5–6 $\sum M_5 = 0; z_5' - R_b \cdot L_4 = 0;$ $\sum X = 0; x_5' = 0;$ $\sum Y = 0; y_5' + R_b = 0;$	Стержень 5–7 $\sum M_5 = 0; m - x_7 \cdot h_3 - z_5' + z_7 + z_5 = 0;$ $\sum X = 0; x_5 - x_5' + x_7 = 0;$ $\sum Y = 0; y_5 - y_5' + y_7 = 0;$
Стержень 7–8 $\sum M_7 = 0; -P_2 \cdot h_2 - z_7 + z_8 - x_8 \cdot h_2 = 0;$ $\sum X = 0; -x_7 + x_8 + P_2 = 0;$ $\sum Y = 0; -y_7 + y_8 = 0;$	Стержень 8–9 $\sum M_8 = 0; R_c \cdot L_3 - z_8 = 0;$ $\sum X = 0; -x_8 = 0;$ $\sum Y = 0; -y_8 + R_c = 0;$

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия стержней рамы в математической среде MathCAD.

С примером составления MathCAD-программы можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/IKNqNb_5i4c?si=fZtbhHFuv-heK88G.

Параметры единиц Перевод единиц кН := 1 м := 1

L1 := 4.1м L2 := 6.8м L3 := 8.5м L4 := 7.6м h1 := 6.5м h2 := 14.4м h3 := 5.5м

Задание переменных

Ra := 0 Rb := 0 Rc := 0 x2 := 0 y2 := 0 z2 := 0 x2i := 0 y2i := 0 z2i := 0

x4 := 0 y4 := 0 z4 := 0 x5 := 0 y5 := 0 z5 := 0 x5i := 0 y5i := 0 z5i := 0

x7 := 0 y7 := 0 z7 := 0 x8 := 0 y8 := 0 z8 := 0

Внешняя нагрузка

P1 := 54кН P2 := 72кН q := 28 $\frac{\text{кН}}{\text{м}}$ m := 38кН·м

Задание системы уравнений

Given

Стержень 1-2

$$\sum_n M1=0 \quad y2 \cdot L1 - z2 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad -x2 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad -y2 - P1 = 0$$

Стержень 2-3

$$\sum_n M2=0 \quad Ra \cdot h1 + z2 - z2i = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad -Ra - x2i + x2 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad y2 - y2i = 0$$

Стержень 2-4

$$\sum_n M2=0 \quad q \cdot \left(\frac{L2^2}{2} \right) + y4 \cdot L2 - x4 \cdot (h3 + h2) + z2i - z4 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad x2i - x4 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad y2i - y4 - q \cdot L2 = 0$$

Стержень 4-5

$$\sum_n M4=0 \quad q \cdot \frac{L3^2}{2} + y5 \cdot L3 - z5 + z4 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad x4 - x5 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad y4 - y5 - q \cdot L3 = 0$$

Стержень 5-6

$$\sum_n M5=0 \quad z5i - Rb \cdot L4 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad x5i = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad y5i + Rb = 0$$

Стержень 5-7

$$\sum_n M5=0 \quad m - x7 \cdot h3 - z5i + z7 + z5 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad x5 - x5i + x7 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad y5 - y5i + y7 = 0$$

Стержень 7-8

$$\sum_n M7=0 \quad -P2 \cdot h2 - z7 + z8 - x8 \cdot h2 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad x8 - x7 + P2 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad y8 - y7 = 0$$

Стержень 8-9

$$\sum_n M7=0 \quad Rc \cdot L3 - z8 = 0$$

$$\sum_n Fx=0 \quad -x8 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad -y8 + Rc = 0$$

Ra	0
Rb	72
Rc	17.487
x2	464.913
y2	0
z2	-54
x2i	-221.4
y2i	-72
z2i	-54
x4	246.6
y4	-72
z4	-244.4
x5	664.84
y5	-72
z5	-482.4
x5i	-2.424·10 ³
y5i	0
z5i	-17.487
x7	132.901
y7	72
z7	464.913
x8	2.915·10 ³
y8	0
z8	464.913
z8	3.952·10 ³

ПРОВЕРКА

Ra = 72кН Rb = 17.487кН Rc = 464.913кН

$$\sum_n M7=0 \quad -P1 \cdot L1 + q \cdot \left[\frac{(L2 + L3)^2}{2} \right] - Rc \cdot L2 + P2 \cdot h1 + m - Rb \cdot (L2 + L3 + L4) = 5.684 \times 10^{-13}$$

$$\sum_n Fx=0 \quad -Ra + P2 = 0$$

$$\sum_n Fy=0 \quad -P1 - q \cdot (L2 + L3) + Rc + Rb = -3.908 \times 10^{-14}$$

Выполним проверку полученных реакций.

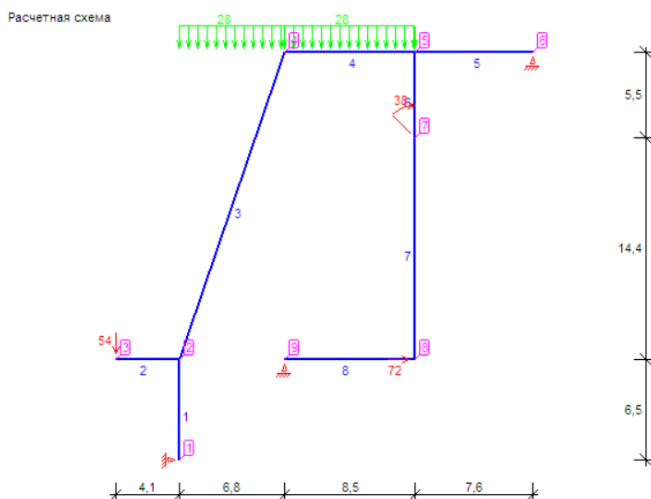
$$\sum M_A = 0; -P1 \cdot L1 + q \cdot \frac{(L2+L3)^2}{2} - Rc \cdot L2 + P2 \cdot h1 + m - Rb \cdot (L2 + L3 + L4) = 0;$$

$$\sum X = 0; -Ra + P2 = 0; \quad \sum Y = 0; -P1 - q \cdot (L2 + L3) + Rc + Rb = 0.$$

Выполним верификацию результатов расчета в программе Sirius (рисунки 5.3, 5.4).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/IKNqNb_5i4c?si=fZtbhHFuv-heK88G.

а)



б)

Смещения и углы поворота узлов			
№	Вдоль ОХ,м	Вдоль ОУ,м	Поворот,рад
1	Нет	-1,594E+02	-5,425E+00
2	-3,581E+01	-1,594E+02	-5,679E+00
3	-3,581E+01	-1,828E+02	-5,755E+00
4	-1,660E+02	-1,148E+02	-7,654E+00
5	-1,660E+02	-5,094E+01	-6,647E+00
6	-1,660E+02	Нет	-6,731E+00
7	-1,363E+02	-5,092E+01	-4,122E+00
8	-1,332E+02	-5,087E+01	4,118E+00
9	-1,332E+02	Нет	6,917E+00

в)

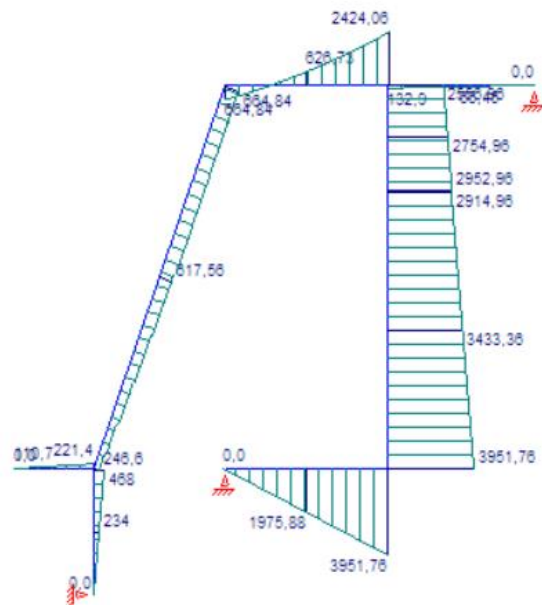
Усилия и моменты в стержнях									
№		Изгибающий момент М,Кнм			Поперечная сила Q,Кн		Нормальная сила N,Кн		№ жест. характ.
Нач.	Кон.	Начало	Середина	Конец	Начало	Конец	Начало	Конец	
1	2	0,00	234,00	468,00	72,00	72,00	0,00	0,00	1
2	3	221,40	110,70	0,00	-54,00	-54,00	0,00	0,00	1
2	4	246,60	617,56	664,84	50,6711	-10,895	74,3804	254,5519	1
4	5	664,84	-626,735	-2424,06	-244,40	-482,40	72,00	72,00	1
5	6	132,9009	66,4504	0,00	-17,487	-17,487	0,00	0,00	1
5	7	-2556,9609	-2754,9609	-2952,9609	-72,00	-72,00	-464,913	-464,913	1
7	8	-2914,9609	-3433,3609	-3951,7609	-72,00	-72,00	-464,913	-464,913	1
8	9	-3951,7609	-1975,8804	0,00	464,913	464,913	0,00	0,00	1

а) расчетная схема рамы; б) значения перемещений узлов рамы;

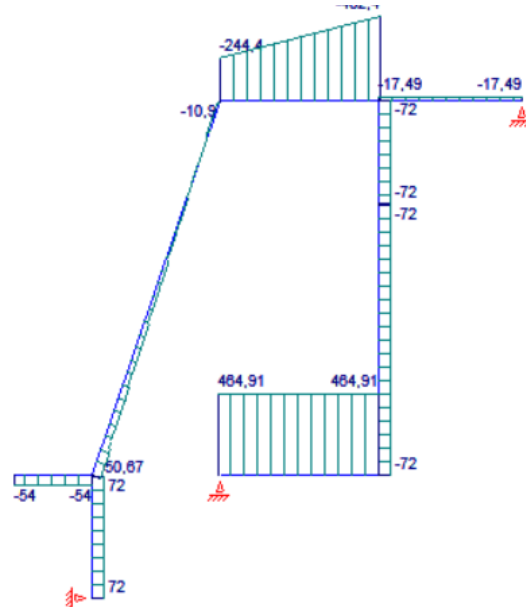
в) значения внутренних усилий элементов рамы

Рисунок 5.3 – Расчет рамы в программе Sirius

Эпюра моментов $M, \text{Кнм}$



Эпюра поперечных сил $Q, \text{Кн}$



Эпюра продольных сил $N, \text{Кн}$

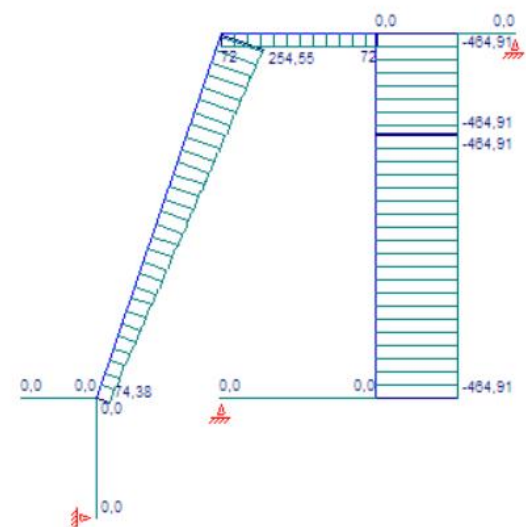
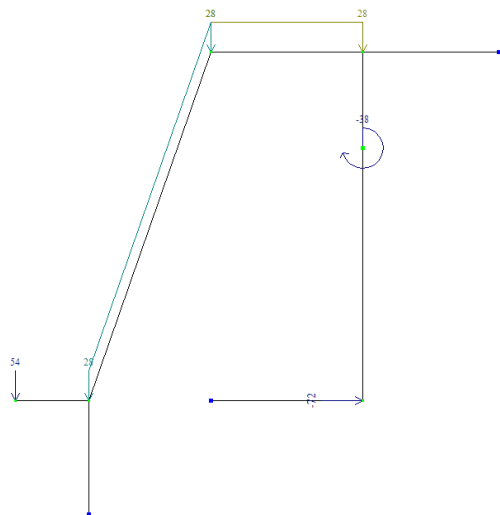


Рисунок 5.4 – Эпюры внутренних сил « M », « Q », « N »

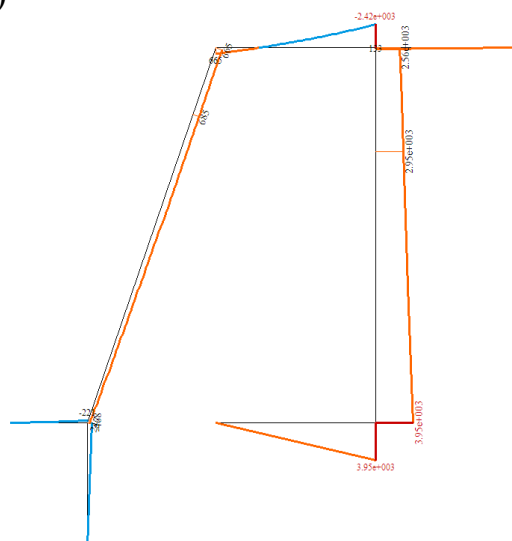
Выполним верификацию результатов расчета в программе *Lira* (рисунок 5.5).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/IKNqNb_5i4c?si=fZtbhHFuv-heK88G.

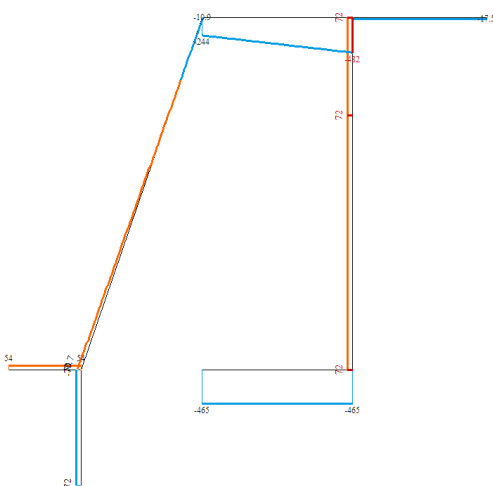
а)



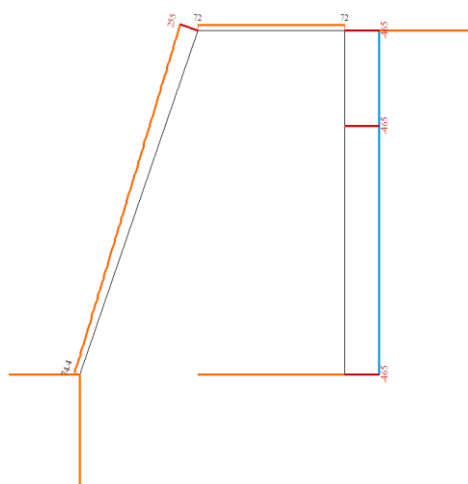
б)



в)



г)



д)

Элем	Сечен	N (кН)	Mx (кН·м)	My (кН·м)	Qz (кН)
1	1	0.000	0.000	0.000	-72.000
1	2	0.000	0.000	-468.000	-72.000
2	1	0.000	0.000	-221.400	54.000
2	2	0.000	0.000	0.000	54.000
3	1	74.380	0.000	246.600	50.671
3	2	254.552	0.000	664.839	-10.895
4	1	72.000	0.000	664.839	-244.400
4	2	72.000	0.000	-2424.065	-492.401
5	1	-464.914	0.000	2556.966	72.000
5	2	-464.914	0.000	2952.966	72.000
6	1	0.000	0.000	132.901	-17.487
6	2	0.000	0.000	0.000	-17.487
7	1	-464.914	0.000	2914.966	72.000
7	2	-464.914	0.000	3951.767	72.000
8	1	0.000	0.000	3951.767	-464.914
8	2	0.000	0.000	0.000	-464.914

е)

Узла	Перемещения				
	X	Y	Z	UX	UY
1	0.000	0.000	-8402.744	0.000	-286.080
2	-1888.491	0.000	-8402.744	0.000	-299.451
3	-1888.491	0.000	-9641.397	0.000	-303.441
4	-8755.727	0.000	-6055.064	0.000	-403.643
5	-8755.545	0.000	-2686.406	0.000	-350.515
6	-8755.545	0.000	0.000	0.000	-354.954
7	-7185.234	0.000	-2685.646	0.000	-217.316
8	-7027.614	0.000	-2683.657	0.000	217.298
9	-7027.614	0.000	0.000	0.000	364.937

а) расчетная схема рамы; б) эпюра «M»; в) эпюра «Q»; г) эпюра «N»;

д) значения внутренних усилий элементов рамы;

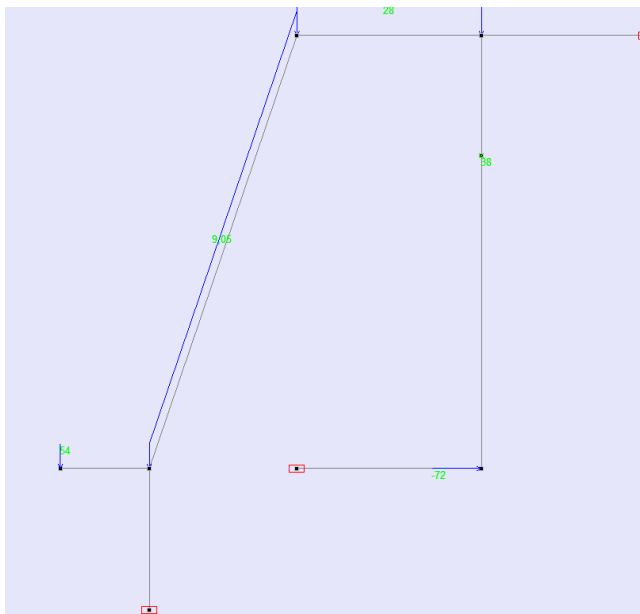
е) значения перемещений узлов рамы

Рисунок 5.5 – Расчет рамы в программе *Lira*

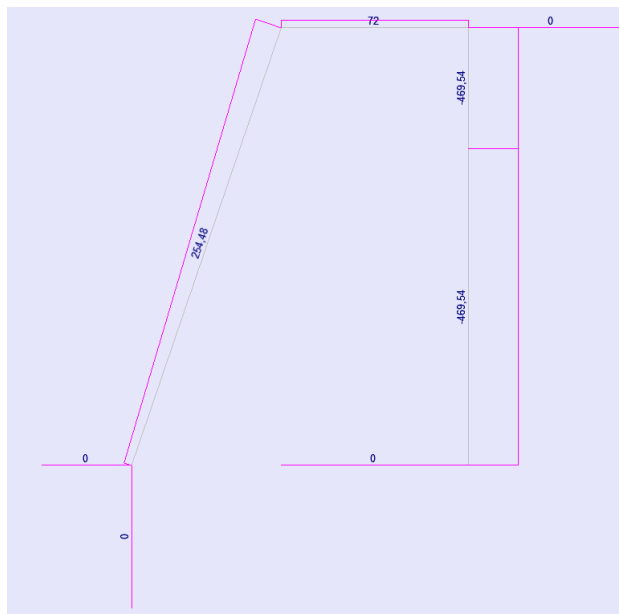
Выполним верификацию результатов расчета в программе *Scad* (рисунки 5.6, 5.7).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/IKNqNb_5i4c?si=fZtbhHFuv-heK88G.

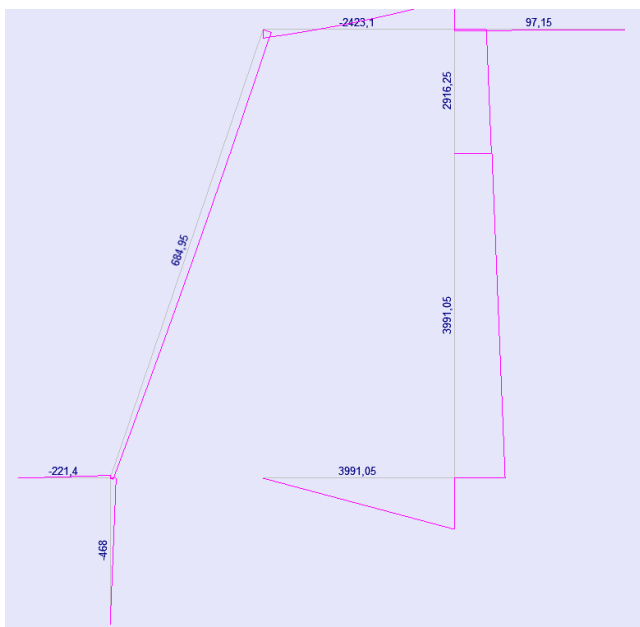
а)



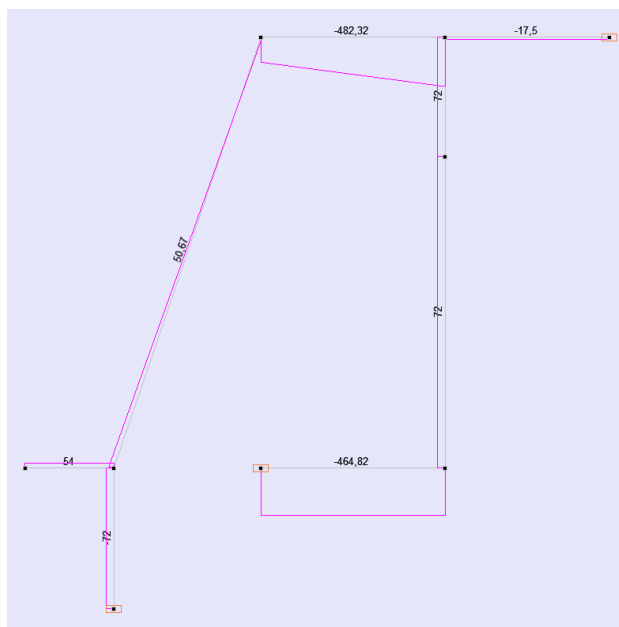
б)



в)



г)



а) расчетная схема рамы; б) эпюра «N»; в) эпюра «M»; г) эпюра «Q»
Рисунок 5.6 – Расчет рамы в программе *Scad*

Величины усилий

Единицы измерения:

- Силы: кН

- Единицы длины для силовых факторов: м

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: Все

Список сечений: 1, 3

Список нагрузок/комбинаций: 1

Список факторов: N, M_y, Q_z

Величины усилий					
Элемент	Сечение	Загрузка	Значение		
			N	M _y	Q _z
1	1	1	0	3,725e-012	-72
1	3	1	0	-468	-72
2	1	1	0	-221,4	54
2	3	1	0	5,215e-011	54
3	1	1	74,38	246,6	50,671
3	3	1	254,475	665,115	-10,869
4	1	1	72	665,115	-244,319
4	3	1	72	-2423,098	-482,319
5	1	1	0	133,031	-17,504
5	3	1	0	0	-17,504
6	1	1	-464,815	2556,129	72
6	3	1	-464,815	2952,129	72
7	1	1	-464,815	2914,129	72
7	3	1	-464,815	3950,929	72
8	1	1	0	3950,929	-464,815
8	3	1	0	-3,725e-012	-464,815

**Величины перемещений**

Единицы измерения:

- Линейные перемещения: мм

- Угловые перемещения: рад*1000

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: Все

Список нагрузок/комбинаций: 1

Список факторов: X, Z, U_y

Величины перемещений				
Узел	Загрузка	Значение		
		X	Z	U _y
1	1	0	-8397,374	-285,829
2	1	-1886,889	-8397,374	-299,195
3	1	-1886,889	-9635,002	-303,184
4	1	-8748,955	-6051,462	-403,369
5	1	-8748,774	-2684,882	-350,305
6	1	-8748,774	0	-354,747
7	1	-7179,35	-2684,123	-217,192
8	1	-7021,726	-2682,134	217,167
9	1	-7021,726	0	364,724

Рисунок 5.7 – Внутренние усилия элементов рамы и значения перемещений узлов рамы

Выполним верификацию результатов расчета в программе *SolidWorks* (рисунки 5.8, 5.9).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/IKNqNb_5i4c?si=fZtbhHFuv-heK88G.

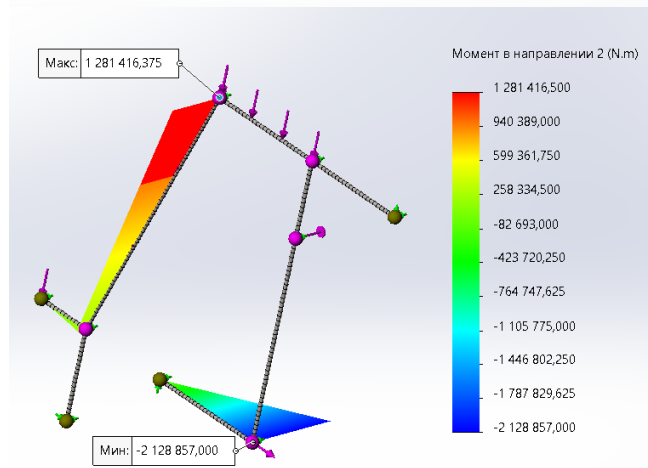
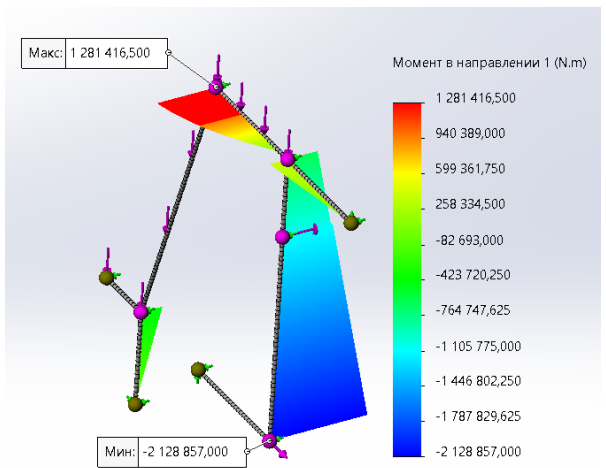
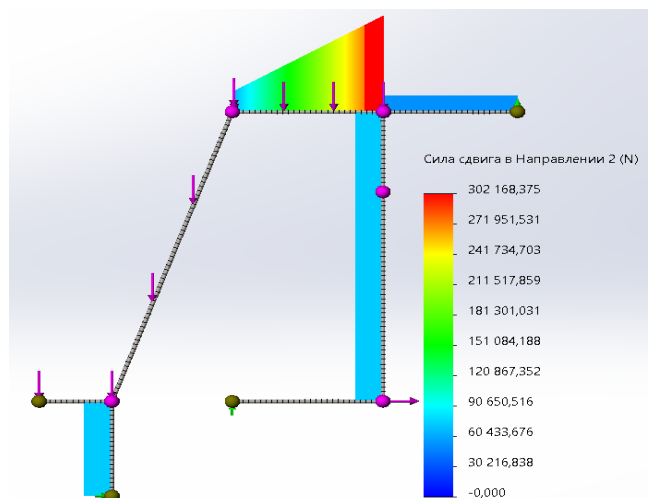
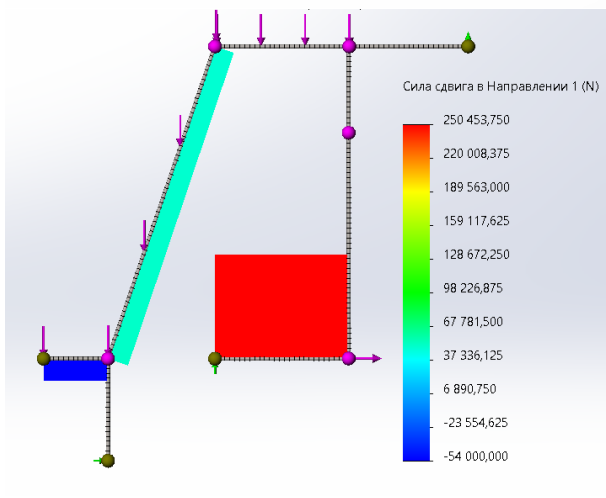
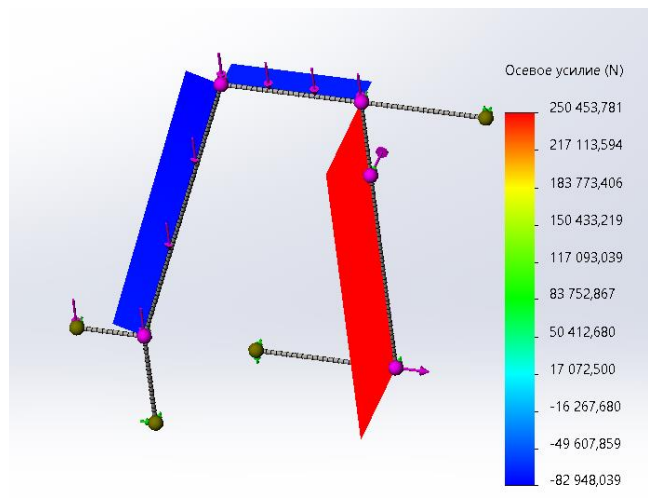
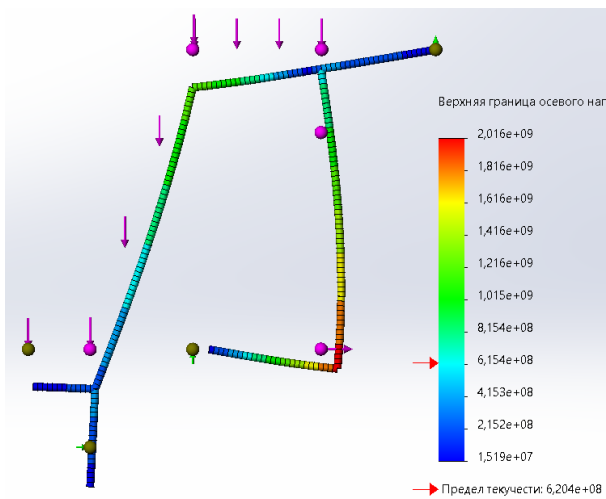


Рисунок 5.8 – Осевое напряжение и эпюры внутренних усилий элементов рамы

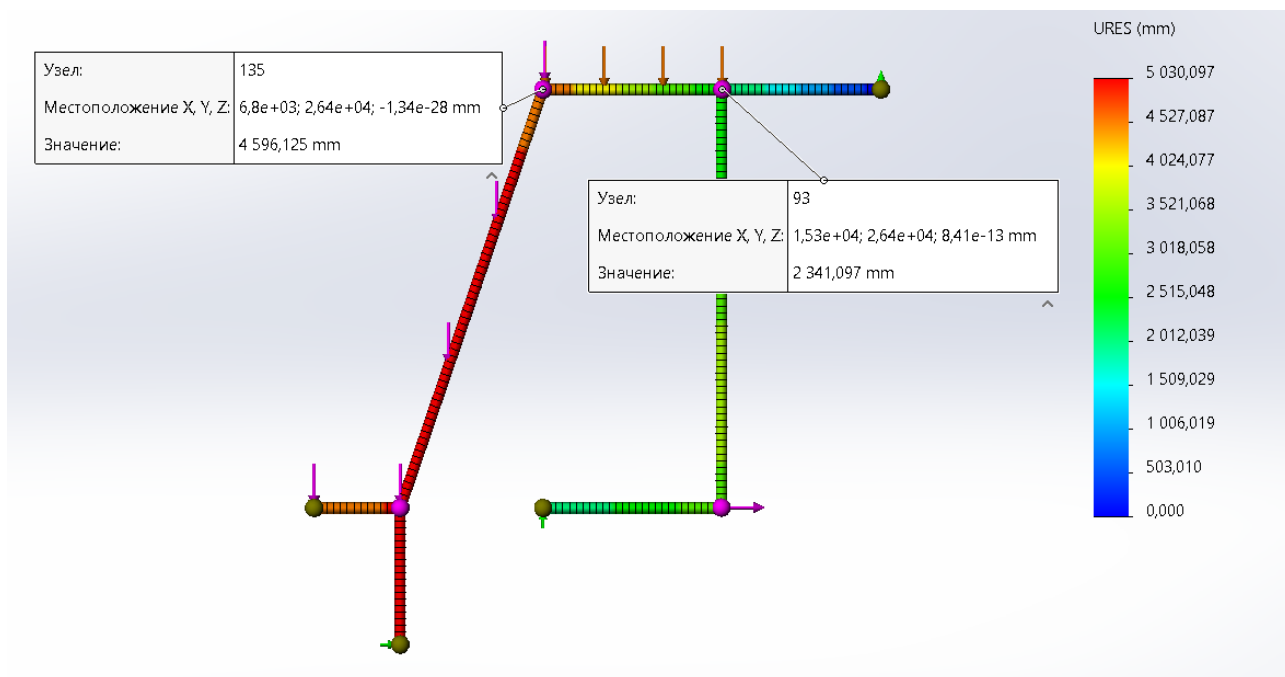


Рисунок 5.9 – Перемещение узла 4 и 5 (зондирование)

Выполним верификацию результатов расчета в программе ANSYS (рисунки 5.10–5.15).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/HGC8Ck1-Too?si=riICfuEMlN18Yz24>.

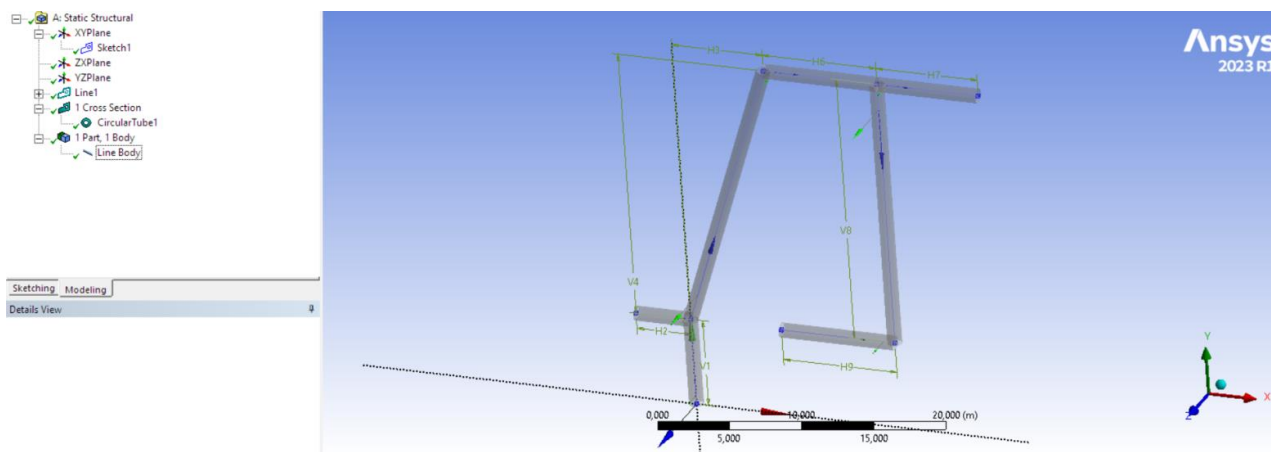


Рисунок 5.10 – Твёрдотельная модель рамы

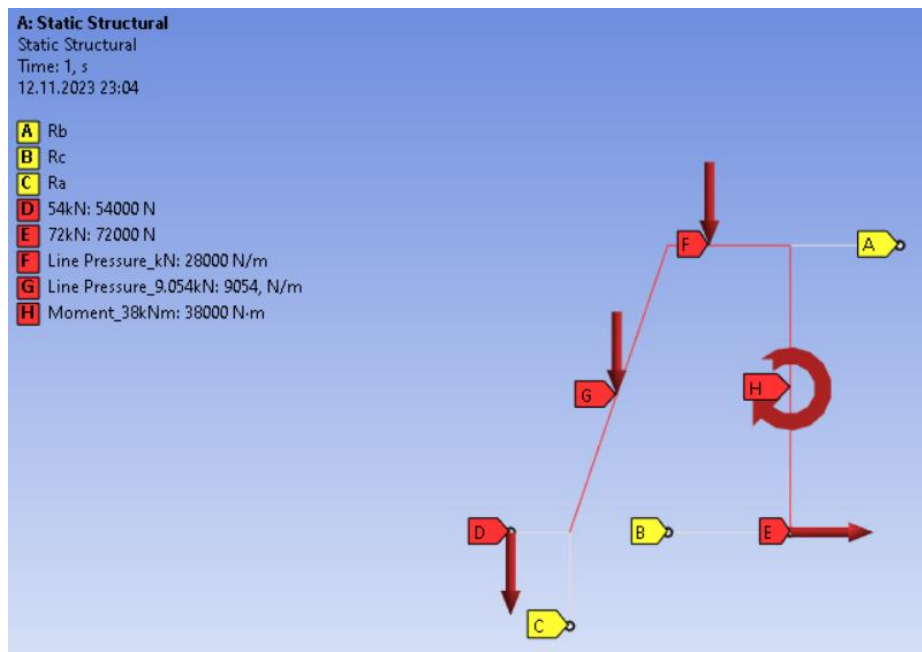


Рисунок 5.11 – Расчетная схема рамы

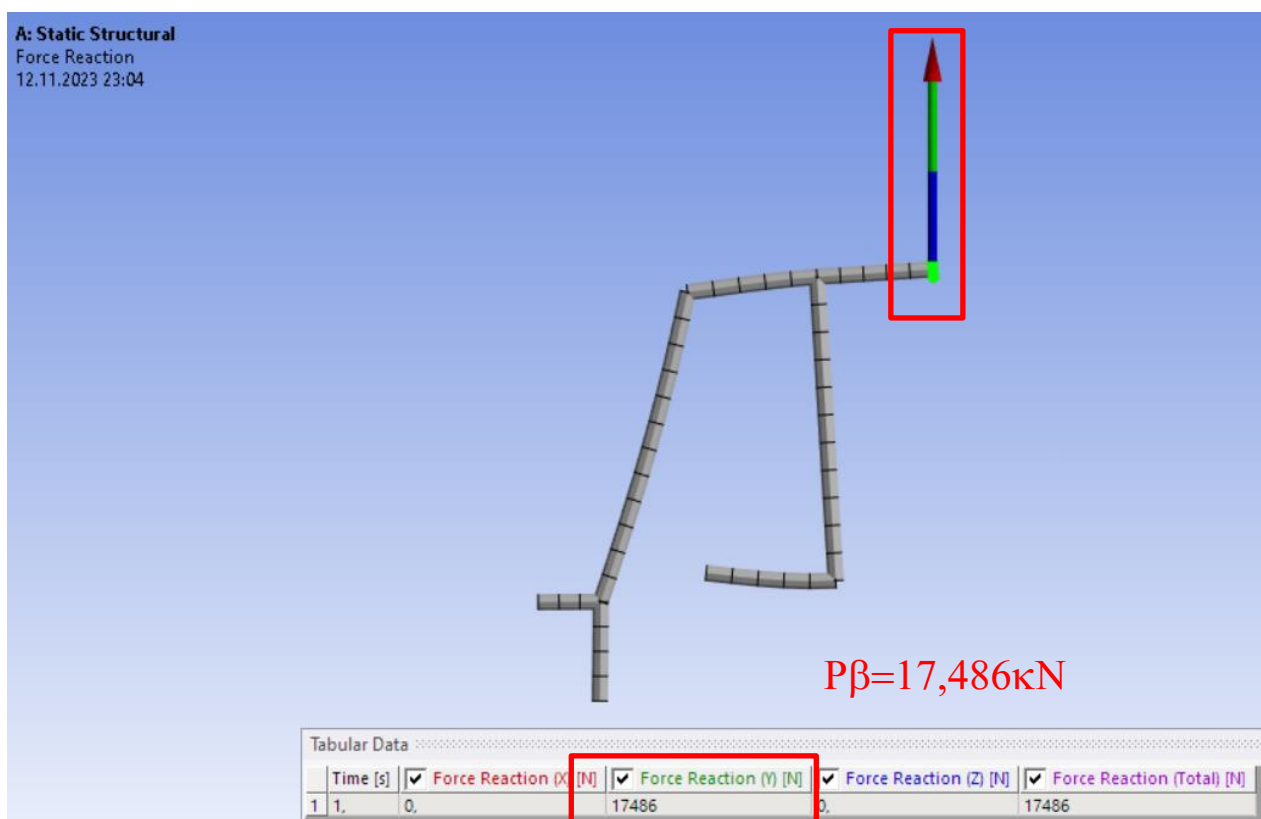


Рисунок 5.12 – Опорная реакция в точке B

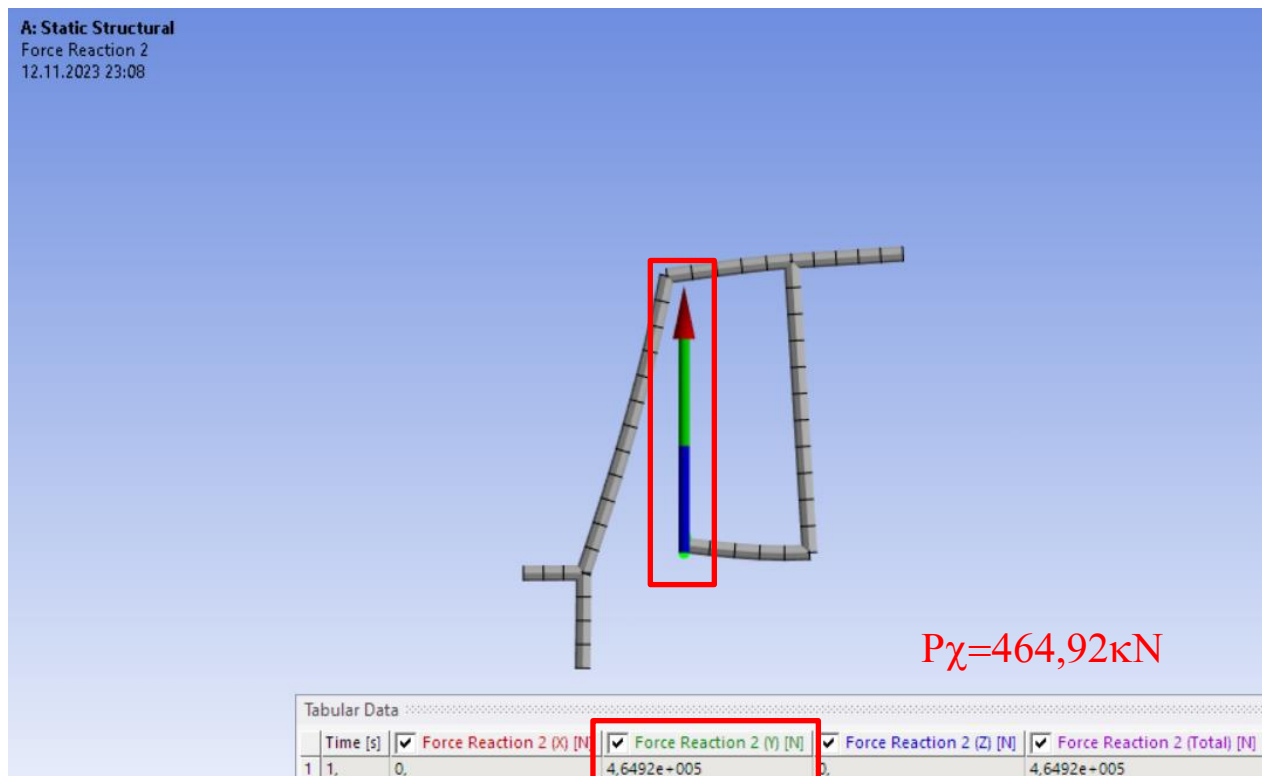


Рисунок 5.13 – Опорная реакция в точке С

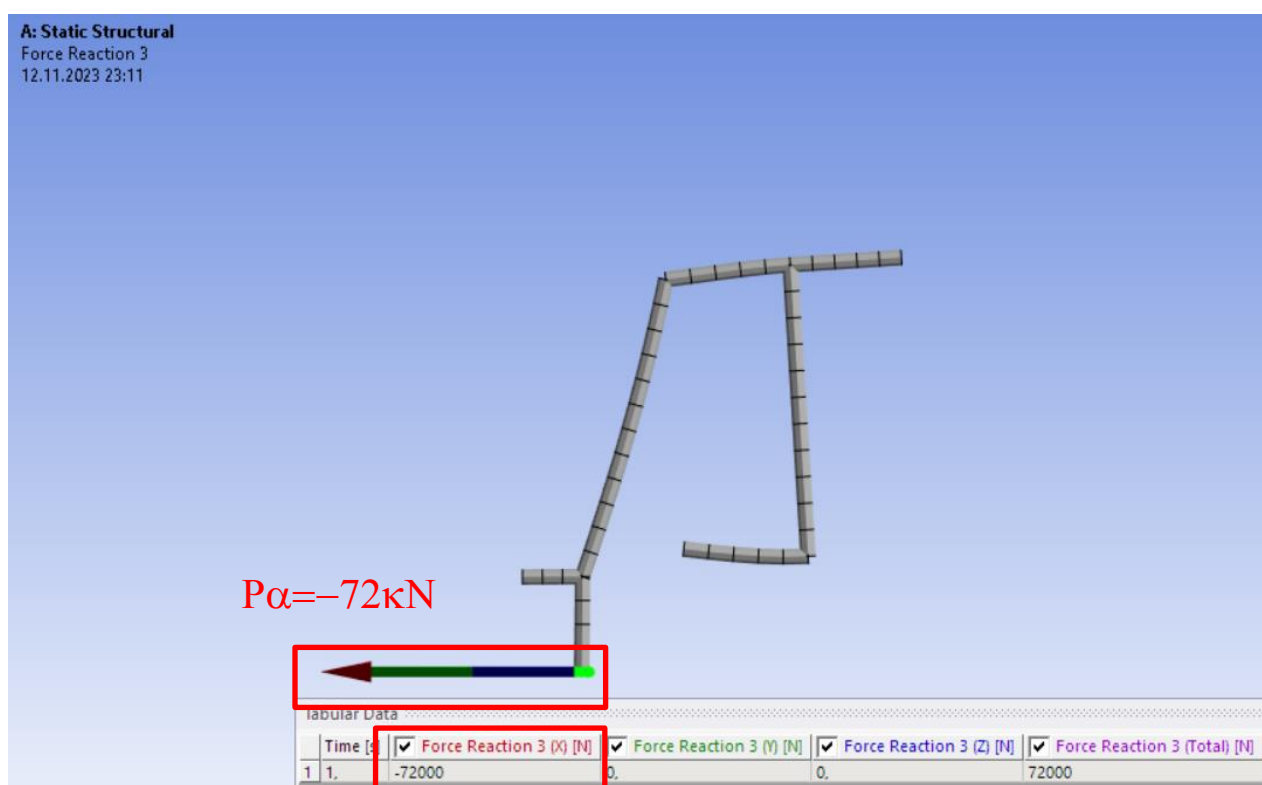


Рисунок 5.14 – Опорная реакция в точке А

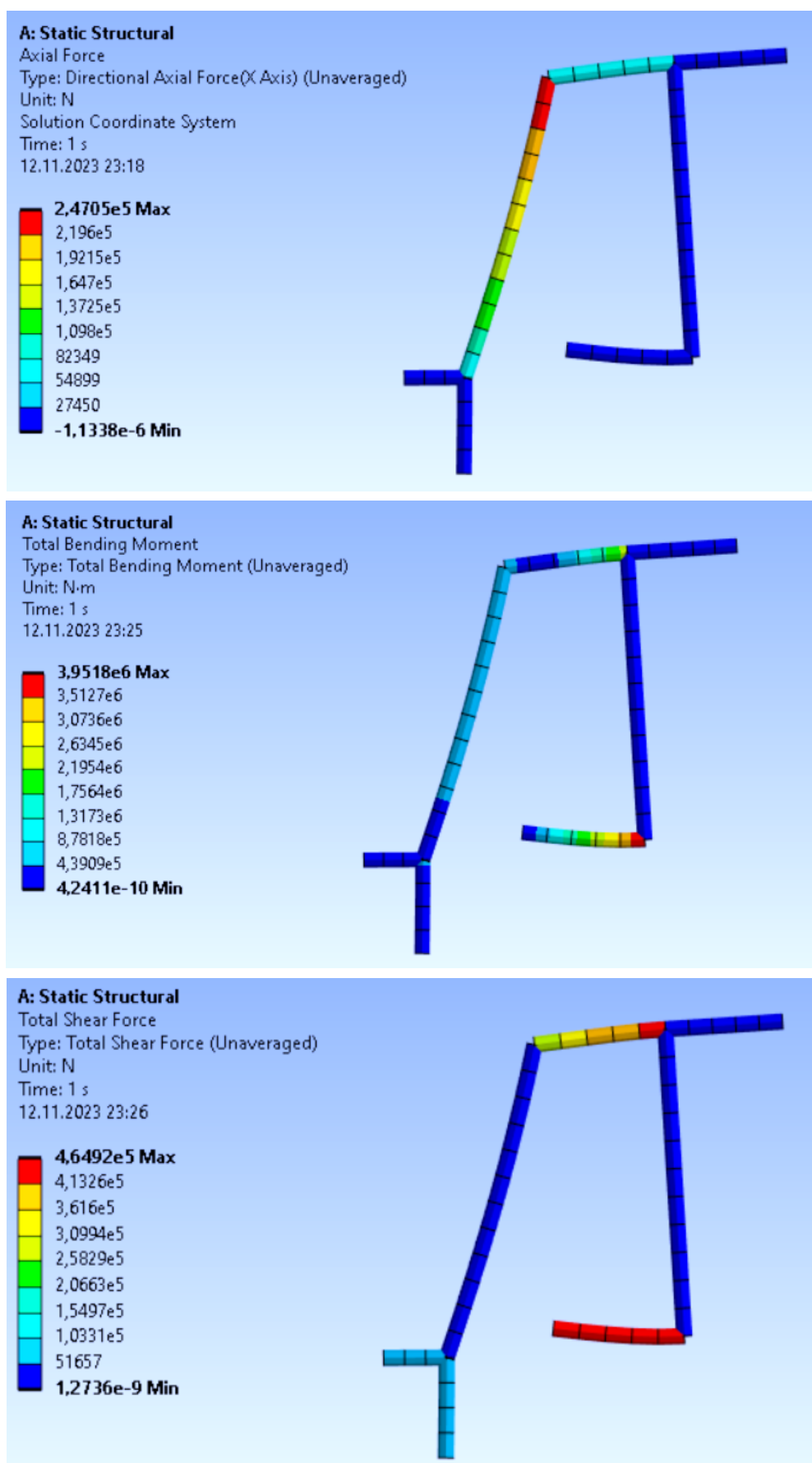


Рисунок 5.15 – Внутренние усилия «M», «Q», «N» в элементах рамы

После определения значений усилий строим эпюры M , Q , N (рисунки 5.16 – 5.18).

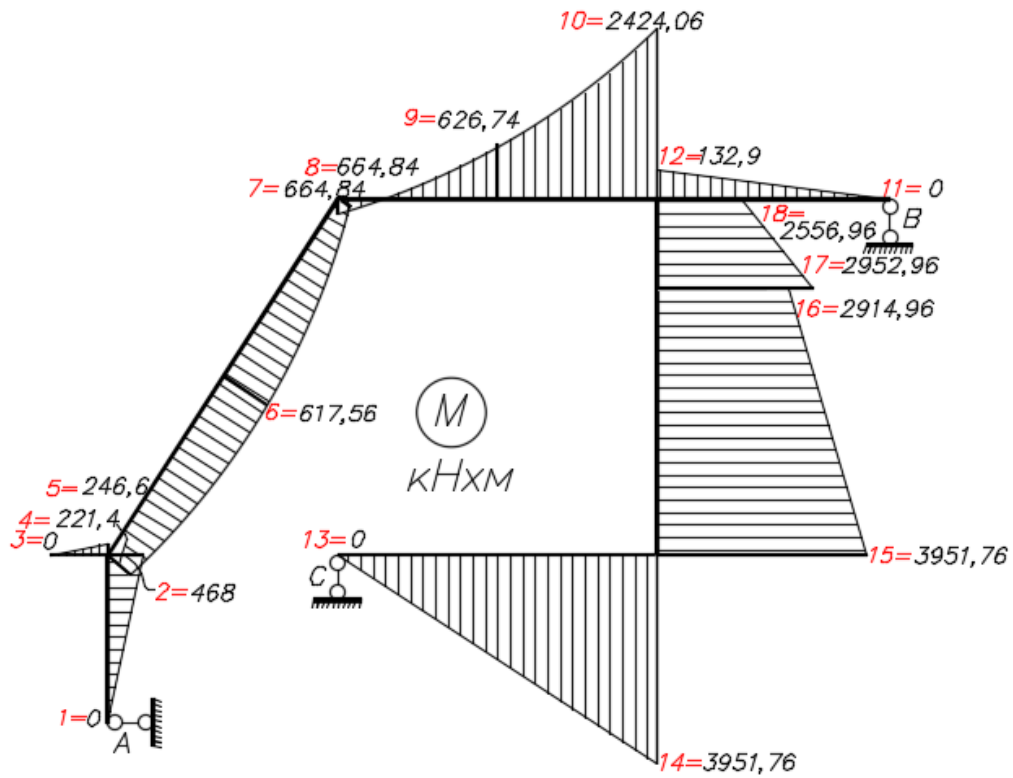


Рисунок 5.16 – Эпюра изгибающего момента « M », $\text{кН}\cdot\text{м}$

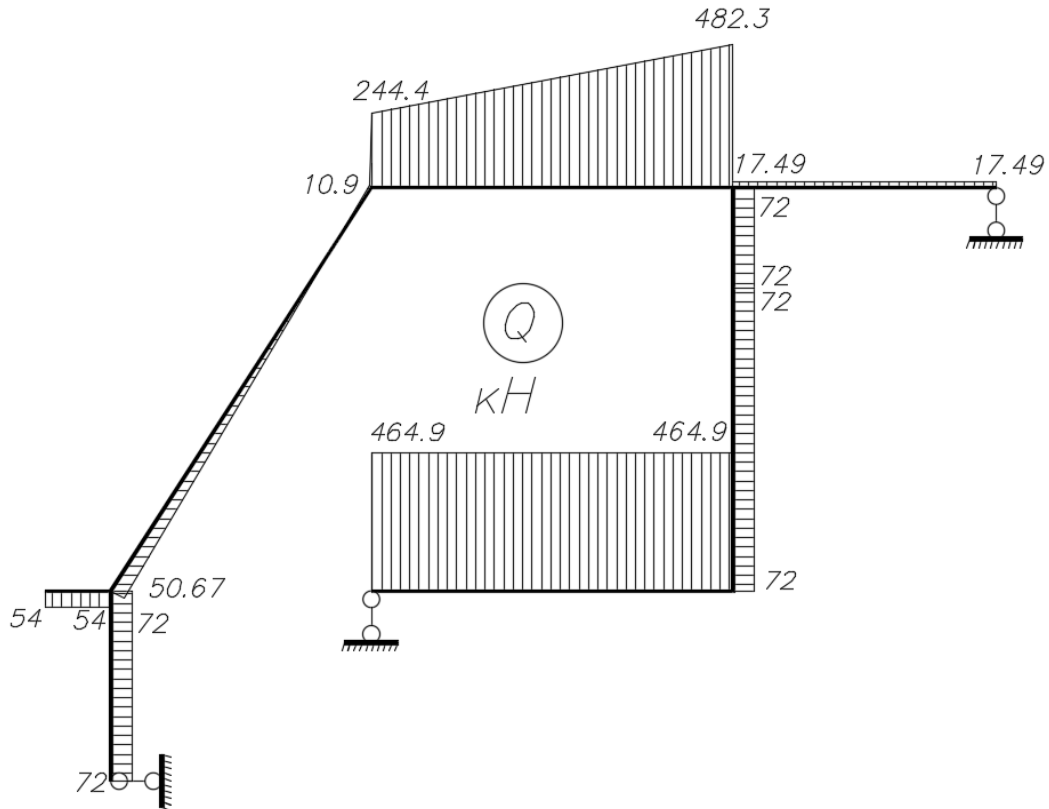


Рисунок 5.17 – Эпюра поперечной силы « Q », кН

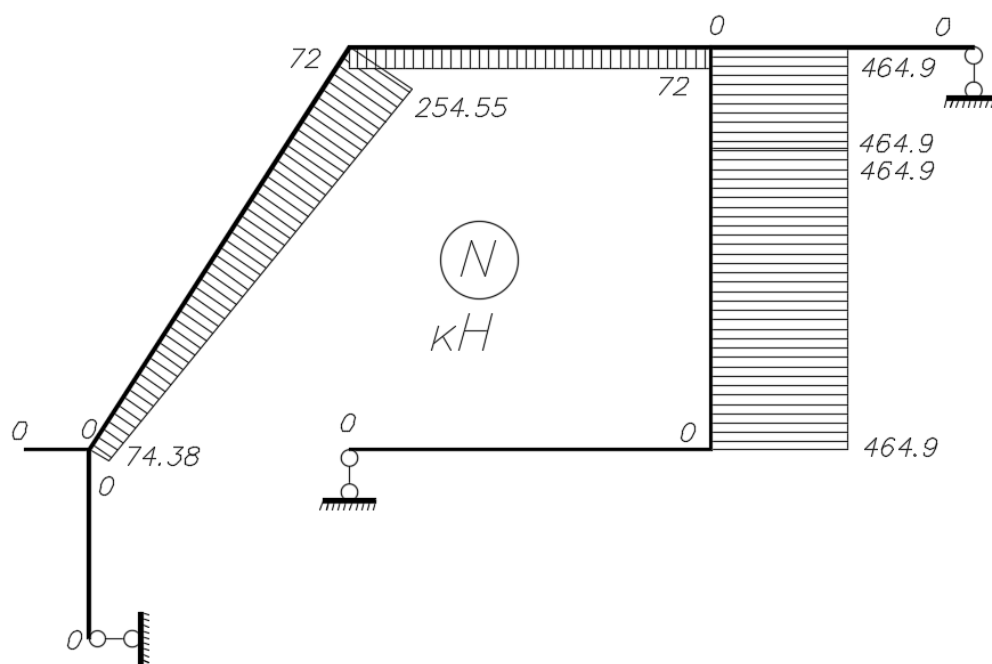


Рисунок 5.18 – Эпюра продольной силы «N», кН

Вывод

Изучил применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам и решение систем линейных алгебраических уравнений, выполнил верификацию результатов расчета в программах *Sirius, Lira, Scad, SolidWorks, ANSYS*.

Расчет в программе *MathCAD* полностью совпадает с расчетами в программных комплексах *Lira* и *Scad*. В *SolidWorks* по эпюре напряжений визуально видно по шкале, что твердое тело по материалу разрушилось и по перемещениям можно сказать, что они очень большие – 5030 мм – и это нереально, поэтому чтобы использовать такую конструкцию, необходимо оптимизировать сечение (увеличить толщину стенки или диаметр трубы).

5.2 Матричная форма определения перемещений в рамах

Цель работы: изучить применение матричной формы определения перемещений на примере расчета перемещений в раме, выполнить проверку результатов расчета в ПК *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*.

Расчет рамы выполнен в лабораторной работе № 5, определим горизонтальное, вертикальное перемещение и угол поворота узла 4. На рисунке 5.19 приведена расчетная схема рамы.

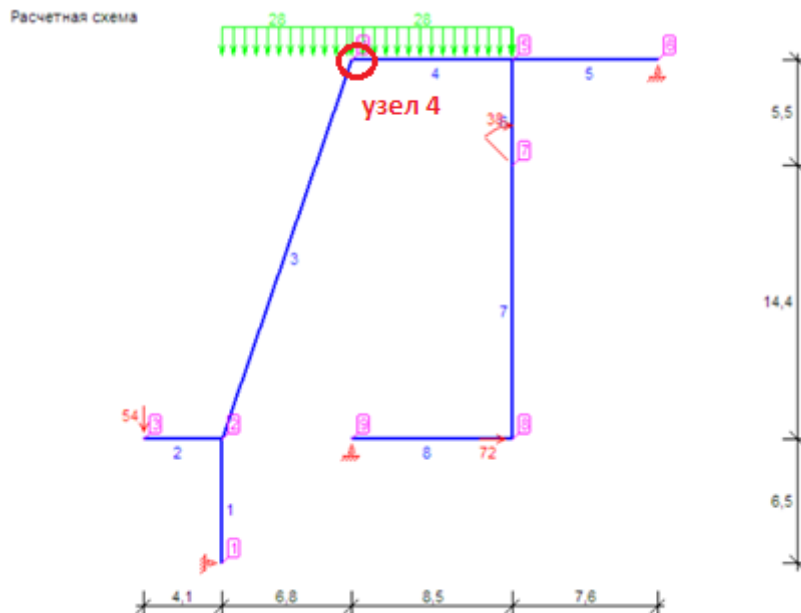


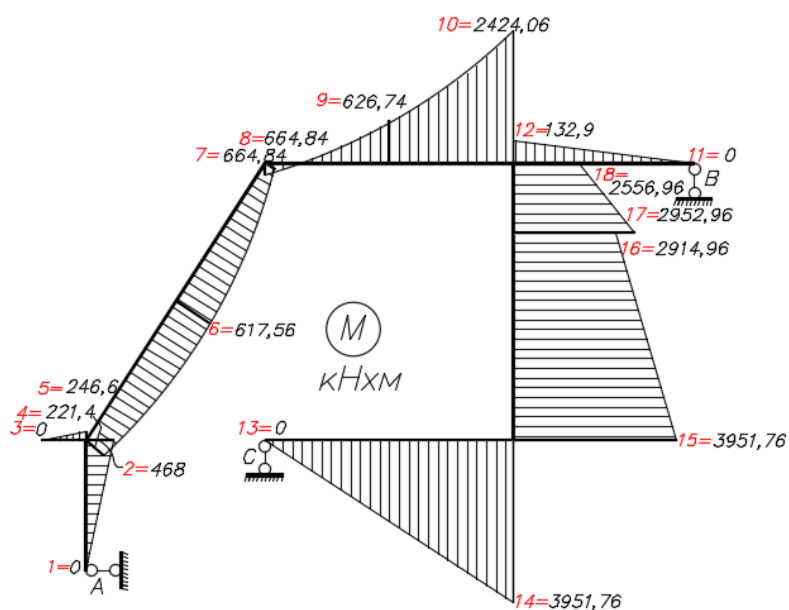
Рисунок 5.19 – Расчетная схема рамы и нумерация узлов

Пусть изгибная жесткость вертикальных стержней равна $EJ = 600 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$ в программе *Sirius* в программах *Lira*, *Scad*, *SolidWorks* для трубы 530 x 10 принимали $EJ = 1130788 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$. Грузовая эпюра моментов « M_P » рамы от действия внешней нагрузки была получена ранее.

Составим матрицу-столбец (вектор) ординат грузовой эпюры M_P . Принимаем правило знаков: положительными будем считать значения ординат, находящихся выше или правее стержня.

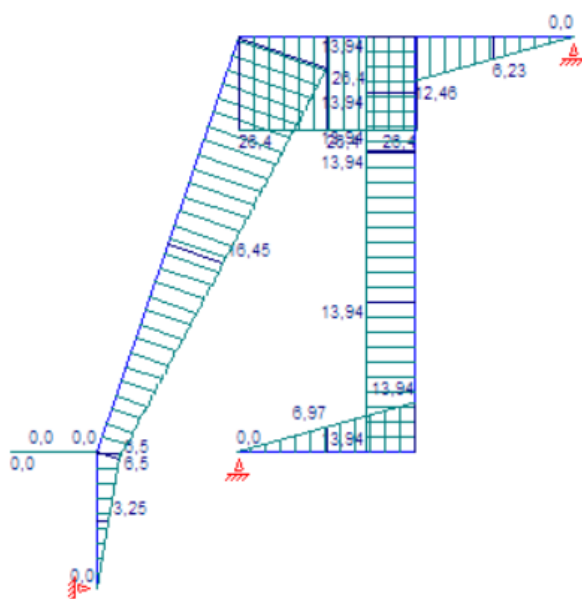
Для определения горизонтального перемещения узла 4 приложим в него единичную сосредоточенную силу $F_1 = 1$ горизонтально; построим единичную эпюру M_1 рамы. Для определения вертикального перемещения узла 4 приложим в него единичную сосредоточенную силу $F_1 = 1$ вертикально; построим единичную эпюру M_2 рамы. Соответственно, для определения угла поворота узла 4 приложим в него единичный момент $m = 1$; построим единичную эпюру M_3 рамы.

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/oUgTQPsmS8g?si=_0ZPhrxNpw4TeepY.



Эпюра моментов от нагрузки « M_p »

1	0	начальное
2	468	конечное
3	0	начальное
4	221,4	конечное
5	246,6	начальное
6	617,56	среднее
7	664,84	конечное
8	-664,84	начальное
9	626,74	среднее
10	2424,06	конечное
11	0	начальное
12	132,9	конечное
13	0	начальное
14	-3951,76	конечное
15	3951,76	начальное
16	2914,96	конечное
17	2952,96	начальное
18	2556,96	конечное



Эпюра моментов от горизонтальной силы $P = 1$ « M_1 »

1	0	начальное
2	6,5	конечное
3	0	начальное
4	0	конечное
5	6,5	начальное
6	16,45	среднее
7	26,4	конечное
8	-26,4	начальное
9	-26,4	среднее
10	-26,4	конечное
11	0	начальное
12	-12,46	конечное
13	0	начальное
14	13,94	конечное
15	-13,94	начальное
16	-13,94	конечное
17	-13,94	начальное
18	-13,94	конечное

Эпюра моментов от вертикальной силы $P = 1$ « M_2 »

1	0	начальное
2	0	конечное
3	0	начальное
4	0	конечное
5	0	начальное
6	0	среднее
7	0	конечное
8	0	начальное
9	4,25	среднее
10	8,5	конечное
11	0	начальное
12	0	конечное
13	0	начальное
14	-8,5	конечное
15	8,5	начальное
16	8,5	конечное
17	8,5	начальное
18	8,5	конечное

Эпюра моментов момента $m = 1$ « M_3 »

1	0	начальное
2	0	конечное
3	0	начальное
4	0	конечное
5	0	начальное
6	0	среднее
7	0	конечное
8	-1	начальное
9	-1	среднее
10	-1	конечное
11	0	начальное
12	-0,47	конечное
13	0	начальное
14	0,53	конечное
15	-0,53	начальное
16	-0,53	конечное
17	-0,53	начальное
18	-0,53	конечное

Составим матрицу $[\bar{M}]^T$, состоящую из двух строк ординат по участкам из единичных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$.

$$M1t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 16.45 & 0 \\ 0 & 26.4 & 0 \\ 0 & -26.4 & -1 \\ 4.25 & -26.4 & -1 \\ 8.5 & -26.4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.46 & -0.47 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8.5 & 13.94 & 0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.25 & 8.5 & 0 & 0 & 0 & -8.5 & 8.5 & 8.5 & 8.5 & 8.5 \\ 0 & 6.5 & 0 & 0 & 6.5 & 16.45 & 26.4 & -26.4 & -26.4 & -26.4 & 0 & -12.46 & 0 & 13.94 & -13.94 & -13.94 & -13.94 & -13.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -0.47 & 0 & 0.53 & -0.53 & -0.53 & -0.53 & -0.53 \end{pmatrix}$$

Составим матрицы упругой податливости участков $[D_{mi}]$ с учетом их длин:

$$\begin{aligned} Dm1 &:= h1 \cdot D1 & Dm2 &:= L1 \cdot D1 & Dm3 &:= \sqrt{L2^2 + (h2 + h3)^2} \cdot D2 & Dm4 &:= L3 \cdot D2 \\ Dm5 &:= L4 \cdot D1 & Dm6 &:= L3 \cdot D1 & Dm7 &:= h2 \cdot D1 & Dm8 &:= h3 \cdot D1 \end{aligned}$$

Составим квазидиагональную матрицу упругой податливости системы $[D]$, которая состоит из матриц упругой податливости участков $[D_{mi}]$ и нулевых матриц (рисунок 5.20).

$$Z2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z23 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z32 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z33 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_2] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [D_n] \end{bmatrix},$$

где n – количество участков в системе (в данном примере $n = 8$),

$$D := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot Dm$$

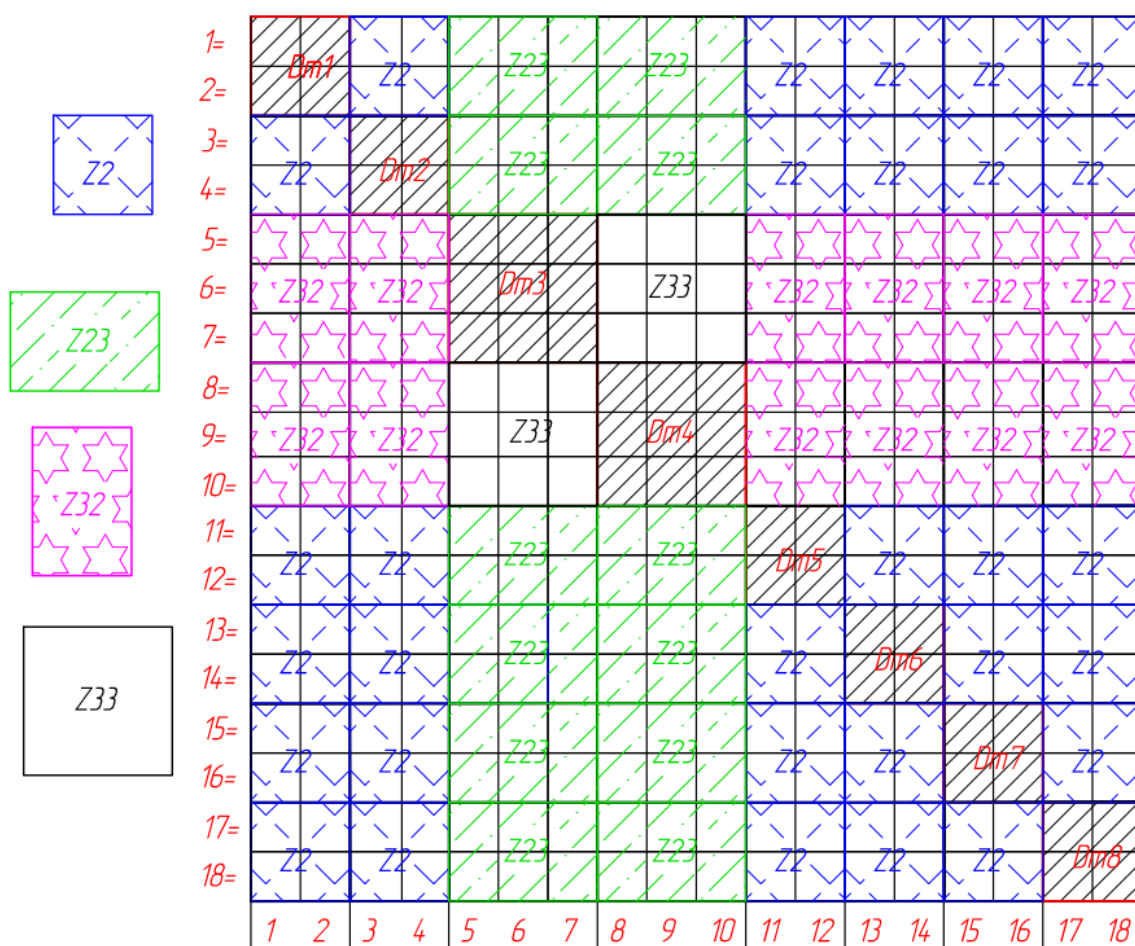


Рисунок 5.20 – Квазидиагональная матрица упругой податливости системы

Для объединения матриц используем команды:

```

D1row := augment(Dm1, Z2, Z23, Z23, Z2, Z2, Z2, Z2)
D2row := augment(Z2, Dm2, Z23, Z23, Z2, Z2, Z2, Z2)
D3row := augment(Z32, Z32, Dm3, Z33, Z32, Z32, Z32, Z32)
D4row := augment(Z32, Z32, Z33, Dm4, Z32, Z32, Z32, Z32)
D5row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Dm5, Z2, Z2, Z2)
D6row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Z2, Dm6, Z2, Z2)
D7row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Z2, Z2, Dm7, Z2)
D8row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Z2, Z2, Z2, Dm8)
Dm := stack(D1row, D2row, D3row, D4row, D5row, D6row, D7row, D8row)

```

Определим искомые перемещения, используя матричную форму определения перемещений:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{ox} \\ \Delta_{oy} \\ \Delta_{uy} \end{Bmatrix} = [\bar{M}]^T \cdot [D] \cdot \{M_p\}$$

Определим искомые перемещения, произведя расчеты в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

С примером составления программы в *MathCAD* можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/oUgTQPsmS8g?si=_0ZPhrxNpw4TeepY.

Перевод единиц кН := 1 м := 1 мм := 0.001м % := 1
L1 := 4.1м L2 := 6.8м L3 := 8.5м L4 := 7.6м h1 := 6.5м h2 := 14.4м h3 := 5.5м

$$M_p := \begin{pmatrix} 0 \\ 468 \\ 0 \\ 221.4 \\ 246.6 \\ 617.56 \\ 664.84 \\ -664.84 \\ 626.74 \\ 2424.06 \\ 0 \\ 132.9 \\ 0 \\ -3951.76 \\ 3951.76 \\ 2914.96 \\ 2952.96 \\ 2556.96 \end{pmatrix} \quad M1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 16.45 & 0 \\ 0 & 26.4 & 0 \\ 0 & -26.4 & -1 \\ 4.25 & -26.4 & -1 \\ 8.5 & -26.4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.46 & -0.47 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8.5 & 13.94 & 0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \end{pmatrix} \quad M1t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 16.45 & 0 \\ 0 & 26.4 & 0 \\ 0 & -26.4 & -1 \\ 4.25 & -26.4 & -1 \\ 8.5 & -26.4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.46 & -0.47 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8.5 & 13.94 & 0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \\ 8.5 & -13.94 & -0.53 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.25 & 8.5 & 0 & 0 & 0 & -8.5 & 8.5 & 8.5 & 8.5 \\ 0 & 6.5 & 0 & 0 & 6.5 & 16.45 & 26.4 & -26.4 & -26.4 & -26.4 & 0 & -12.46 & 0 & 13.94 & -13.94 & -13.94 & -13.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -0.47 & 0 & 0.53 & -0.53 & -0.53 & -0.53 \end{pmatrix}$$

$$Z2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z23 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z32 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z33 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Dm1 := h1 \cdot D1 \quad Dm2 := L1 \cdot D1 \quad Dm3 := \sqrt{L2^2 + (h2 + h3)^2} \cdot D2 \quad Dm4 := L3 \cdot D2 \\ Dm5 := L4 \cdot D1 \quad Dm6 := L3 \cdot D1 \quad Dm7 := h2 \cdot D1 \quad Dm8 := h3 \cdot D1$$

D1row := augment(Dm1, Z2, Z23, Z23, Z2, Z2, Z2, Z2)
D2row := augment(Z2, Dm2, Z23, Z23, Z2, Z2, Z2, Z2)
D3row := augment(Z32, Z32, Dm3, Z33, Z32, Z32, Z32, Z32)
D4row := augment(Z32, Z32, Z33, Dm4, Z32, Z32, Z32, Z32)
D5row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Dm5, Z2, Z2, Z2)
D6row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Z2, Dm6, Z2, Z2)
D7row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Z2, Z2, Dm7, Z2)
D8row := augment(Z2, Z2, Z23, Z23, Z2, Z2, Z2, Dm8)
Dm := stack(D1row, D2row, D3row, D4row, D5row, D6row, D7row, D8row)

для проверки в Sirius

$$EJ := 6000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

$$D := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot Dm$$

$$\Delta := M1t \cdot D \cdot Mp = \begin{pmatrix} 114.749 \\ -167.35 \\ -7.728 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

$$OX: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{166 - 167.35}{166} = -0.813 \%$$

$$Uy: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{0.408 - 0.404}{0.404} = 0.99 \%$$

$$OY: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{114.8 - 114.749}{114.749} = 0.044 \%$$

для проверки в Scad

$$Uy: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{7.654 - 7.728}{7.654} = -0.967 \%$$

$$\Delta := M1t \cdot D \cdot Mp = \begin{pmatrix} 6.051 \\ -8.824 \\ -0.408 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

для проверки в Lira

$$EJ := 113788 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

$$D := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot Dm$$

$$\Delta := M1t \cdot D \cdot Mp = \begin{pmatrix} 6.051 \\ -8.824 \\ -0.408 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

$$OX: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{6.051 - 6.055}{6.051} = -0.066 \%$$

$$OX: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{6.051 - 6.051}{6.051} = 0 \%$$

$$OY: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{8.824 - 8.749}{8.749} = 0.857 \%$$

$$Uy: \delta_{\text{м}} := 100 \cdot \frac{0.408 - 0.403}{0.403} = 1.241 \%$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	13	6.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	6.5	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	8.2	4.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	4.1	8.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	21.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	84.119	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	21.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	8.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.5	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15.2	7.6	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.6	15.2	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	8.5	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.5	17	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28.8	14.4	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28.8	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	5.5
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.5	11

Результаты расчета в программных комплексах приведены на рисунках 5.21–5.24 (см. результаты расчета в разделе 5.1).

Смещения и углы поворота узлов			
№	Вдоль OX,м	Вдоль OY,м	Поворот,рад
1	Нет	-1,594E+02	-5,425E+00
2	-3,581E+01	-1,594E+02	-5,679E+00
3	-3,581E+01	-1,828E+02	-5,755E+00
4	-1,660E+02	-1,148E+02	-7,654E+00
5	-1,660E+02	-5,094E+01	-6,647E+00
6	-1,660E+02	Нет	-6,731E+00
7	-1,363E+02	-5,092E+01	-4,122E+00
8	-1,332E+02	-5,087E+01	4,118E+00
9	-1,332E+02	Нет	6,917E+00

Рисунок 5.21 – Смещения и углы поворота узлов в ПК Sirius

Таблица узлов					
№ узла	Перемещения				
	X	Y	Z	UX	UY
1	0.000	0.000	- 8402.744	0.000	- 286.080
2	- 1888.491	0.000	- 8402.744	0.000	- 299.461
3	- 1888.491	0.000	- 8641.387	0.000	- 303.441
4	- 8755.727	0.000	- 6055.064	0.000	- 403.643
5	- 8755.545	0.000	- 2686.406	0.000	- 350.515
6	- 8755.545	0.000	0.000	0.000	- 354.954
7	- 7185.234	0.000	- 2685.646	0.000	- 217.316
8	- 7027.614	0.000	- 2683.657	0.000	217.298
9	- 7027.614	0.000	0.000	0.000	364.937

Рисунок 5.22 – Таблица узлов «Перемещения» в ПК Lira

Величины перемещений			
Узел	Загружение	Значение	
		X	U _y
1	1	0	-285,829
2	1	-1886,889	-299,195
3	1	-1886,889	-303,184
4	1	-8748,955	-403,369
5	1	-8748,774	-350,305
6	1	-8748,774	-354,747
7	1	-7179,35	-217,192
8	1	-7021,726	217,167
9	1	-7021,726	364,724

Рисунок 5.23 – Таблица узлов «Перемещения» в ПК Scad

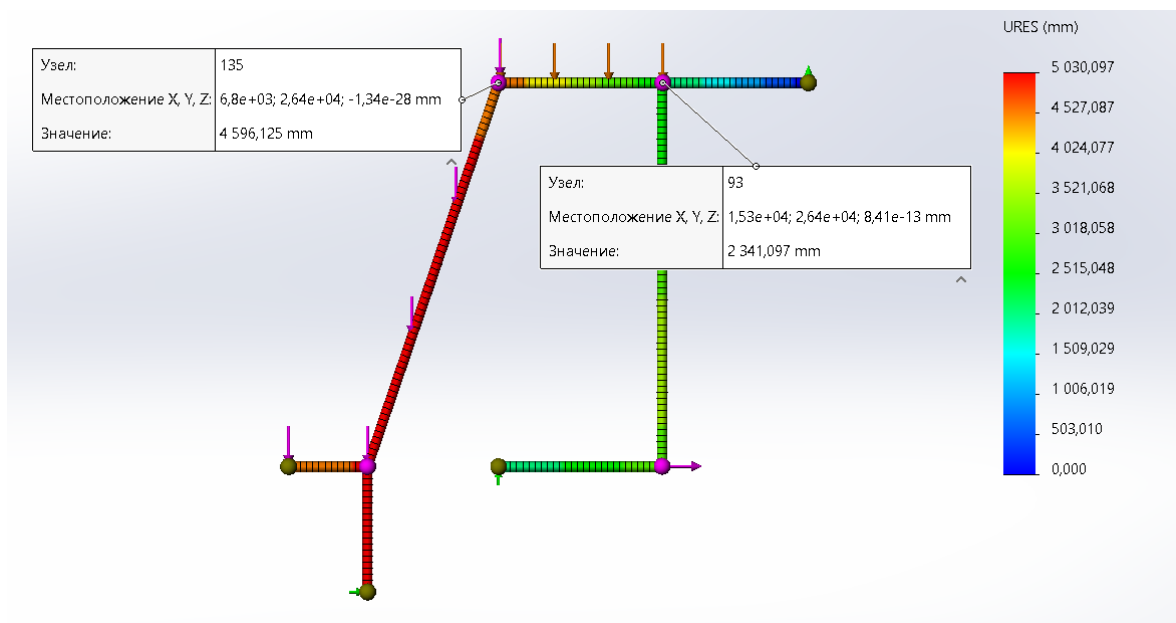


Рисунок 5.24 – Перемещение узла ($X = 6,8$ м; $Y = 2,64$ м) в ПК SolidWorks

Вывод

Из расчетов матричным способом, реализованный в MathCAD получили, что в результате нагружения рамы узел 4 сместился по оси $X = 6,051$ м, по оси $Y = -8,824$ м, угол поворота этого сечения составил $-0,408 \times 10^3$ рад.

Погрешности результатов в сравнении с программными комплексами:

Погрешность Sirius	Погрешность Lira	Погрешность Scad
OX: $\delta := 100 \cdot \frac{166 - 167.35}{166} = -0.813 \%$	OX: $\delta := 100 \cdot \frac{6.051 - 6.055}{6.051} = -0.066 \%$	OX: $\delta := 100 \cdot \frac{6.051 - 6.051}{6.051} = 0 \%$
OY: $\delta := 100 \cdot \frac{114.8 - 114.749}{114.749} = 0.044 \%$	OY: $\delta := 100 \cdot \frac{8.824 - 8.755}{8.755} = 0.788 \%$	OY: $\delta := 100 \cdot \frac{8.824 - 8.749}{8.749} = 0.857 \%$
Uy: $\delta := 100 \cdot \frac{7.654 - 7.728}{7.654} = -0.967 \%$	Uy: $\delta := 100 \cdot \frac{0.408 - 0.404}{0.404} = 0.99 \%$	Uy: $\delta := 100 \cdot \frac{0.408 - 0.403}{0.403} = 1.241 \%$

По результатам можем судить, что перемещения определены верно, с программой *SolidWorks* не сравниваем, так как расчет перемещений узлов получен как для твердого тела, а не для стержня, и результаты отличаются.

6 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Исследование пространственной ферменной структуры в программных комплексах *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*

Цель работы: создать модель ферменной структуры, определить усилия в статически и выполнить ее исследование на прочность и деформативность в ПК *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*. Оценить погрешность результатов усилий по максимально сжатому (N_{min}) и растянутому (N_{max}) стержню.

Исходные данные: число верхних узлов – количество букв в фамилии; значение нагрузок P_i – порядковый номер буквы фамилии в алфавите.

Пример расчета. Рассмотрим моделирование ферменной структуры, представленной на рисунке 6.1.

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/pbRd8Z0UwVY?si=dsLmj4bPMzEuaz5p>.

В программе *SolidWorks* по заданным размерам создали трехмерный эскиз:

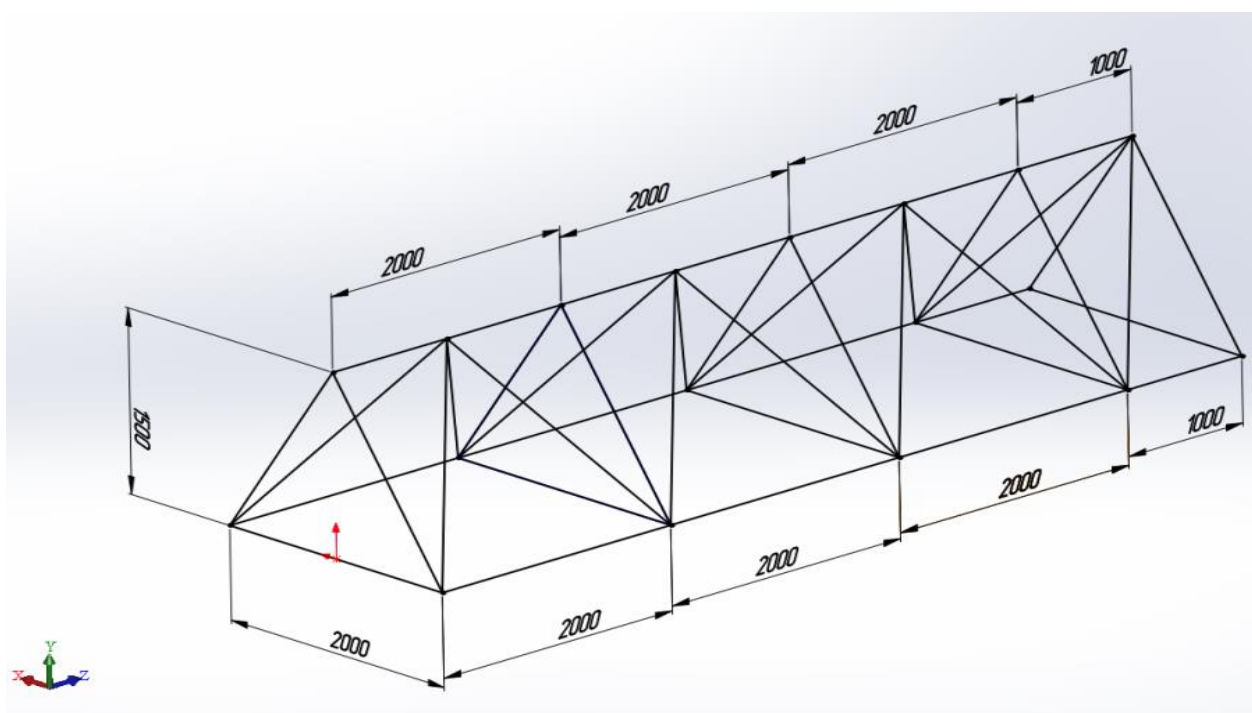


Рисунок 6.1 – Трехмерный эскиз в ПК *SolidWorks*

Обшили профилями квадратная труба «Молодечно» 100 х 5, задали нагрузки, крепления, материал и выполнили расчет (рисунки 6.2–6.5).

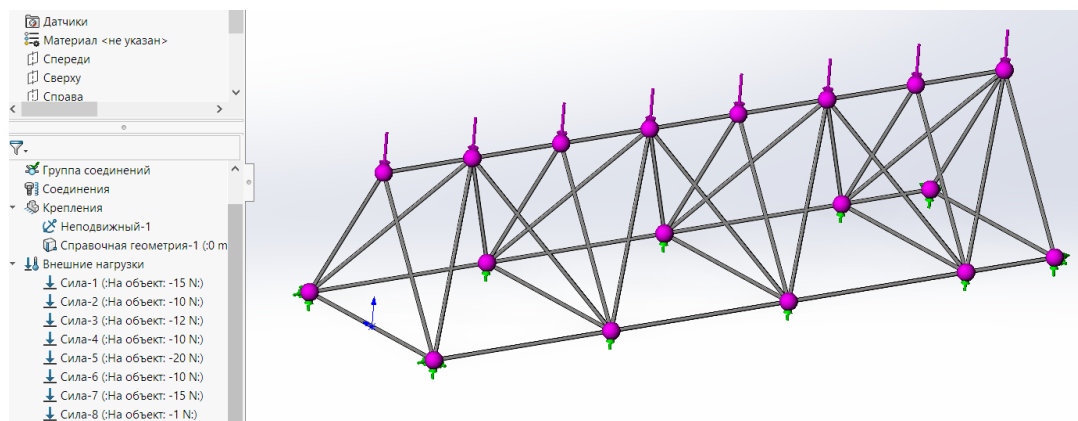


Рисунок 6.2 – Расчетная схема в ПК SolidWorks

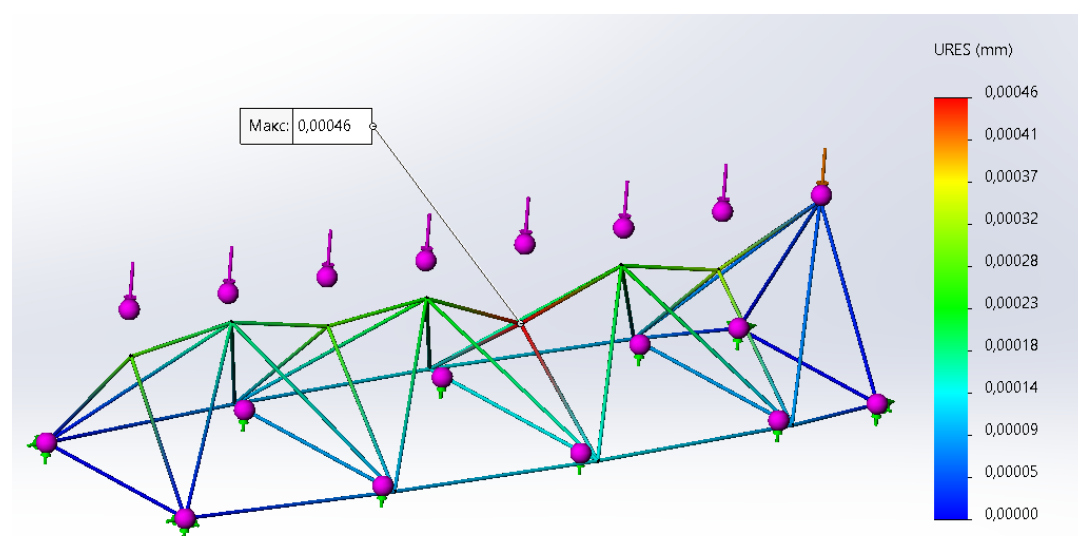


Рисунок 6.3 – Перемещения в ПК SolidWorks

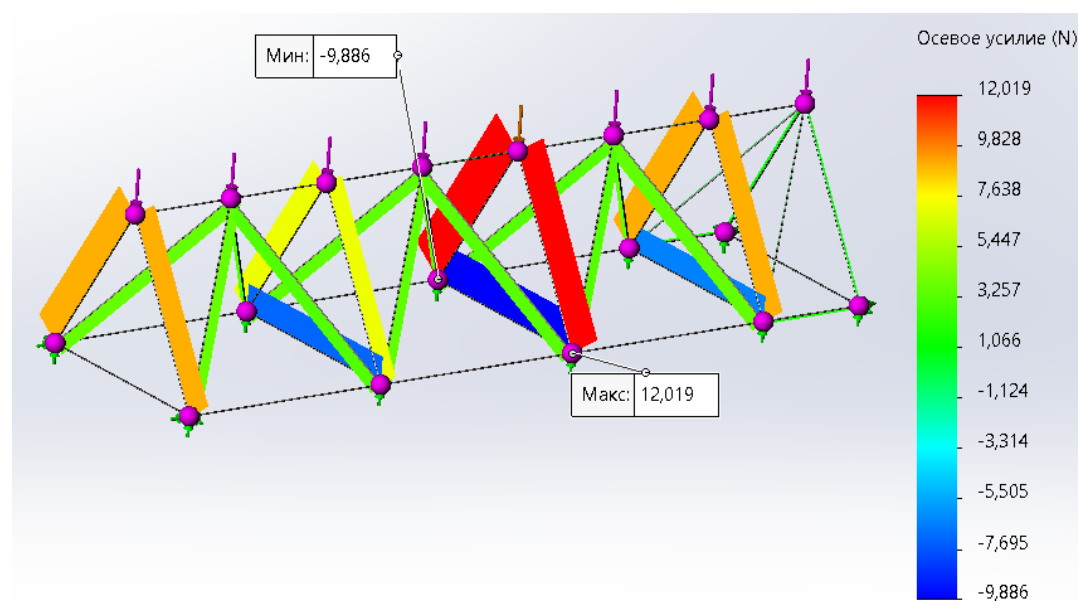


Рисунок 6.4 – Осевое усилие «N» ПК SolidWorks (max, min)

Элемент	Окончание	По оси (N)	Элемент	Окончание	По оси (N)	Элемент	Окончание	По оси (N)	43	1	9,0108
			15	1	-0	29	1	7,2111		2	-9,0108
1	1	3,1757		2	0		2	-7,2111			
	2	-3,1757							44	1	-0
2	1	0,92905	16	1	9,0222	30	1	0,50837		2	0
	2	-0,92905		2	-9,0222		2	-0,50837			
3	1	7,2112				31	1	0,6627			
	2	-7,2112	17	1	9,0101		2	-0,6627			
4	1	1,625		2	-9,0101	32	1	3,5973			
	2	-1,625	8	1	12,018		2	-3,5973			
5	1	3,5892		2	-12,018	33	1	3,2778			
	2	-3,5892	19	1	0,6627		2	-3,2778			
6	1	-0,29749		2	-0,6627	34	1	-0,17153			
	2	0,29749	20	1	0,35892		2	0,17153			
7	1	-0,37408		2	-0,35892	35	1	3,3582			
	2	0,37408	21	1	1,6184		2	-3,3582			
8	1	-0,17259		2	-1,6184	36	1	12,019			
	2	0,17259	22	1	-6,5691		2	-12,019			
9	1	3,1721		2	6,5691	37	1	-7,2449			
	2	-3,1721	23	1	-0,33898		2	7,2449			
10	1	-1,1928e-07		2	0,33898	38	1	3,6961			
	2	1,1928e-07	24	1	-9,8857		2	-3,6961			
11	1	0,50837		2	9,8857	39	1	0,92038			
	2	-0,50837	25	1	-0,36602		2	-0,92038			
12	1	-0,33649		2	0,36602	40	1	3,5173			
	2	0,33649	26	1	3,2809		2	-3,5173			
13	1	9,0154		2	-3,2809	41	1	3,5136			
	2	-9,0154	27	1	0,35892		2	-3,5136			
14	1	-0,30326		2	-0,35892	42	1	3,3546			
	2	0,30326	28	1	3,6998		2	-3,3546			
				2	-3,6998						

Рисунок 6.5 – Осевое усилие «N» ПК SolidWorks в табличном виде (max, min)

Произведем расчет в ПК Lira (рисунки 6.7–6.9).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/pbRd8Z0UwVY?si=dsLmj4bPMzEuaz5p>.

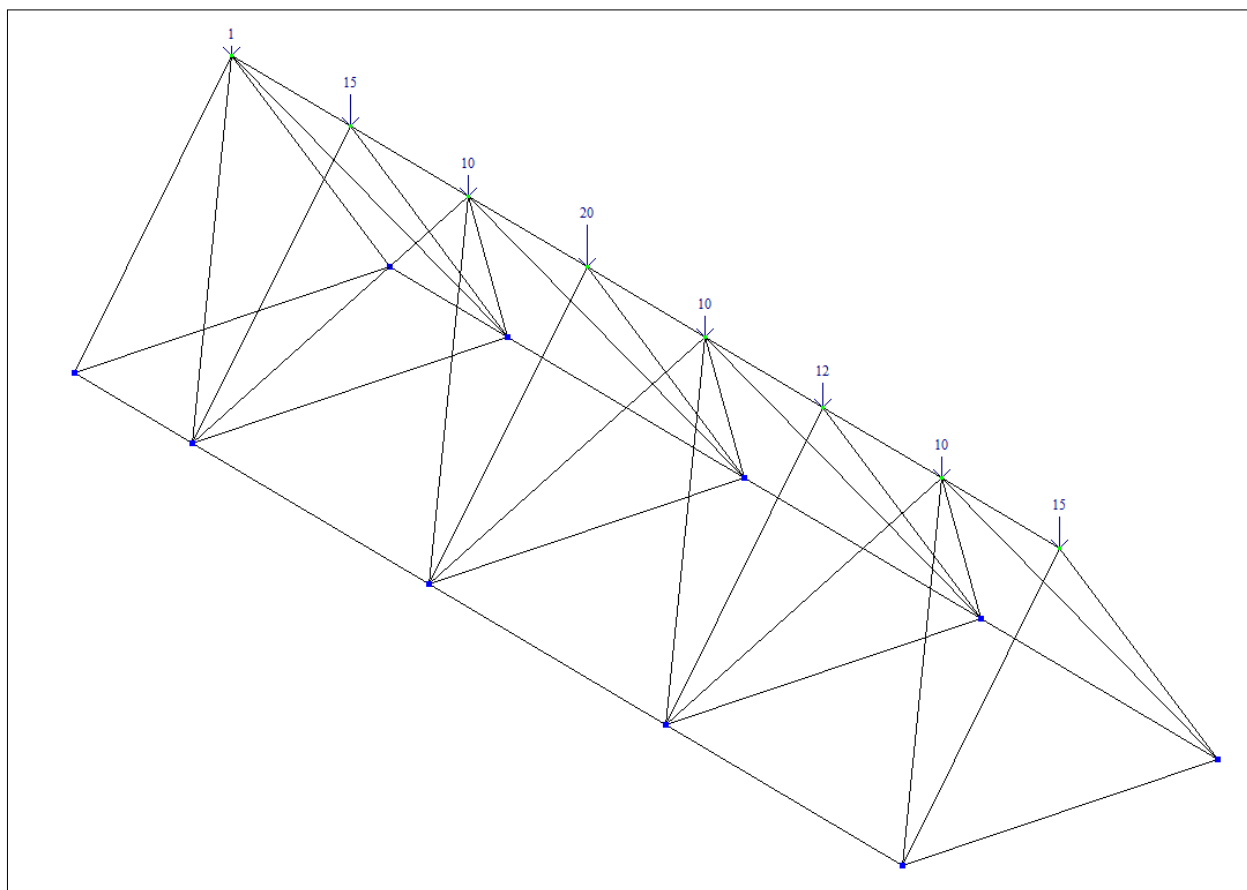


Рисунок 6.6 – Модель в ПК Lira

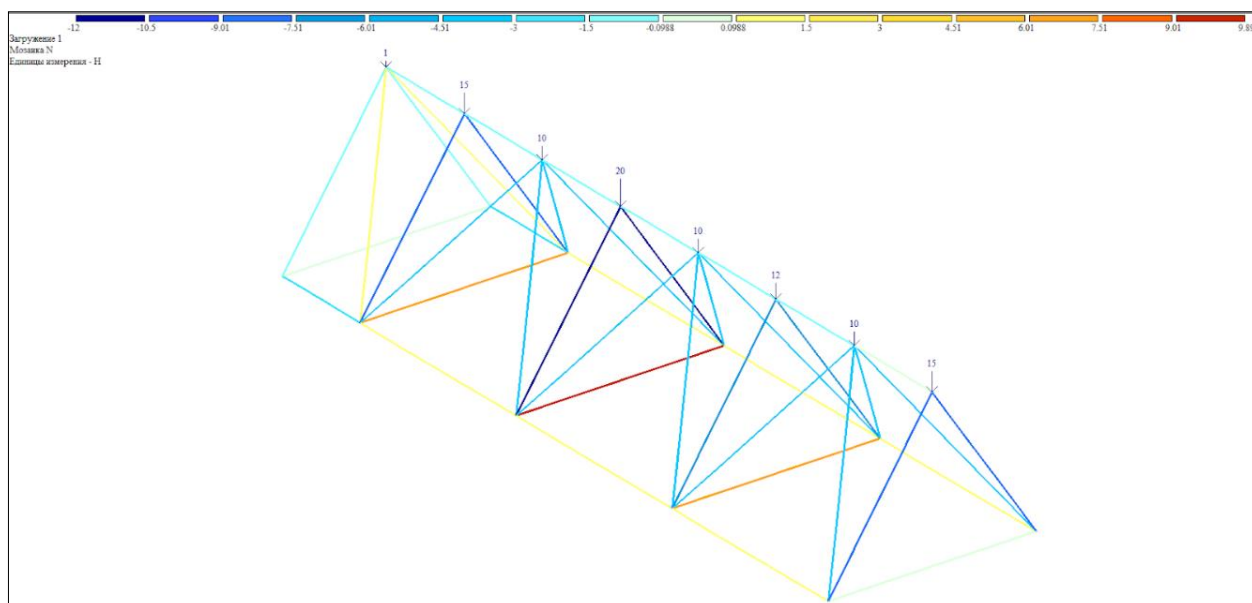


Рисунок 6.7 – Осевое усилие «N» ПК Lira (max, min)

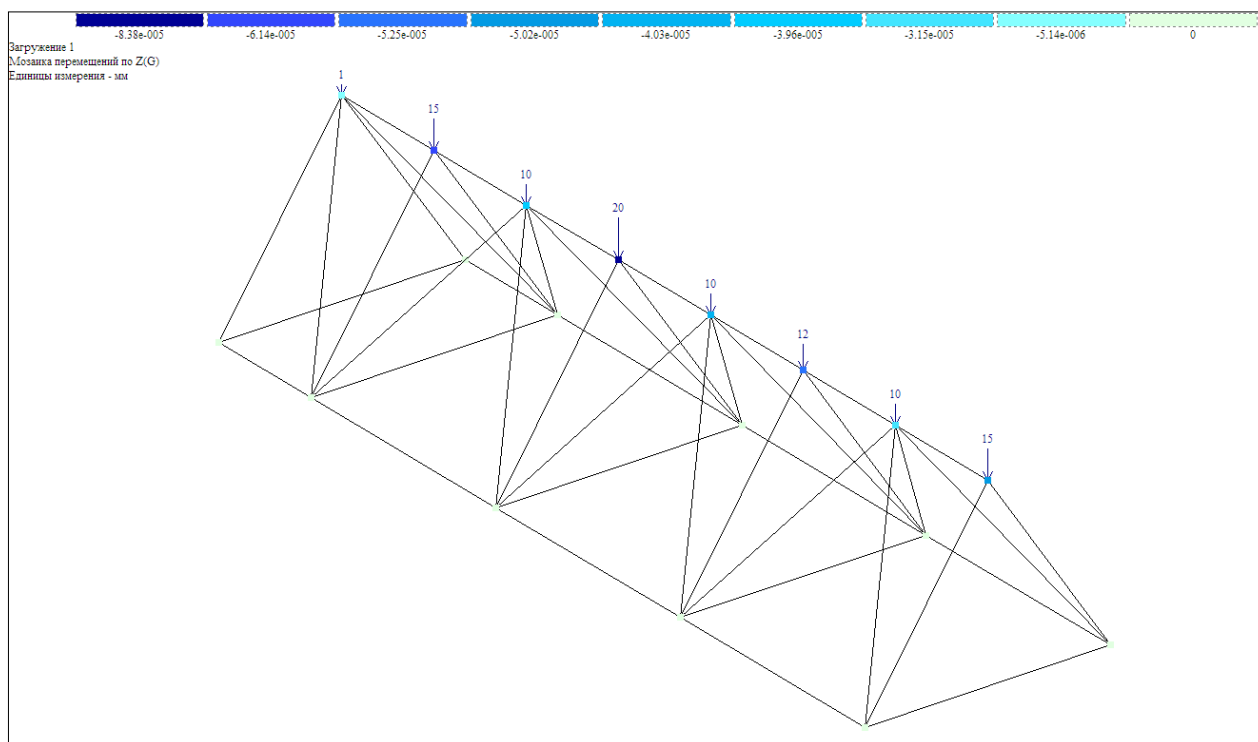


Рисунок 6.8 – Перемещения в ПК Lira

№ элем	№ сечен	Усилия	
		N (H)	
1	1	-	0.923
1	2	-	0.923
2	1	-	0.923
2	2	-	0.923
3	1	-	1.622
3	2	-	1.622
4	1		0.300
4	2		0.300
5	1		0.338
5	2		0.338
6	1		0.172
6	2		0.172
7	1	-	9.014
7	2	-	9.014
8	1	-	9.014
8	2	-	9.014
9	1		0.172
9	2		0.172
10	1		0.338
10	2		0.338
11	1		0.300
11	2		0.300
12	1	-	1.622
12	2	-	1.622
13	1	-	0.357
13	2	-	0.357
14	1	-	0.357
14	2	-	0.357
15	1	-	0.664
15	2	-	0.664
16	1	-	0.664
16	2	-	0.664
17	1	-	0.509
17	2	-	0.509
18	1	-	0.509
18	2	-	0.509
19	1		0.000
19	2		0.000
20	1	-	9.014
20	2	-	9.014
21	1	-	9.014
21	2	-	9.014
22	1	-	12.018
22	2	-	12.018
23	1	-	12.018
23	2	-	12.018
24	1	-	7.211
24	2	-	7.211
25	1	-	7.211
25	2	-	7.211
26	1	-	3.698
26	2	-	3.698
27	1	-	3.698
27	2	-	3.698
28	1	-	3.174
28	2	-	3.174
29	1	-	3.174
29	2	-	3.174
30	1	-	3.516
30	2	-	3.516
31	1	-	3.516
31	2	-	3.516
32	1	-	3.356
32	2	-	3.356
33	1	-	3.356
33	2	-	3.356
34	1	-	3.278
34	2	-	3.278
35	1	-	3.278
35	2	-	3.278
36	1	-	3.594
36	2	-	3.594
37	1	-	3.594
37	2	-	3.594
38	1		0.368
38	2		0.368
39	1		0.368
39	2		0.368
40	1		0.000
40	2		0.000
41	1		6.565
41	2		6.565
42	1		9.884
42	2		9.884
43	1		7.245
43	2		7.245
44	1		0.000
44	2		0.000

Рисунок 6.9 – Осевое усилие «N» ПК Lira в табличном виде (max, min)

Произведем расчет в ПК Scad и SolidWorks (рисунки 6.10–6.14).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/pbRd8Z0UwVY?si=dsLmj4bPMzEuaz5p>.

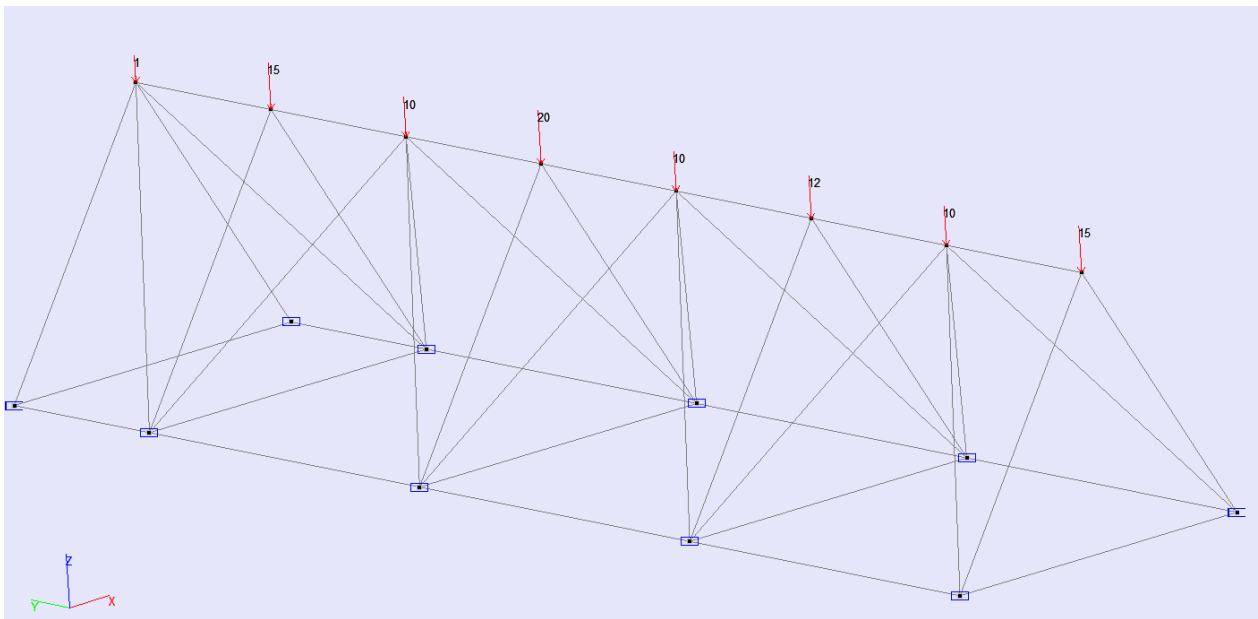


Рисунок 6.10 – Модель в ПК Scad

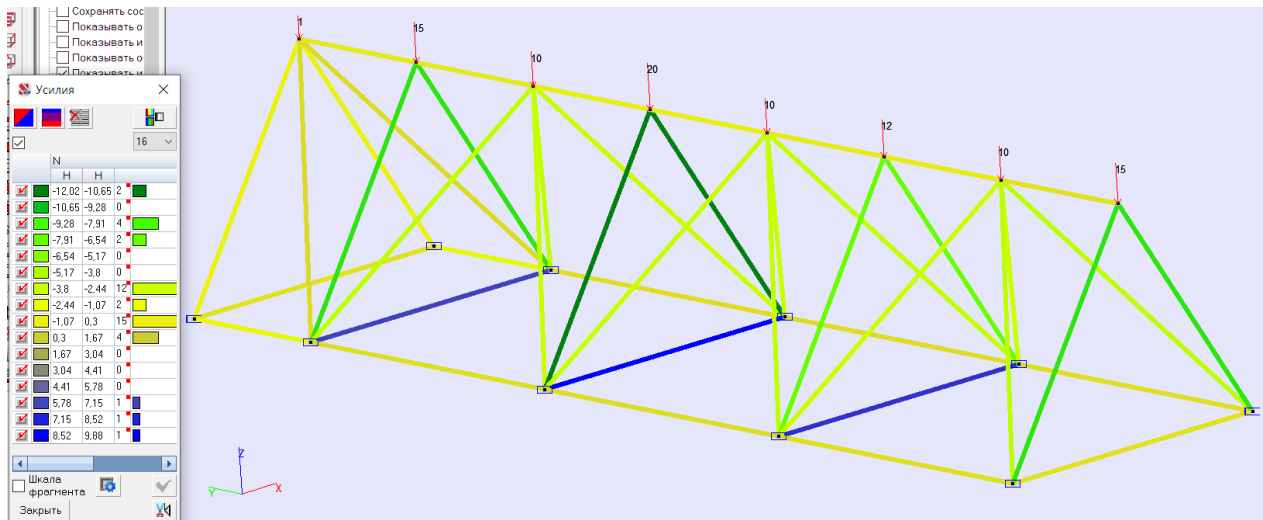


Рисунок 6.11 – Осевое усилие «N» ПК Scad

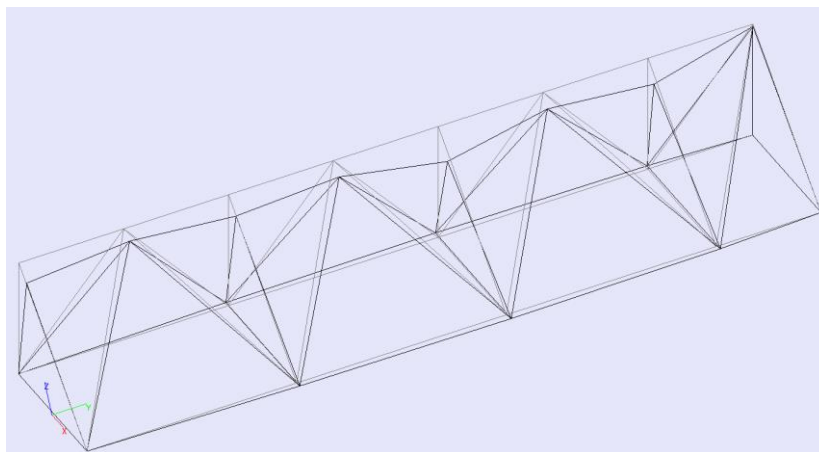


Рисунок 6.12 – Деформированная схема в ПК Scad

Величины усилий											
Элемент	Сечение	Загружение	Значение								
			N								
1	1	1	0,172	14	1	1	-7,211	29	1	1	-3,594
1	3	1	0,172	14	3	1	-7,211	29	3	1	-3,594
2	1	1	0,338	15	1	1	-12,019	30	1	1	-3,278
2	3	1	0,338	15	3	1	-12,019	30	3	1	-3,278
3	1	1	0,3	16	1	1	-12,019	31	1	1	-3,356
3	3	1	0,3	16	3	1	-12,019	31	3	1	-3,356
4	1	1	-1,622	17	1	1	-9,014	32	1	1	-3,516
4	3	1	-1,622	17	3	1	-9,014	32	3	1	-3,516
5	1	1	-0,923	18	1	1	-9,014	33	1	1	-3,174
5	3	1	-0,923	18	3	1	-9,014	33	3	1	-3,174
6	1	1	-0,923	21	1	1	-3,698	34	1	1	-3,698
6	3	1	-0,923	21	3	1	-3,698	34	3	1	-3,698
7	1	1	-1,622	22	1	1	-3,174	36	1	1	-0,509
7	3	1	-1,622	22	3	1	-3,174	36	3	1	-0,509
8	1	1	0,3	23	1	1	-3,516	37	1	1	-0,509
8	3	1	0,3	23	3	1	-3,516	37	3	1	-0,509
9	1	1	0,338	24	1	1	-3,356	38	1	1	-0,664
9	3	1	0,338	24	3	1	-3,356	38	3	1	-0,664
10	1	1	0,172	25	1	1	-3,278	39	1	1	-0,664
10	3	1	0,172	25	3	1	-3,278	39	3	1	-0,664
11	1	1	-9,014	26	1	1	-3,594	40	1	1	-0,357
11	3	1	-9,014	26	3	1	-3,594	40	3	1	-0,357
12	1	1	-9,014	27	1	1	0,368	41	1	1	-0,357
12	3	1	-9,014	27	3	1	0,368	41	3	1	-0,357
13	1	1	-7,211	28	1	1	0,368	43	1	1	7,245
13	3	1	-7,211	28	3	1	0,368	43	3	1	7,245
								44	1	1	9,884
								44	3	1	9,884
								45	1	1	6,565
								45	3	1	6,565

Рисунок 6.13 – Осевое усилие «N» ПК Scad в табличном виде (max, min)

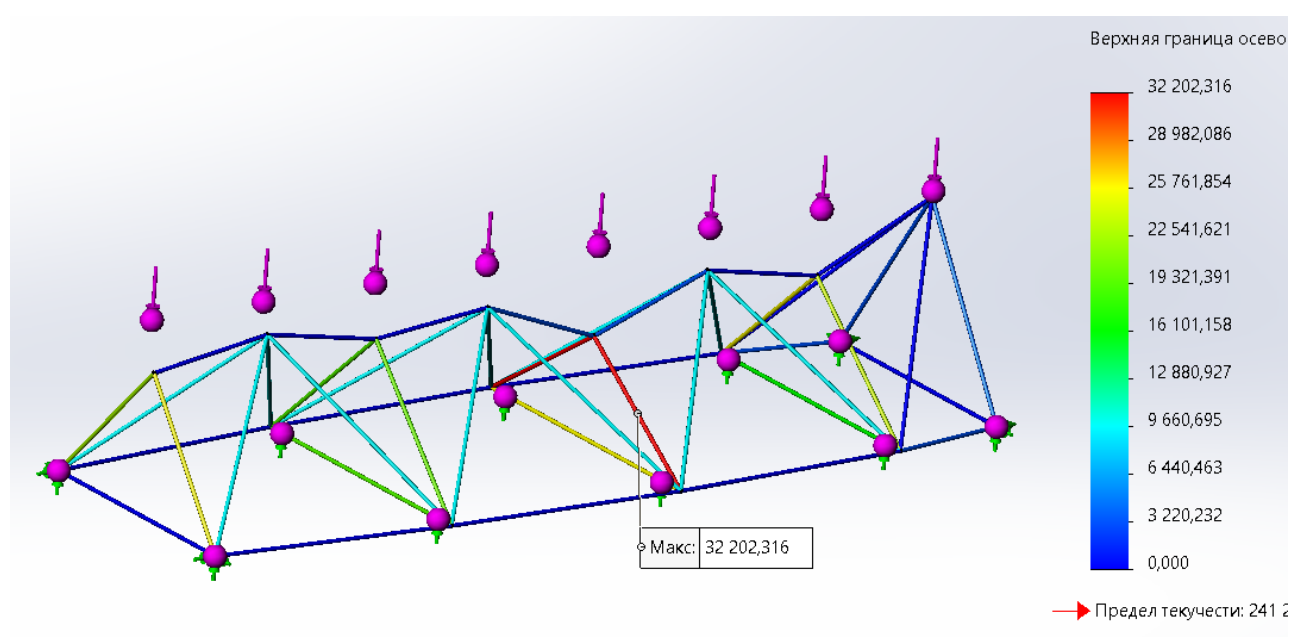


Рисунок 6.14 – Максимальное напряжение в стержне в ПК SolidWorks

Произведем расчет в ПК ANSYS (рисунки 6.15–6.17).

С примером расчета можно ознакомиться в видеорелике https://youtu.be/aDHWUUwK5Fo?si=pVuvb_jKEg9dnMKj.

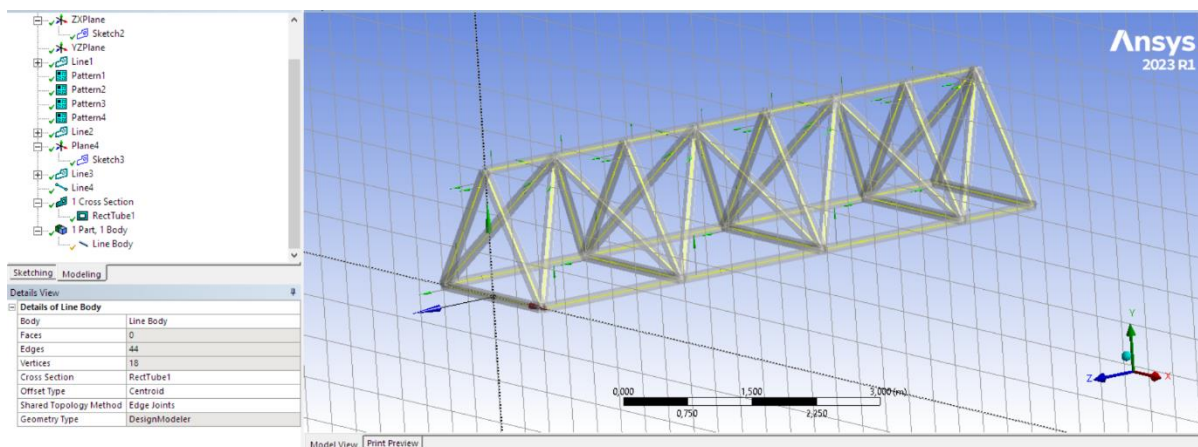


Рисунок 6.15 – Модель в ПК ANSYS

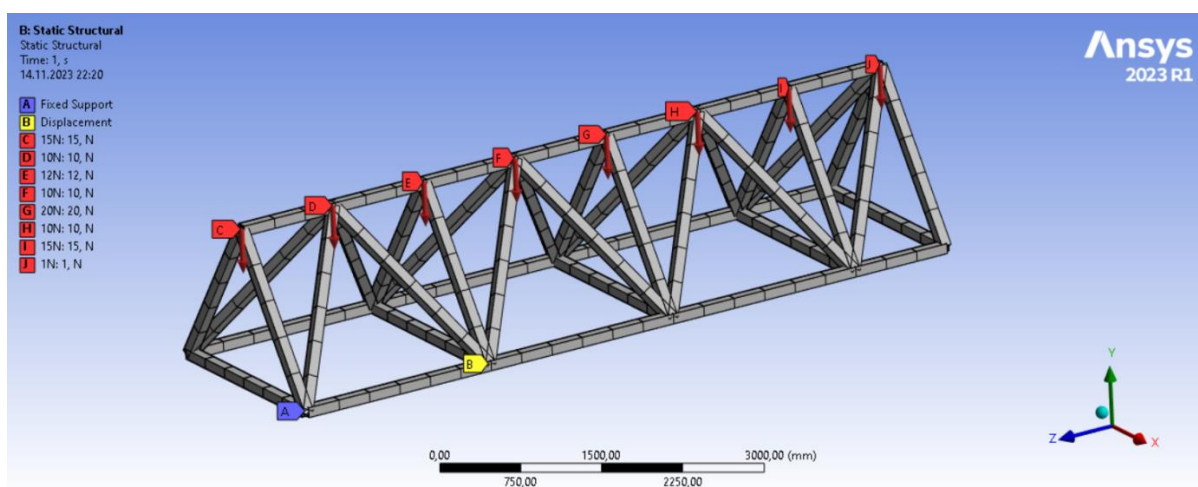


Рисунок 6.16 – Расчетная схема в ПК ANSYS

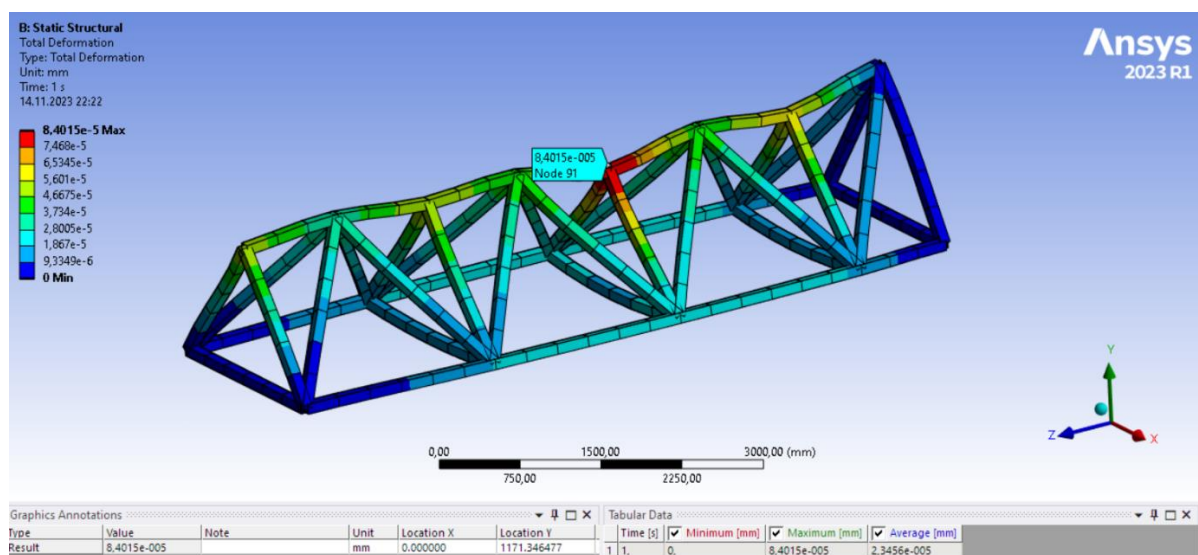


Рисунок 6.17 – Перемещения в ПК ANSYS

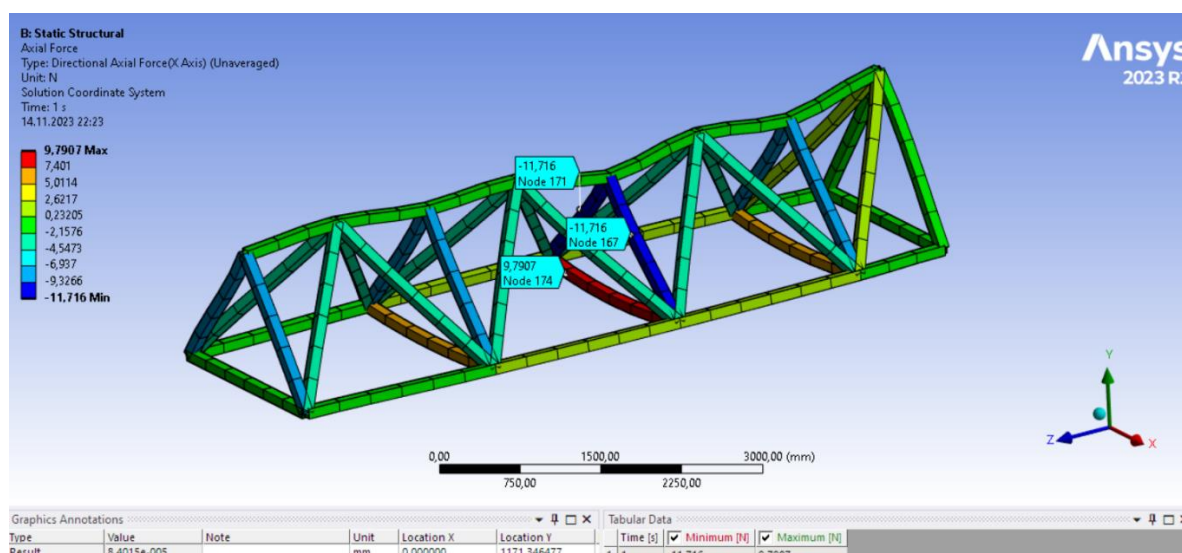


Рисунок 6.18 – Осевое усилие «N» ПК ANSYS (max, min)

Вывод

Создали модель ферменной структуры, определили усилия во всех программных комплексах *Lira*, *Scad*, *ANSYS*, *SolidWorks* – **N_{max} = 9,88 Н** (стержень растянут); **N_{min} = –12,019 Н** (стержень сжат), во всех программных комплексах максимальное усилие одинаковое.

Определили деформированный вид ферменной структуры и перемещение узлов, а также максимальное напряжение стержневого элемента конструкции.

7 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

7.1 Расчет усилий в трехшарнирных арках

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в трехшарнирных арках с использованием численного подхода, выполнить верификацию результатов расчета в программе *Arka3*, *Scad*, *Lira*, *SolidWorks*.

Исходные данные: см. приложение 3.

Порядок выполнения работы:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M , Q , N в сечениях арки с шагом 1 м, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных зависимостей усилий по длине арки;

2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M , Q , N ;

3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M , Q и N ; выполнить верификацию результатов расчета в программах *Sirius*, *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*, *ANSYS*.

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

Рассмотрим расчет арки пролетом $L = 28$ м со стрелой подъема $f = 8$ м, ось которой изменяется по параболическому закону (рисунок 7.1).

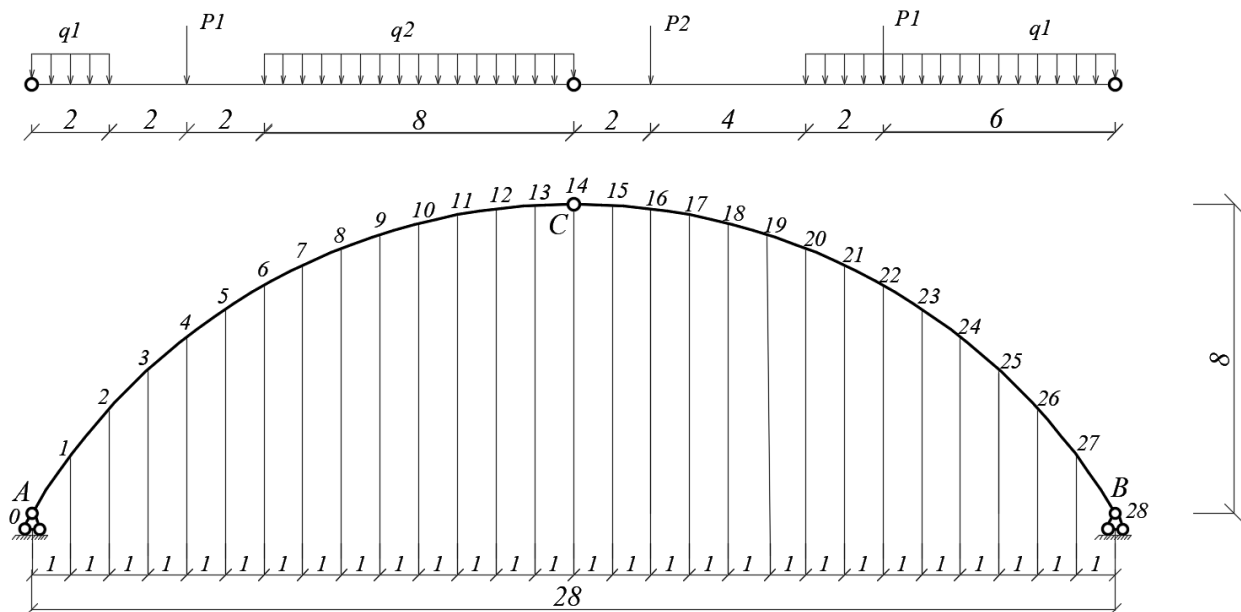


Рисунок 7.1 – Расчетная схема арки

Определим опорные реакции арки, используя уравнения равновесия:

$$\sum M_b = 0: R_a = \frac{q1 * 2 * 27 + P1 * 24 + q2 * 8 * 18 + P2 * 12 + q1 * 8 * 4 + P1 * 6}{L} = 156.071 \text{ кН}$$

$$\sum M_a = 0:$$

$$R_b = \frac{q1 * 2 * 1 + P1 * 4 + q2 * 8 * 10 + P2 * 16 + P1 * 22 + q1 * 8 * 24}{L} = 125.929 \text{ кН}$$

$$\sum M_c^{\text{лев}} = 0: H_a = \frac{Ra \cdot 14 - q1 \cdot 2 \cdot 13 - P1 \cdot 10 - q2 \cdot 8 \cdot 4}{f} = 152.375 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum M_c^{\text{прав}} = 0: Hb \cdot f - Rb \cdot 14 + q1 \cdot 8 \cdot 10 + P1 \cdot 8 + P2 \cdot 2 = 0.$$

Так как арка нагружена только вертикальными нагрузками, горизонтальные реакции опор будут одинаковы: $H = H_A = H_B$.

Усилий в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей.

В данном примере разобьем пролет арки на 28 частей и получим 28 расчетных сечений (0, 1, 2, ..., 28) (рисунок 7.2).

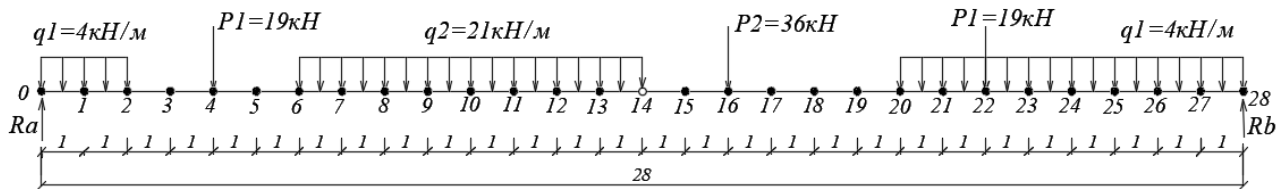


Рисунок 7.2 – Схема балки, для определения Mo_i и Qo_i

Величины усилий M , Q , N в сечениях арки определяются по формулам: $M_i = Mo_i - H \cdot y_i$; $Q_i = Qo_i \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i$; $N_i = -(Qo_i \sin \varphi_i + H \cos \varphi_i)$, где Mo_i , Qo_i – изгибающий момент и поперечная сила в i -ом сечении простой двухопорной балки, имеющей такой же пролет, как арка, и нагруженной такой же нагрузкой, как арка; H – распор арки; y_i , $\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$ – ордината, синус и косинус угла наклона касательной к оси арки по отношению к горизонтальной оси (либо угол между нормалью к оси арки и вертикальной осью) для i -го сечения арки (рисунок 7.1).

Абсцисса x_i для каждого (i -го) сечения определяется выражением

$$x_i = \Delta x \cdot i.$$

Ординаты y_i , синусы и косинусы углов наклона касательных ($\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$) для сечений найдем, используя геометрические зависимости, представленные для различных очертаний осей арок в приложении к данному разделу.

Все расчеты для сечений и построения эпюр усилий выполняем в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

Геометрические характеристики трехшарнирных арок

а) для параболических арок:

$$y = \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x); \quad \tan \varphi_i = \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot (L - 2 \cdot x_i);$$

$$\cos \varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \varphi_i)^2}} \quad \sin \varphi_i = \cos \varphi_i \cdot \tan \varphi_i;$$

б) для круговых арок:

$$R = \frac{4f^2 + L^2}{8f}; \quad y_i = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x_i\right)^2} - R + f; \quad \sin\varphi_i = \frac{L - 2x_i}{2R};$$

$$\cos\varphi_i = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_i}.$$

Произведем расчеты в программе *MathCAD*. Результаты расчетов приведены на рисунках 7.3, 7.4.

С примером составления *MathCAD*-программы можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nX0E1TcMmvc?si=J3CxfOGSUMGxrRT4>.

Перевод единиц: м := 1 кН := 1

$$L := 28\text{ м} \quad f := 8\text{ м} \quad P1 := 19\text{ кН}\cdot\text{м} \quad P2 := 36\text{ кН}\cdot\text{м} \quad q1 := 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad q2 := 21 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Реакции опор:

$$R_a := \frac{q1 \cdot 2 \cdot 27 + P1 \cdot 24 + q2 \cdot 8 \cdot 18 + P2 \cdot 12 + q1 \cdot 8 \cdot 4 + P1 \cdot 6}{L} = 156.071 \text{ кН} \quad R_b := \frac{q1 \cdot 2 \cdot 1 + P1 \cdot 4 + q2 \cdot 8 \cdot 10 + P2 \cdot 16 + P1 \cdot 22 + q1 \cdot 8 \cdot 24}{L} = 125.929 \text{ кН}$$

$$H_a := \frac{R_a \cdot 14 - q1 \cdot 2 \cdot 13 - P1 \cdot 10 - q2 \cdot 8 \cdot 4}{f} = 152.375 \text{ кН} \quad H_b := H_a \quad H := H_a$$

Проверка: $H_b \cdot f - R_b \cdot 14 + q1 \cdot 8 \cdot 10 + P1 \cdot 8 + P2 \cdot 2 = 0$

$$i := 0..28 \quad \Delta x := \frac{L}{28} \quad x_i := i \cdot \Delta x$$

$$y_i := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x_i \cdot (L - x_i) \quad \tan\varphi_i := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot (L - 2 \cdot x_i) \quad \cos\varphi_i := \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan\varphi_i)^2}} \quad \sin\varphi_i := \cos\varphi_i \cdot \tan\varphi_i$$

Левая сторона:

$$\begin{aligned} Mo_0 &:= 0 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_0 &:= Ra = 156.071 \text{ кН} \\ Mo_1 &:= Ra \cdot 1 - q1 \cdot 1 \cdot 0.5 = 154.071 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_1 &:= Ra - q1 \cdot 1 = 152.071 \text{ кН} \\ Mo_2 &:= Ra \cdot 2 - q1 \cdot 2 \cdot 1 = 304.143 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_2 &:= Ra - q1 \cdot 2 = 148.071 \text{ кН} \\ Mo_3 &:= Ra \cdot 3 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 1) = 452.214 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_3 &:= Ra - q1 \cdot 2 = 148.071 \text{ кН} \\ Mo_4 &:= Ra \cdot 4 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 2) = 600.286 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_4 &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 = 129.071 \text{ кН} \\ Mo_5 &:= Ra \cdot 5 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 3) - P1 \cdot 1 = 729.357 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_5 &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 = 129.071 \text{ кН} \\ Mo_6 &:= Ra \cdot 6 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 4) - P1 \cdot 2 = 858.429 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_6 &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 = 129.071 \text{ кН} \\ Mo_7 &:= Ra \cdot 7 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 5) - P1 \cdot 3 - q2 \cdot 1 \cdot 0.5 = 977 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_7 &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 1 = 108.071 \text{ кН} \\ Mo_8 &:= Ra \cdot 8 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 6) - P1 \cdot 4 - q2 \cdot 2 \cdot 1 = 1074.571 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_8 &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 2 = 87.071 \text{ кН} \\ Mo_9 &:= Ra \cdot 9 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 7) - P1 \cdot 5 - q2 \cdot 3 \cdot 1.5 = 1151.143 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_9 &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 3 = 66.071 \text{ кН} \\ Mo_{10} &:= Ra \cdot 10 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 8) - P1 \cdot 6 - q2 \cdot 4 \cdot 2 = 1206.714 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{10} &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 4 = 45.071 \text{ кН} \\ Mo_{11} &:= Ra \cdot 11 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 9) - P1 \cdot 7 - q2 \cdot 5 \cdot 2.5 = 1241.286 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{11} &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 5 = 24.071 \text{ кН} \\ Mo_{12} &:= Ra \cdot 12 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 10) - P1 \cdot 8 - q2 \cdot 6 \cdot 3 = 1254.857 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{12} &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 6 = 3.071 \text{ кН} \\ Mo_{13} &:= Ra \cdot 13 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 11) - P1 \cdot 9 - q2 \cdot 7 \cdot 3.5 = 1247.429 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{13} &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 7 = -17.929 \text{ кН} \\ Mo_{14} &:= Ra \cdot 14 - q1 \cdot 2 \cdot (1 + 12) - P1 \cdot 10 - q2 \cdot 8 \cdot 4 = 1219 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{14} &:= Ra - q1 \cdot 2 - P1 - q2 \cdot 8 = -38.929 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$M_i := Mo_i - H \cdot y_i \quad Q_i := Qo_i \cdot \cos\varphi_i - H \cdot \sin\varphi_i \quad N_i := -(Qo_i \cdot \sin\varphi_i + H \cdot \cos\varphi_i)$$

Правая сторона:

$$\begin{aligned} Mo_{28} &:= 0 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{28} &:= -Rb = -125.929 \text{ кН} \\ Mo_{27} &:= Rb \cdot 1 - q1 \cdot 1 \cdot 0.5 = 123.929 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{27} &:= -Rb + q1 \cdot 1 = -121.929 \text{ кН} \\ Mo_{26} &:= Rb \cdot 2 - q1 \cdot 2 \cdot 1 = 243.857 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{26} &:= -Rb + q1 \cdot 2 = -117.929 \text{ кН} \\ Mo_{25} &:= Rb \cdot 3 - q1 \cdot 3 \cdot 1.5 = 359.786 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{25} &:= -Rb + q1 \cdot 3 = -113.929 \text{ кН} \\ Mo_{24} &:= Rb \cdot 4 - q1 \cdot 4 \cdot 2 = 471.714 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{24} &:= -Rb + q1 \cdot 4 = -109.929 \text{ кН} \\ Mo_{23} &:= Rb \cdot 5 - q1 \cdot 5 \cdot 2.5 = 579.643 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{23} &:= -Rb + q1 \cdot 5 = -105.929 \text{ кН} \\ Mo_{22} &:= Rb \cdot 6 - q1 \cdot 6 \cdot 3 = 683.571 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{22} &:= -Rb + q1 \cdot 6 = -101.929 \text{ кН} \\ Mo_{21} &:= Rb \cdot 7 - q1 \cdot 7 \cdot 3.5 = 764.5 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{21} &:= -Rb + q1 \cdot 7 + P1 = -78.929 \text{ кН} \\ Mo_{20} &:= Rb \cdot 8 - q1 \cdot 8 \cdot 4 - P1 \cdot 2 = 841.429 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{20} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 = -74.929 \text{ кН} \\ Mo_{19} &:= Rb \cdot 9 - q1 \cdot 8 \cdot (4 + 1) - P1 \cdot 3 = 916.357 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{19} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 = -74.929 \text{ кН} \\ Mo_{18} &:= Rb \cdot 10 - q1 \cdot 8 \cdot (4 + 2) - P1 \cdot 4 = 991.286 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{18} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 = -74.929 \text{ кН} \\ Mo_{17} &:= Rb \cdot 11 - q1 \cdot 8 \cdot (4 + 3) - P1 \cdot 5 = 1066.214 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{17} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 = -74.929 \text{ кН} \\ Mo_{16} &:= Rb \cdot 12 - q1 \cdot 8 \cdot (4 + 4) - P1 \cdot 6 = 1141.143 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{16} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 = -74.929 \text{ кН} \\ Mo_{15} &:= Rb \cdot 13 - q1 \cdot 8 \cdot (4 + 5) - P1 \cdot 7 - P2 \cdot 1 = 1180.071 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{15} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 + P2 = -38.929 \text{ кН} \\ Mo_{14} &:= Rb \cdot 14 - q1 \cdot 8 \cdot (4 + 6) - P1 \cdot 8 - P2 \cdot 2 = 1219 \text{ кН}\cdot\text{м} & Qo_{14} &:= -Rb + q1 \cdot 8 + P1 + P2 = -38.929 \text{ кН} \end{aligned}$$

[illegible]

Рисунок 7.3 – Расчеты в программе MathCAD

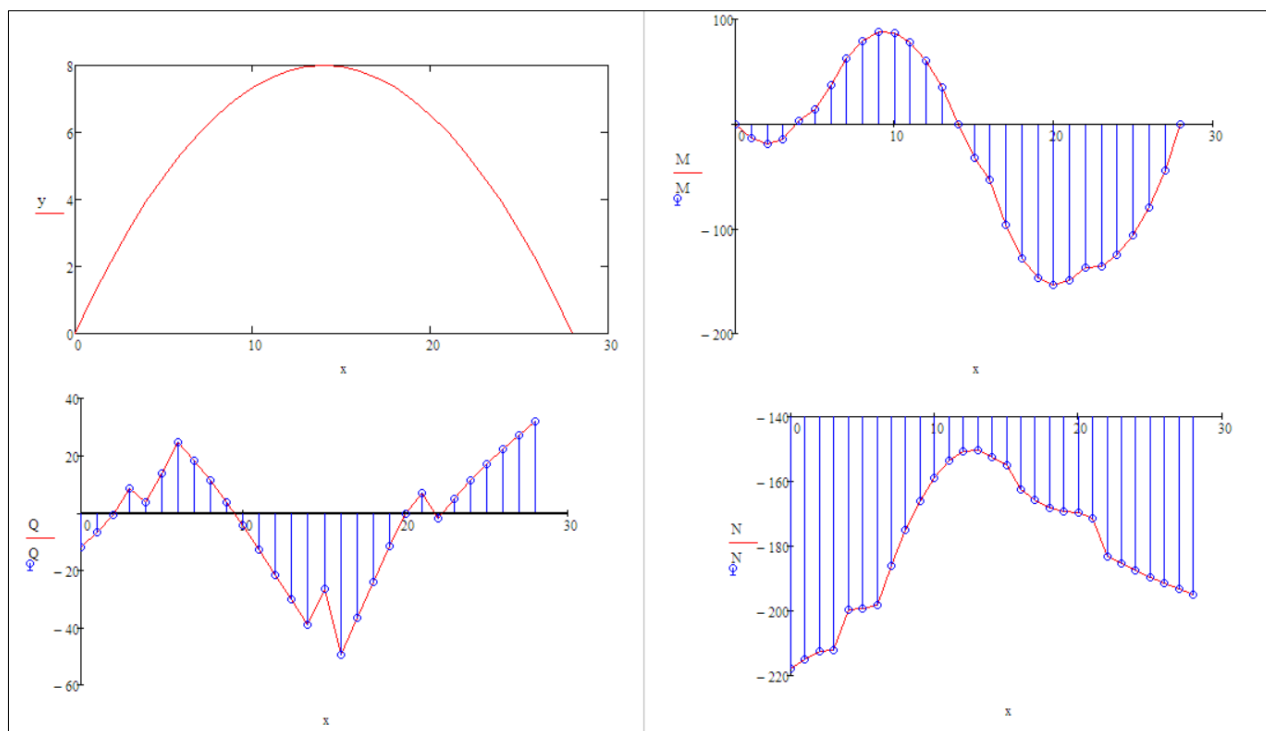


Рисунок 7.4 – Эпюры внутренних усилий в программе MathCAD

Выполним проверку усилий в программе Arka3 (рисунки 7.5–7.8), для этого необходимо ввести контрольные значения.

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nX0E1TcMmvc?si=J3CxfOGSUMGxrRT4>.

Ввод контрольных величин...

Введите координаты контрольных сечений и усилий M , Q , N в них !

$X_{k1}, m =$	$M_{k1}, kH \cdot m =$	$Q_{k1}, kH =$	$N_{k1}, kH =$
4	3.224	3.628	-199.661
$X_{k2}, m =$	$M_{k2}, kH \cdot m =$	$Q_{k2}, kH =$	$N_{k2}, kH =$
16.600	-79.278	-41.681	-162.659

Верно: M_{k1} , Q_{k1} , Q_{k2} , N_{k1} , N_{k2} ,
 Неверно: M_{k2} ,

OK
Отмена

Рисунок 7.5 – Ввод контрольных величин

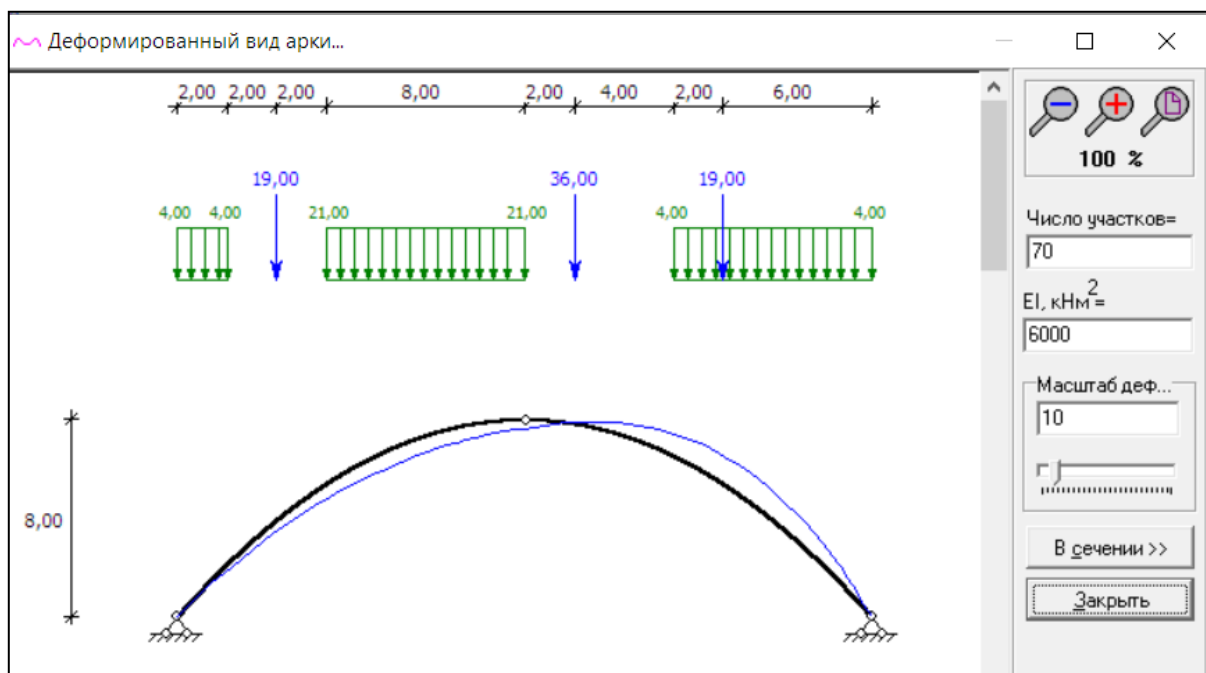


Рисунок 7.6 – Расчетная схема арки

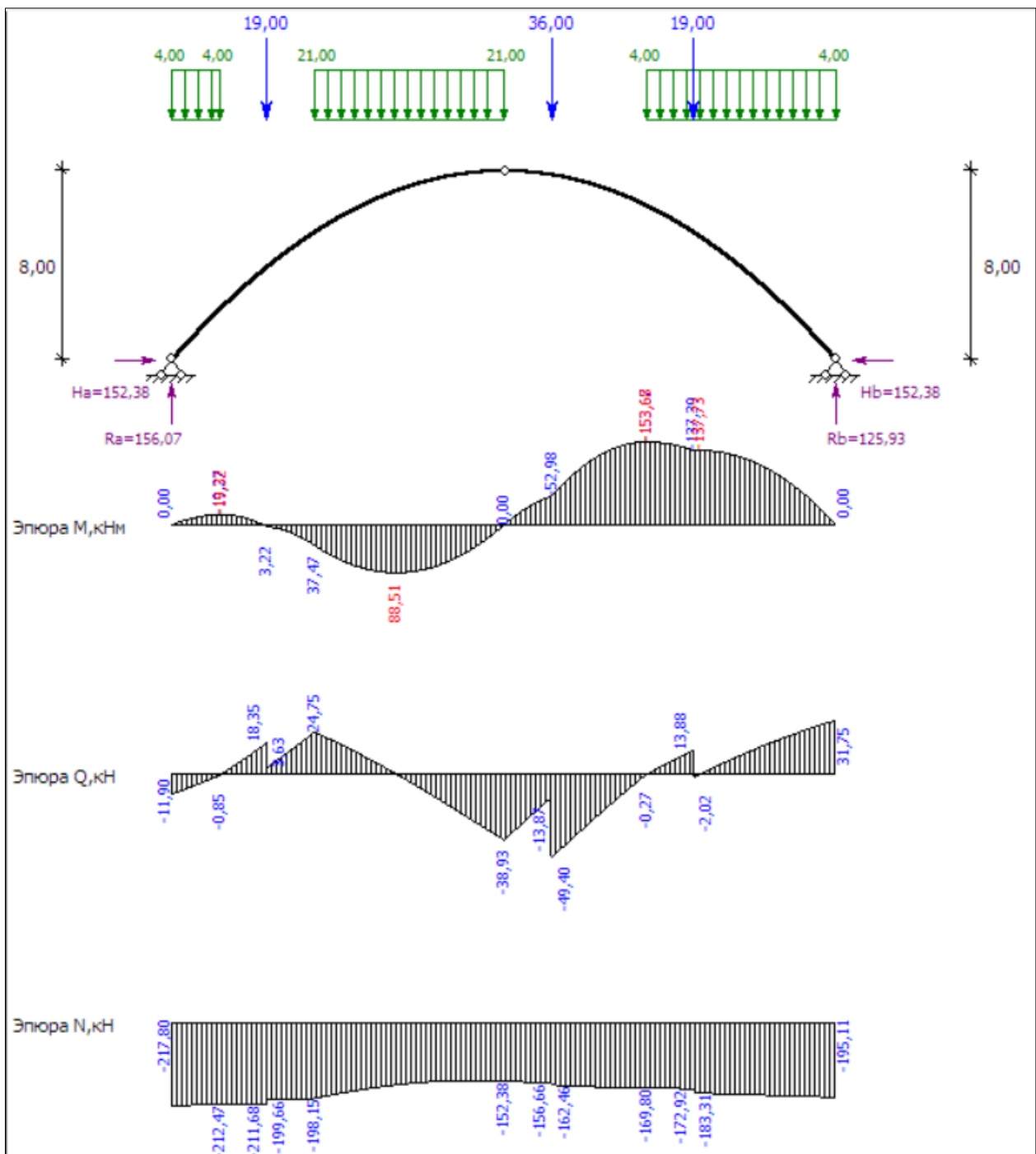


Рисунок 7.7 – Эпюры внутренних усилий в программе Arka3

Значение M , Q , N в точках X_{k1} вводим из расчетов в MathCAD (рисунок 7.3), а значение в точке X_{k2} , нужно вычислить.

X, м	Y, м	sin(φ)	cos(φ)	M, кН*м	Q, кН	N, кН
0.0000	0.0000	0.7526	0.6585	0.0000	-11.9001	-217.7954
1.0000	1.1020	0.7278	0.6858	-13.8520	-6.6061	-215.1749
2.0000	2.1224	0.6998	0.7144	-19.2653	-0.8529	-212.4678
3.0000	3.0612	0.6681	0.7440	-14.2398	8.3668	-212.3047
4.0000	3.9184	0.6324	0.7747	3.2245	3.6283	-199.6607
5.0000	4.6939	0.5921	0.8059	14.1276	13.7987	-199.2164
6.0000	5.3878	0.5468	0.8373	37.4694	24.7507	-198.1539
7.0000	6.0000	0.4961	0.8682	62.7500	18.2331	-185.9170
8.0000	6.5306	0.4399	0.8981	79.4694	11.1708	-175.1422
9.0000	6.9796	0.3779	0.9258	87.6276	3.5900	-166.0442
10.0000	7.3469	0.3104	0.9506	87.2245	-4.4523	-158.8388
11.0000	7.6327	0.2379	0.9713	78.2602	-12.8647	-153.7273
12.0000	7.8367	0.1611	0.9869	60.7347	-21.5212	-150.8788
13.0000	7.9592	0.0814	0.9967	34.6480	-30.2667	-150.4111
14.0000	8.0000	0.0000	1.0000	-0.0000	-38.9286	-152.3750
15.0000	7.9592	-0.0814	0.9967	-32.7092	-26.4020	-155.0371
16.0000	7.8367	-0.1611	0.9869	-52.9796	-49.3970	-162.4573
17.0000	7.6327	-0.2379	0.9713	-96.8112	-36.5327	-165.8246
18.0000	7.3469	-0.3104	0.9506	-128.2041	-23.9300	-168.1065
19.0000	6.9796	-0.3779	0.9258	-147.1582	-11.7904	-169.3913
20.0000	6.5306	-0.4399	0.8981	-153.6735	-0.2658	-169.8009
21.0000	6.0000	-0.4961	0.8682	-149.7500	7.0700	-171.4581
22.0000	5.3878	-0.5468	0.8373	-137.3878	2.0248	-183.3125
23.0000	4.6939	-0.5921	0.8059	-135.5867	4.8517	-185.5141
24.0000	3.9184	-0.6324	0.7747	-125.3469	11.2010	-187.5552
25.0000	3.0612	-0.6681	0.7440	-106.6684	17.0372	-189.4930
26.0000	2.1224	-0.6998	0.7144	-79.5510	22.3857	-191.3744
27.0000	1.1020	-0.7278	0.6858	-43.9949	27.2781	-193.2372
28.0000	0.0000	-0.7526	0.6585	0.0000	31.7493	-195.1105

Рисунок 7.8. – Результаты расчета в программе Arka3

Расчеты в программе *Arka3* полностью совпали с расчетами в программе *MathCAD*.

Произведем расчет в программе *Lira* (рисунки 7.9–7.13).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nX0E1TcMmvc?si=J3CxfOGSUMGxrRT4>.

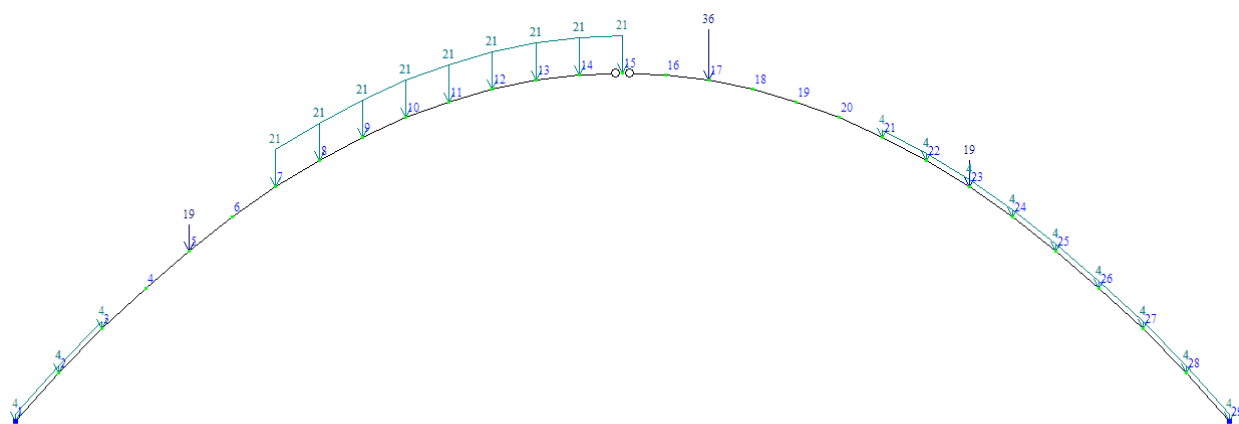
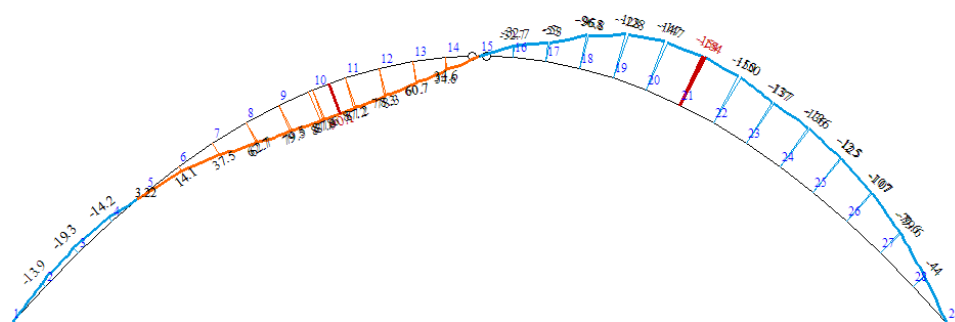
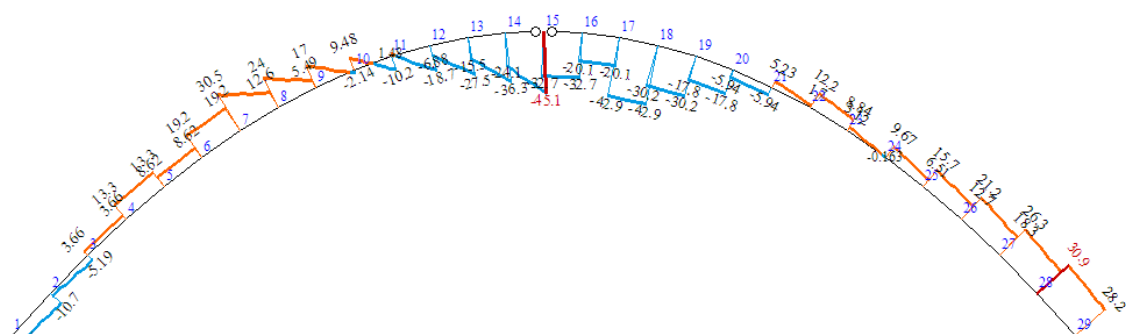


Рисунок 7.9 – Расчетная схема арки в программе Lira

Эюра Мy
Единицы измерения - кН*м



Эюра Qz
Единицы измерения - кН



Эюра N
Единицы измерения - кН

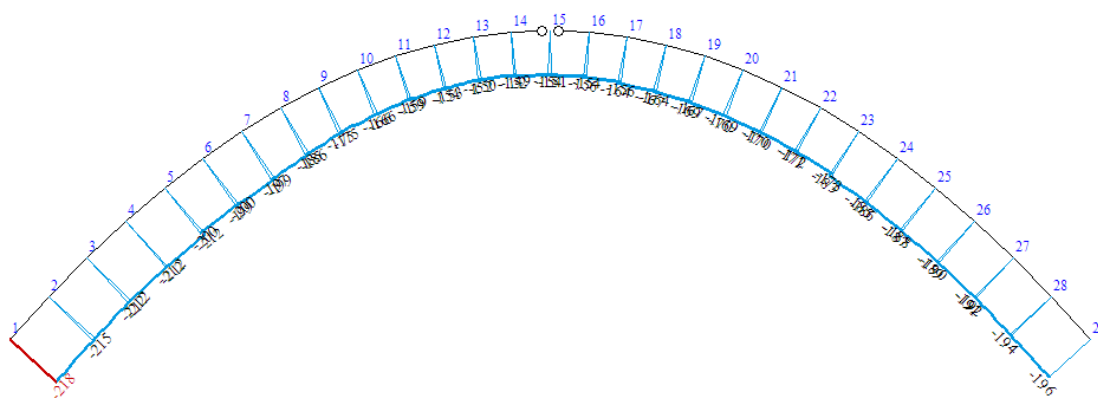


Рисунок 7.10 – Эюры внутренних усилий в программе Lira

№ элем	№ сечен	Усилия			
		N (кН)	Mx (кН*м)	My (кН*м)	Qz (кН)
1	1	- 217.974	0.000	0.000	- 7.964
1	2	- 215.012	0.000	- 13.852	- 10.652
2	1	- 215.263	0.000	- 13.852	- 2.389
2	2	- 212.406	0.000	- 19.265	- 5.189
3	1	- 212.438	0.000	- 19.265	3.665
3	2	- 212.438	0.000	- 14.239	3.665
4	1	- 212.055	0.000	- 14.239	13.259
4	2	- 212.055	0.000	3.224	13.259
5	1	- 199.507	0.000	3.224	8.616
5	2	- 199.507	0.000	14.127	8.616
6	1	- 198.770	0.000	14.127	19.177
6	2	- 198.770	0.000	37.468	19.177
7	1	- 197.348	0.000	37.468	30.516
7	2	- 186.383	0.000	62.750	12.606
8	1	- 185.255	0.000	62.750	24.044
8	2	- 175.412	0.000	79.469	5.494
9	1	- 174.670	0.000	79.469	17.021
9	2	- 166.069	0.000	87.628	- 2.136
10	1	- 165.812	0.000	87.628	9.477
10	2	- 158.571	0.000	87.224	- 10.235
11	1	- 158.894	0.000	87.224	1.477
11	2	- 153.125	0.000	78.260	- 18.715
12	1	- 154.111	0.000	78.260	- 6.883
12	2	- 149.912	0.000	60.735	- 27.459
13	1	- 151.618	0.000	60.735	- 15.471
13	2	- 149.066	0.000	34.648	- 36.316

14	1	- 151.517	0.000	34.648	- 24.128
14	2	- 150.660	0.000	0.000	- 45.111
15	1	- 153.836	0.000	0.000	- 32.681
15	2	- 153.836	0.000	- 32.709	- 32.681
16	1	- 155.977	0.000	- 32.709	- 20.120
16	2	- 155.977	0.000	- 52.979	- 20.120
17	1	- 164.280	0.000	- 52.979	- 42.947
17	2	- 164.280	0.000	- 96.811	- 42.947
18	1	- 167.096	0.000	- 96.811	- 30.186
18	2	- 167.096	0.000	- 128.204	- 30.186
19	1	- 168.866	0.000	- 128.204	- 17.791
19	2	- 168.866	0.000	- 147.158	- 17.791
20	1	- 169.697	0.000	- 147.158	- 5.944
20	2	- 169.697	0.000	- 153.673	- 5.944
21	1	- 169.720	0.000	- 153.673	5.232
21	2	- 171.595	0.000	- 149.750	1.699
22	1	- 171.166	0.000	- 149.750	12.248
22	2	- 173.255	0.000	- 137.388	8.837
23	1	- 183.297	0.000	- 137.388	3.123
23	2	- 185.577	0.000	- 135.587	- 0.163
24	1	- 185.325	0.000	- 135.587	9.672
24	2	- 187.776	0.000	- 125.347	6.511
25	1	- 187.232	0.000	- 125.347	15.701
25	2	- 189.835	0.000	- 106.667	12.664
26	1	- 189.069	0.000	- 106.667	21.228
26	2	- 191.807	0.000	- 79.551	18.312
27	1	- 190.877	0.000	- 79.551	26.287
27	2	- 193.734	0.000	- 43.995	23.487
28	1	- 192.690	0.000	- 43.995	30.908
28	2	- 195.652	0.000	0.000	28.220

Рисунок 7.11 – Значения внутренних усилий в программе Lira

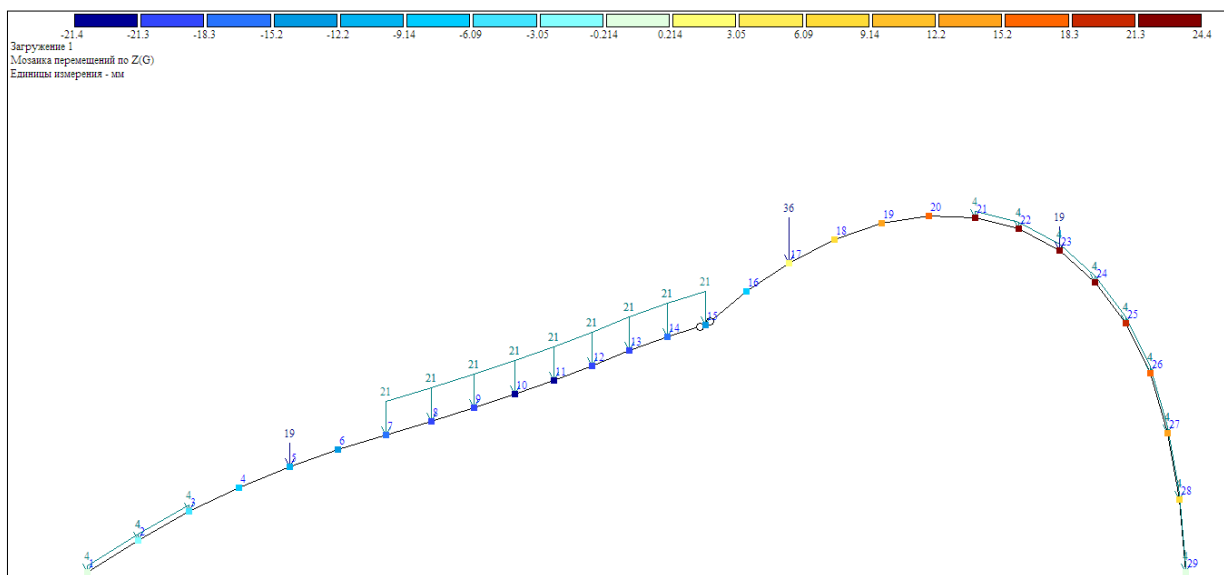


Рисунок 7.12 – Вертикальные перемещения в программе Lira

№ узла	Перемещения				
	X (мм)	Y (мм)	Z (мм)	UX рад*1000	UY рад*1000
1	0.000	0.000	0.000	0.000	2.350
2	2.556	0.000	- 2.449	0.000	2.436
3	5.077	0.000	- 5.046	0.000	2.640
4	7.592	0.000	- 7.852	0.000	2.842
5	10.007	0.000	- 10.796	0.000	2.906
6	12.171	0.000	- 13.710	0.000	2.809
7	13.980	0.000	- 16.443	0.000	2.533
8	15.324	0.000	- 18.766	0.000	1.999
9	16.146	0.000	- 20.444	0.000	1.274
10	16.486	0.000	- 21.336	0.000	0.452
11	16.450	0.000	- 21.388	0.000	- 0.383
12	16.182	0.000	- 20.625	0.000	- 1.156
13	15.833	0.000	- 19.145	0.000	- 1.795
14	15.539	0.000	- 17.117	0.000	- 2.233

15	15.398	0.000	- 14.777	0.000	0.000
16	15.667	0.000	- 7.083	0.000	- 7.597
17	16.529	0.000	0.345	0.000	- 7.217
18	17.891	0.000	7.269	0.000	- 6.545
19	19.572	0.000	13.338	0.000	- 5.517
20	21.317	0.000	18.244	0.000	- 4.227
21	22.841	0.000	21.774	0.000	- 2.778
22	23.863	0.000	23.823	0.000	- 1.272
23	24.132	0.000	24.377	0.000	0.205
24	23.429	0.000	23.480	0.000	1.662
25	21.516	0.000	21.128	0.000	3.109
26	18.205	0.000	17.379	0.000	4.449
27	13.422	0.000	12.397	0.000	5.567
28	7.252	0.000	6.465	0.000	6.339
29	0.000	0.000	0.000	0.000	6.622

Рисунок 7.13 – Значения перемещения в программе Lira

Произведем расчет в программе Scad (рисунки 7.14–7.18).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nX0E1TcMmvc?si=J3CxfOGSUMGxrRT4>.

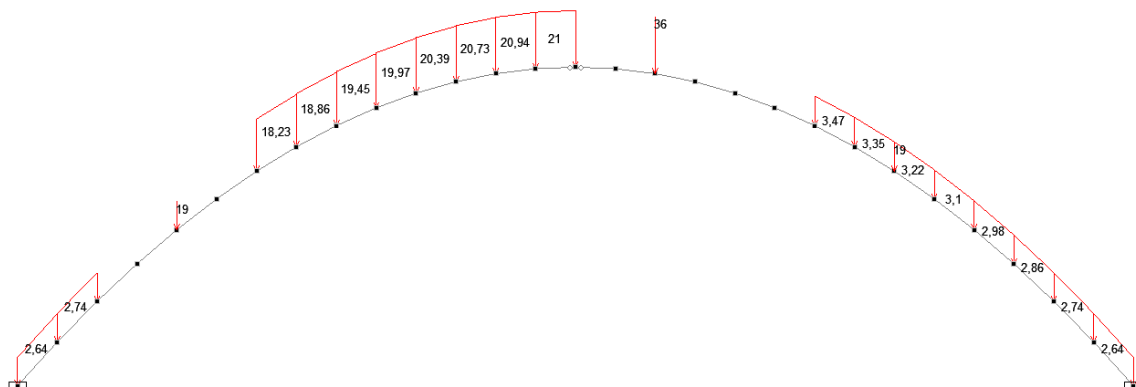


Рисунок 7.14 – Расчетная схема арки в программе Scad

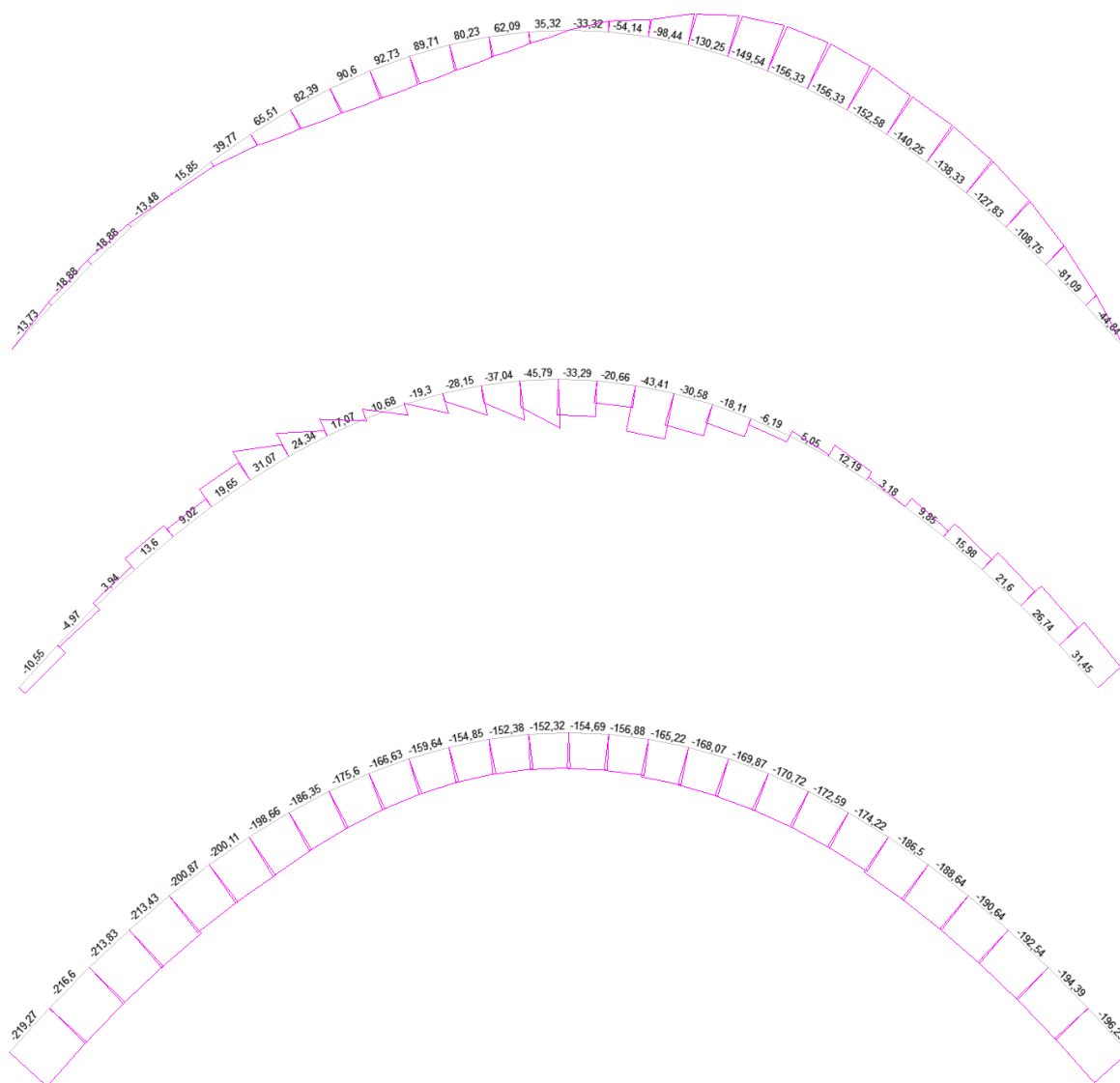
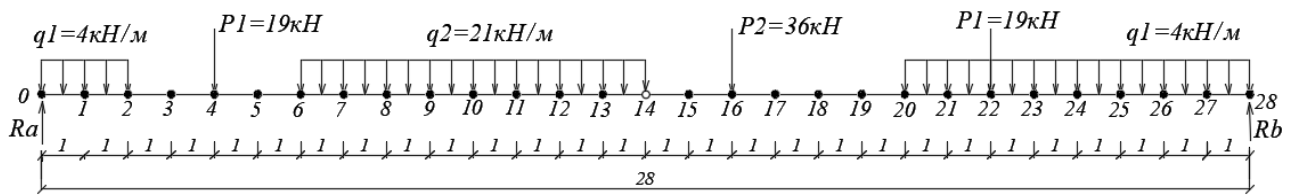


Рисунок 7.15 – Эпюры внутренних усилий в программе Scad

На элементах с распределенной нагрузкой необходимо значение нагрузки умножить на «cos»:



0	0.659	1	$4 \cdot 0.686 = 2.74$
1	0.686	2	$4 \cdot 0.714 = 2.86$
2	0.714		
3	0.744		
4	0.775	7	$21 \cdot 0.868 = 18.23$
5	0.806	8	$21 \cdot 0.898 = 18.86$
6	0.837	9	$21 \cdot 0.926 = 19.45$
7	0.868	10	$21 \cdot 0.951 = 19.97$
8	0.898	11	$21 \cdot 0.971 = 20.39$
9	0.926	12	$21 \cdot 0.987 = 20.73$
10	0.951	13	$21 \cdot 0.997 = 20.94$
11	0.971	14	$21 \cdot 1 = 21$
12	0.987		
13	0.997	21	$4 \cdot 0.868 = 3.47$
14	1	22	$4 \cdot 0.837 = 3.35$
15	0.997	23	$4 \cdot 0.806 = 3.22$
16	0.987	24	$4 \cdot 0.775 = 3.10$
17	0.971	25	$4 \cdot 0.744 = 2.98$
18	0.951	26	$4 \cdot 0.714 = 2.86$
19	0.926	27	$4 \cdot 0.686 = 2.74$
20	0.898	28	$4 \cdot 0.659 = 2.64$
21	0.868		
22	0.837		
23	0.806		
24	0.775		
25	0.744		
26	0.714		
27	0.686		
28	0.659		

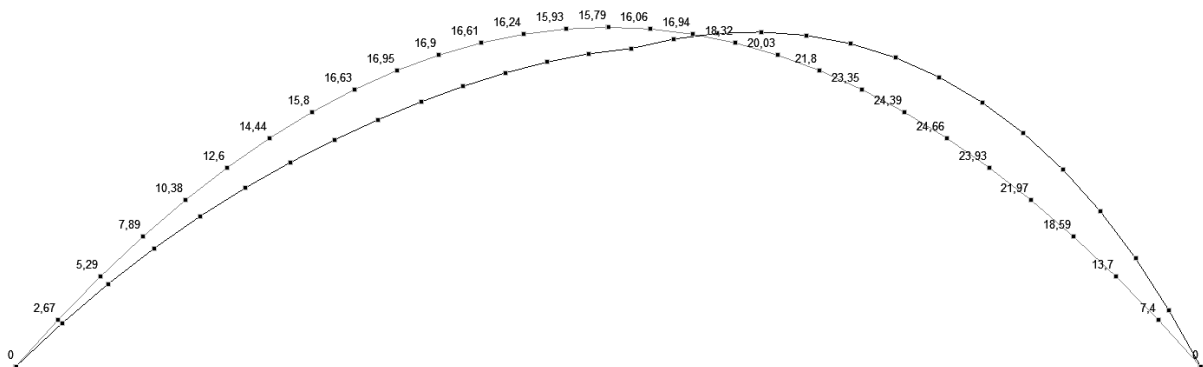


Рисунок 7.16 – Вертикальные перемещения в программе Scad

Величины перемещений				
Узел	Загружение	Значение		
		X	Z	U _y
1	1	0	0	0,14
2	1	2,667	-2,55	0,145
3	1	5,288	-5,247	0,157
4	1	7,891	-8,147	0,168
5	1	10,378	-11,177	0,171
6	1	12,598	-14,162	0,165
7	1	14,442	-16,947	0,148
8	1	15,803	-19,299	0,115
9	1	16,625	-20,978	0,072
10	1	16,952	-21,843	0,024
11	1	16,897	-21,841	-0,026
12	1	16,606	-21,002	-0,071
13	1	16,238	-19,429	-0,109

14	1	15,931	-17,295	-0,134
15	1	15,786	-14,843	0
16	1	16,059	-7,024	-0,442
17	1	16,936	0,523	-0,42
18	1	18,32	7,557	-0,381
19	1	20,027	13,721	-0,321
20	1	21,8	18,703	-0,246
21	1	23,349	22,288	-0,162
22	1	24,386	24,365	-0,074
23	1	24,655	24,921	0,013
24	1	23,932	23,996	0,098
25	1	21,974	21,586	0,182
26	1	18,59	17,752	0,26
27	1	13,704	12,662	0,326
28	1	7,404	6,602	0,371
29	1	0	0	0,387

Рисунок 7.1 – Значения перемещений узлов в программе Scad

Элемент	Значение		
	N	M _x	Q _z
1	-219,268	2,581e-013	-7,908
1	-216,359	-13,732	-10,548
2	-216,604	-13,732	-2,233
2	-213,809	-18,879	-4,973
3	-213,83	-18,879	3,938
3	-213,83	-13,477	3,938
4	-213,434	-13,477	13,597
4	-213,434	4,431	13,597
5	-200,868	4,431	9,02
5	-200,868	15,846	9,02
6	-200,108	15,846	19,653
6	-200,108	39,767	19,653
7	-198,656	39,767	31,067
7	-187,495	65,506	12,837
8	-186,35	65,506	24,343
8	-176,343	82,389	5,483
9	-175,6	82,389	17,072
9	-166,868	90,443	-2,378
10	-166,626	90,443	9,293
10	-159,29	89,705	-10,677
11	-159,643	89,705	1,088
11	-153,818	80,233	-19,302
12	-154,847	80,233	-7,416
12	-150,616	62,086	-28,146
13	-152,375	62,086	-16,099
13	-149,811	35,318	-37,039

14	-152,318	35,318	-24,789
14	-151,461	0	-45,789
15	-154,689	0	-33,293
15	-154,689	-33,321	-33,293
16	-156,876	-33,321	-20,66
16	-156,876	-54,135	-20,66
17	-165,22	-54,135	-43,413
17	-165,22	-98,443	-43,413
18	-168,069	-98,443	-30,578
18	-168,069	-130,245	-30,578
19	-169,865	-130,245	-18,112
19	-169,865	-149,541	-18,112
20	-170,716	-149,541	-6,194
20	-170,716	-156,33	-6,194
21	-170,754	-156,33	5,05
21	-172,595	-152,577	1,58
22	-172,171	-152,577	12,192
22	-174,222	-140,246	8,842
23	-184,263	-140,246	3,182
23	-186,497	-138,332	-0,038
24	-186,237	-138,332	9,847
24	-188,641	-127,833	6,747
25	-188,084	-127,833	15,978
25	-190,638	-108,751	12,998
26	-189,856	-108,751	21,599
26	-192,541	-81,088	18,739
27	-191,593	-81,088	26,743
27	-194,389	-44,836	24,003
28	-193,324	-44,836	31,449
28	-196,234	-2,075e-013	28,809

Рисунок 7.18 – Значения внутренних усилий в программе Scad

Произведем расчет в программе SolidWorks (рисунки 7.19–7.24).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/nX0E1TcMmvc?si=J3CxfOGSUMGxrRT4>.

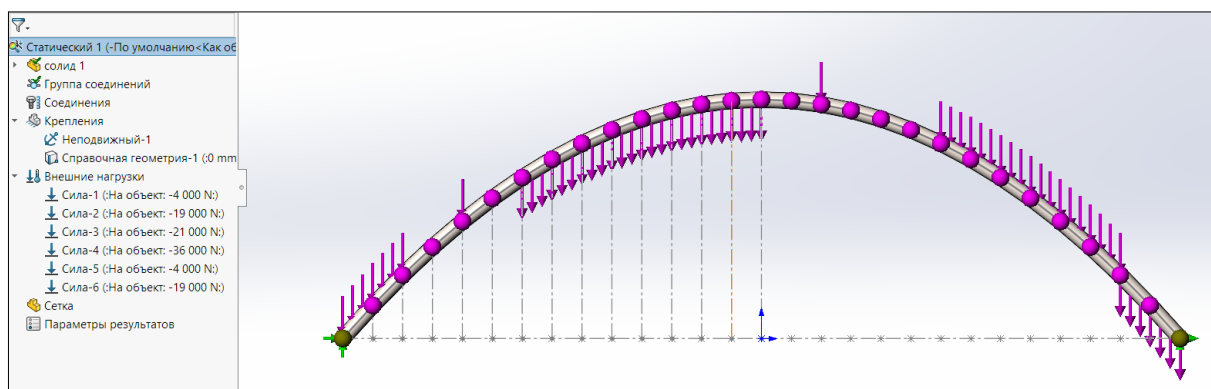


Рисунок 7.19 – Расчетная схема арки в программе SolidWorks

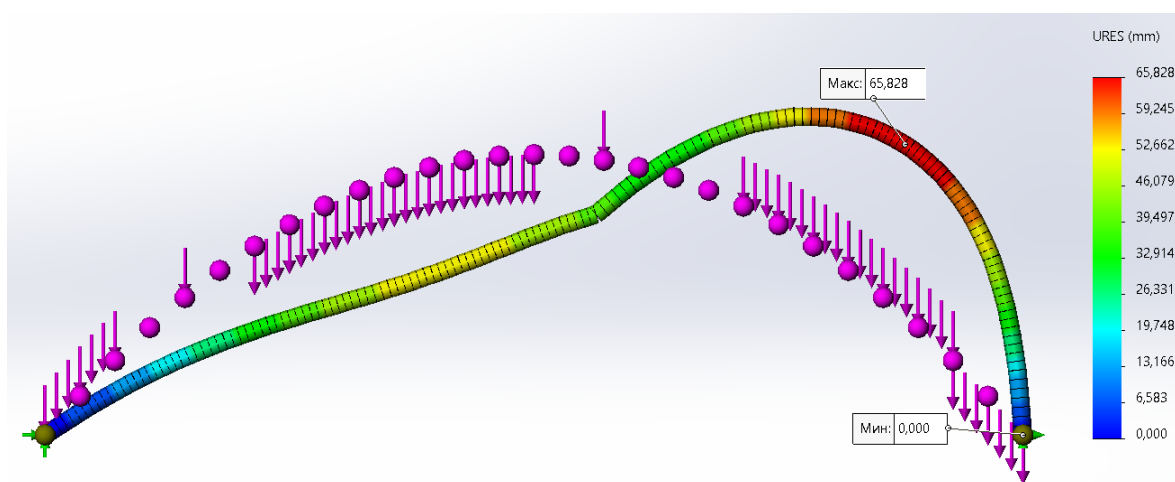


Рисунок 7.20 – Перемещение узлов в программе SolidWorks

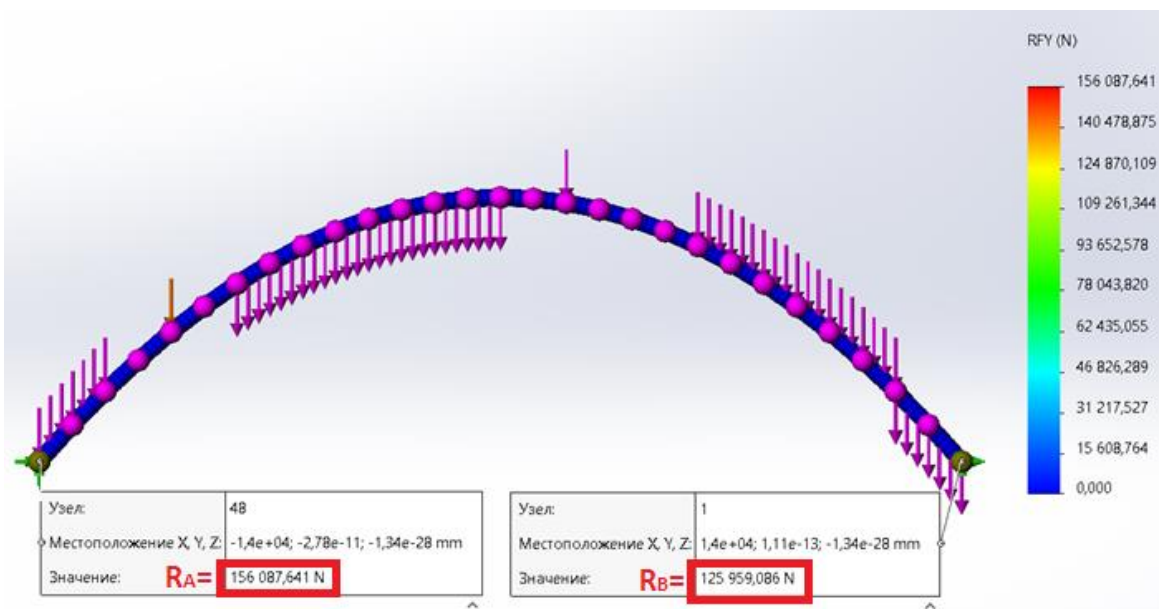


Рисунок 7.21 – Значения опорных реакций в программе SolidWorks

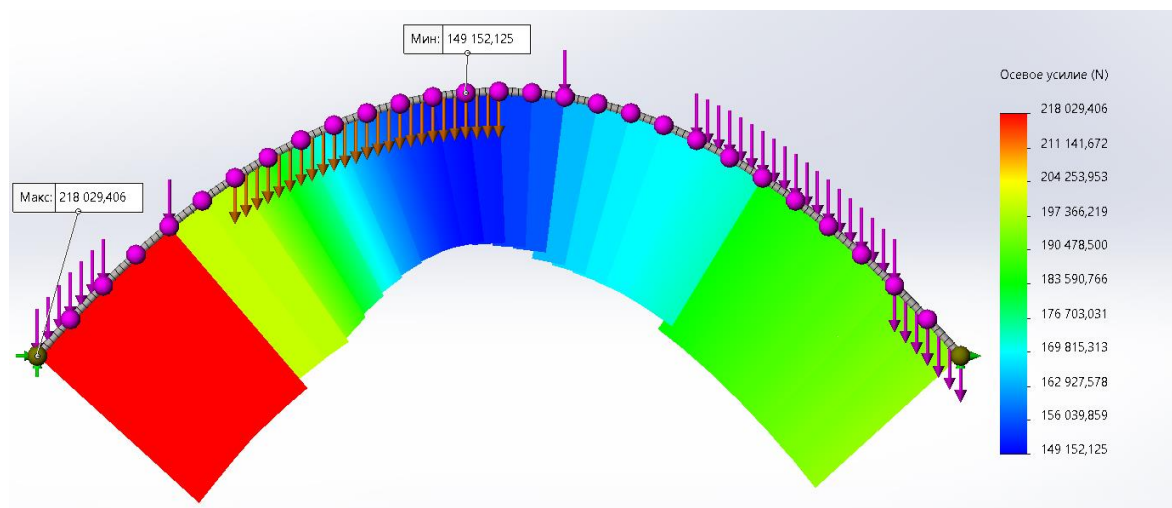


Рисунок 7.22 – Эпюра продольных сил «N»

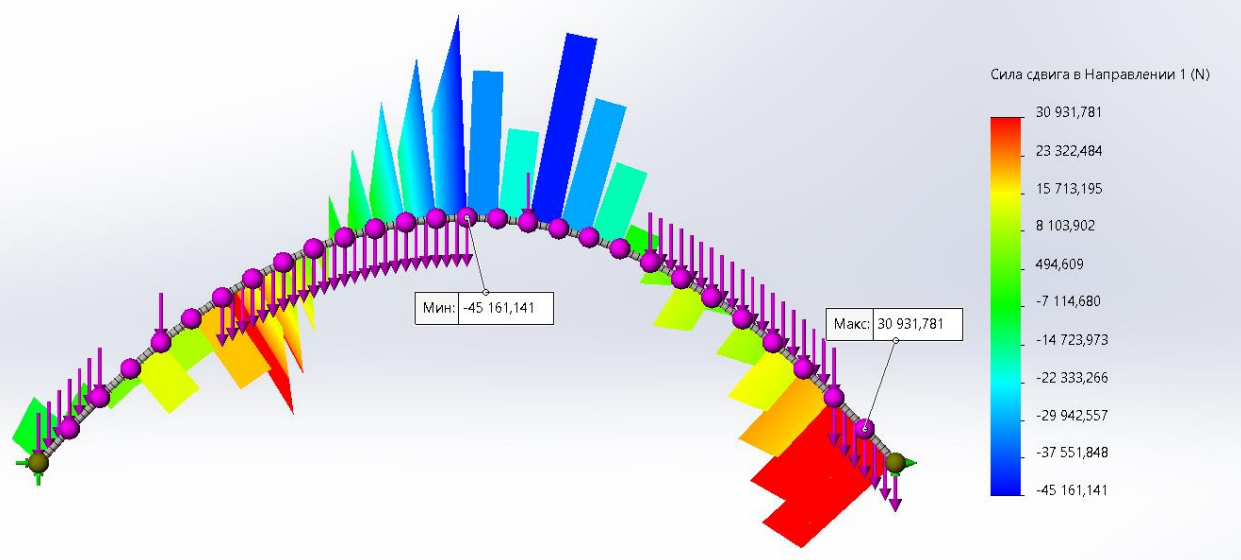


Рисунок 7.23 – Эпюра изгибающих моментов «M»

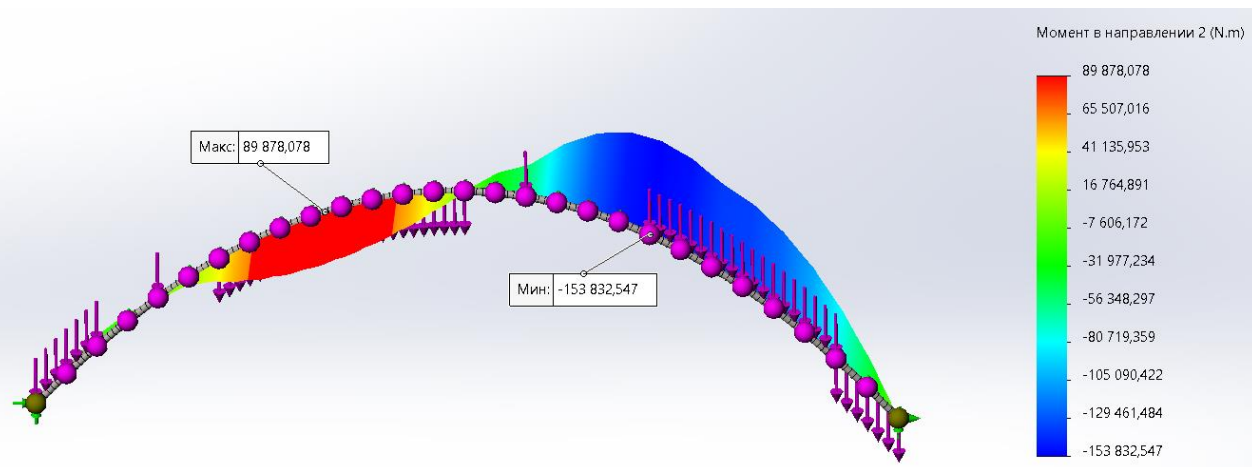


Рисунок 7.24 – Эпюра поперечных сил «Q»

Опорные реакции, полученные в программе *SolidWorks*, полностью совпадают с расчетными значениями.

Сравнение результатов программных комплексов *Arka3*, *Lira*, *Scad*:

N сечения	Arka 3	Lira	%	Scad	%
0	0	0	0	0	0
1	-13,852	-13,852	0	-13,732	0,866301
2	-19,2653	-19,265	0,001557	-18,879	2,00516
3	-14,2398	-14,239	0,005618	-13,477	5,356817
4	3,2245	3,224	0,015506	4,431	-37,4167
5	14,1276	14,127	0,004247	15,846	-12,1634
6	37,4694	37,468	0,003736	39,767	-6,13194
7	62,75	62,75	0	65,506	-4,39203
8	79,4694	79,469	0,000503	82,389	-3,67387
9	87,6276	87,628	-0,00046	90,433	-3,2015
10	87,2245	87,224	0,000573	89,705	-2,84381
11	78,2606	78,26	0,000767	80,233	-2,5203
12	60,7347	60,735	-0,00049	62,086	-2,22492
13	34,648	34,648	0	35,318	-1,93373

14	0	0	0	0	0
15	-32,7092	-32,709	0,000611	-33,321	-1,87042
16	-52,9796	-52,979	0,001133	-54,135	-2,18084
17	-96,8112	-96,811	0,000207	-98,443	-1,68555
18	-128,204	-128,204	7,8E-05	-130,245	-1,59191
19	-147,158	-147,158	0,000136	-149,541	-1,61921
20	-153,674	-153,673	0,000325	-156,33	-1,72866
21	-149,75	-149,75	0	-152,577	-1,88781
22	-137,388	-137,388	-0,00015	-140,246	-2,08039
23	-135,587	-135,587	-0,00022	-138,332	-2,02476
24	-125,347	-125,347	-8E-05	-127,833	-1,98338
25	-106,668	-106,667	0,001312	-108,751	-1,95241
26	-79,551	-79,551	0	-81,088	-1,93209
27	-43,9949	-43,995	-0,00023	-44,836	-1,91181
28	0	0	0	0	0

Вывод

При сопоставлении результатов, выполненных численным способом (в программе *Arka3*) и сравнив с *ПК Lira* и *Scad* видим максимальную погрешность 37,42 % (единичный случай), т. к. большинство значений в *Scad* имело погрешность не более 1 %, в *Lira* все значения сошлись на 100 %. *Lira* имеет встроенную функцию «Проективная нагрузка», в то время как в *Scad* необходимо вводить значения вручную, из-за чего появляется погрешность вычислений.

Реакции в опорах в программе *SolidWorks* сошлись на 100 % с численным расчетом (*Arka3*, *MathCAD*). Можно использовать *Lira* и *Scad* для решения таким задач, но необходимо выделить достаточное количество расчетных сечений (для достижения наибольшей точности) и распределенную нагрузку умножить на «cos».

SolidWorks выполняет расчет арки как твердого тела, можно в программе проверить опорные реакции и получить распределение напряжений.

7.2 Определение перемещений в трехшарнирных арках

Цель работы: изучить процедуру определения перемещений в трехшарнирных арках с использованием численного интегрирования ($x = 22$), выполнить верификацию результатов в *ПК Scad, Lira, Arka3, SolidWorks*.

Порядок выполнения работы:

1) определить перемещение одного из сечений арки, используя формулу Мора и один из численных способов вычисления интегралов, для чего:

1.1 построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действия внешней нагрузки, от которой определяется перемещение;

1.2 в точке (в сечении) $x = 22$ м, перемещение которой определяется, в направлении искомого перемещения приложить единичную «силу» и от ее действия построить единичные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;

1.3 вычислить перемещение по формуле Мора, используя для вычисления интегралов один из численных способов (например, формулу трапеций).

2) исследовать влияние изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на величину перемещения сечения арки, определив вклад в перемещение учета каждой из внутренних сил.

При сечении элементов арки 530 х 10 получаем перемещение 24,92 мм (рисунок 7.25).

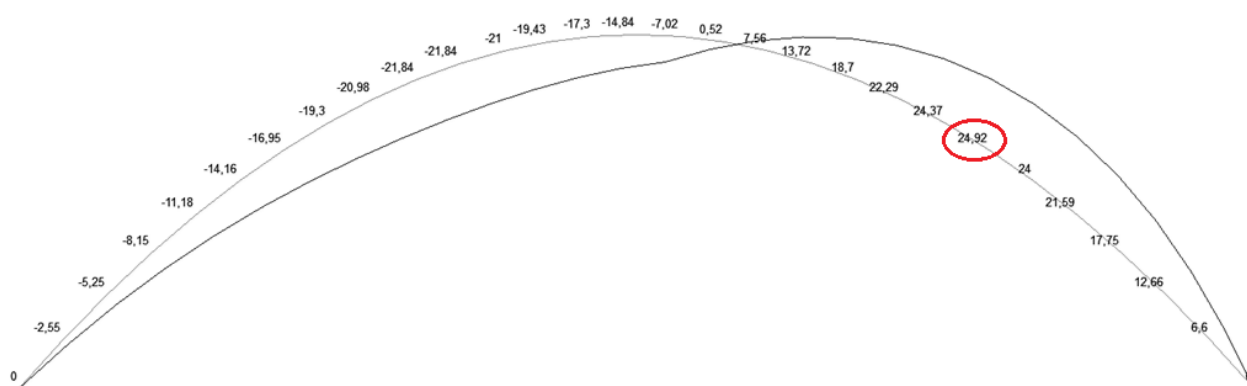


Рисунок 7.25 – Перемещение узлов по оси Z при сечении трубы 530 х 10

Допустимые перемещения $L/250 = 28000/250 = 112$ мм, необходимо подобрать сечение, чтобы перемещение по оси Z было в пределах 70 ...90 мм. Принимаем сечение 377 х 10, максимальное перемещение по оси Z – 72,11 мм (рисунки 7.26, 7.27).

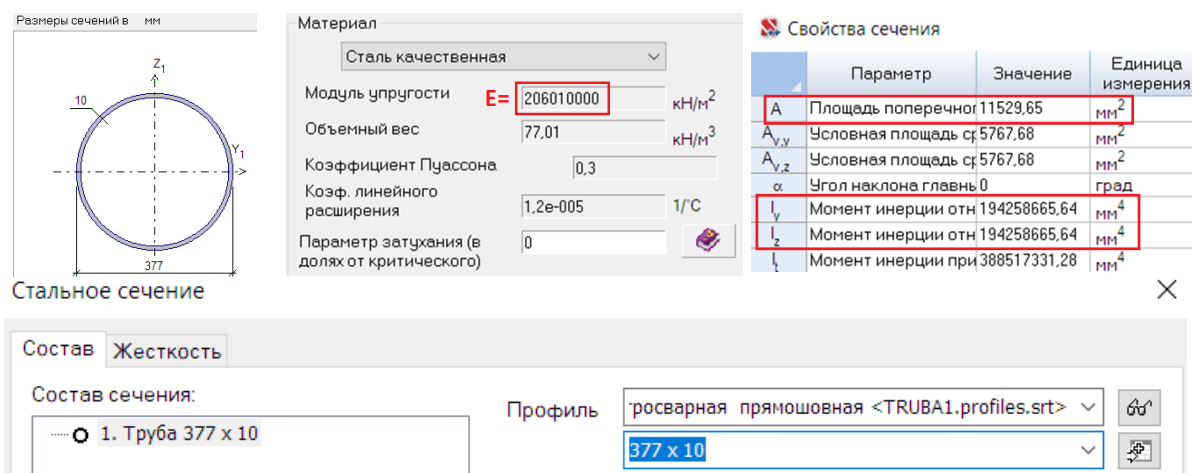


Рисунок 7.26 – Сечение трубы и параметры для расчета

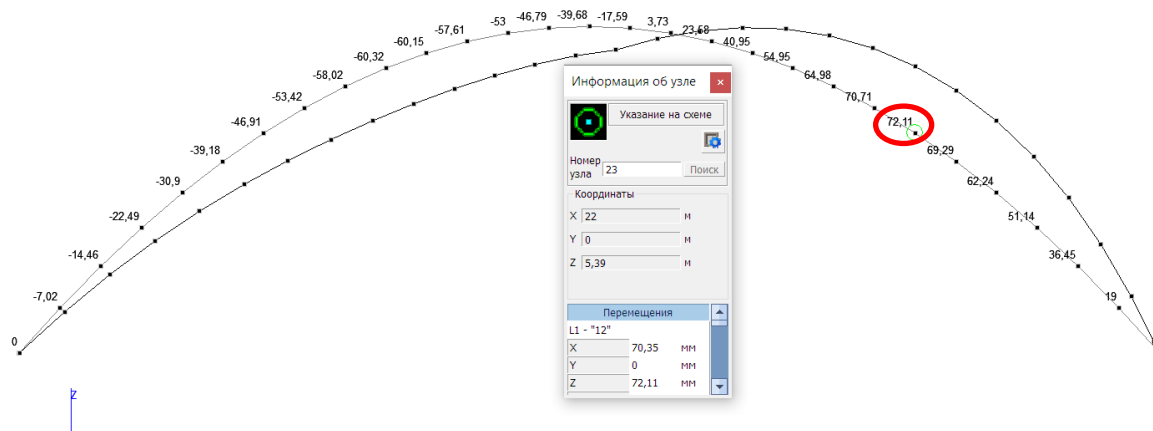


Рисунок 7.27 – Перемещение узлов по оси Z при сечении трубы 377 x 10 и перемещение узла 22 ($\Delta_{22} = 72,11$ мм), ПК Scad

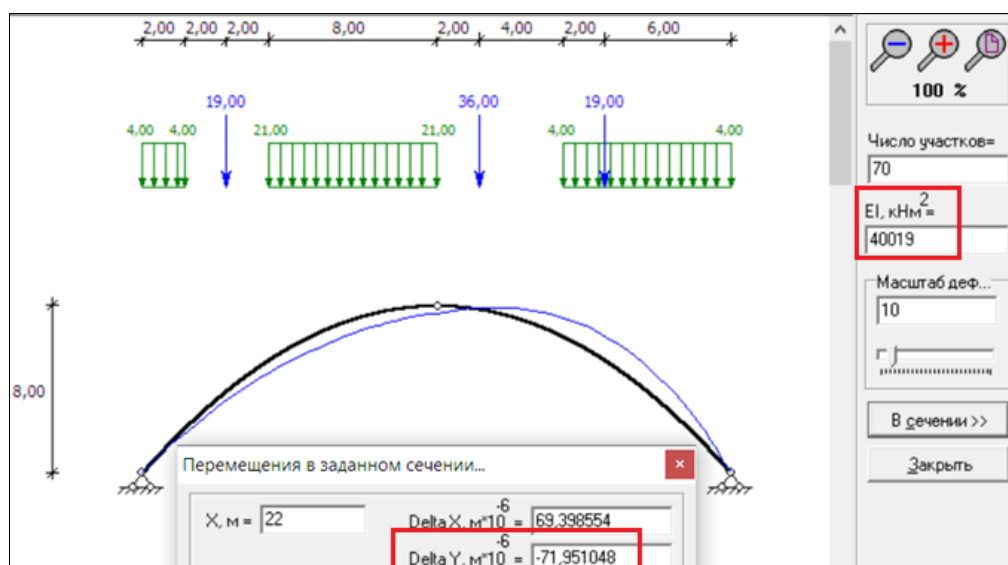


Рисунок 7.28 – Деформированный вид Arka3 ($\Delta_{22} = 71,95$ мм)

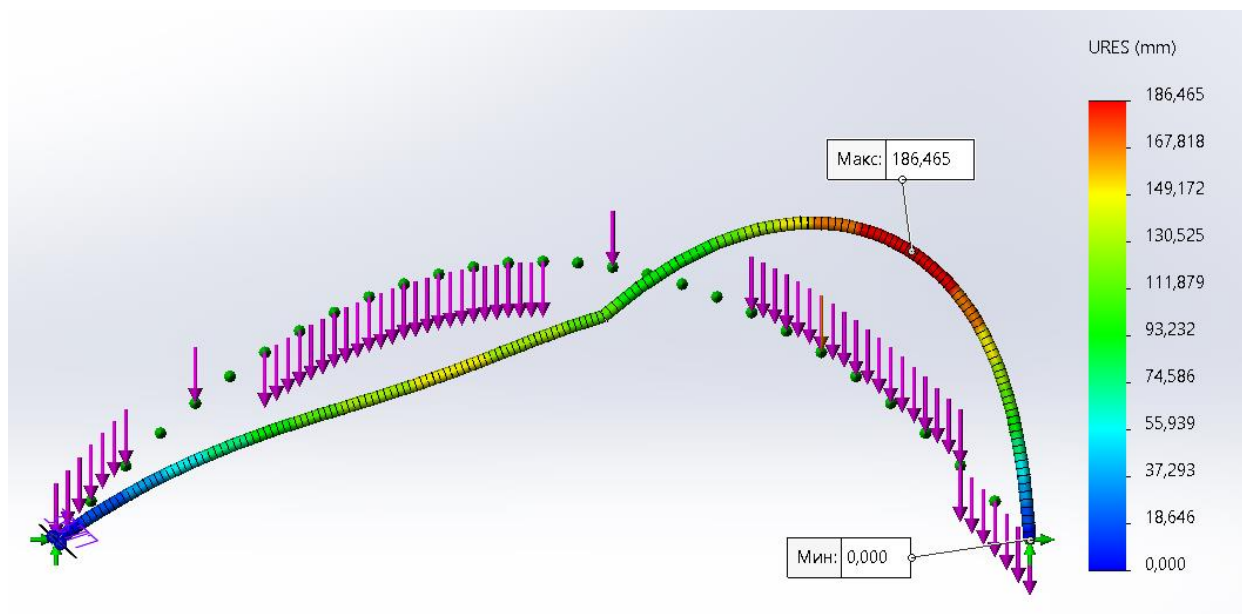


Рисунок 7.29 – Перемещение узлов при сечении трубы 377 x 10 и перемещение узла 22 ($\Delta_{22} = 186,47$ мм), ПК SolidWorks

SolidWorks в результате расчета выдает перемещение, во-первых, суммарное – относительно первоначального положения и во-вторых, значение перемещения превышает в два раза результаты в других программах, что было уже замечено на исследовании балки, нагруженной неравномерной нагрузкой.

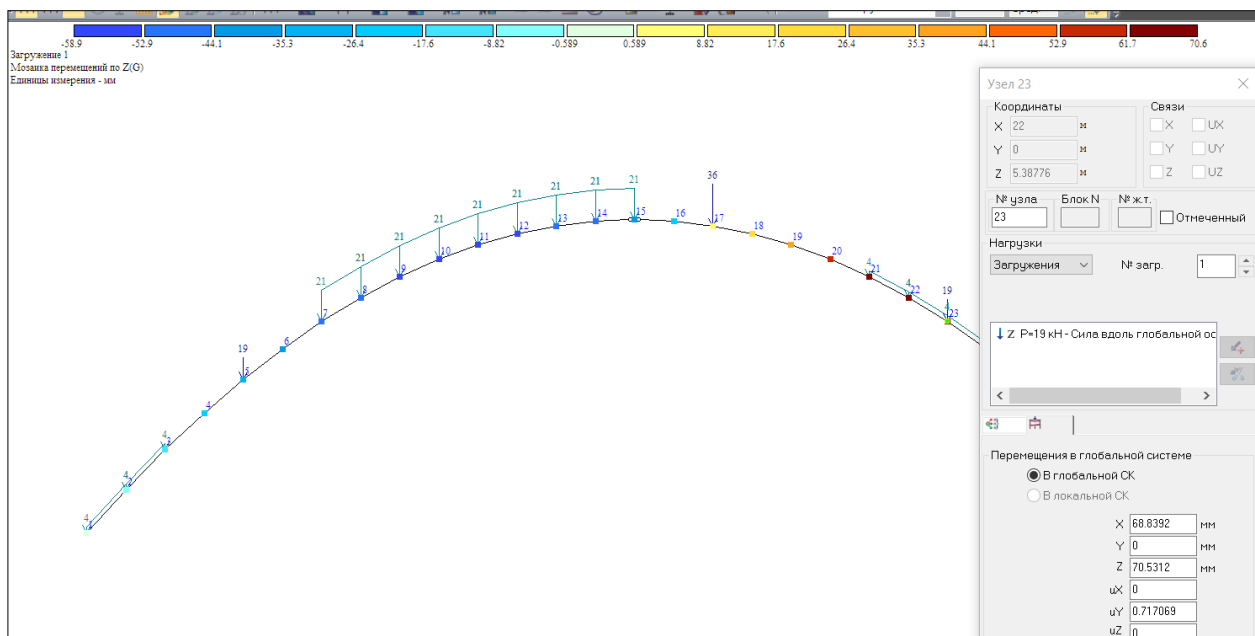


Рисунок 7.30 – Перемещение узлов по оси Z при сечении трубы 377 x 10 и перемещение узла 22 ($\Delta_{22} = 70,53$ мм), ПК Lira

Определим вертикальное перемещение, например, 22-го сечения.

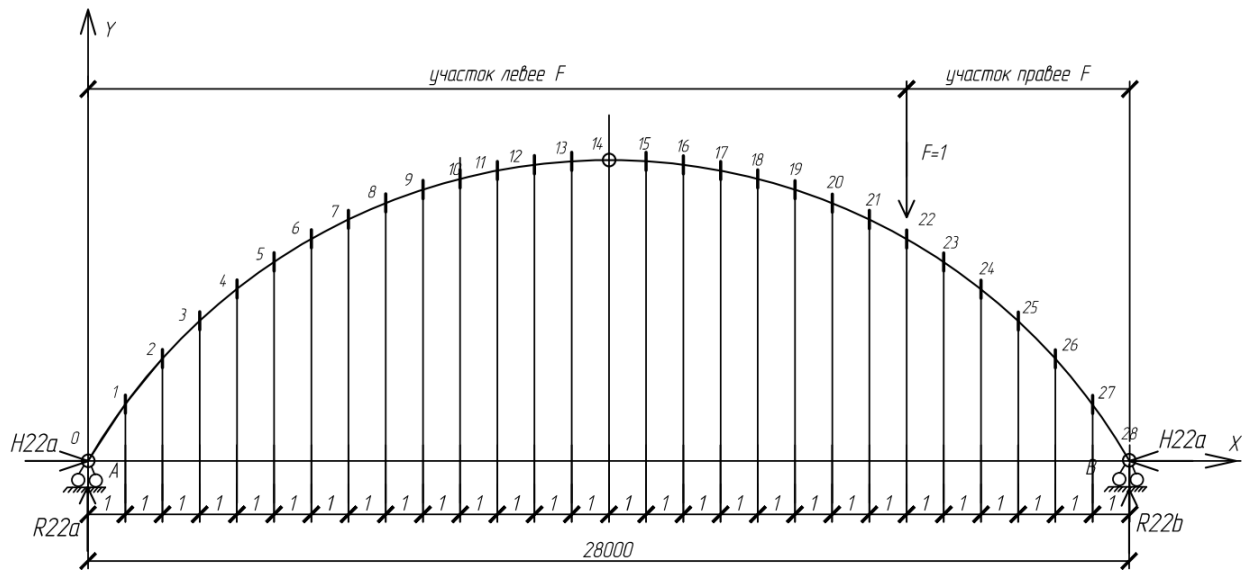


Рисунок 7.31 – Приложение единичной силы в точке $x = 22$

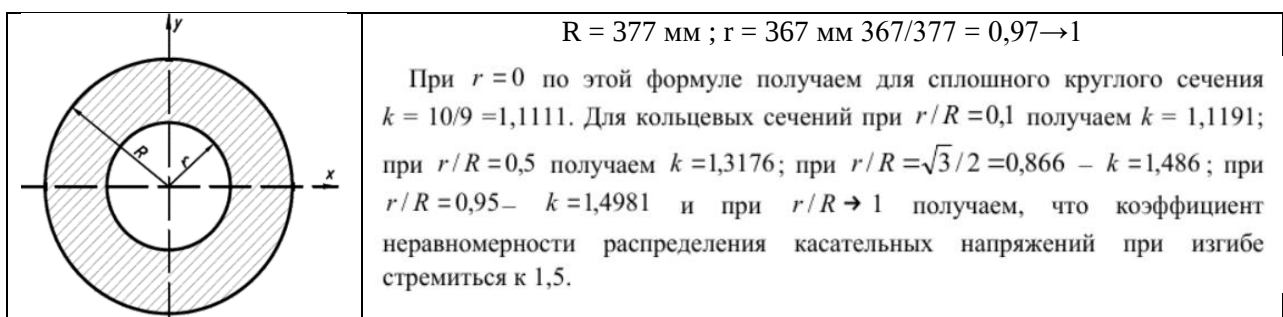
Перемещение некоторого (i -го) сечения арки в общем случае (с учетом поперечных и продольных сил) определяется по формуле Мора вида

$$\Delta_i = \int_0^L \frac{\overline{M}_i M_P dx}{EJ} + \int_0^L \eta \frac{\overline{Q}_i Q_P dx}{GA} + \int_0^L \frac{\overline{N}_i N_P dx}{EA},$$

где EJ , GA , EA – жесткости арки, соответственно, при изгибе, сдвиге и растяжении – сжатии;

η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для круглого сечения при отношении

$(r/R) \rightarrow 1$ равен 1,5);



$\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$ – законы изменения единичных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в i -ом сечении, в котором определяется перемещение;

M_P , Q_P , N_P – законы изменения эпюр M , Q и N в арке от действия внешних нагрузок (были получены ранее в лабораторной работе № 7).

При замене для вычисления интегралов Мора интегрирования численным суммированием, получим

$$\Delta_i = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^n \overline{M}_{i,j} M_{pj} + \eta \frac{\Delta x}{GA} \sum_{j=1}^n \overline{Q}_{i,j} Q_{pj} + \frac{\Delta x}{EA} \sum_{j=1}^n \overline{N}_{i,j} N_{pj}.$$

Разбили арку на 28 частей и хотим определить в 28-м сечении, то выражение примет вид

$$\Delta_{22} = \Delta_{22}^M + \Delta_{22}^Q + \Delta_{22}^N = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^{28} \overline{M}_{22,j} M_{pj} + \eta \frac{\Delta x}{GA} \sum_{j=1}^{28} \overline{Q}_{22,j} Q_{pj} + \frac{\Delta x}{EA} \sum_{j=1}^{28} \overline{N}_{22,j} N_{pj}.$$

Численное вычисление будем производить по формуле трапеций. Для построения единичных эпюр рассмотрим арку с приложенной единичной сосредоточенной силой $F = 1$ в 22-м сечении (рисунок 7.31).

Определим опорные реакции в такой арке при единичной нагрузке:

Модуль упругости $E := 206010000 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$	Площадь сечения $A := 115.2965 \text{ см}^2$	Момент инерции $J := 19425.866564 \text{ см}^4$	коэффициент Пуассона $\mu := 0.3$
Модуль сдвига $\eta := 1.5$	$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = 7.92346 \times 10^5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$		
Определение опорных реакций при приложении единичной нагрузки в 22 сечении			
$R22a := \frac{L - x_{22}}{L} = 0.21429 \cdot \text{кН}$	$R22b := \frac{x_{22}}{L} = 0.78571 \cdot \text{кН}$	$H22a := \frac{R22a \cdot \frac{L}{2}}{f} = 0.375 \cdot \text{кН}$	
$H22b := \frac{\left(R22b \cdot \frac{L}{2}\right) - 1 \cdot \left(x_{22} - \frac{L}{2}\right)}{f} = 0.375 \cdot \text{кН}$		$R22a \cdot \frac{L}{2} - H22a \cdot f = 0$	

Так как эпюра изгибающих моментов в точке приложения силы $F = 1$ будет иметь излом, а эпюры поперечных и продольных сил будут иметь скачок, то зависимости изменения эпюр этих усилий слева и справа от силы будут различными, и далее в расчете необходимо рассматривать два участка арки (левее и правее единичной силы F). Соответственно, будем рассматривать два массива сечений: iL (с 0-го сечения по 22-е включительно) и iR (с 23-го сечения по 28-е включительно). Значения балочных усилий M_0 и Q_0 определяются:

Балочные значений M_0 и Q_0 (левее и правее)	Балочные значения M_0 и Q_0 правее единичной нагрузки
$M22o_{iL} := R22a \cdot x_{iL}$ $Q22o_{iL} := R22a$	$M22o_{iR} := R22a \cdot x_{iR} - 1 \cdot (x_{iR} - x_{22})$ $Q22o_{iR} := R22a - 1$

Значения усилий M , Q , N в сечениях арки определяются, соответственно:
 $M_{iL} = M_{0iL} - H \cdot y_{iL}$; $Q_{iL} = Q_{0iL} \cos \varphi_{iL} - H \sin \varphi_{iL}$; $N_{iL} = -(Q_{0iL} \sin \varphi_{iL} + H \cos \varphi_{iL})$.

Определение усилий M Q N в арке левее единичной нагрузки

$$M_{22_{iL}} := M_{22o_{iL}} - H_{22a} \cdot y_{iL}$$

$$Q_{22_{iL}} := Q_{22o_{iL}} \cdot \cos \varphi_{iL} - H_{22a} \cdot \sin \varphi_{iL}$$

$$N_{h22_{iL}} := -(Q_{22o_{iL}} \cdot \sin \varphi_{iL} + H_{22a} \cdot \cos \varphi_{iL})$$

$$M_{iR} = M_{o_{iR}} - H \cdot y_{iR}; \quad Q_{iR} = Q_{o_{iR}} \cos \varphi_{iR} - H \sin \varphi_{iR}; \quad N_{iR} = -(Q_{o_{iR}} \sin \varphi_{iR} + H \cos \varphi_{iR}).$$

Определение усилий M Q N в арке правее единичной нагрузки

$$M_{22_{iR}} := M_{22o_{iR}} - H_{22a} \cdot y_{iR}$$

$$Q_{22_{iR}} := Q_{22o_{iR}} \cdot \cos \varphi_{iR} - H_{22a} \cdot \sin \varphi_{iR}$$

$$N_{h22_{iR}} := -(Q_{22o_{iR}} \cdot \sin \varphi_{iR} + H_{22a} \cdot \cos \varphi_{iR})$$

Слагаемые ΔM_{22} , ΔQ_{22} , ΔN_{22} будут определяться как сумма слагаемых выражения перемещения для правого и левого участка арки.

Слагаемые выражения перемещения 22-го сечения

$$\Delta M_{22} := \Delta M_{22L} + \Delta M_{22R} = -70.23274 \cdot \text{мм}$$

$$\Delta Q_{22} := \Delta Q_{22L} + \Delta Q_{22R} = -0.14459 \cdot \text{мм}$$

$$\Delta N_{22} := \Delta N_{22R} + \Delta N_{22L} = 0.83772 \cdot \text{мм}$$

Для исследования влияния усилий M , Q , N на перемещение сечения определим вклад каждого слагаемого в общую сумму.

$$\Delta_{22} := \Delta M_{22} + \Delta Q_{22} + \Delta N_{22} = -69.5396 \cdot \text{мм}$$

Перемещение 22-го сечения Вклад каждого из слагаемых

$$\frac{\Delta M_{22}}{\Delta_{22}} \cdot 100\% = 100.99675\% \quad \frac{\Delta Q_{22}}{\Delta_{22}} \cdot 100\% = 0.20792\% \quad \frac{\Delta N_{22}}{\Delta_{22}} \cdot 100\% = -1.20467\%$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

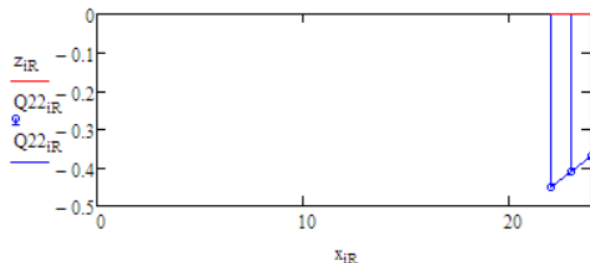
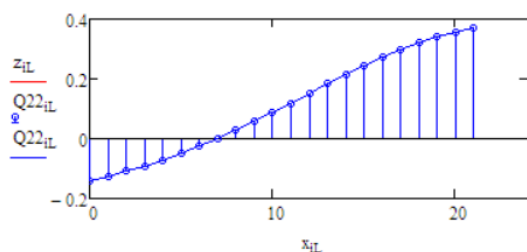
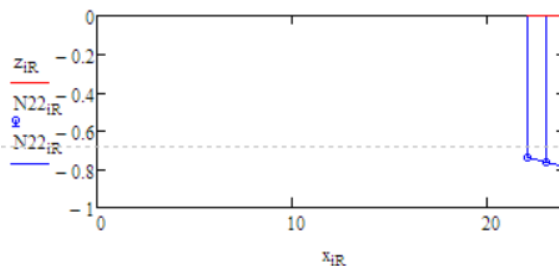
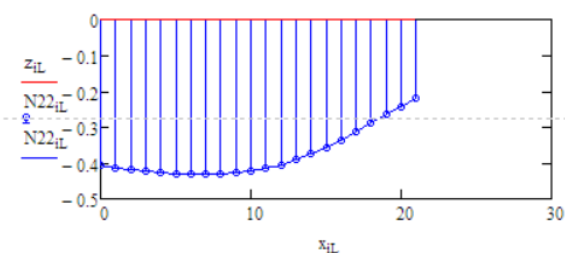
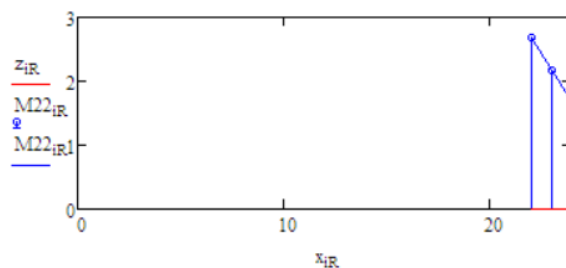
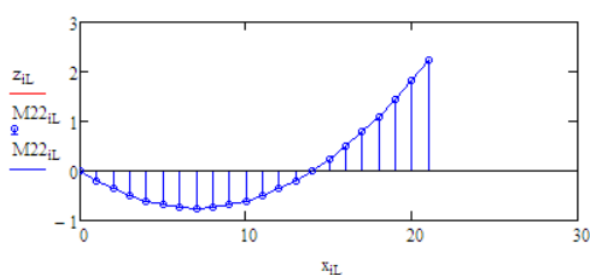
Слева от сечения

Справа от сечения

Модуль упругости $E := 206010000 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ Площадь сечения $A := 115.2965 \text{ см}^2$ Момент инерции $J := 19425.866564 \text{ см}^4$ коэффициент Пуассона $\mu := 0.3$ Модуль сдвига $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = 7.92346 \times 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ $\eta := 1.5$ Определение опорных реакций при приложении единичной нагрузки в 22 сечении $R_{22a} := \frac{L - x_{22}}{L} = 0.21429 \cdot \text{кН} \quad R_{22b} := \frac{x_{22}}{L} = 0.78571 \cdot \text{кН} \quad H_{22a} := \frac{R_{22b} \cdot \frac{L}{2}}{f} = 0.375 \cdot \text{кН}$ $H_{22b} := \frac{\left(R_{22b} \cdot \frac{L}{2}\right) - 1 \cdot \left(x_{22} - \frac{L}{2}\right)}{f} = 0.375 \cdot \text{кН} \quad R_{22a} \cdot \frac{L}{2} - H_{22a} \cdot f = 0$ Рассмотрим два участка арки (левее и правее единичной нагрузки) $iL := 0..22$ массив единичной нагрузки слева $M_{22o_{iL}} := R_{22a} \cdot x_{iL} \quad Q_{22o_{iL}} := R_{22a}$ Балочные значения M_o и Q_o левее и правее Определение усилий M Q N в арке левее единичной нагрузки $M_{22_{iL}} := M_{22o_{iL}} - H_{22a} \cdot y_{iL} \quad Q_{22_{iL}} := Q_{22o_{iL}} \cdot \cos \varphi_{iL} - H_{22a} \cdot \sin \varphi_{iL}$ $N_{22_{iL}} := -(Q_{22o_{iL}} \cdot \sin \varphi_{iL} + H_{22a} \cdot \cos \varphi_{iL})$ $\Delta M_{22L} := \frac{\Delta x}{6 \cdot E \cdot J} \sum_{j=1}^{22} (2 \cdot M_{22_{j-1}} \cdot M_{j-1} + M_{22_{j-1}} \cdot M_j + M_{22_j} \cdot M_{j-1} + 2 \cdot M_{22_j} \cdot M_j) = -39.22794 \cdot \text{мм}$ $\Delta Q_{22L} := \frac{\Delta x \cdot \eta}{6 \cdot G \cdot A} \sum_{j=1}^{22} (2 \cdot Q_{22_{j-1}} \cdot Q_{j-1} + Q_{22_{j-1}} \cdot Q_j + Q_{22_j} \cdot Q_{j-1} + 2 \cdot Q_{22_j} \cdot Q_j) = -0.09738 \cdot \text{мм}$	$\Delta N_{22L} := \frac{\Delta x}{6 \cdot E \cdot A} \sum_{j=1}^{22} (2 \cdot N_{22_{j-1}} \cdot N_{j-1} + N_{22_{j-1}} \cdot N_j + N_{22_j} \cdot N_{j-1} + 2 \cdot N_{22_j} \cdot N_j) = 0.61263 \cdot \text{мм}$ $iR := 22..28$ массив сечений правее единичной нагрузки Балочные значения M_o и Q_o правее единичной нагрузки $M_{22o_{iR}} := R_{22a} \cdot x_{iR} - 1 \cdot (x_{iR} - x_{22}) \quad Q_{22o_{iR}} := R_{22a} - 1$ Определение усилий M Q N в арке правее единичной нагрузки $M_{22_{iR}} := M_{22o_{iR}} - H_{22a} \cdot y_{iR} \quad Q_{22_{iR}} := Q_{22o_{iR}} \cdot \cos \varphi_{iR} - H_{22a} \cdot \sin \varphi_{iR}$ $N_{22_{iR}} := -(Q_{22o_{iR}} \cdot \sin \varphi_{iR} + H_{22a} \cdot \cos \varphi_{iR})$ $\Delta M_{22R} := \frac{\Delta x}{6 \cdot (E \cdot J)} \sum_{j=22}^{28} (2 \cdot M_{22_{j-1}} \cdot M_{j-1} + M_{22_{j-1}} \cdot M_j + M_{22_j} \cdot M_{j-1} + 2 \cdot M_{22_j} \cdot M_j) = -31.0048 \cdot \text{мм}$ $\Delta Q_{22R} := \frac{\Delta x \cdot \eta}{6 \cdot (G \cdot A)} \sum_{j=22}^{28} (2 \cdot Q_{22_{j-1}} \cdot Q_{j-1} + Q_{22_{j-1}} \cdot Q_j + Q_{22_j} \cdot Q_{j-1} + 2 \cdot Q_{22_j} \cdot Q_j) = -0.04721 \cdot \text{мм}$ $\Delta N_{22R} := \frac{\Delta x}{6 \cdot (E \cdot A)} \sum_{j=22}^{28} (2 \cdot N_{22_{j-1}} \cdot N_{j-1} + N_{22_{j-1}} \cdot N_j + N_{22_j} \cdot N_{j-1} + 2 \cdot N_{22_j} \cdot N_j) = 0.41886 \cdot \text{мм}$ Слагаемые выражения перемещения 22-го сечения $\Delta M_{22} := \Delta M_{22L} + \Delta M_{22R} = -70.23274 \cdot \text{мм}$ $\Delta Q_{22} := \Delta Q_{22L} + \Delta Q_{22R} = -0.14459 \cdot \text{мм}$ $\Delta N_{22} := \Delta N_{22R} + \Delta N_{22L} = 0.83772 \cdot \text{мм}$ $\Delta_{22} := \Delta M_{22} + \Delta Q_{22} + \Delta N_{22} = -69.5396 \cdot \text{мм}$ Перемещение 22-го сечения Вклад каждого из слагаемых $\frac{\Delta M_{22}}{\Delta_{22}} \cdot 100\% = 100.99675\% \quad \frac{\Delta Q_{22}}{\Delta_{22}} \cdot 100\% = 0.20792\% \quad \frac{\Delta N_{22}}{\Delta_{22}} \cdot 100\% = -1.20467\%$
--	---

Эпюры от единичной силы слева от сеч.

Эпюры от единичной силы справа от сеч.



Вывод

Определили перемещение 22-го сечения в *ПК Lira* $\Delta 22_{Lira} = 70,53$ мм, *Scad* $\Delta 22_{Scad} = 72,11$ мм; *MathCAD* $\Delta 22_{MathCAD} = 69,54$ мм. В данных программах перемещение найдено с погрешностью, как истинное значение принимаем $\Delta 22 = 71,95$ мм, которое получено аналитически в *Arka3*.

Численное интегрирование было заменено на суммирование, полученные результаты имеют приемлемую погрешность.

$$\Delta_{MathCAD} = \frac{71,95 - 69,54}{71,95} \cdot 100 \% = 3,3 \% ; \quad \Delta_{Scad} = \frac{72,11 - 71,95}{71,95} \cdot 100 \% = 0,2 \% ;$$

$$\Delta_{Lira} = \frac{70,53 - 71,95}{71,95} \cdot 100 \% = 1,9 \%$$

7.3 Деформированный вид арки

Цель работы: определить перемещения точек трехшарнирной арки с использованием численного способа вычисления интегралов и получение ее деформированного вида, выполнить верификацию в *ПК Scad, Lira, Arka3*.

Для получения наглядного представления деформированного вида арки, находящейся под действием внешней нагрузки, необходимо знать значения перемещений в каждом сечении арки.

Перемещение k -го сечения арки без учета поперечных и продольных сил определяется по формуле Мора вида, т. к. в работе № 7.2 было установлено, что слагаемые, содержащие Q и N , вносят вклад 2 %, поэтому можно пренебречь при определении перемещений

$$\Delta_k = \int_0^S \frac{\overline{M1}_k M_P ds}{EJ},$$

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

где S – длина оси арки; $\cos \varphi$ – элементарная длина дуги арки; EJ – жесткость арки при изгибе; $\overline{M1}_k$ – зависимость изменения единичной эпюры изгибающих моментов от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в k -ом сечении; M_P – зависимость изменения эпюры M в арке от действия внешних нагрузок (получена ранее в лабораторной работе № 7.1).

Вычисление интегралов Мора выполним с использованием численного суммирования по формуле трапеций.

$$\Delta_k = \frac{\Delta x}{6EJ} \sum_{j=1}^n \frac{2\overline{M1}_{k,j}^{лев} M_{P,j}^{лев} + \overline{M1}_{k,j}^{лев} M_{P,j}^{np} + \overline{M1}_{k,j}^{np} M_{P,j}^{лев} + 2\overline{M1}_{k,j}^{np} M_{P,j}^{np}}{1},$$

где n – число частей, на которые разбивается пролет арки (в данном случае $n = 28$).

Для построения единичных эпюр, рассмотрим арку с приложенной вертикальной единичной сосредоточенной силой $F = 1$ в k -м сечении.

Опорные реакции в рассматриваемой арке от действия единичной силы:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad R1_A^k &= \frac{L - x_k}{L}; \quad \sum M_A = 0; \quad R1_B^k = \frac{x_k}{L}; \\ \sum M_C^{лев} = 0; \quad H1_A^k &= \frac{L/2(R1_A^k - 1) + x_k}{f}, \text{ если } x_k < \frac{L}{2}; \quad H1_A^k = \frac{R1_A^k \cdot L}{2f}, \text{ если } x_k \geq \frac{L}{2}; \\ \sum X &= 0; \quad H1_B^k = H1_A^k. \end{aligned}$$

Значения балочных усилий $M1_0$ определяются:

$$M1_0^k = R1_A^k \cdot x_i - 1 \cdot (x_i - x_k), \text{ если } x_k < x_i; \quad M1_0^k = R1_A^k \cdot x_i, \text{ если } x_k \geq x_i;$$

Значения значений единичных эпюр $M1$ в сечениях арки определяются

$$M1_i = M1_0^k - H1_A^k \cdot y_i;$$

Расчеты выполняем в системе компьютерной алгебры *MathCAD*. Помимо формулы трапеций производить «перемножение» эпюр для определения перемещений можно несколькими другими способами: как более простыми (способом левых прямоугольников, способом правых прямоугольников), так и более точными (по формуле Симпсона).

Например, выберем три сечения, в которых получились наибольшие перемещения (в данном случае – 4, 8, 12), найдем в них перемещения способом левых

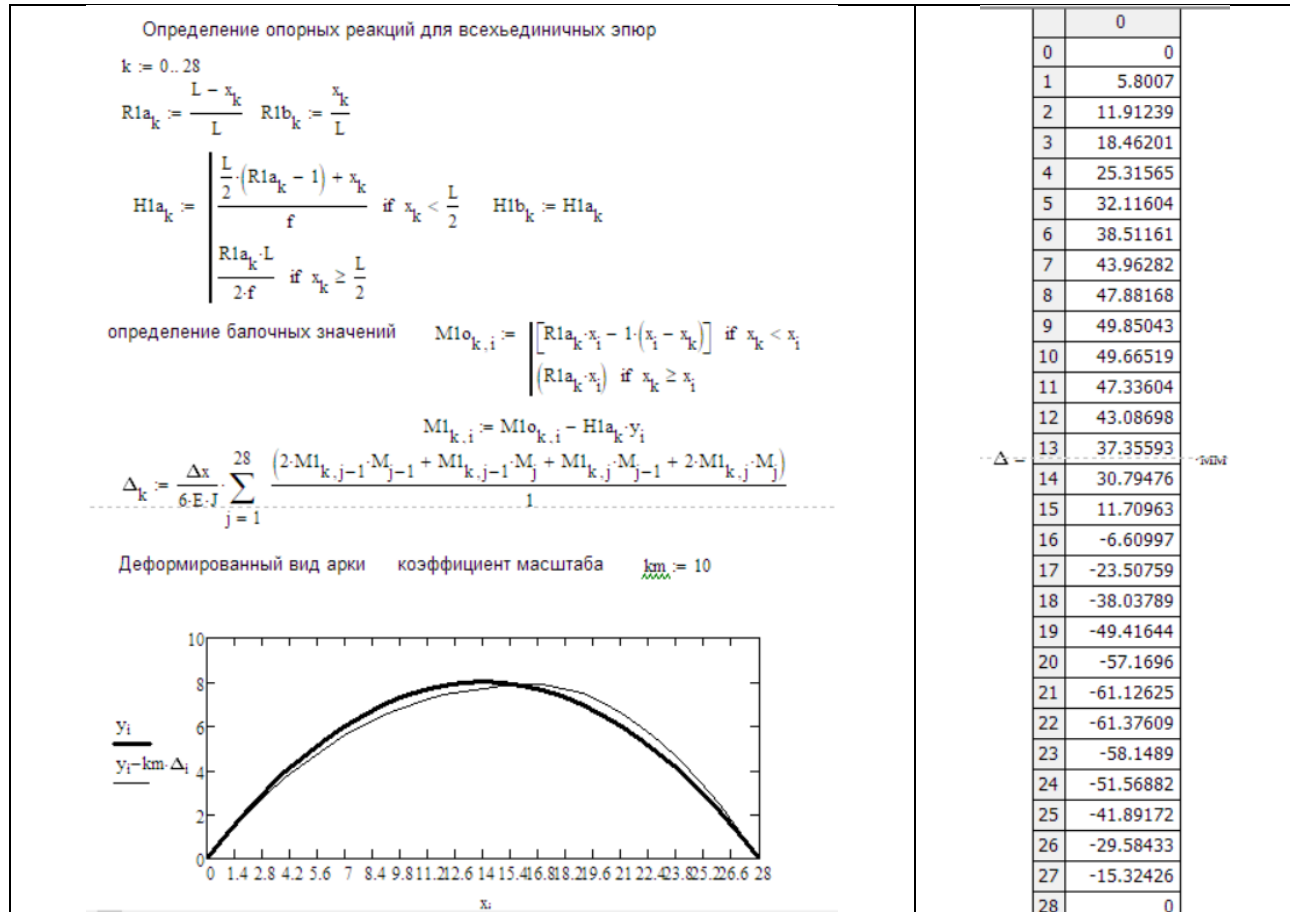
прямоугольников и убедимся, что этот способ менее точен в сравнении с форму-

лой трапеций:

$$\Delta_k^{III} = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^n \frac{\overline{M1}_{kj} M_P}{\cos \varphi_j} = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^n \frac{\overline{M1}_{kj}^{лев} M_P^{лев}}{\cos \varphi_j}.$$

$$\lambda_i = \left| \frac{\Delta_i^{TP} - \Delta_i^{III}}{\Delta_i^{TP}} \right| \cdot 100\%.$$

Расхождение результатов, полученных двумя способами –



по формуле трапеций
(более точный)

способом левых треугольников
(более простой)

Расхождение

$$\Delta_{20} = -57.1696 \cdot \text{мм}$$

$$dlevpr_{20} := \frac{\Delta x}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \sum_{j=1}^{10} \frac{[(M1)_{20,j-1} \cdot M_{j-1}]}{\cos \varphi_j} = -1.12213 \cdot \text{мм}$$

$$\left| \frac{\Delta_{20} - dlevpr_{20}}{\Delta_{20}} \right| \cdot 100\% = 0.98037$$

$$\Delta_{22} = -61.37609 \cdot \text{мм}$$

$$dlevpr_{22} := \frac{\Delta x}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \sum_{j=1}^{10} \frac{(M1)_{22,j-1} \cdot M_{j-1}}{\cos \varphi_j} = -0.8416 \cdot \text{мм}$$

$$\left| \frac{\Delta_{22} - dlevpr_{22}}{\Delta_{22}} \right| \cdot 100\% = 0.98629$$

$$\Delta_9 = 49.85043 \cdot \text{мм}$$

$$dlevpr_9 := \frac{\Delta x}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \sum_{j=1}^{10} \frac{(M1)_{9,j-1} \cdot M_{j-1}}{\cos \varphi_j} = 2.06694 \cdot \text{мм}$$

$$\left| \frac{\Delta_9 - dlevpr_9}{\Delta_9} \right| \cdot 100\% = 0.95854$$

Сравнение результатов с программными комплексами *Lira* и *Scad*.

	истин.	Z(мм)	Z(мм)	Z(мм)	Arka3/MathCAD	Arka3/Lira	Arka3/Scad	Lira/Scad
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	6,385	5,801	6,729	7,018	9,15	5,39	9,91	4,29
2	13,222	11,912	13,888	14,461	9,91	5,04	9,37	4,13
3	20,718	18,462	21,646	22,489	10,89	4,48	8,55	3,89
4	28,635	25,316	29,808	30,895	11,59	4,10	7,89	3,65
5	36,515	32,116	37,893	39,185	12,05	3,77	7,31	3,41
6	43,941	38,512	45,472	46,915	12,36	3,48	6,77	3,17
7	50,203	43,963	51,893	53,418	12,43	3,37	6,40	2,94
8	54,757	47,882	56,492	58,021	12,56	3,17	5,96	2,71
9	57,041	49,85	58,864	60,316	12,61	3,20	5,74	2,47
10	57,076	49,665	58,854	60,153	12,98	3,12	5,39	2,21
11	54,751	47,336	56,534	57,615	13,54	3,26	5,23	1,91
12	50,511	43,087	52,185	52,996	14,70	3,31	4,92	1,55
13	44,695	37,356	46,282	46,79	16,42	3,55	4,69	1,10
14	38,065	30,795	39,496	39,683	19,10	3,76	4,25	0,47
15	16,249	11,71	17,762	17,588	27,93	9,31	8,24	0,98
16	-4,808	-6,61	-3,208	-3,728	37,48	33,28	22,46	16,21
17	-24,333	-23,508	-22,74	-23,578	3,39	6,55	3,10	3,69
18	-41,494	-38,038	-39,836	-40,95	8,33	4,00	1,31	2,80
19	-55,183	-49,416	-53,618	-54,953	10,45	2,84	0,42	2,49
20	-65,087	-57,17	-63,486	-64,979	12,16	2,46	0,17	2,35
21	-70,576	-61,126	-69,136	-70,713	13,39	2,04	0,19	2,28
22	-71,951	-61,376	-70,531	-72,111	14,70	1,97	0,22	2,24
23	-68,985	-58,149	-67,793	-69,29	15,71	1,73	0,44	2,21
24	-62,009	-51,569	-60,912	-62,242	16,84	1,77	0,38	2,18
25	-50,862	-41,892	-50,052	-51,136	17,64	1,59	0,54	2,17
26	-36,308	-29,584	-35,681	-39,449	18,52	1,73	8,65	10,56
27	-18,904	-15,324	-18,602	-19,001	18,94	1,60	0,51	2,14
28	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
					13,65	4,27	4,79	3,11

Вывод

Определили перемещения точек трехшарнирной арки с использованием численного способа вычисления интегралов (*MathCAD*) и получили ее деформированный вид. Расхождение между *Arka3* и *MathCAD* – 13,65 %, *Arka3* с *Lira* – 4,27 % и *Arka3* с *Scad* – 4,79 %. При сравнении перемещений, найденных другими способами (формула трапеций, способ левых треугольников) расхождение составило менее 1 %.

8 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в двухшарнирных арках с использованием численного подхода, выполнить верификацию результатов в ПК Scad, Lira, Arka2, SolidWorks.

Исходные данные: см. лабораторную работу № 7.

Порядок выполнения работы:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M_0 , Q_0 – балочные усилия, а далее M , Q и N в сечениях арки с заданным шагом (0, 1, 3, 5...), используя среду MathCAD; построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M , Q , N ;

2) выполнить верификацию результатов – сравниваем значение момента M , полученное в MathCAD с данными из ПК Scad, Lira, Arka2 (принимается как истинное значение).

3) выполнить сравнение максимального значения моментов с трехшарнирной аркой и сделать вывод о эффективности применения.

Выполним расчет двухшарнирной арки с затяжкой представленной на рисунке 8.1 (условия нагружения, размеры арки и сечения трубы, принимаем из лабораторной работы № 7).

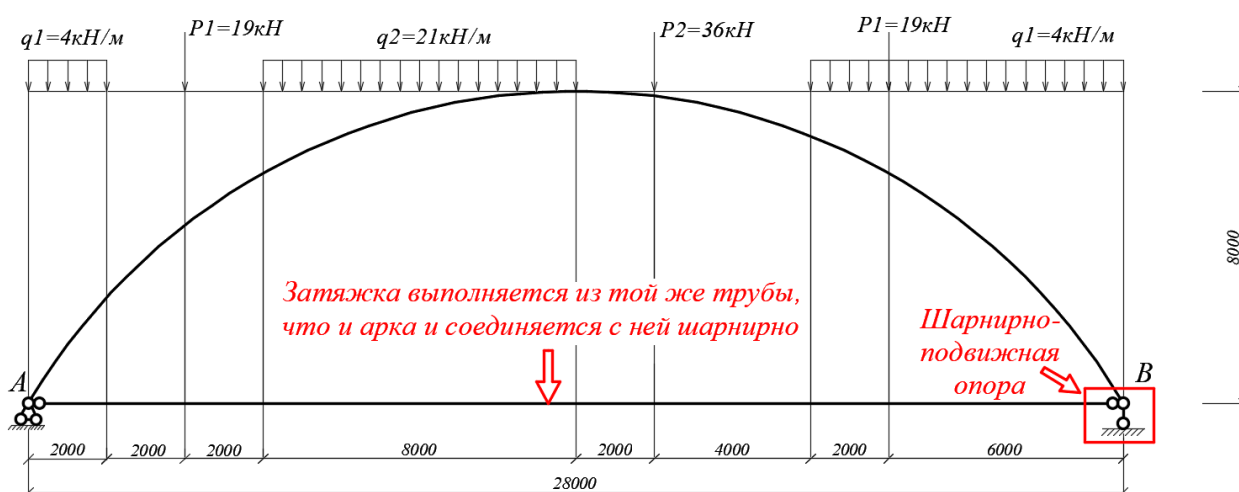


Рисунок 8.1 – Расчетная схема двухшарнирной арки

Жесткость арки принята постоянной по длине стержня ($EJ = const$), жесткость затяжки принята равной жесткости арки (выполняем сечение 377 x 10, которое подобрали в л. р. № 7.2). Ось стержня арки определяется параболической зависимостью, как и в лабораторной работе № 7. Основную систему метода сил получим, разрезав затяжку.

Расчетные величины (y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, M_P и т. д.) необходимо вычислять в средних точках участков Δx , координаты которых можно определить по выражению: $x_i = 0,5\Delta x + \Delta x (i - 1)$. Для арок постоянного сечения жесткости их будут константами и их можно вынести за суммы.

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= -\frac{\Delta x}{EJ} \cdot \left(\sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{GA} \sum_1^n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{EA} \sum_1^n \cos \varphi + \frac{n}{EJ} \right); \\ \Delta_{11} &= -\frac{\Delta x}{EJ} \cdot \left(\sum_1^n \frac{y M_P}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{GA} \sum_1^n \frac{\sin \varphi Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{EA} \sum_1^n N_P \right).\end{aligned}$$

Вычислив перемещения δ_{11} и Δ_{11} , решаем уравнение и находим неизвестное метода сил $X_1 = -\Delta_{11} / \delta_{11}$. После этого можно построить окончательные эпюры усилий в заданной статически неопределимой арке по формулам:

$$M_i = Mo_i - X_1 \cdot y_i; \quad Q_i = Qo_i \cdot \cos \varphi_i - X_1 \cdot \sin \varphi_i; \quad N_i = -(Qo_i \cdot \sin \varphi_i - X_1 \cdot \cos \varphi_i).$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры *MathCAD*.

```

m := 1   kH := 1   mm := 0.001m   cm := 0.01m   H := 0.001kH   кг := 10H

L := 28m   f := 8m   P1 := 19kH·m   P2 := 36kH·m   q1 := 4  $\frac{\text{kH}}{\text{m}}$    q2 := 21  $\frac{\text{kH}}{\text{m}}$ 

Реакции опор:

Ra :=  $\frac{q1 \cdot 2 \cdot 27 + P1 \cdot 24 + q2 \cdot 8 \cdot 18 + P2 \cdot 12 + q1 \cdot 8 \cdot 4 + P1 \cdot 6}{L}$  = 156.071·кН
Rb :=  $\frac{q1 \cdot 2 \cdot 1 + P1 \cdot 4 + q2 \cdot 8 \cdot 10 + P2 \cdot 16 + P1 \cdot 22 + q1 \cdot 8 \cdot 24}{L}$  = 125.929·кН

Ha :=  $\frac{Ra \cdot 14 - q1 \cdot 2 \cdot 13 - P1 \cdot 10 - q2 \cdot 8 \cdot 4}{f}$  = 152.375·кН   Hb := Ha   Hc := Ha

Проверка: Hb·f - Rb·14 + q1·8·10 + P1·8 + P2·2 = 0

i := 0..15
 $\Delta x := \frac{L}{14} = 2$     $x_i := 0.5 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot (i - 1)$ 
 $x_0 := 0$     $x_{15} := 28$ 

 $y_i := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x_i \cdot (L - x_i)$     $\tan \varphi_i := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot (L - 2 \cdot x_i)$     $\cos \varphi_i := \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \varphi_i)^2}}$     $\sin \varphi_i := \cos \varphi_i \cdot \tan \varphi_i$ 

Mo0 := 0кН·м
Mo1 := Ra·1 - q1·1·0.5 = 154.071·кН·м
Mo2 := Ra·3 - q1·2·(1 + 1) = 452.214·кН·м
Mo3 := Ra·5 - q1·2·(1 + 3) - P1·1 = 729.357·кН·м
Mo4 := Ra·7 - q1·2·(1 + 5) - P1·3 - q2·1·0.5 = 977·кН·м
Mo5 := Ra·9 - q1·2·(1 + 7) - P1·5 - q2·3·1.5 = 1151.143·кН·м
Mo6 := Ra·11 - q1·2·(1 + 9) - P1·7 - q2·5·2.5 = 1241.286·кН·м
Mo7 := Ra·13 - q1·2·(1 + 11) - P1·9 - q2·7·3.5 = 1247.429·кН·м
Mo8 := Rb·13 - q1·8·(4 + 5) - P1·7 - P2·1 = 1180.071·кН·м
Mo9 := Rb·11 - q1·8·(4 + 3) - P1·5 = 1066.214·кН·м
Mo10 := Rb·9 - q1·8·(4 + 1) - P1·3 = 916.357·кН·м
Mo11 := Rb·7 - q1·7·3.5 - P1·1 = 764.5·кН·м
Mo12 := Rb·5 - q1·5·2.5 = 579.643·кН·м
Mo13 := Rb·3 - q1·3·1.5 = 359.786·кН·м
Mo14 := Rb·1 - q1·1·0.5 = 123.929·кН·м
Mo15 := 0кН·м

Qo0 := Ra = 156.071·кН
Qo1 := Ra - q1·1 = 152.071·кН
Qo2 := Ra - q1·2 = 148.071·кН
Qo3 := Ra - q1·2 - P1 = 129.071·кН
Qo4 := Ra - q1·2 - P1 - q2·1 = 108.071·кН
Qo5 := Ra - q1·2 - P1 - q2·3 = 66.071·кН
Qo6 := Ra - q1·2 - P1 - q2·5 = 24.071·кН
Qo7 := Ra - q1·2 - P1 - q2·7 = -17.929·кН
Qo8 := -Rb + q1·8 + P1 + P2 = -38.929·кН
Qo9 := -Rb + q1·8 + P1 = -74.929·кН
Qo10 := -Rb + q1·8 + P1 = -74.929·кН
Qo11 := -Rb + q1·7 + P1 = -78.929·кН
Qo12 := -Rb + q1·5 = -105.929·кН
Qo13 := -Rb + q1·3 = -113.929·кН
Qo14 := -Rb + q1·1 = -121.929·кН
Qo15 := -Rb = -125.929·кН

Модуль упругости   Площадь сечения   Момент инерции   коэффициент Пуассона
E := 206010000  $\frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$    A := 115.2965см2   Jw := 19425.866564см4   μ := 0.3

Модуль сдвига   G :=  $\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$  = 7.923 × 105  $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$    G·A = 9.135 × 105
η := 1.5   E·A = 2.375 × 106

T :=  $\frac{y_i \cdot Mo_i}{\cos \varphi_i}$    n := 15   Qa_i := Qo_i · cos φ_i



|     |    |     |       |         |        |         |       |      |          |      |         |     |          |
|-----|----|-----|-------|---------|--------|---------|-------|------|----------|------|---------|-----|----------|
| x = |    | y = |       | sin φ = |        | cos φ = |       | Mo = |          | Qa = |         | T = |          |
| 0   | 0  | 0   | 0     | 0       | 0.753  | 0       | 0.659 | 0    | 0        | 0    | 102.774 | 0   | 0        |
| 1   | 1  | 1   | 1.102 | 1       | 0.728  | 1       | 0.686 | 1    | 154.071  | 1    | 104.291 | 1   | 247.583  |
| 2   | 3  | 2   | 3.061 | 2       | 0.668  | 2       | 0.744 | 2    | 452.214  | 2    | 110.172 | 2   | 1860.536 |
| 3   | 5  | 3   | 4.694 | 3       | 0.592  | 3       | 0.806 | 3    | 729.357  | 3    | 104.016 | 3   | 4248.158 |
| 4   | 7  | 4   | 6     | 4       | 0.496  | 4       | 0.868 | 4    | 977      | 4    | 93.832  | 4   | 6751.565 |
| 5   | 9  | 5   | 6.98  | 5       | 0.378  | 5       | 0.926 | 5    | 1151.143 | 5    | 61.172  | 5   | 8678.002 |
| 6   | 11 | 6   | 7.633 | 6       | 0.238  | 6       | 0.971 | 6    | 1241.286 | 6    | 23.381  | 6   | 9754.277 |
| 7   | 13 | 7   | 7.959 | 7       | 0.081  | 7       | 0.997 | 7    | 1247.429 | 7    | -17.869 | 7   | 9961.539 |
| 8   | 15 | 8   | 7.959 | 8       | -0.081 | 8       | 0.997 | 8    | 1180.071 | 8    | -38.8   | 8   | 9423.648 |
| 9   | 17 | 9   | 7.633 | 9       | -0.238 | 9       | 0.971 | 9    | 1066.214 | 9    | -72.778 | 9   | 8378.53  |
| 10  | 19 | 10  | 6.98  | 10      | -0.378 | 10      | 0.926 | 10   | 916.357  | 10   | -69.372 | 10  | 6908.047 |
| 11  | 21 | 11  | 6     | 11      | -0.496 | 11      | 0.868 | 11   | 764.5    | 11   | -68.529 | 11  | 5283.082 |
| 12  | 23 | 12  | 4.694 | 12      | -0.592 | 12      | 0.806 | 12   | 579.643  | 12   | -85.366 | 12  | 3376.143 |
| 13  | 25 | 13  | 3.061 | 13      | -0.668 | 13      | 0.744 | 13   | 359.786  | 13   | -84.768 | 13  | 1480.259 |
| 14  | 27 | 14  | 1.102 | 14      | -0.728 | 14      | 0.686 | 14   | 123.929  | 14   | -83.619 | 14  | 199.146  |
| 15  | 28 | 15  | 0     | 15      | -0.753 | 15      | 0.659 | 15   | 0        | 15   | -82.925 | 15  | 0        |



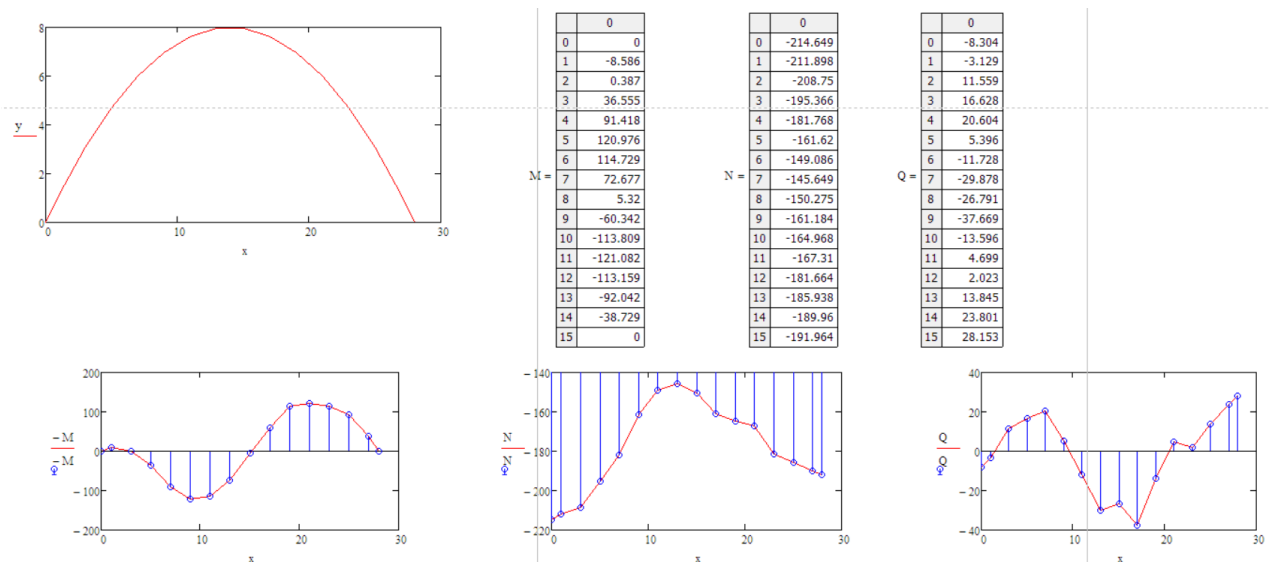
N0_i := -(Qo_i · sin φ_i)   δ11 :=  $\frac{\Delta x}{E \cdot J} \left[ \sum \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{G \cdot A} \sum \frac{(\sin \varphi)^2}{\cos \varphi} + \frac{1}{E \cdot A} \sum \cos \varphi + \frac{n}{E \cdot A} \right] = -0.026$ 

Δ11 :=  $\frac{\Delta x}{E \cdot J} \left( \sum T + \frac{\eta}{G \cdot A} \sum \frac{\sin \varphi \cdot Qa}{\cos \varphi} + \frac{1}{E \cdot A} \sum N0 \right) = -3.826$    X1 :=  $\frac{\Delta 11}{\delta 11} = 147.597$ 

Mi := Mo_i - X1·yi   Qi := Qo_i · cos φ_i - X1 · sin φ_i   Ni := -(Qo_i · sin φ_i + X1 · cos φ_i)

Σ T = 7.655 × 104

```



Выполним проверку усилий в программе *Arka2*, для этого необходимо ввести контрольные значения. Жесткости в программе настраиваем в соответствии со своими значениями (рисунок 8.3).

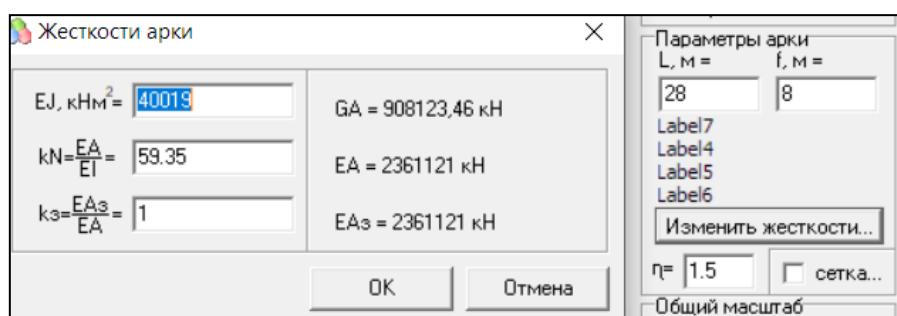


Рисунок 8.3 – Жесткости в программе *Arka2*

X, м	Y, м	sin (φ)	cos (φ)	M, кНм	Q, кН	N, кН	M1, кНм	Q1, кН	N1, кН	Mr, кНм	Qr, кН	Nr, кН
0.0000	0.0000	0.7526	0.6585	0.0000	8.2537	-214.604	-0.0000	-0.7526	-0.6585	0.0000	102.7738	-117.455
1.0000	1.1020	0.7278	0.6858	-8.5124	3.0798	-211.852	-1.1020	-0.7278	-0.6858	154.0714	104.2908	-110.675
3.0000	3.0612	0.6681	0.7440	0.5924	1.6039	-208.699	-3.0612	-0.6681	-0.7440	452.2143	110.1724	-98.9303
5.0000	4.6939	0.5921	0.8059	36.8703	6.6674	-195.311	-4.6939	-0.5921	-0.8059	729.3571	104.0163	-76.4202
7.0000	6.0000	0.4961	0.8682	91.8211	20.6370	-181.710	-6.0000	-0.4961	-0.8682	977.0000	93.8323	-53.6184
9.0000	6.9796	0.3779	0.9258	121.4450	5.4210	-161.558	-6.9796	-0.3779	-0.9258	1151.1426	61.1721	-24.9682
11.0000	7.6327	0.2379	0.9713	115.2418	11.7122	-149.021	-7.6327	-0.2379	-0.9713	1241.285	23.3805	-5.7258
13.0000	7.9592	0.0814	0.9967	73.2117	29.8725	-145.582	-7.9592	-0.0814	-0.9967	1247.428	-17.8691	1.4587
15.0000	7.9592	-0.0814	0.9967	5.8545	26.7962	-150.208	-7.9592	0.0814	-0.9967	1180.071	-38.7995	-3.1673
17.0000	7.6327	-0.2379	0.9713	-59.8296	37.6852	-161.118	-7.6327	0.2379	-0.9713	1066.214	-72.7779	-17.8232
19.0000	6.9796	-0.3779	0.9258	-113.340	13.6214	-164.905	-6.9796	0.3779	-0.9258	916.3571	-69.3724	-28.3153
21.0000	6.0000	-0.4961	0.8682	-120.678	1.6661	-167.251	-6.0000	0.4961	-0.8682	764.5000	-68.5292	-39.1595
23.0000	4.6939	-0.5921	0.8059	-112.844	9.9830	-181.609	-4.6939	0.5921	-0.8059	579.6425	-85.3659	-62.7178
25.0000	3.0612	-0.6681	0.7440	-91.8362	3.8000	-185.887	-3.0612	0.6681	-0.7440	359.7857	-84.7684	-76.1186
27.0000	1.1020	-0.7278	0.6858	-38.6553	23.7518	-189.914	-1.1020	0.7278	-0.6858	123.9286	-83.6188	-88.7383
28.0000	0.0000	-0.7526	0.6585	0.0000	28.1030	-191.920	-0.0000	0.7526	-0.6585	0.0000	-82.9245	-94.7709

Рисунок 8.4 – Результаты расчета в программе *Arka2* (значения изгибающих моментов M (кН), принимаются за истинные значения)

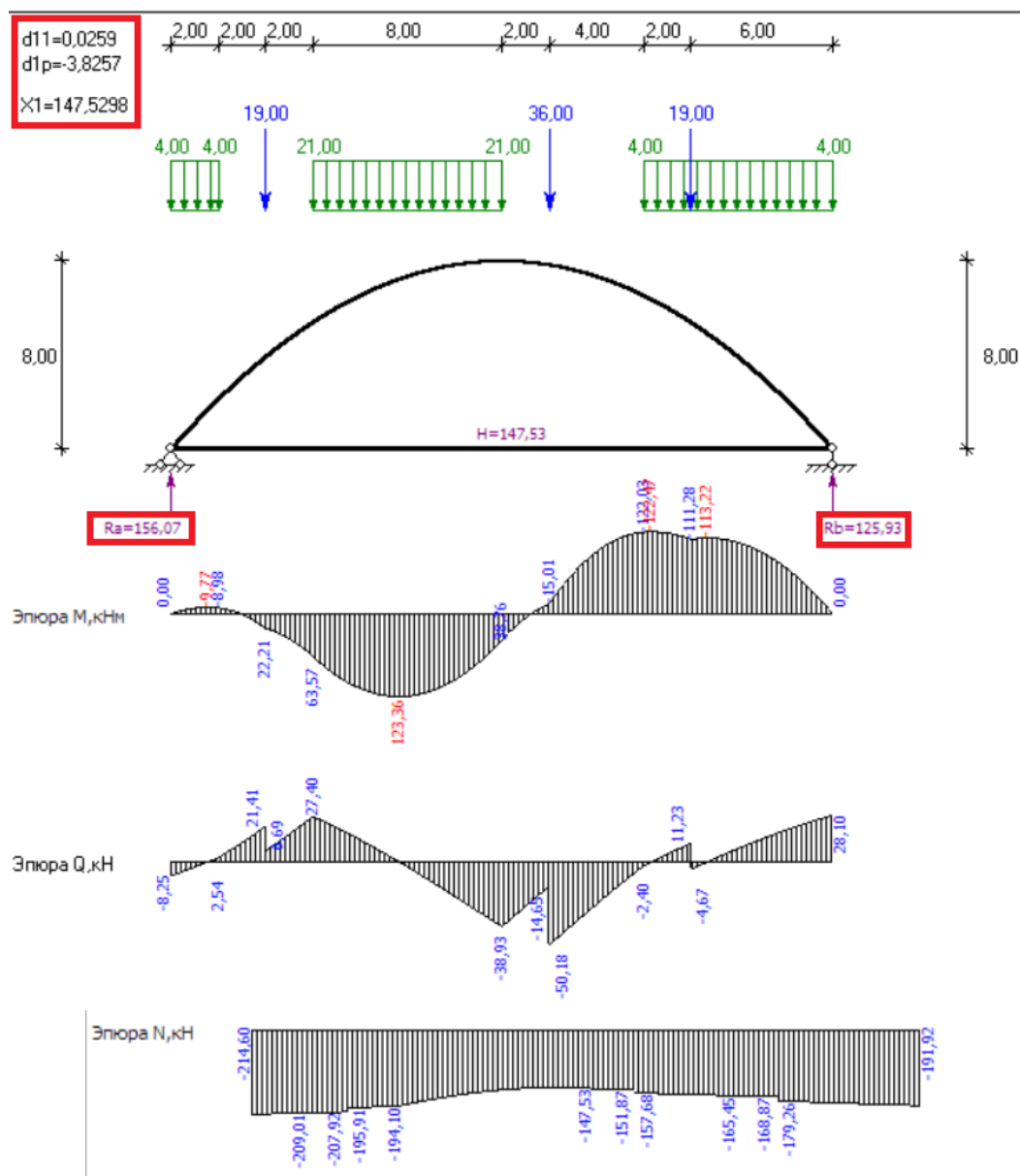


Рисунок 8.5 – Эпюры усилий в программе Arka2

Произведем расчет в программе *Lira* (рисунки 8.6–8.9).

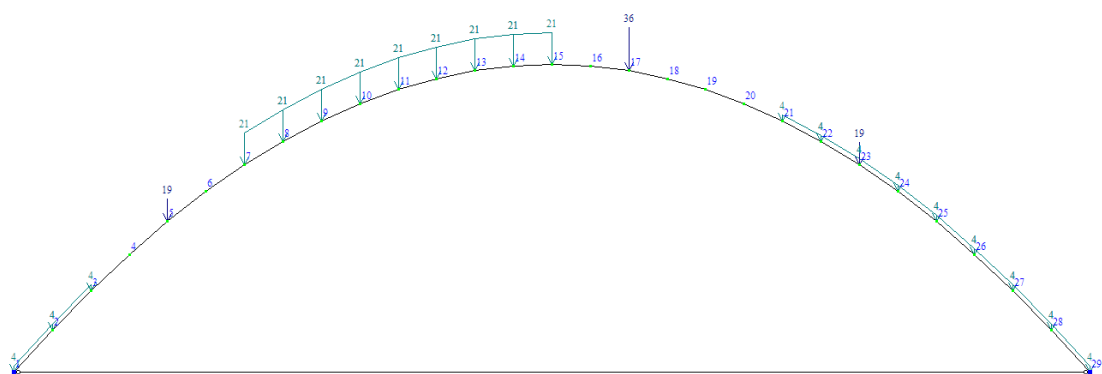


Рисунок 8.6 – Расчетная схема двухшарнирной арки в программе *Lira*

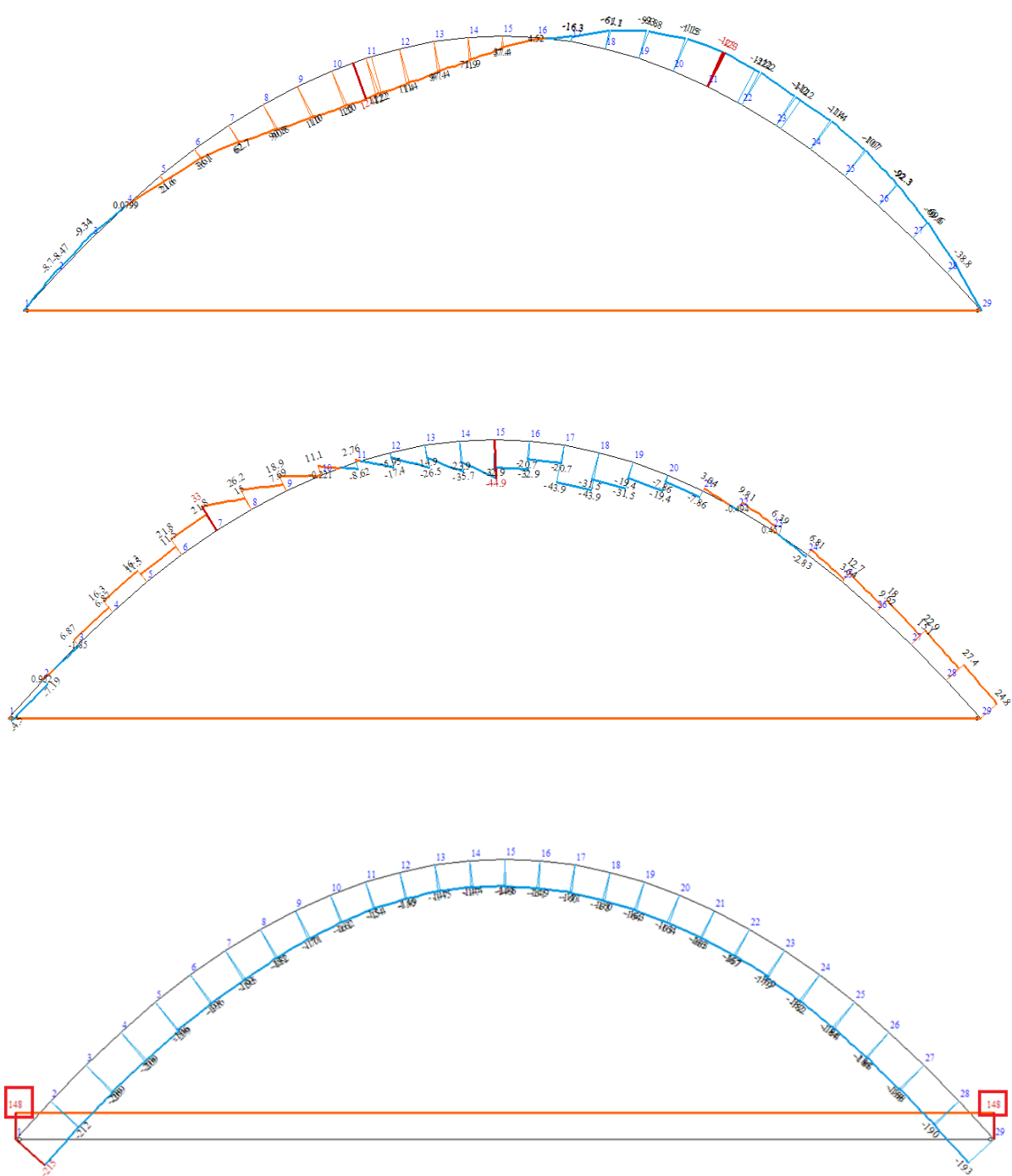


Рисунок 8.7 – Этюры усилий в программе в программе Lira

Таблица усилий (стержни)					
№ элем	№ сечен	Усилия			
		N (кН)	Mk (кН*м)	Mu (кН*м)	Qz (кН)
1	1	- 214.831	0.000	0.000	- 4.500
1	2	- 211.869	0.000	- 8.697	- 7.188
2	1	- 211.989	0.000	- 8.697	0.952
2	2	- 209.132	0.000	- 9.338	- 1.848
3	1	- 209.027	0.000	- 9.338	6.866
3	2	- 209.027	0.000	0.080	6.866
4	1	- 208.504	0.000	0.080	16.303
4	2	- 208.504	0.000	21.552	16.303
5	1	- 195.811	0.000	21.552	11.482
5	2	- 195.811	0.000	36.083	11.482
6	1	- 194.927	0.000	36.083	21.844
6	2	- 194.927	0.000	62.670	21.844
7	1	- 193.359	0.000	62.670	32.959
7	2	- 182.394	0.000	90.815	15.049
8	1	- 181.123	0.000	90.815	26.237
8	2	- 171.280	0.000	110.017	7.697
9	1	- 170.403	0.000	110.017	18.937
9	2	- 161.802	0.000	120.275	- 0.221
10	1	- 161.422	0.000	120.275	11.090
10	2	- 154.180	0.000	121.590	- 8.622
11	1	- 154.396	0.000	121.590	2.762
11	2	- 149.627	0.000	113.963	- 17.430
12	1	- 149.528	0.000	113.963	- 5.948
12	2	- 145.329	0.000	97.392	- 26.524
13	1	- 146.976	0.000	97.392	- 14.903
13	2	- 144.423	0.000	71.878	- 35.747
14	1	- 146.843	0.000	71.878	- 23.938
14	2	- 145.987	0.000	37.421	- 44.920
15	1	- 149.162	0.000	37.421	- 32.872
15	2	- 149.162	0.000	4.521	- 32.872
16	1	- 151.334	0.000	4.521	- 20.688
16	2	- 151.334	0.000	- 16.322	- 20.688
17	1	- 159.697	0.000	- 16.322	- 43.882
17	2	- 159.697	0.000	- 61.108	- 43.882
18	1	- 162.599	0.000	- 61.108	- 31.471
18	2	- 162.599	0.000	- 93.838	- 31.471
19	1	- 164.476	0.000	- 93.838	- 19.404
19	2	- 164.476	0.000	- 114.510	- 19.404
20	1	- 165.430	0.000	- 114.510	- 7.860
20	2	- 165.430	0.000	- 123.125	- 7.860
21	1	- 165.588	0.000	- 123.125	3.040
21	2	- 167.463	0.000	- 121.684	- 0.494
22	1	- 167.177	0.000	- 121.684	9.806
22	2	- 169.265	0.000	- 112.187	6.394
23	1	- 179.454	0.000	- 112.187	0.457
23	2	- 181.734	0.000	- 113.631	- 2.830
24	1	- 181.629	0.000	- 113.631	6.806
24	2	- 184.080	0.000	- 107.019	3.645
25	1	- 183.681	0.000	- 107.019	12.657
25	2	- 186.284	0.000	- 92.348	9.620
26	1	- 185.659	0.000	- 92.348	18.027
26	2	- 188.397	0.000	- 69.623	15.110
27	1	- 187.603	0.000	- 69.623	22.946
27	2	- 190.460	0.000	- 38.840	20.146
28	1	- 189.546	0.000	- 38.840	27.444
28	2	- 192.509	0.000	0.000	24.756
29	1	147.697	0.000	0.000	0.000
29	2	147.697	0.000	0.000	0.000

Рисунок 8.8 – Значения внутренних усилий в программе Lira

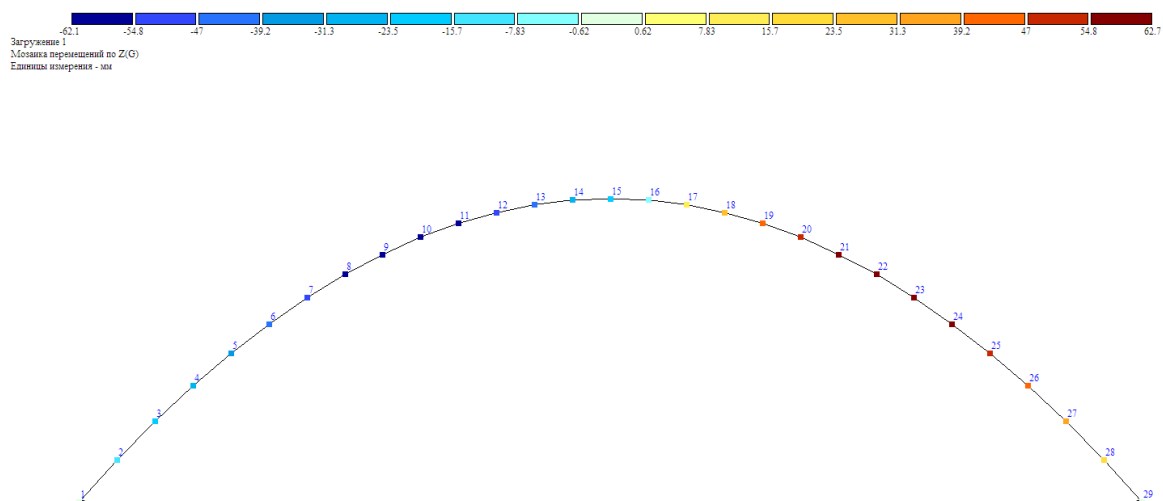


Рисунок 8.9 – Перемещения узлов в ПК Lira (62,7 мм)

Произведем расчет в программе Scad (рисунки 8.10–8.13).

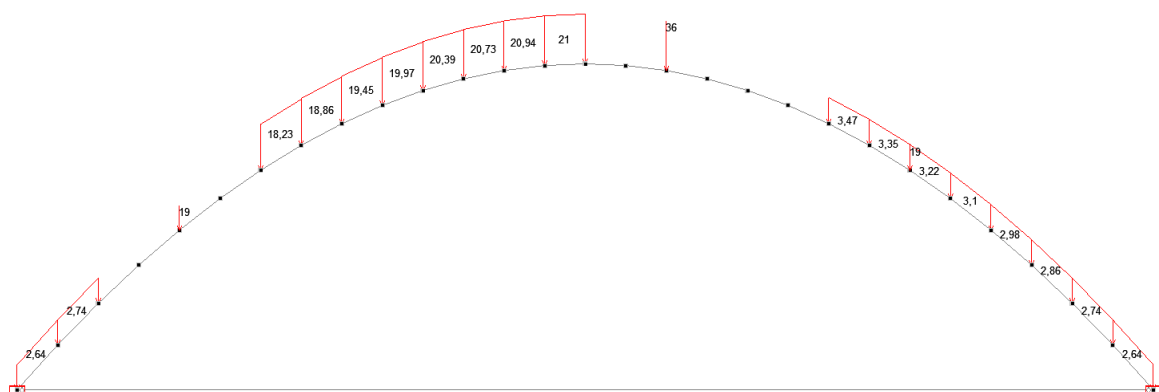


Рисунок 8.10 – Расчетная схема арки в программе Scad

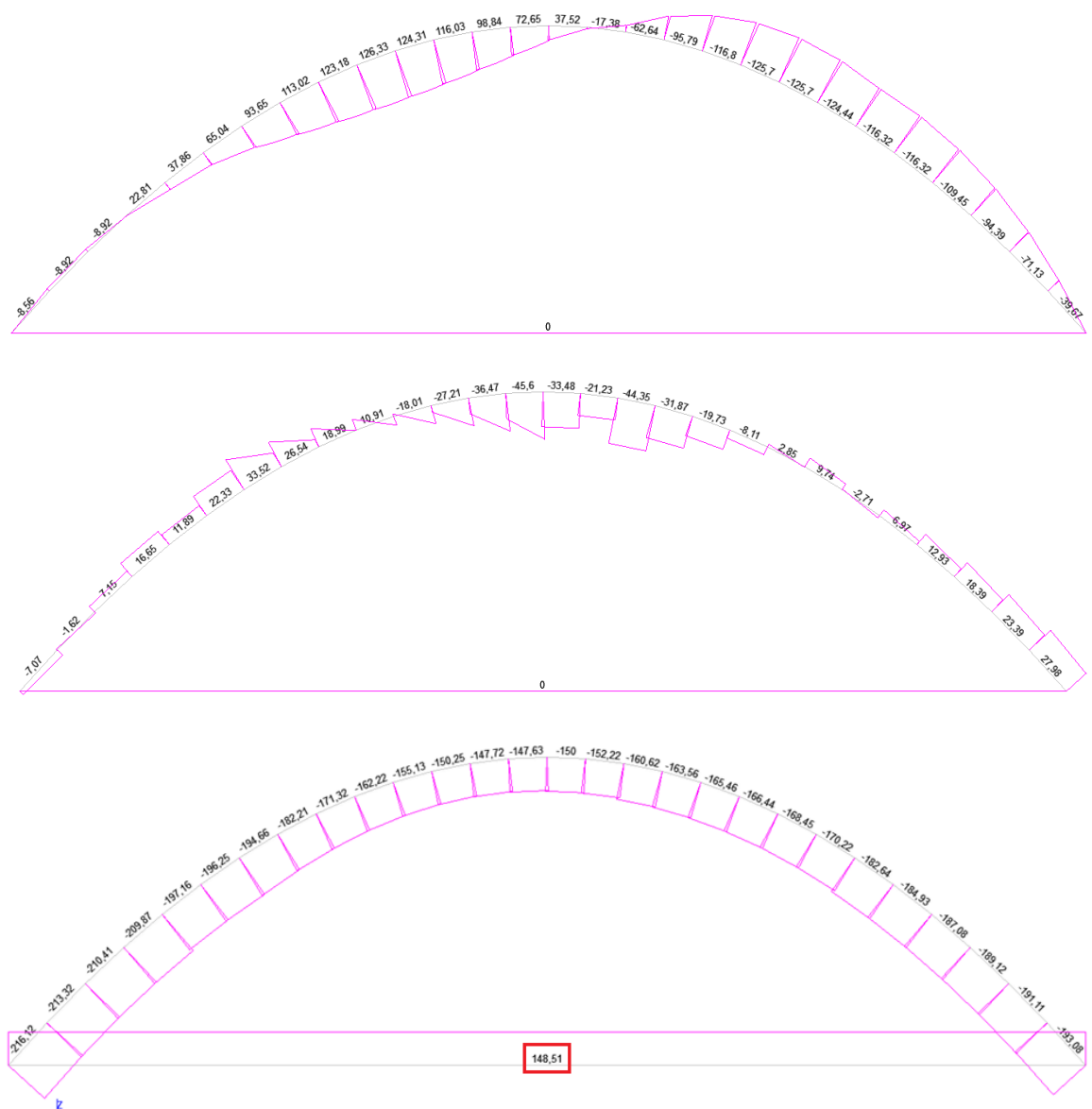


Рисунок 8.11 – Эпюры усилий в программе в программе Scad

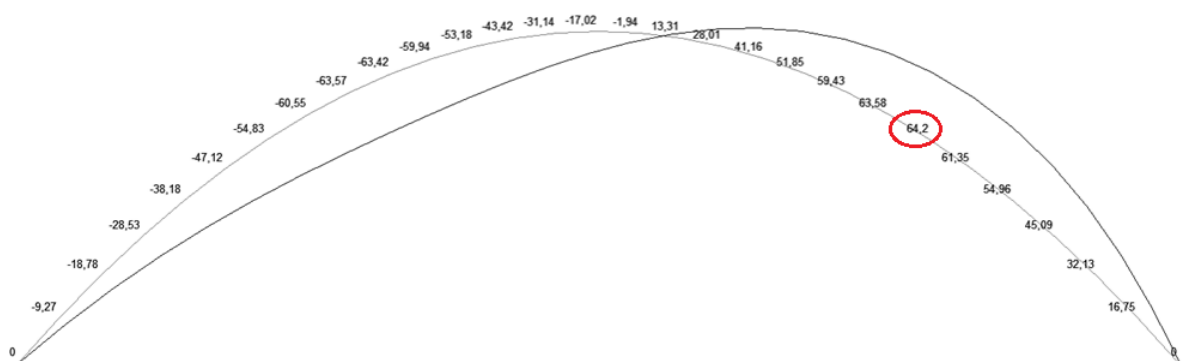


Рисунок 8.12 – Перемещения узлов в ПК Scad (64,2 мм)

Величины усилий					
Элемент	Сечение	Загружение	Значение		
			N	M _x	Q _z
1	1	1	-216,117	-3,297e-014	-4,434
1	3	1	-213,207	-8,563	-7,074
2	1	1	-213,322	-8,563	1,117
2	3	1	-210,526	-8,924	-1,623
3	1	1	-210,411	-8,924	7,149
3	3	1	-210,411	0,881	7,149
4	1	1	-209,873	0,881	16,649
4	3	1	-209,873	22,81	16,649
5	1	1	-197,162	22,81	11,894
5	3	1	-197,162	37,862	11,894
6	1	1	-196,254	37,862	22,327
6	3	1	-196,254	65,037	22,327
7	1	1	-194,656	65,037	33,516
7	3	1	-183,495	93,648	15,286
8	1	1	-182,207	93,648	26,542
8	3	1	-172,2	113,019	7,682
9	1	1	-171,321	113,019	18,993
9	3	1	-162,589	123,179	-0,457
10	1	1	-162,223	123,179	10,91
10	3	1	-154,887	124,164	-9,06
11	1	1	-155,134	124,164	2,376
11	3	1	-149,308	116,032	-18,014
12	1	1	-150,251	116,032	-6,478
12	3	1	-146,02	98,842	-27,208
13	1	1	-147,72	98,842	-15,529
13	3	1	-145,156	72,649	-36,469
14	1	1	-147,632	72,649	-24,598
14	3	1	-146,774	37,522	-45,598
15	1	1	-150,002	37,522	-33,484
15	3	1	-150,002	4,01	-33,484
16	1	1	-152,221	4,01	-21,23
16	3	1	-152,221	-17,379	-21,23
17	1	1	-160,624	-17,379	-44,351
17	3	1	-160,624	-62,644	-44,351
18	1	1	-163,56	-62,644	-31,867
18	3	1	-163,56	-95,786	-31,867
19	1	1	-165,463	-95,786	-19,729
19	3	1	-165,463	-116,804	-19,729
20	1	1	-166,437	-116,804	-8,115
20	3	1	-166,437	-125,699	-8,115
21	1	1	-166,611	-125,699	2,852
21	3	1	-168,452	-124,435	-0,618
22	1	1	-168,171	-124,435	9,743
22	3	1	-170,222	-114,976	6,393
23	1	1	-180,409	-114,976	0,509
23	3	1	-182,643	-116,316	-2,711
24	1	1	-182,53	-116,316	6,972
24	3	1	-184,935	-109,455	3,872
25	1	1	-184,523	-109,455	12,925
25	3	1	-187,077	-94,393	9,945
26	1	1	-186,437	-94,393	18,389
26	3	1	-189,122	-71,133	15,529
27	1	1	-188,311	-71,133	23,394
27	3	1	-191,106	-39,667	20,654
28	1	1	-190,173	-39,667	27,976
28	3	1	-193,082	2,582e-013	25,336
29	1	1	148,512	0	0
29	3	1	148,512	0	0

Рисунок 8.13 – Значения внутренних усилий в программе Scad

Произведем расчет в программе SolidWorks (рисунки 8.14–8.16).

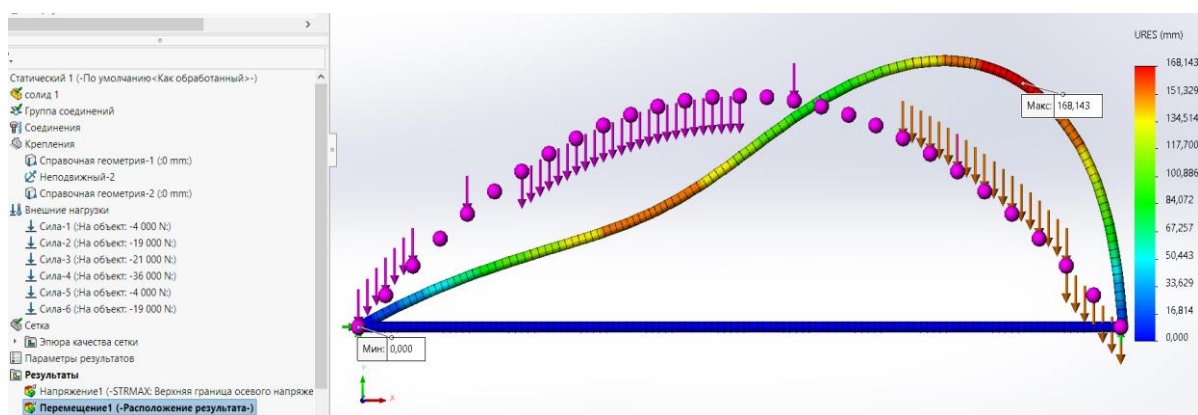


Рисунок 8.14 – Расчетная схема арки и перемещения в ПК SolidWorks

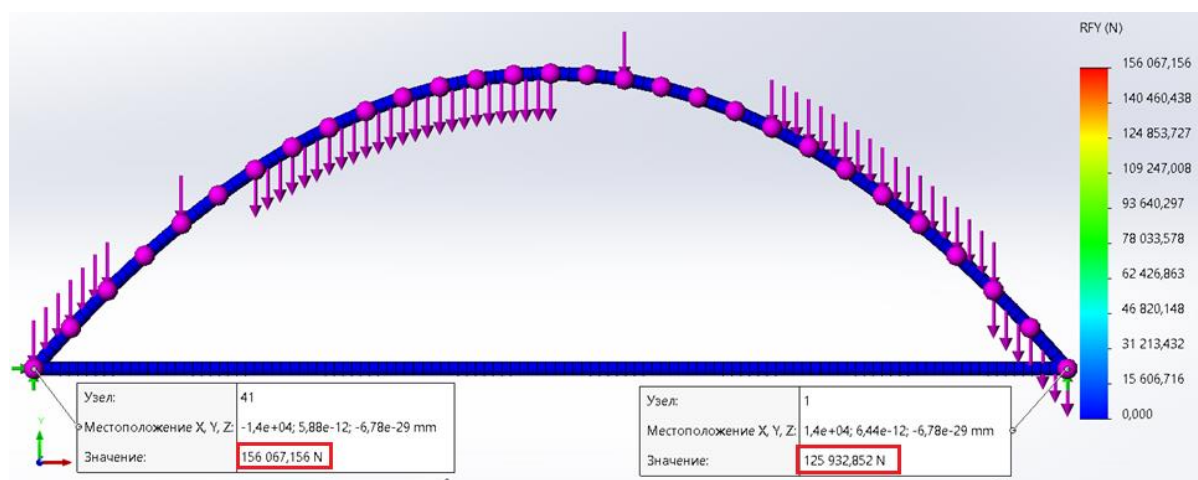


Рисунок 8.15 – Реакции опор в ПК SolidWorks

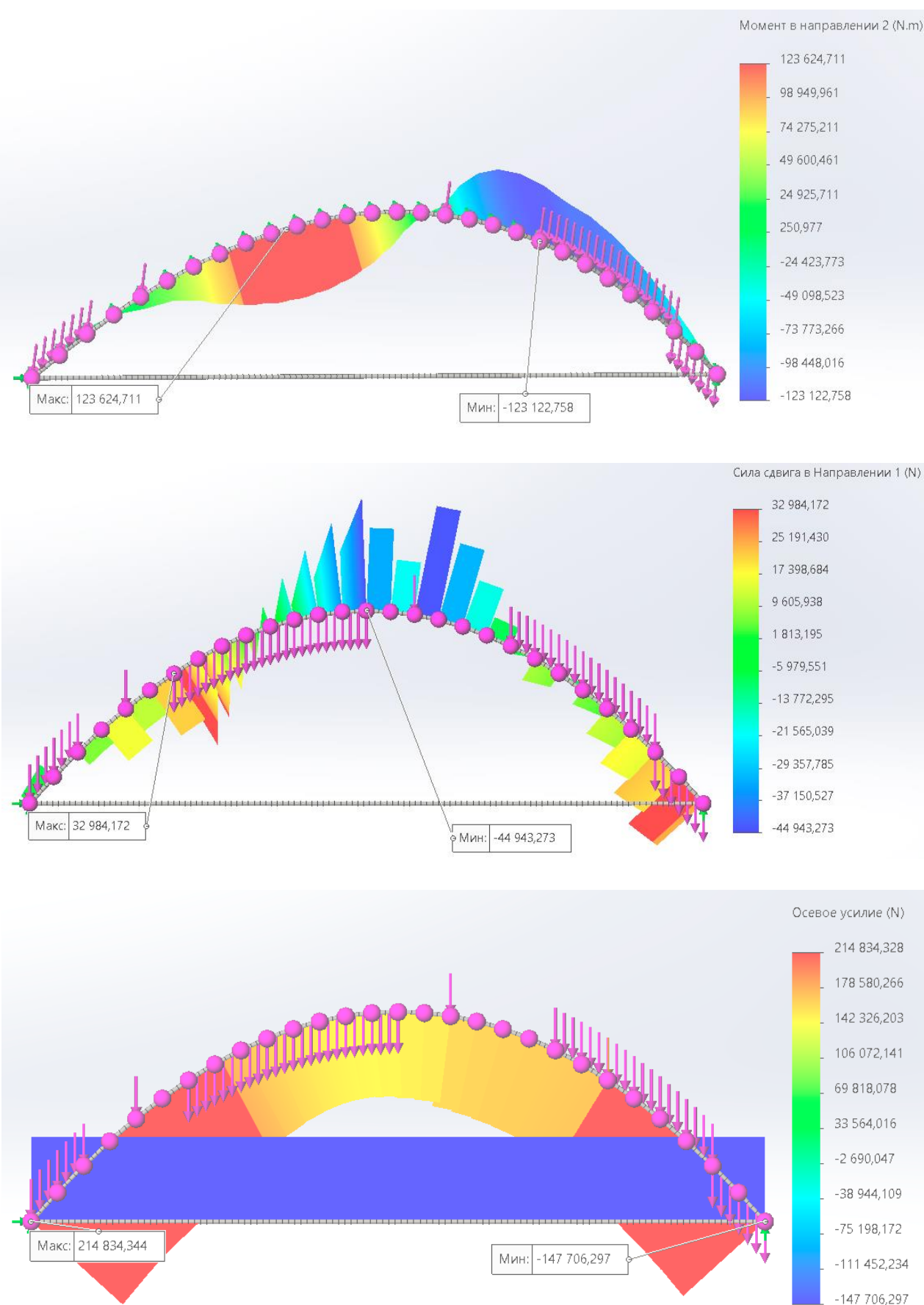


Рисунок 8.16 – Эпюры усилий в программе SolidWorks

Сравнение результатов программ и численного метода:

Сечение	Arka2	MathCAD	Lira	Scad	Arka2/MathCAD	Arka2/Lira	Arka2/Scad	Lira/Scad
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-8,5124	-8,586	-8,697	-8,563	0,86	2,17	0,59	1,54
2	0,5924	0,387	0,08	0,881	34,67	86,50	48,72	1001,25
3	36,8703	36,555	36,083	37,862	0,86	2,14	2,69	4,93
4	91,8211	91,418	90,815	93,648	0,44	1,10	1,99	3,12
5	121,445	120,976	120,275	123,179	0,39	0,96	1,43	2,41
6	115,2418	114,729	113,963	116,032	0,44	1,11	0,69	1,82
7	73,2117	72,677	71,878	72,649	0,73	1,82	0,77	1,07
8	5,8545	5,32	4,521	4,01	9,13	22,78	31,51	11,30
9	-59,8296	-60,342	-61,108	-62,644	0,86	2,14	4,70	2,51
10	-113,34	-113,809	-114,51	-116,804	0,41	1,03	3,06	2,00
11	-120,678	-121,082	-121,684	-124,435	0,33	0,83	3,11	2,26
12	-112,844	-113,159	-113,631	-116,316	0,28	0,70	3,08	2,36
13	-91,8362	-92,042	-92,348	-94,393	0,22	0,56	2,78	2,21
14	-38,6553	-38,729	-38,84	-39,667	0,19	0,48	2,62	2,13
15	0	0	0	0	0	0	0	0
					3,11	7,77	6,73	65,06

Вывод

Суммарная погрешность указана в таблице, $M_{\max} = 121,445$ кН·м (в трехшарнирной $M_{\max} = 153,6735$ кН·м (сечение 377 x 10), т. е. двухшарнирные арки выполнять более выгодно, в данном случае на 27 %, чем трехшарнирные.

9 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

Прочностной анализ и потеря устойчивости пространственного каркаса в программных комплексах *Lira*, *Scad*, *SolidWorks*

Цель работы: изучить возможности ПК *Scad*, *Lira*, *SolidWorks*, *ANSYS* исследования пространственного каркаса, получить напряженно-деформированное состояние, коэффициент запаса прочности FOS, коэффициент нагрузки при потере устойчивости и выполнить сравнение результатов расчета в программных комплексах.

Исходные данные: см.: лабораторную работу № 7 – значение нагрузок P_i – порядковый номер буквы фамилии по алфавиту.

Порядок выполнения работы:

1) создать 3D-модель пространственного каркаса по заданным размерам (рисунок 9.1), арка принимается из задания 7.1, сечение элементов трубы принимаем по л. р. 7.2;

2) внешнюю нагрузку задать в узлы по фамилии, в дополнительные узлы – наполовину меньше, добавим в расчет нагрузку от собственного веса конструкции;

3) построить для рассматриваемого пространственного каркаса эпюры усилий M , Q , N и перемещений узлов;

4) дополнительно в ПК *Scad*, *Lira*, *SolidWorks*, *ANSYS* вывести эпюру «Запас прочности» для статического расчета, выполнить новое исследование «Потеря устойчивости» и вывести коэффициент нагрузки;

5) сравнить полученные результаты расчета;

6) сделать вывод о несущей способности пространственного каркаса.

Пример расчета. Рассмотрим моделирование пространственного каркаса, представленного на рисунках 9.1–9.2.

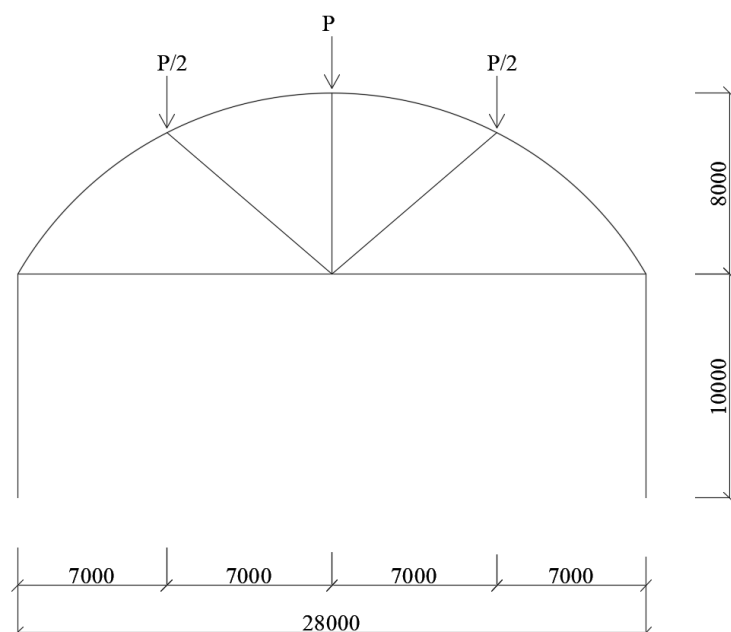


Рисунок 9.1 – Общая расчетная схема пространственного каркаса

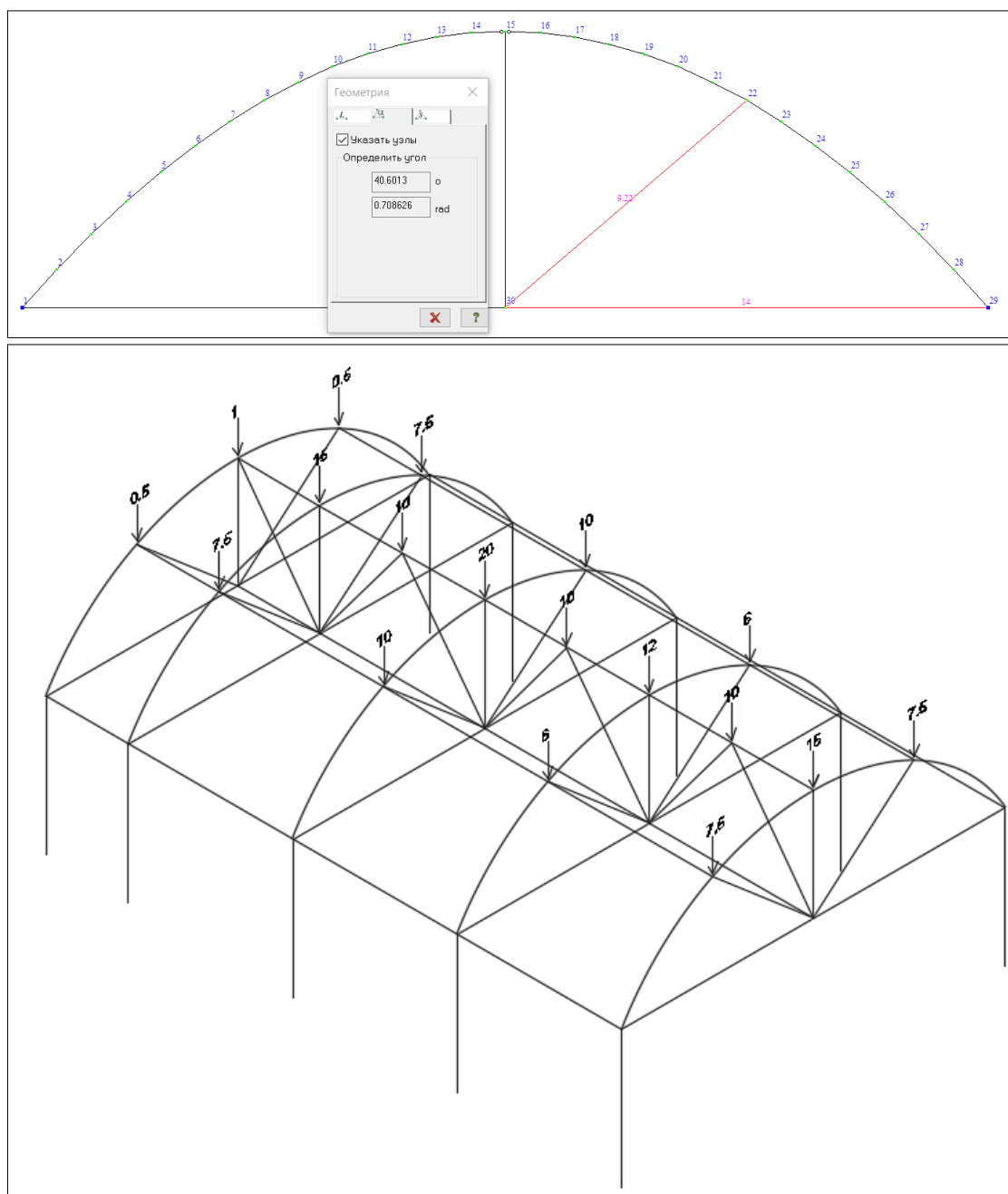


Рисунок 9.2 – Заданная расчетная схема пространственного каркаса

Нагрузка на узлы пространственного каркаса (внешняя нагрузка задается в узлы по фамилии, в дополнительные узлы P/2).

Произведем расчет в программе *SolidWorks* (рисунки 9.3–9.8).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/cfAmfUwnbPc?si=BDyrUE0R-Dc96sJY>.

В программе *SolidWorks* по заданным размерам создали трехмерный эскиз.

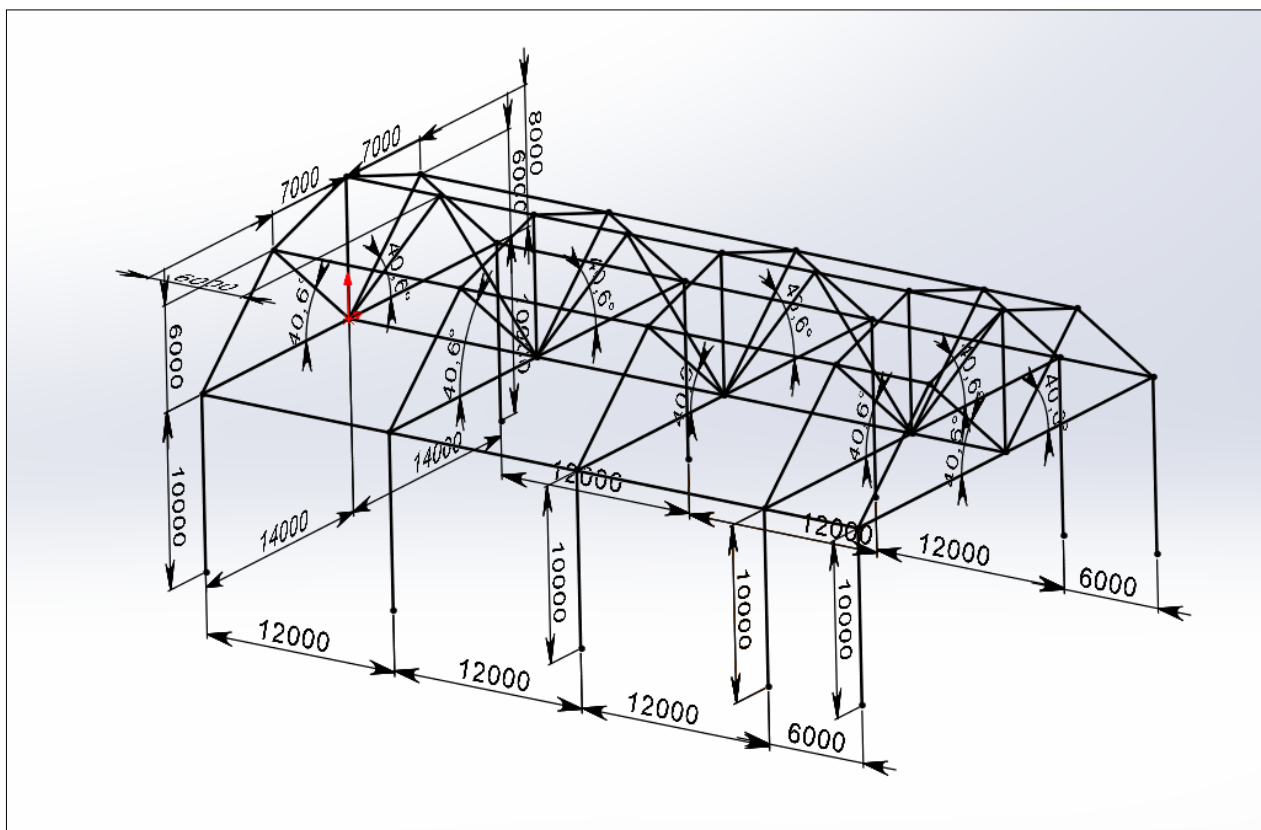


Рисунок 9.3 – Трехмерный эскиз в ПК SolidWorks

Обшили профилями «круглая труба 377 x 10», принятая в лабораторной работе 7.2, задали нагрузки, крепления, материал и выполнили расчет.

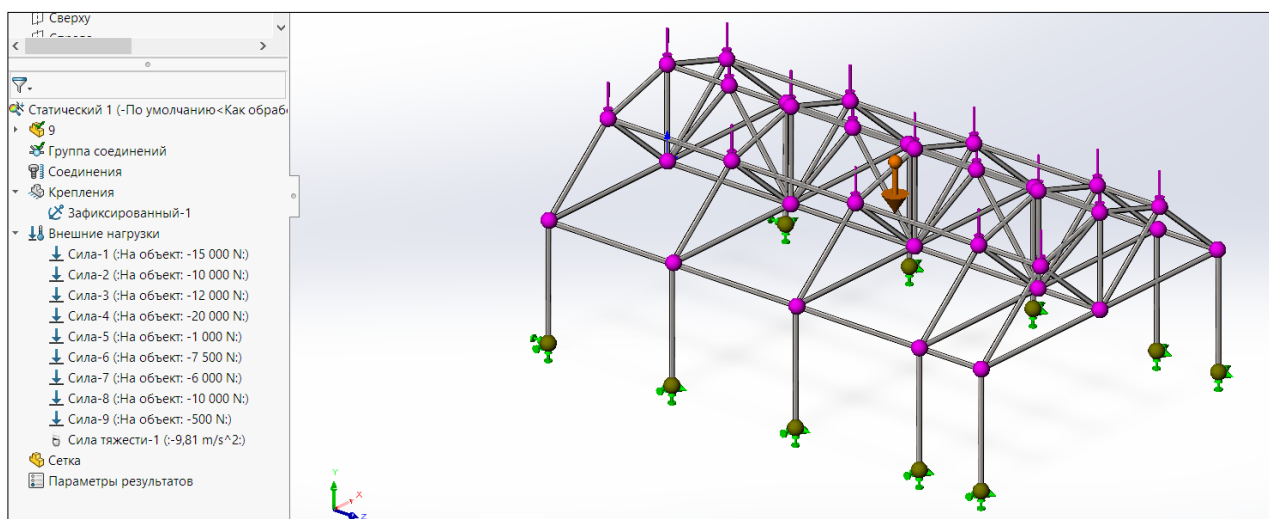


Рисунок 9.4 – Подготовка к расчету в ПК SolidWorks

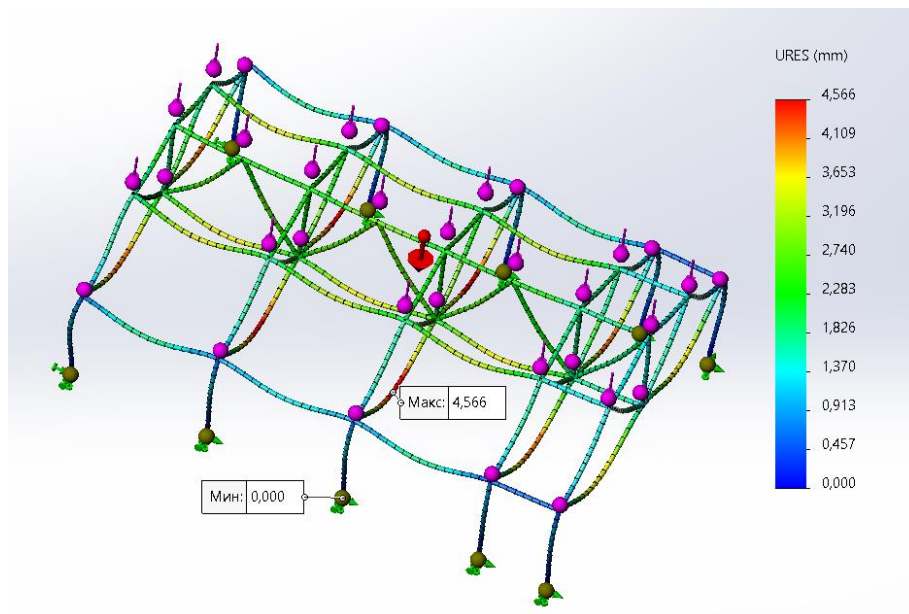


Рисунок 9.5 – Эпюра перемещений в ПК SolidWorks

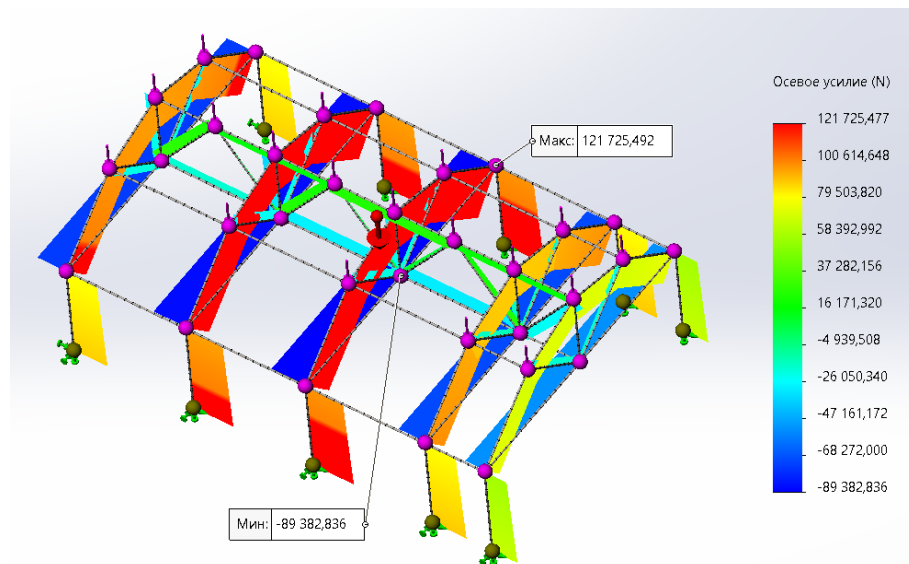


Рисунок 9.6 – Осевое усилие «N» ПК SolidWorks (max, min)

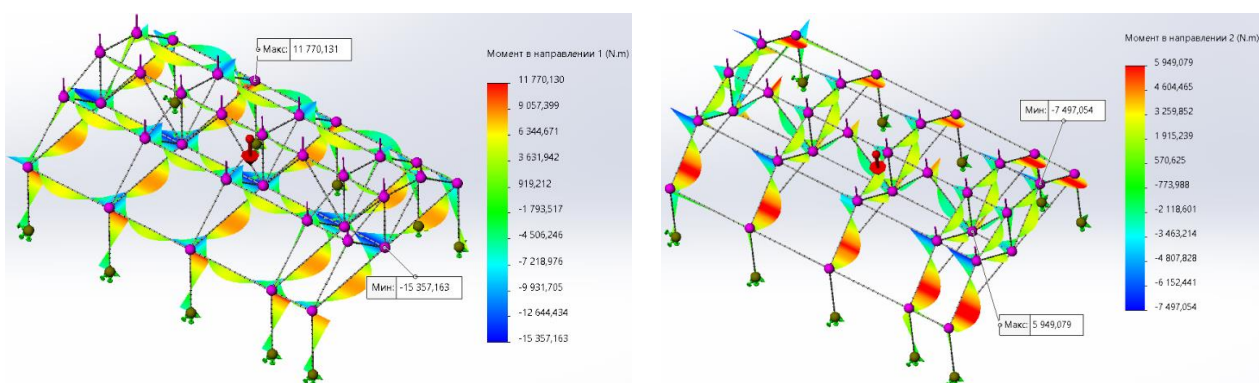


Рисунок 9.7 – Эпюры изгибающих моментов «M1, M2» ПК SolidWorks (max, min)

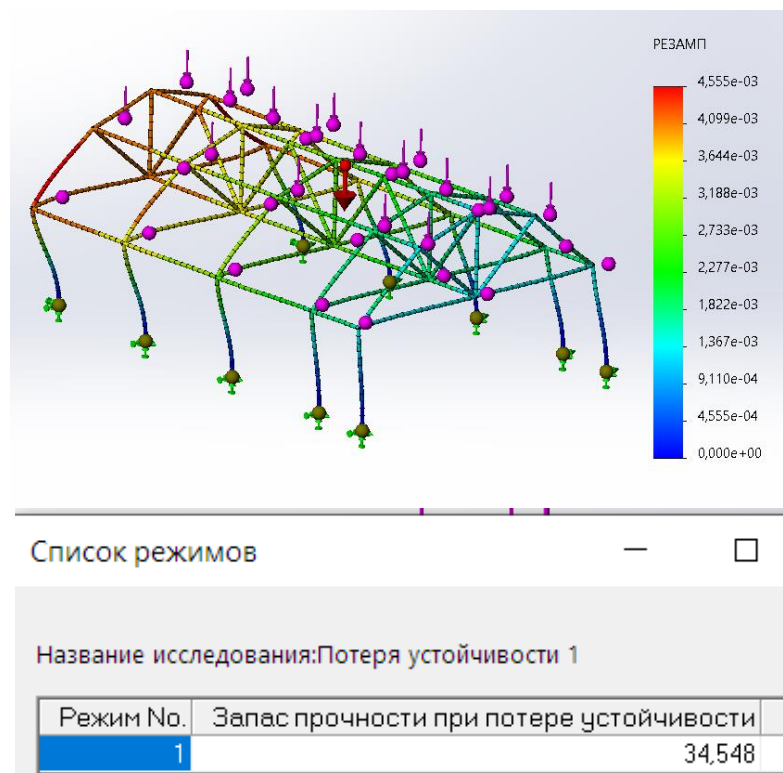


Рисунок 9.8 – Результаты расчета «Потеря устойчивости» в ПК SolidWorks

Произведем расчет в программе *Lira* (рисунки 9.9–9.11).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/cfAmfUwnbPc?si=BDyrUE0R-Dc96sJY>.

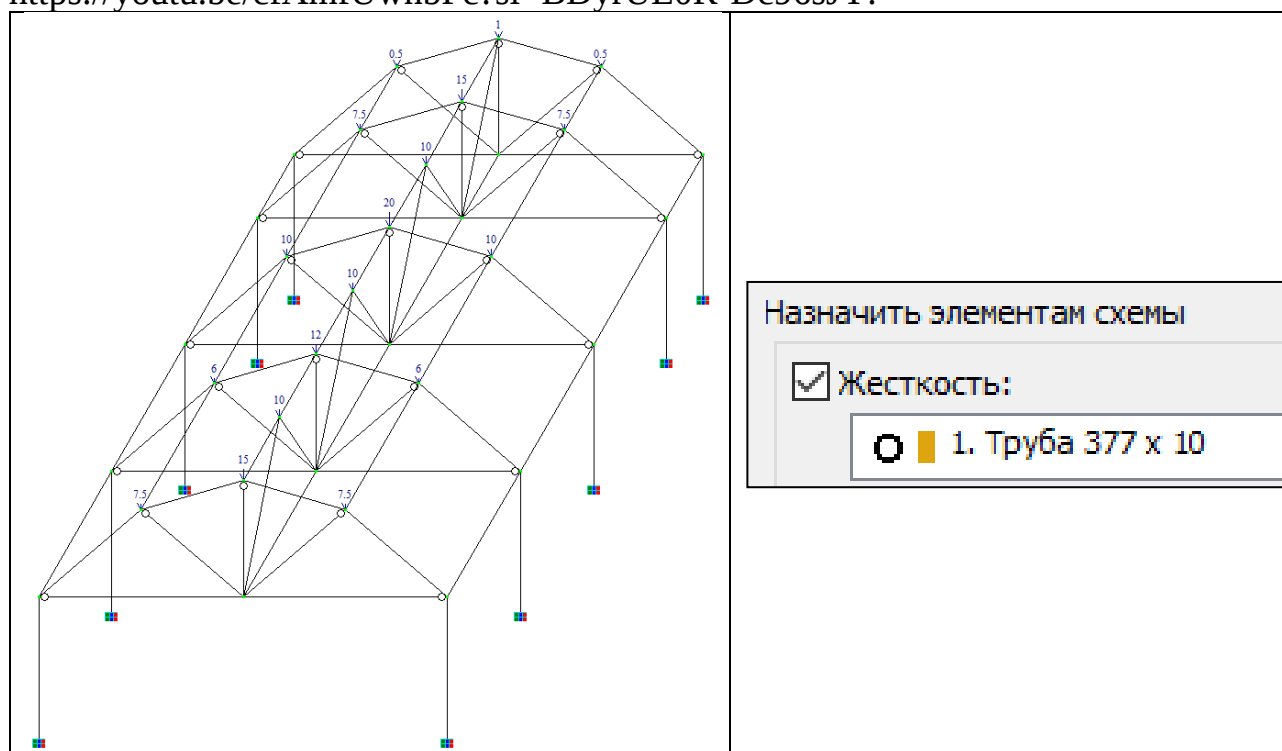
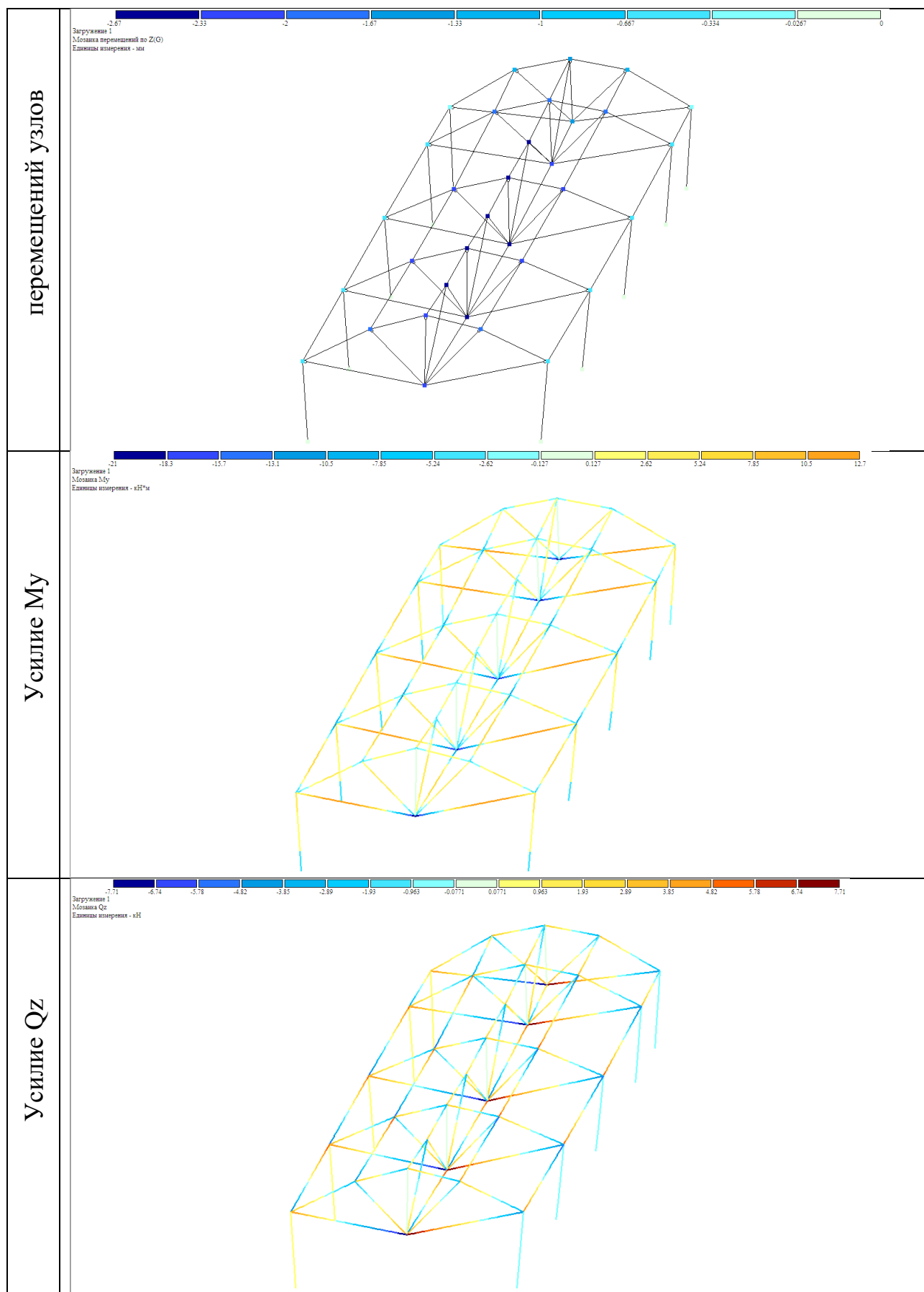


Рисунок 9.9 – Расчетная модель в ПК Lira

Результаты статического расчета в ПК *Lira*.



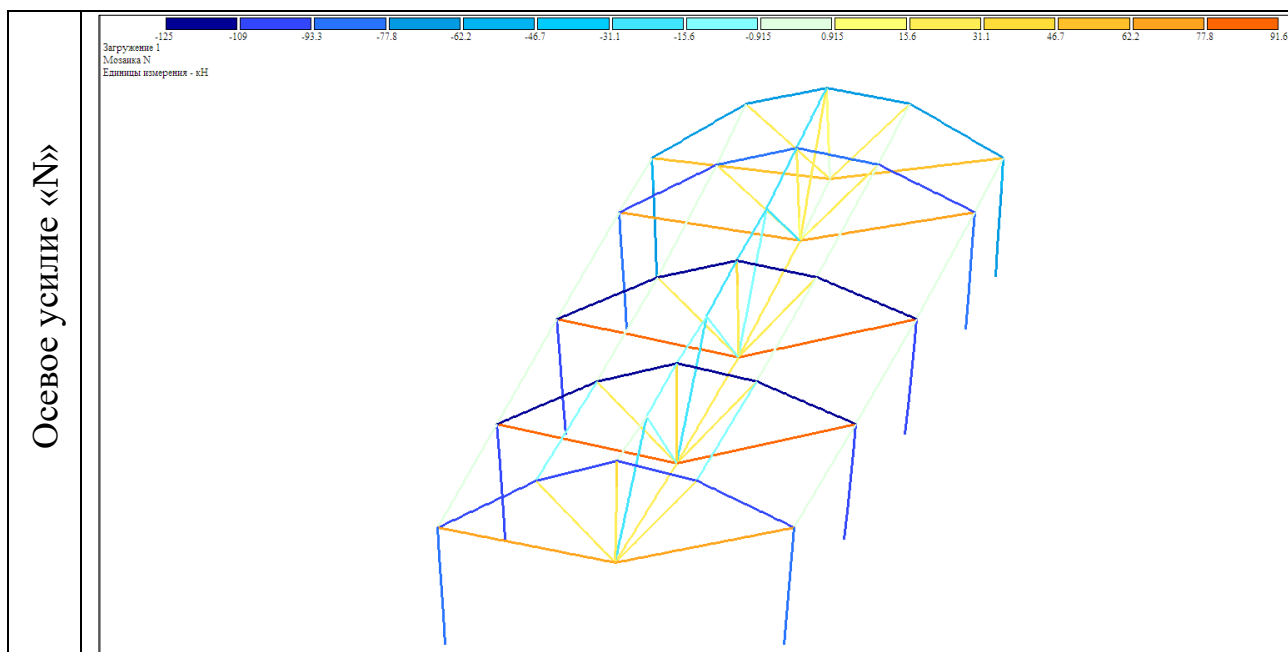


Рисунок 9.10 – Результаты расчета ПК Lira

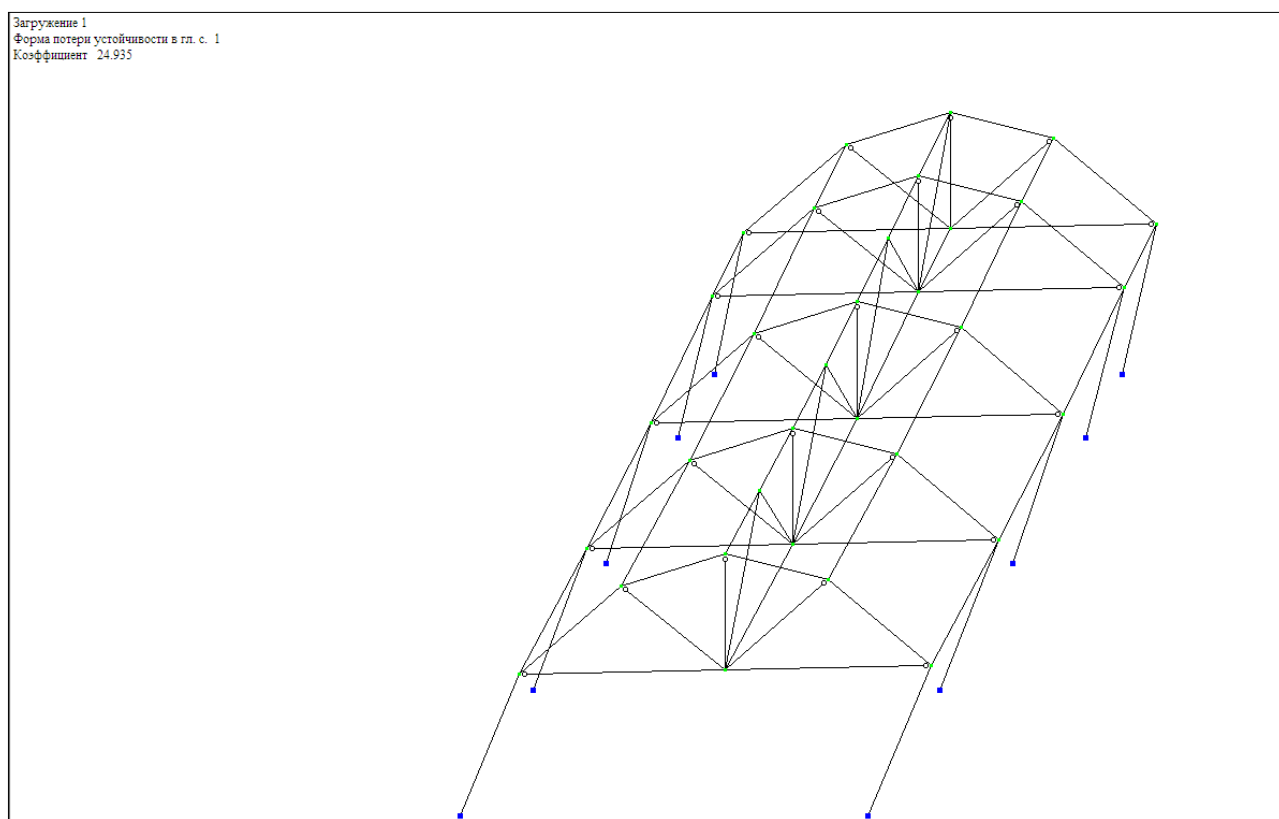


Рисунок 9.11 – Результаты расчета на «Устойчивость» в ПК Lira

Произведем расчет в программе Scad (рисунки 9.12–9.14).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/cfAmfUwnbPc?si=BDyrUE0R-Dc96sJY>.

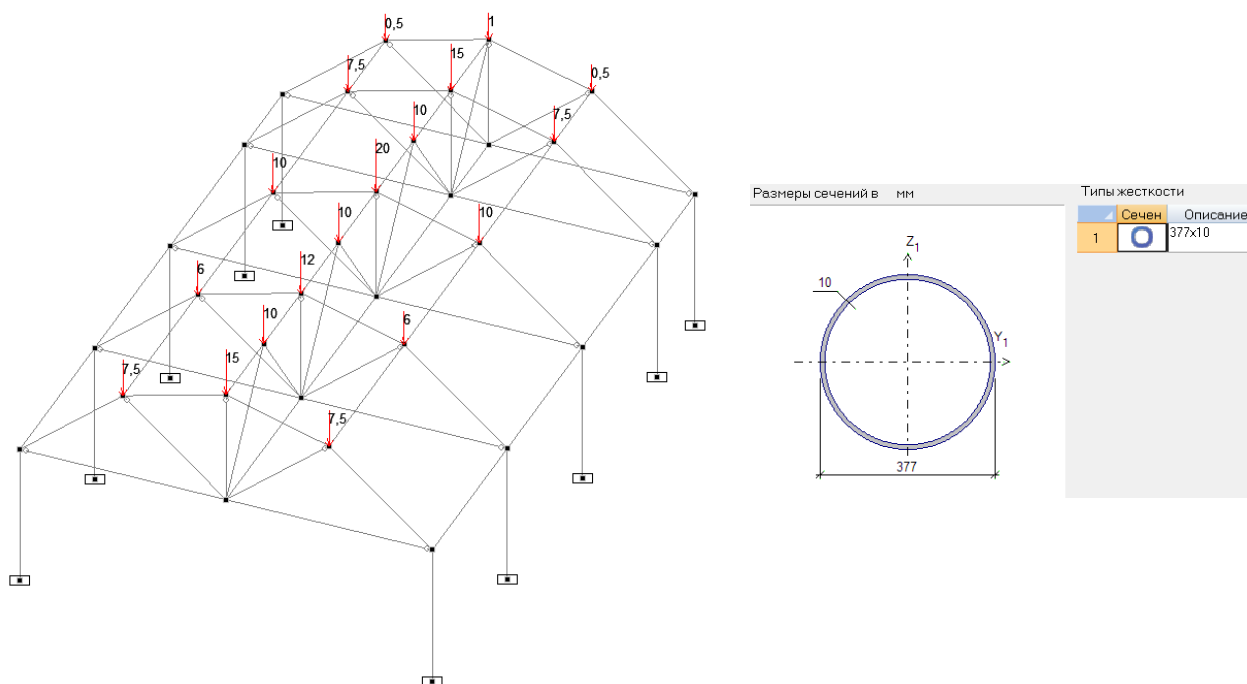


Рисунок 9.12 – Расчетная модель в ПК Scad

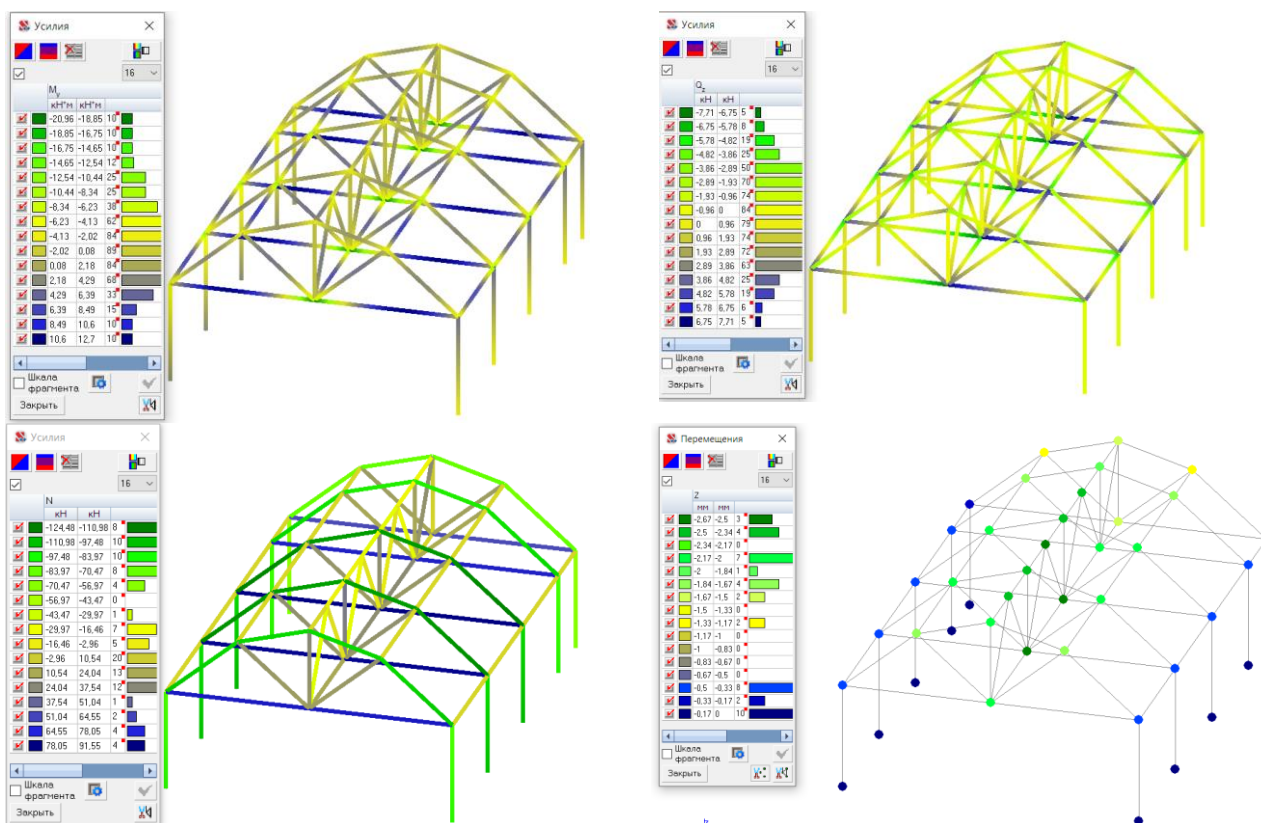


Рисунок 9.13 – Внутренние усилия M, Q, N и перемещения узлов по z ПК Scad

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УЗЛОВ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ						
Имя	max +			max -		
	Величина	Узел	Нагр.	Величина	Узел	Нагр.
X	999.99993	2	1			
Y	98.307391	29	1	-98.30739	25	1
Z	1.2523304	4	1	-1.25233	2	1
UX	0.3537252	1	1	-0.353725	5	1
UY	5.29049	1	1	-1.871546	4	1
UZ	1.0705138	43	1			

Номер загру- жения	Фор- ма	Коэффициент запаса устойчивости системы	
1	1	24.3804	имя: 9

Рисунок 9.14 – Максимальные перемещения узлов и коэффициент потери устойчивости ПК Scad

Произведем расчет в программе ANSYS (рисунки 9.15–9.18).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике <https://youtu.be/bY4bhnYg5M0?si=2KA3SGjisIPF7bZp>.

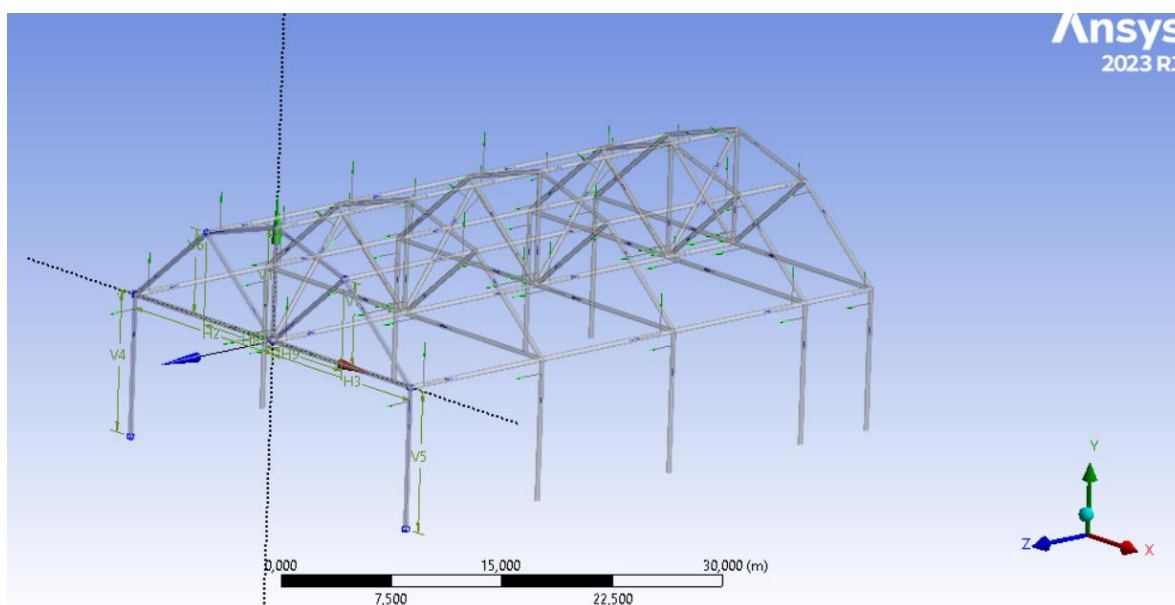


Рисунок 9.15 – Модель в ПК ANSYS

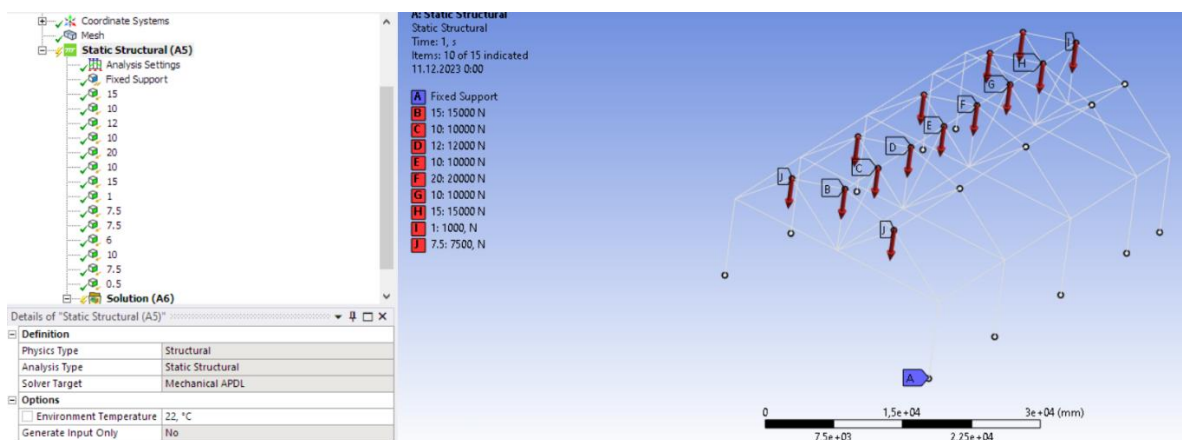


Рисунок 9.16 – Задание креплений и внешней нагрузки

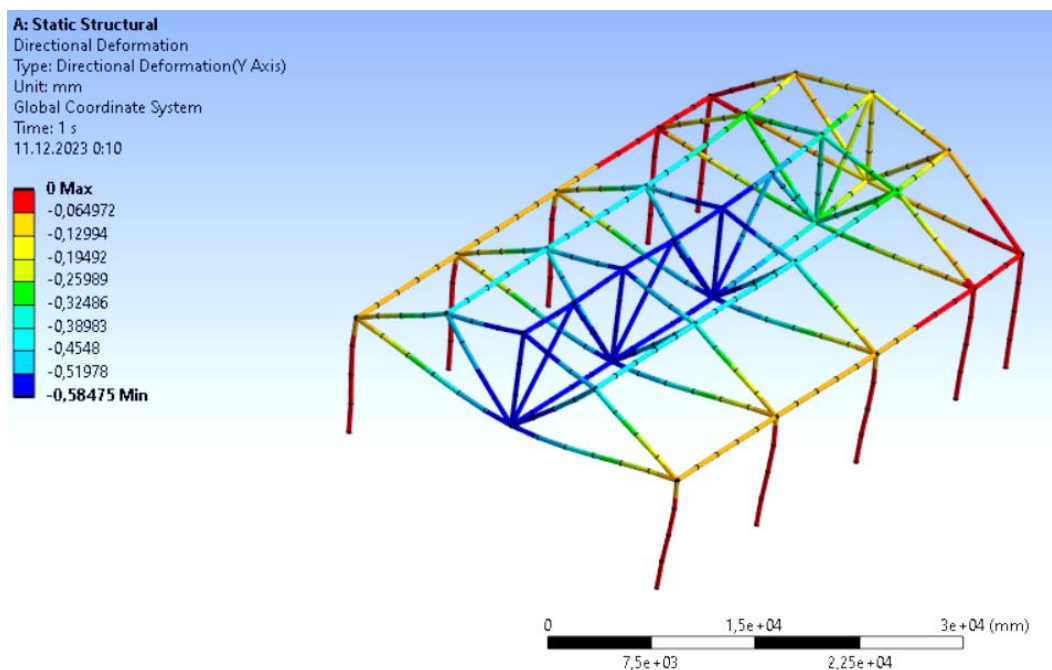


Рисунок 9.17 – Перемещения узлов по z ПК ANSYS

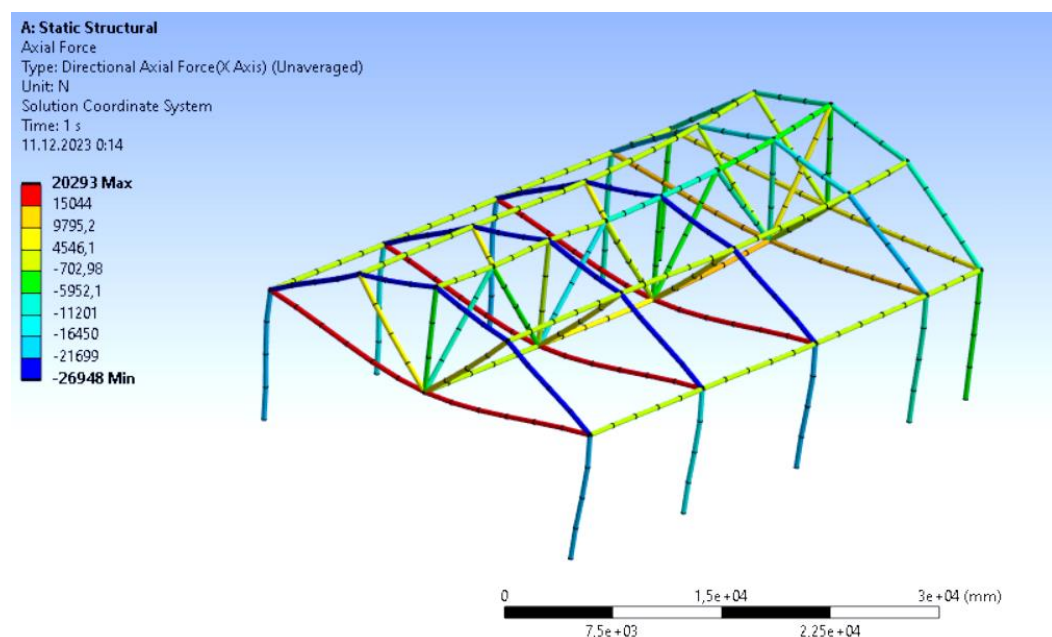


Рисунок 9.18 – Осевое усилие «N» ПК ANSYS

Вывод

Программы *Lira* и *Scad* сошлись в значениях моментов M , поперечных сил Q и осевых усилий N по осям на 99 %. В этих же программах вычислили коэффициент нагрузки при потере устойчивости: *Scad* – 24,38, *Lira* – 24,94. В *SolidWorks* коэффициент получился 34,55. Таким образом, в данной работе мы смогли построить пространственные каркасы на основе двухшарнирной арки из лабораторной работы № 8, рассчитать усилия в узлах каркаса во всех программах (включая *ANSYS*), а также ознакомились с принципом расчета коэффициента нагрузки при потере устойчивости в *Scad*, *Lira*, *SolidWorks*.

10 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

Проектирование опорного узла с болтовыми соединениями в ПК *SolidWorks Simulation и ANSYS*

Цель работы: изучить инструменты *SolidWorks Simulation* «Статический расчет», «Частотный анализ» на примере сборки «Опорный узел» с болтовыми соединениями, оптимизировать данные модели по двум критериям: максимизация коэффициента запаса прочности и минимизация массы металла оценить полученные результаты, произвести расчет опорного узла в ПК ANSYS.

Исходные данные: см. приложение 4.

№	A, мм	B, мм	C, мм	R, мм	d, мм	Стойка
19	360	350	380	40	20	двутавр (40К5)

Выполнение работы:

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/PRWs_U-j1n8?si=H3YuoJduzpCuC7ZO.

1. В соответствии с ГОСТ/СТО согласно сортаменту металлических изделий вычерчиваем по размерам эскиз сечения (двутавр) стойки (рисунок 10.1) (для размеров эскиза при этом необходимо использовать глобальные переменные) и создаем параметрическую 3D-модель детали «Стойка» (рисунок 10.2).

При этом высота стойки принимается равной $3 \cdot \langle A \rangle$, опорная часть проектируется произвольно, например, толщиной 100 мм, на одной из граней детали выполняются четыре отверстия под крепежные элементы детали «Полка».

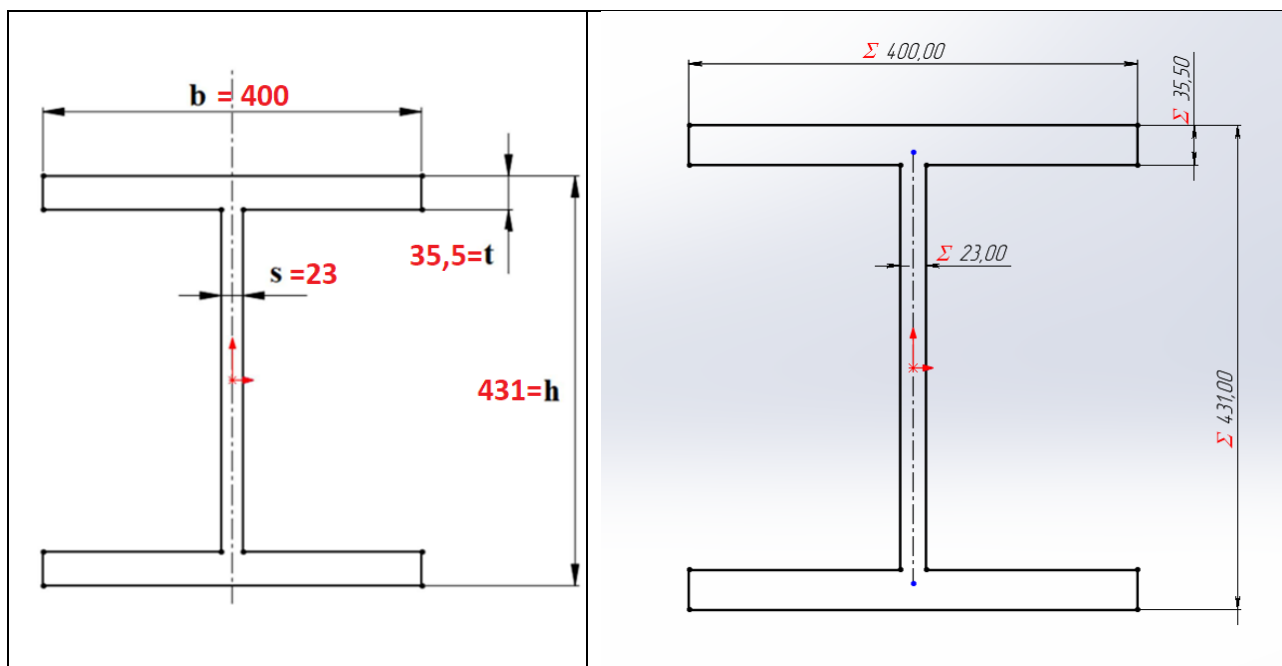


Рисунок 10.1 – Эскиз двутавра для детали «Стойка»

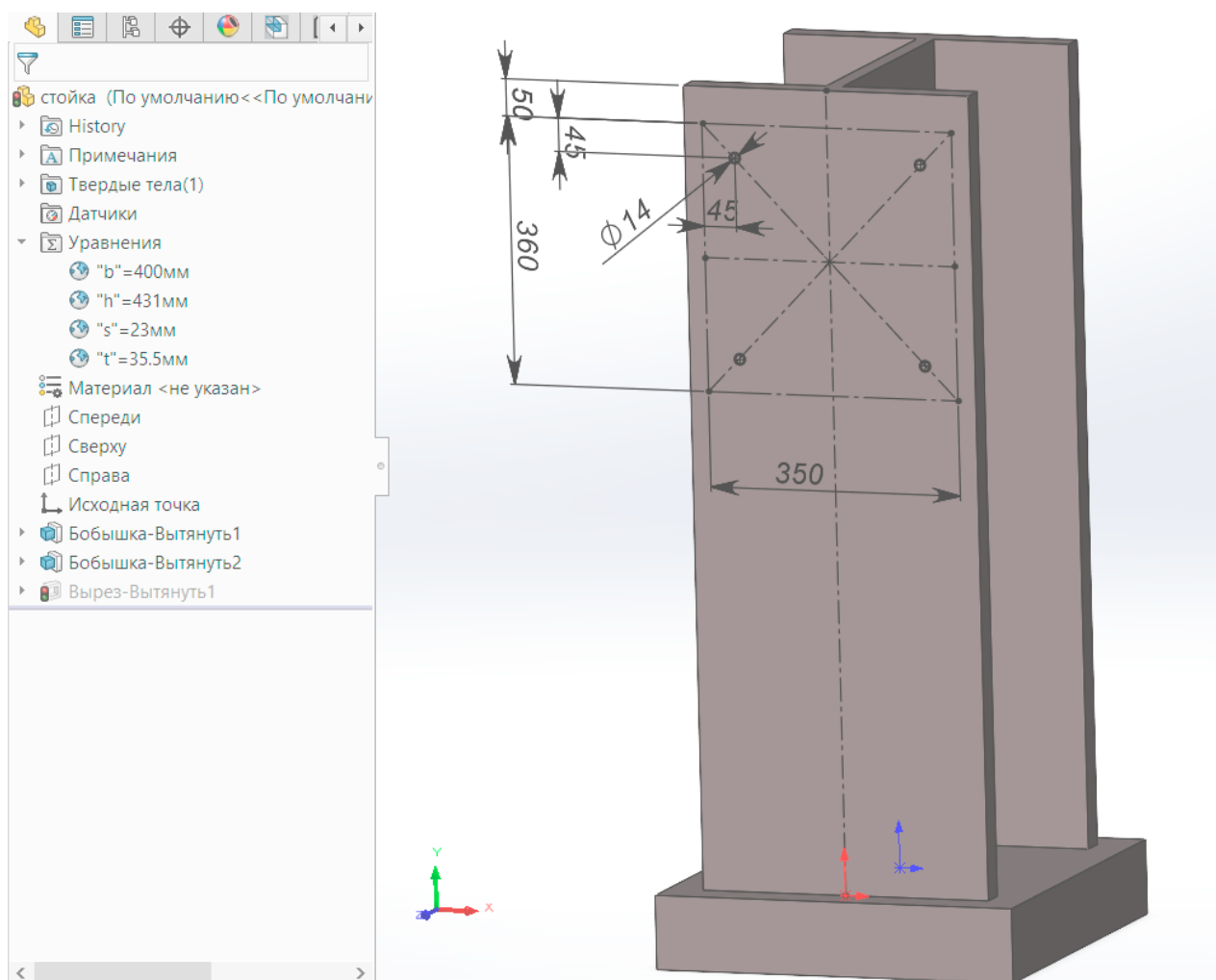


Рисунок 10.2 – Твёрдотельная параметрическая модель детали «Стойка»

2. Вычерчиваем плоский эскиз и создаем параметрическую 3D-модель детали «Шаровой палец» (рисунок 10.3) по параметрам **A**, **B**, **C**, **R**, **d** (см. таблицу-задание). Деталь «Шаровой палец», состоящий из шара (радиусом **R**) и стержня (радиусом **d**) с двумя кольцами (радиусом **2d**), получаем путем вращения эскиза вокруг центральной оси (рисунок 10.3). Для крепления детали к полке предусматриваем паз (рисунок 2.4): эскиз паза выполняем в виде трапеции высотой 10 мм, скошенной под углом 60° , с основаниями, представляющими собой дуги; после этого, используя команду «Вытянутый вырез», получаем паз. По центру шара проводим «Линию разъема», которая применяется в дальнейшем для задания нагрузки только на часть тела (на верхнюю полусферу).

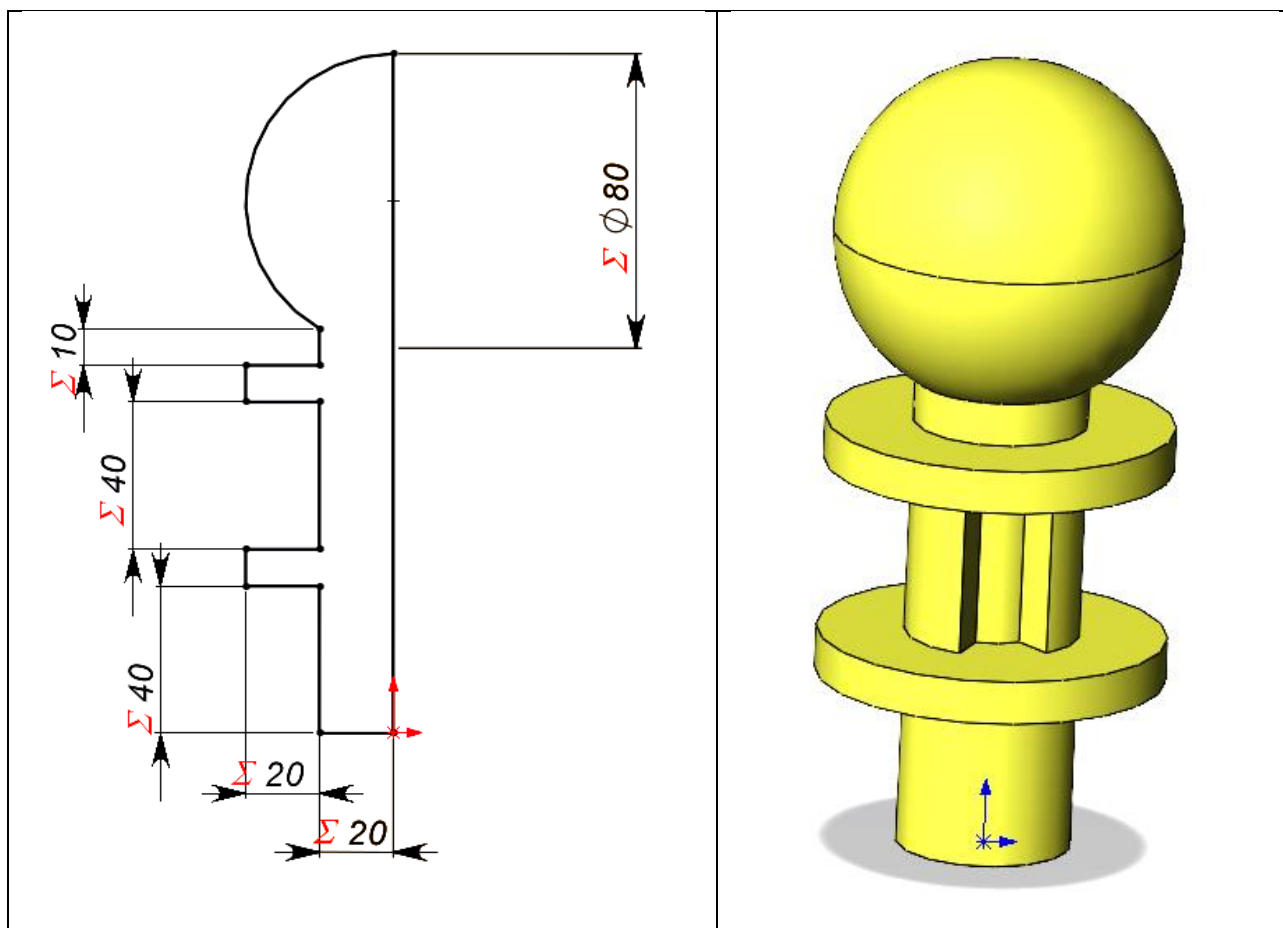


Рисунок 10.3 – Создание детали «Шаровой палец»

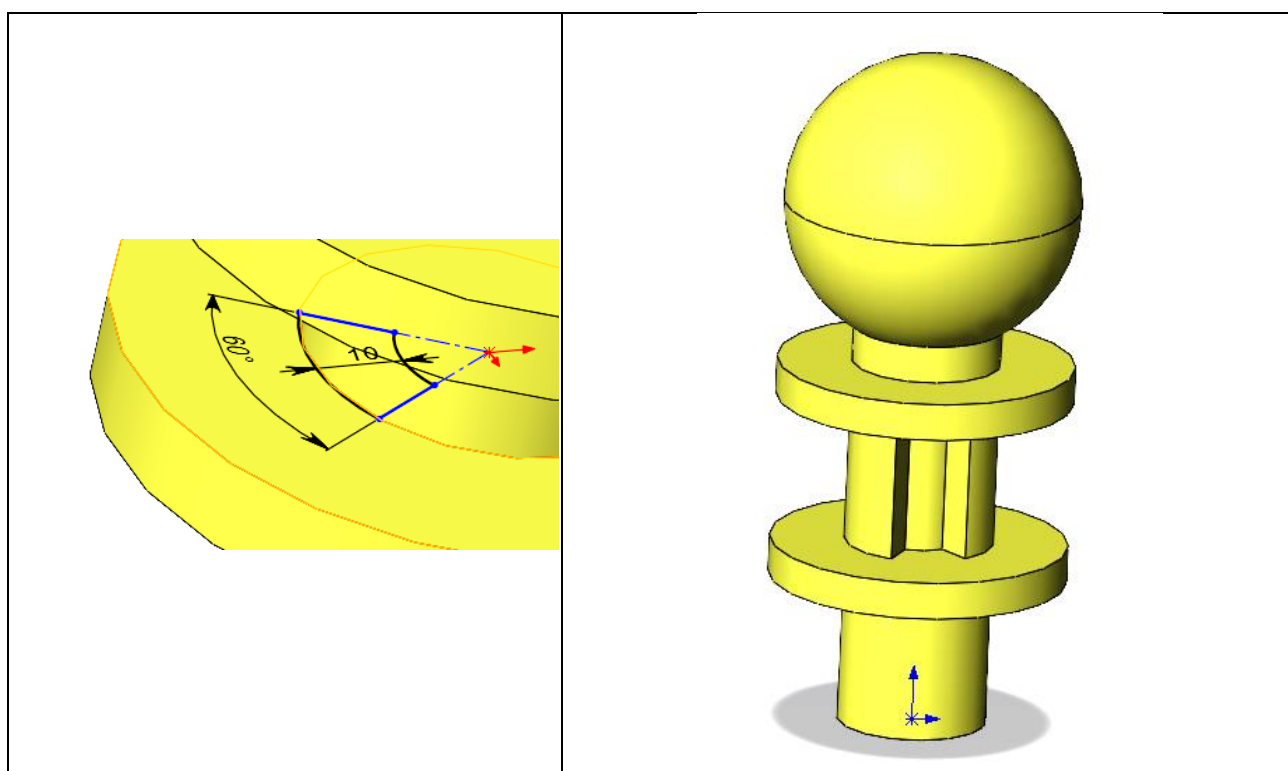


Рисунок 10.4 – Создание паза в детали «Шаровой палец»

3. Создаем деталь «Полка» (рисунок 10.5). Этапы создания детали показаны на рисунках 10.5–10.6. Параметры полки принимаем по данным из таблицы-задания. Принимается: высота опорной пластины – **A**, ширина опорной пластины – **B**, вылет – **C**, толщина – **d**, диаметр отверстий – **2d**. Позиционирование отверстий показано на рисунке, диаметры отверстий должны быть на 2 мм больше диаметров болтов. В нижней части полки нужно предусмотреть ребро жесткости, размеры которого принимаем произвольно (рисунок 10.6).

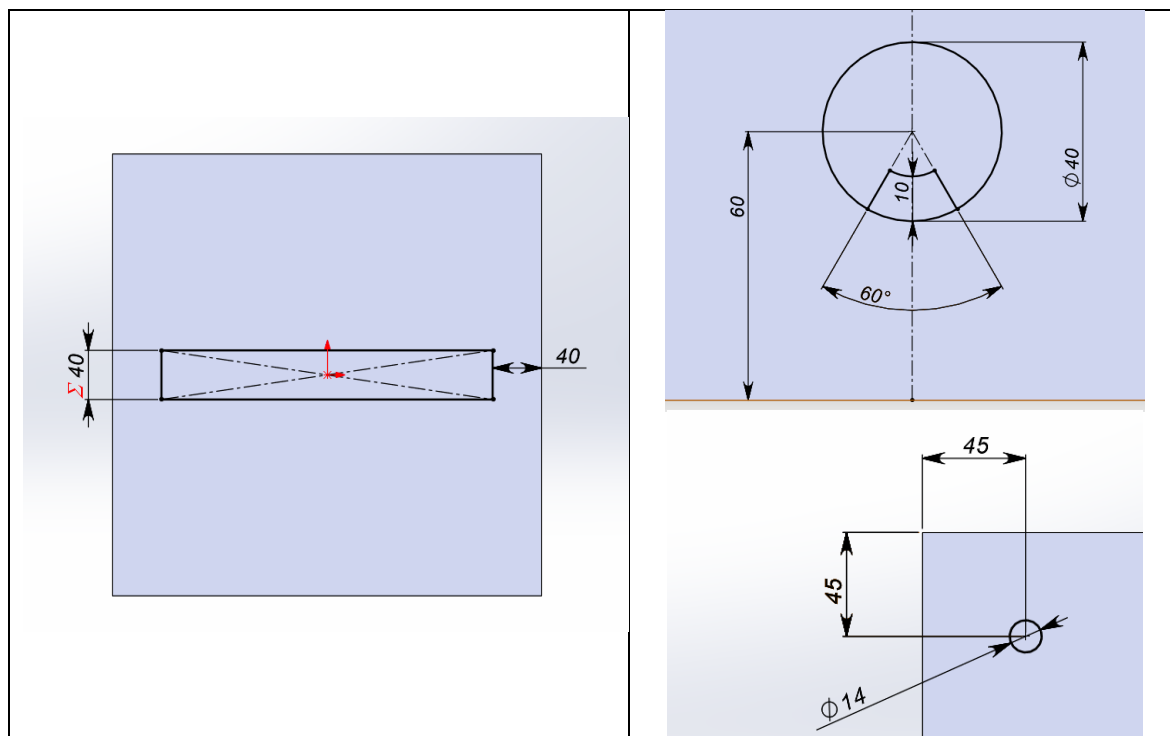


Рисунок 10.5 – Этапы создания детали «Полка»

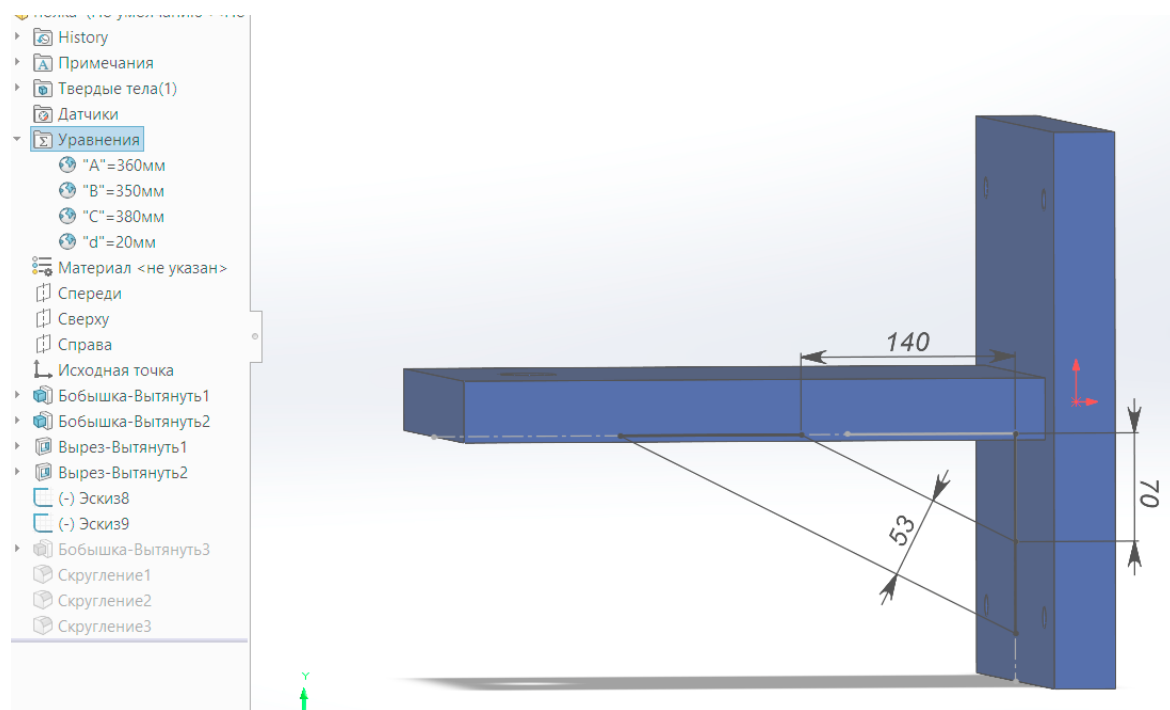


Рисунок 10.6 – Деталь «Полка»

Сборка «Опорный узел» (рисунок 10.7) состоит из компонентов: стойка, полка и шаровой палец, которые объединяем, используя условия сопряжения *SolidWorks* – «Совпадение», «Концентричность», «Параллельность», а затем, используя Библиотеку проектирования *SolidWorks*, раздел *ToolBox*, выполняем крепление полки к стойке, устанавливая болты, шайбы и гайки в соответствующее положение (рисунок 10.8). Эти компоненты *SolidWorks* при расчете распознает и преобразует к болтам.

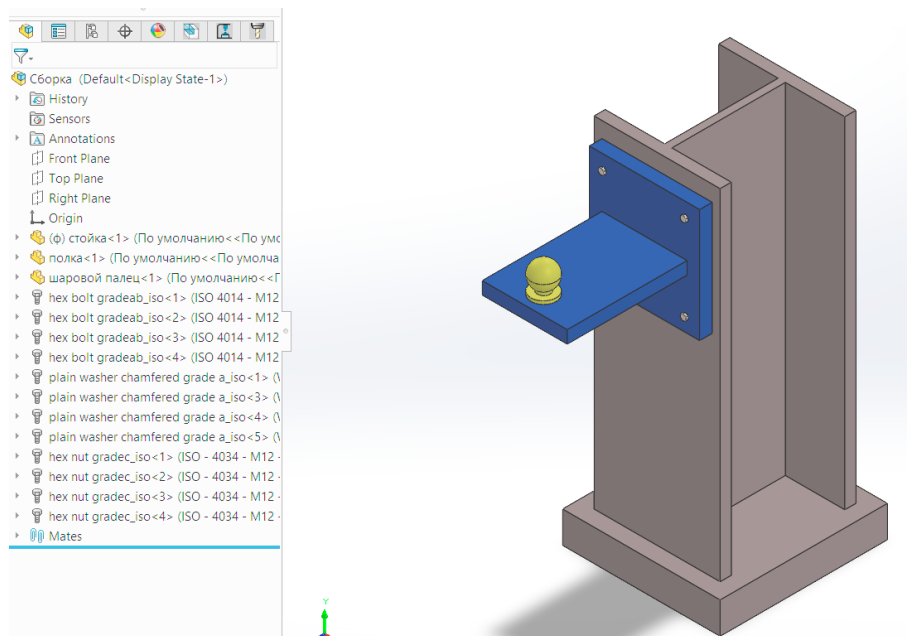


Рисунок 10.7 – Сборка «Опорный узел»

4. Выполняем статический расчет сборки «Опорный узел»:

4.1. Активируем вкладку «Simulation» на закладке «Добавления *SolidWorks*».

4.2. Выбираем «Новое исследование» ► «Статический».

При этом крепления необходимо преобразовать к болтам: «Соединения» → «Крепежи *ToolBox* к болтам» и автоматически из базы *SolidWorks* задается параметр «Осевая нагрузка» (рисунок 10.8).

При выполнении статического расчета ставим галочку «крепежи *ToolBox*» преобразовать к болтам, и после выдается сообщение:

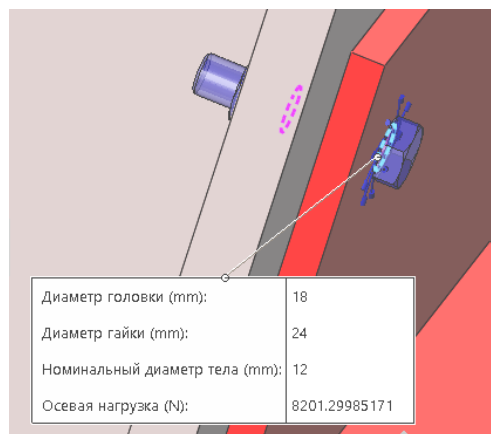
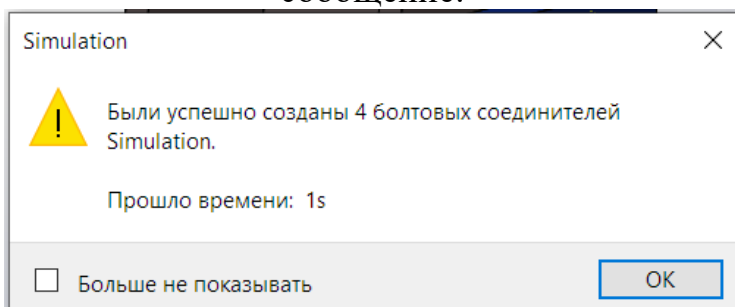


Рисунок 10.8 – Преобразование крепежей к болтам

Для деталей «Стойка» и «Полка» устанавливаем контакт двух граней → «Нет проникновения» (рисунок 10.9).

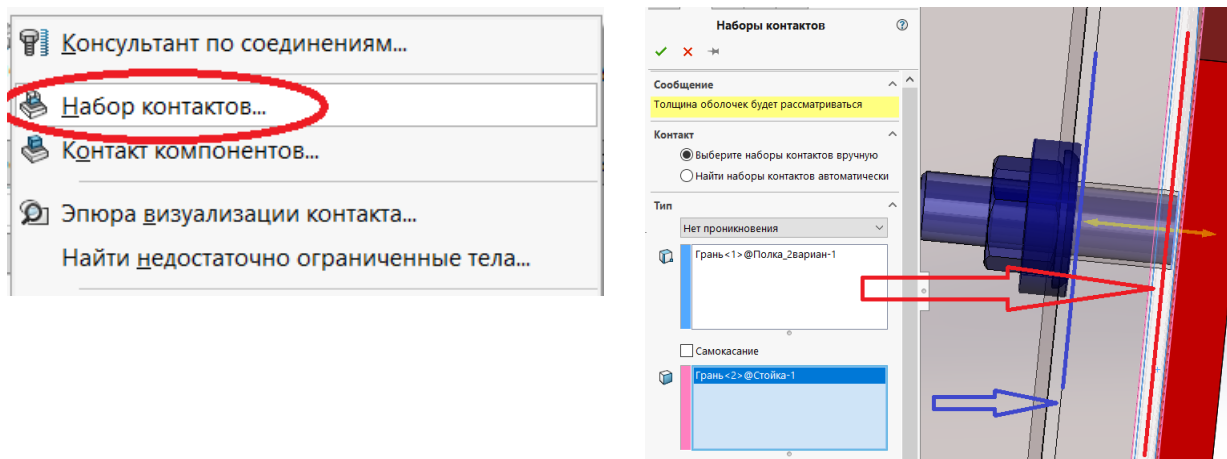


Рисунок 10.9 – Устанавливаем «Набор контактов»

Для компонентов сборки «Полка» и «Шаровой палец» также устанавливаем контакт «Нет проникновения», чтобы детали при расчете перемещались отдельно (рисунок 10.10).

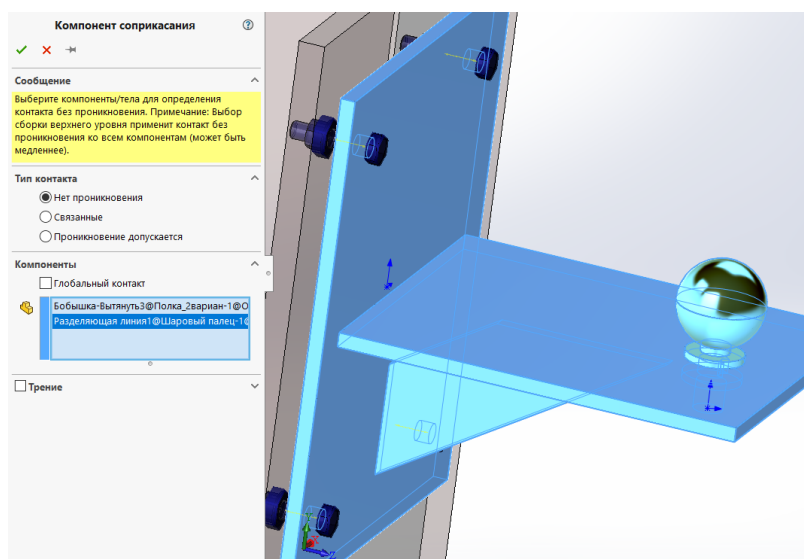


Рисунок 10.10 – Контакты компонентов «Полка» и «Шаровый палец»

4.3. Выбираем «**Крепление**» ► Задаем для детали «Стойка» жесткое крепление нижней грани – «Зафиксированная геометрия» (рисунок 10.11).

4.4. Выбираем «**Внешние нагрузки**» ► «**Сила**» ► внешняя нагрузка устанавливается на верхнюю часть полусферы шара детали «Шаровый палец».

4.5. Выбираем «**Материал**» ► «**Легированная сталь**».

4.6. Активируем «**Запустить исследование**» ► и выводим дополнительно эпюру коэффициента запаса прочности и эпюру проверки штырьков/болтов; при

Этом должны выполняться одновременно два условия: $2 \leq FOS \leq 3$ для сборки и $FOS \geq 2$ для болтов.

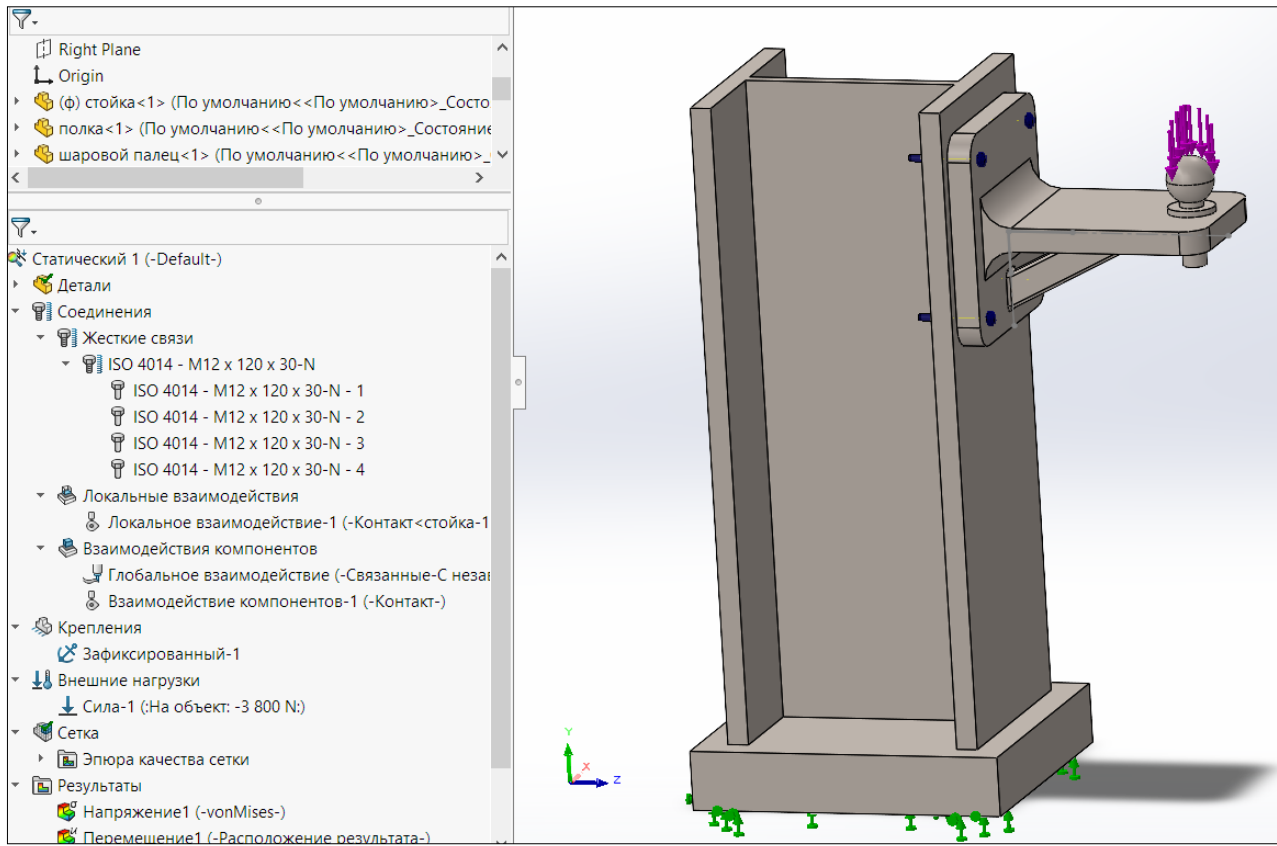


Рисунок 10.11 – Сборка «Опорный узел»

Выполняем оптимизацию по массе, т. е. убираем лишний материал и в местах соединения выполняем скругления кромок.

До оптимизации:

После оптимизации:

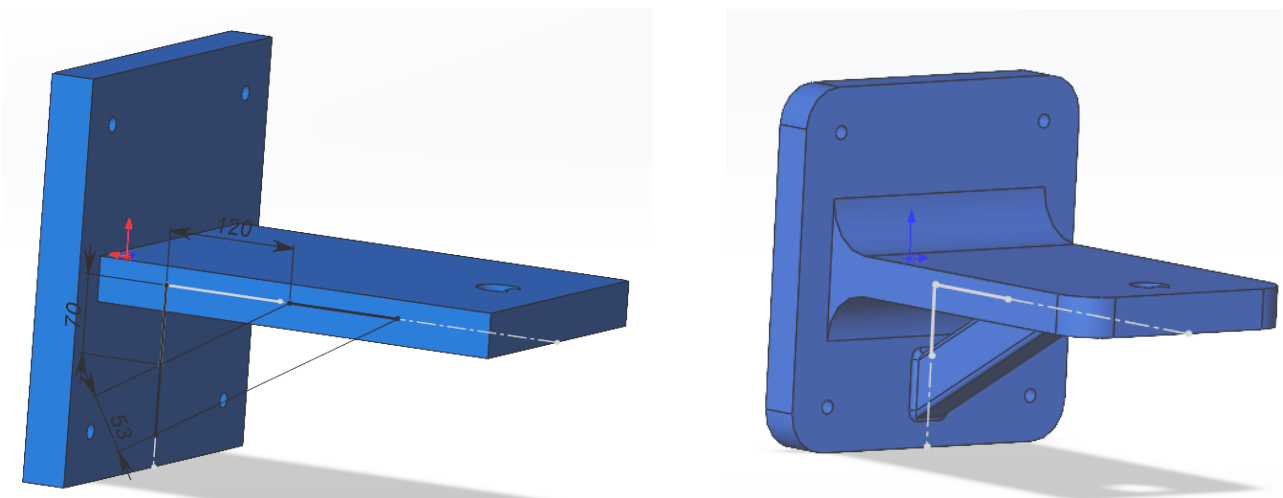


Рисунок 10.12 – Деталь «Полка» – сравнение «До» и «После»

Если условия не выполняются, необходимо изменить внешнюю нагрузку и геометрические параметры полки и заново провести расчет, чтобы определить несущую способность опорного узла. В процессе расчета находим оптимальные размеры полки.

Результаты расчета представлены на рисунке 10.13, оптимальная нагрузка $F = 3800$ Н.

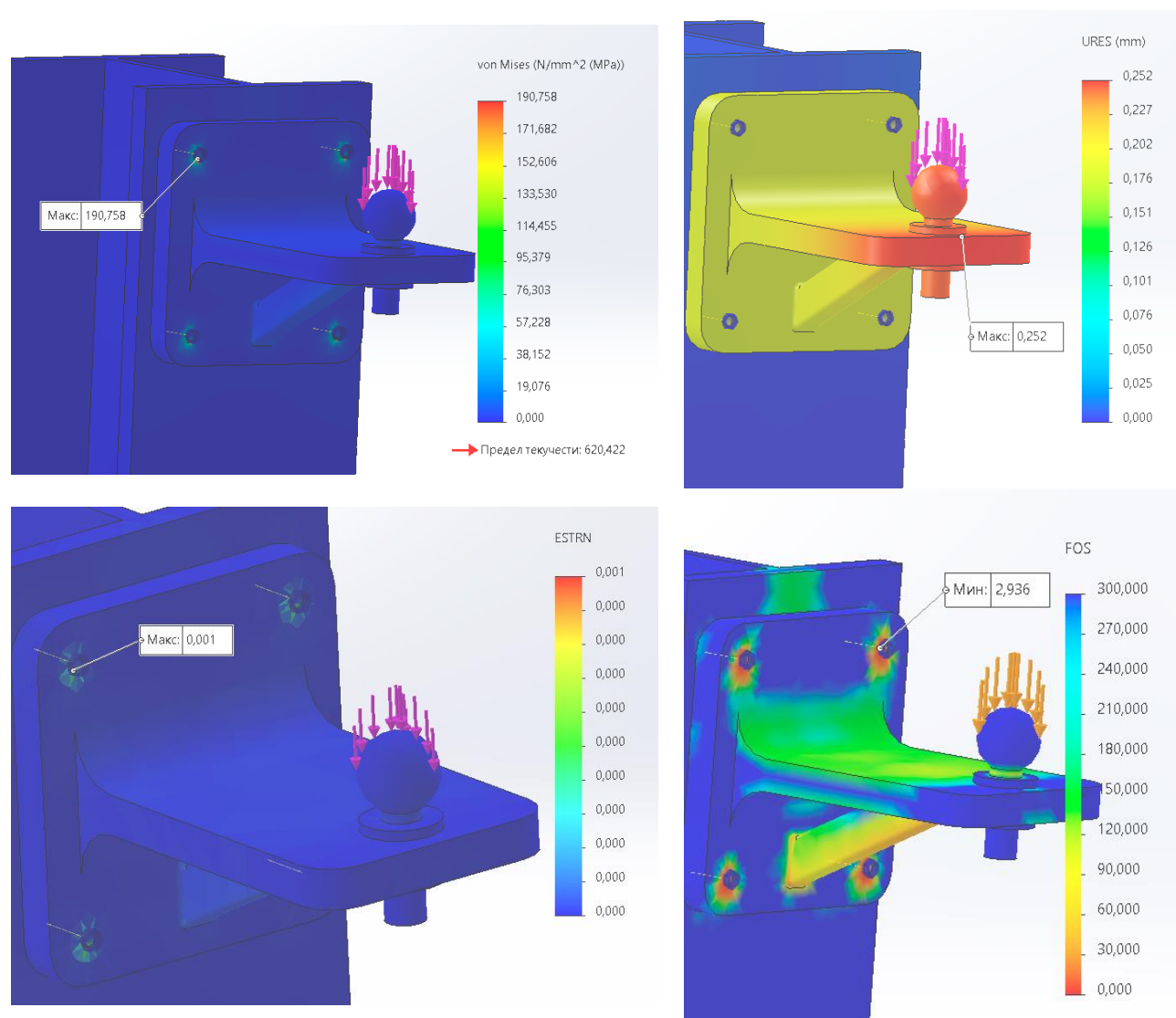


Рисунок 10.13 – Эпюры напряжений, перемещений, деформаций и запаса прочности

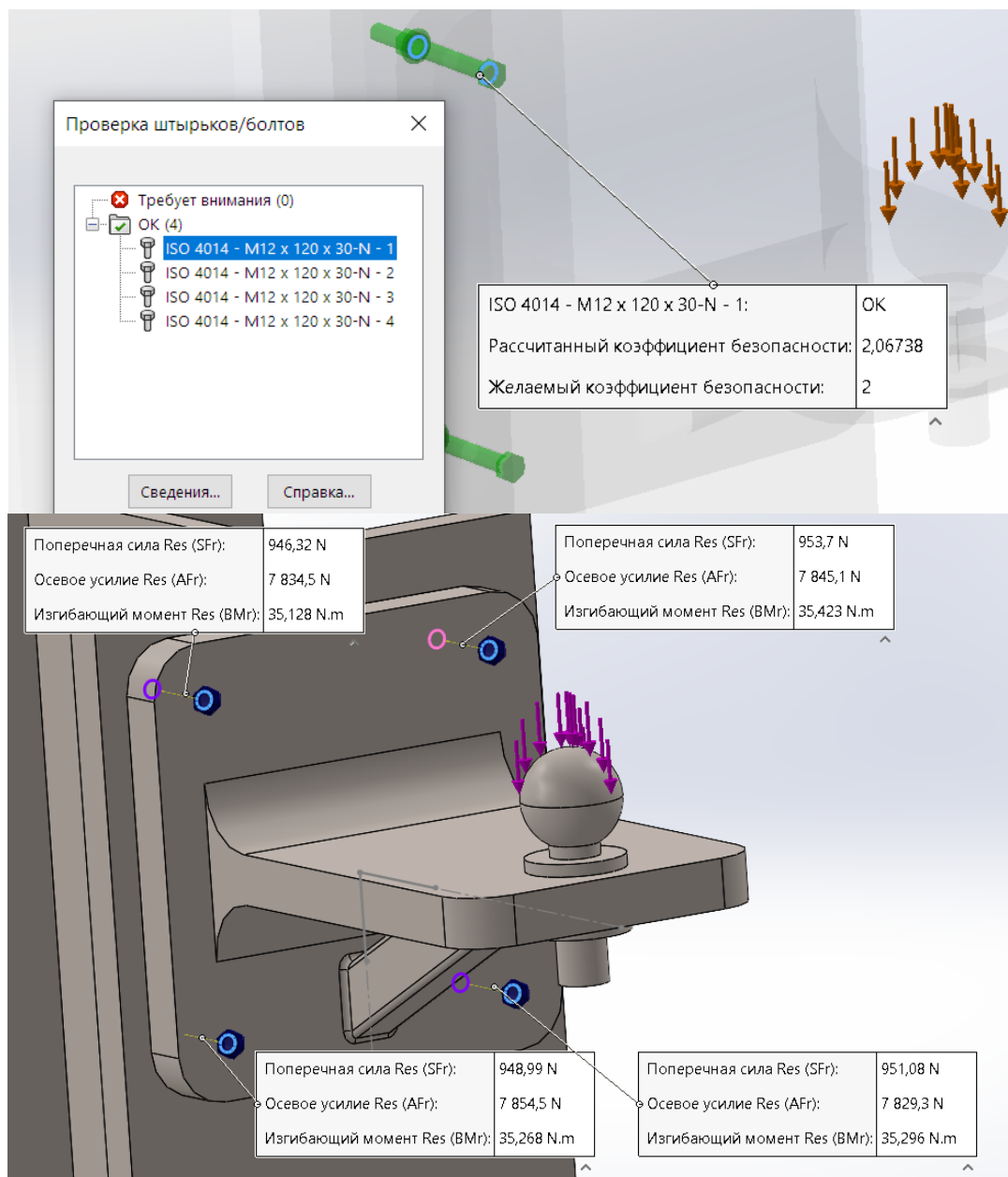


Рисунок 10.14 – Проверка штырьков/болтов и усилия в болтах

5. Выполняем частотный анализ сборки (определение собственных частот колебаний):

5.1. Выбираем «Новое исследование» ► «Частота».

5.2. Выбираем «Крепление» и задаем для «Стойки» жесткое крепление нижней грани – «Зафиксированная геометрия».

5.3. Выбираем «Материал» ► задаем материал всем деталям сборки «Легированная сталь».

5.4. Активируем «Запустить исследование» ►

Исследование

✓ ✗ ↺

Сообщение

Исследовать резонансные частоты и формы колебаний

Имя

Частота 2

Simulation — общие параметры

Статический

Частота

Получаем результат расчета: список резонансных частот и формы колебаний конструкции.

п эпоры: Частотный Амплитуда1
 форма колебаний : 1 Значение = 97,901 Гц
 тала деформации: 0,593718

Массовое участие (Нормализовано)

Название исследования: Частота 1

Направление X	Направление Y	Направление Z
0,00022156	6,8645e-10	0,00084808
0,00022047	3,447e-05	0,0022623
5,6517e-05	0,0001933	0,0015903
0,0015602	6,0752e-05	9,8576e-05
5,8848e-05	7,1094e-05	0,0001804
6,0481e-05	6,3481e-05	0,00034215
9,7146e-05	0,00014144	0,0012224
Сумма X = 0,89145	Сумма Y = 0,67538	Сумма Z = 0,88062

Закреть Сохранить Справка

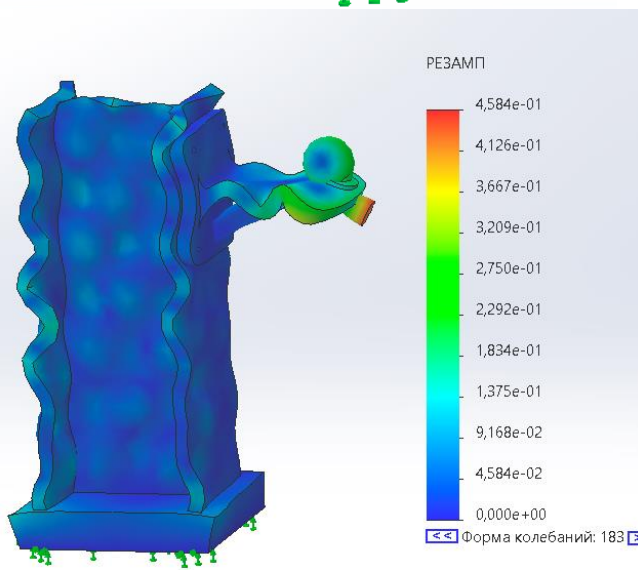
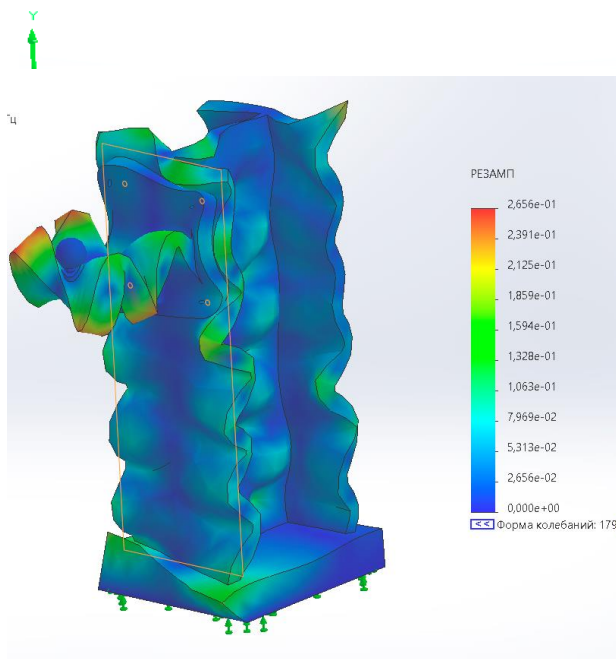
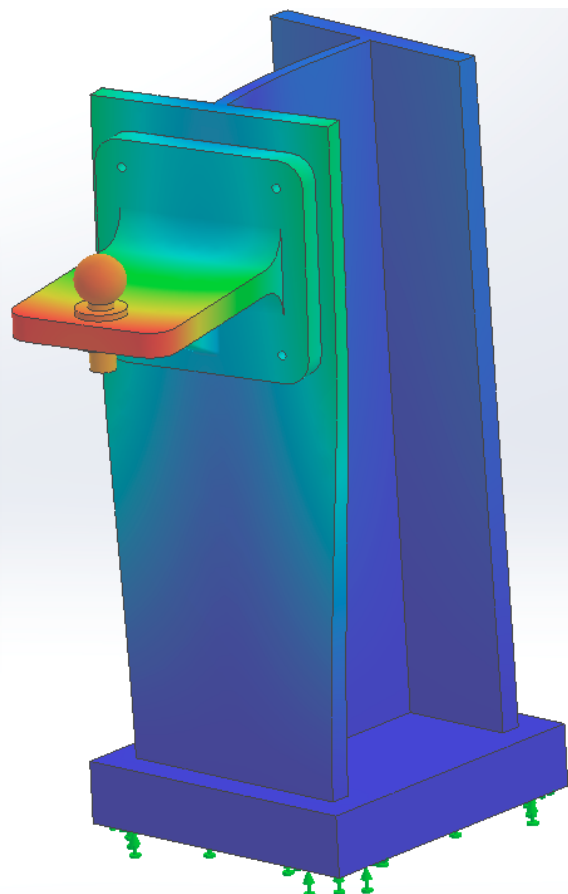


Рисунок 10.15 – Список резонансных частот, формы колебаний для собственных частот

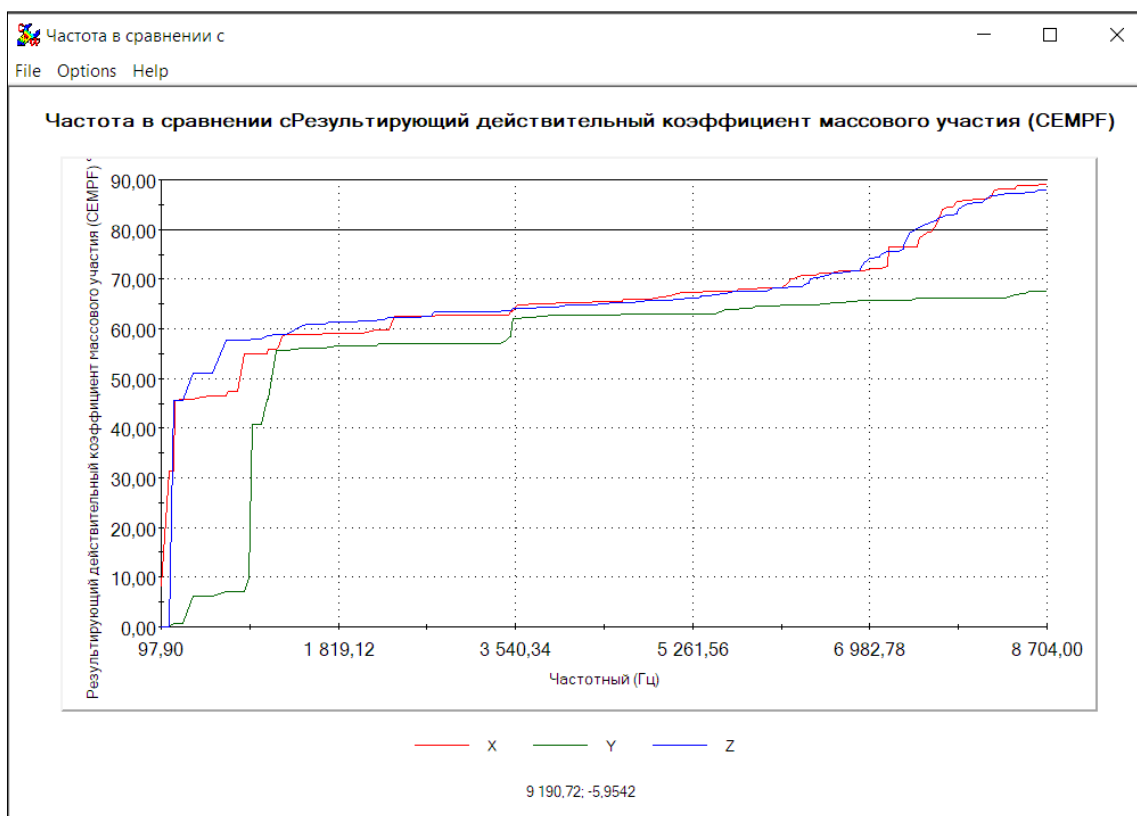


Рисунок 10.16 – График отклика

Произведем расчет в программе ANSYS (рисунки 10.17–10.20).

С примером расчета можно ознакомиться в видеоролике https://youtu.be/JI3nUqPzKsM?si=Ywo86_gehkQB4FS8.

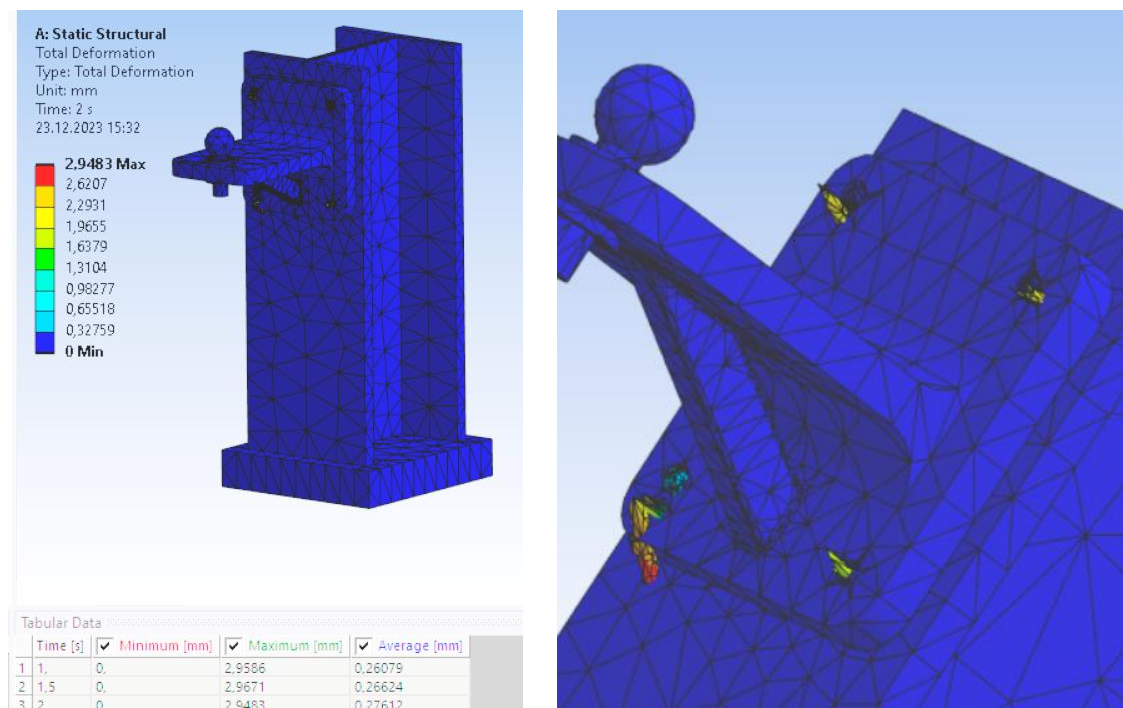


Рисунок 10.17 – Этюра деформации

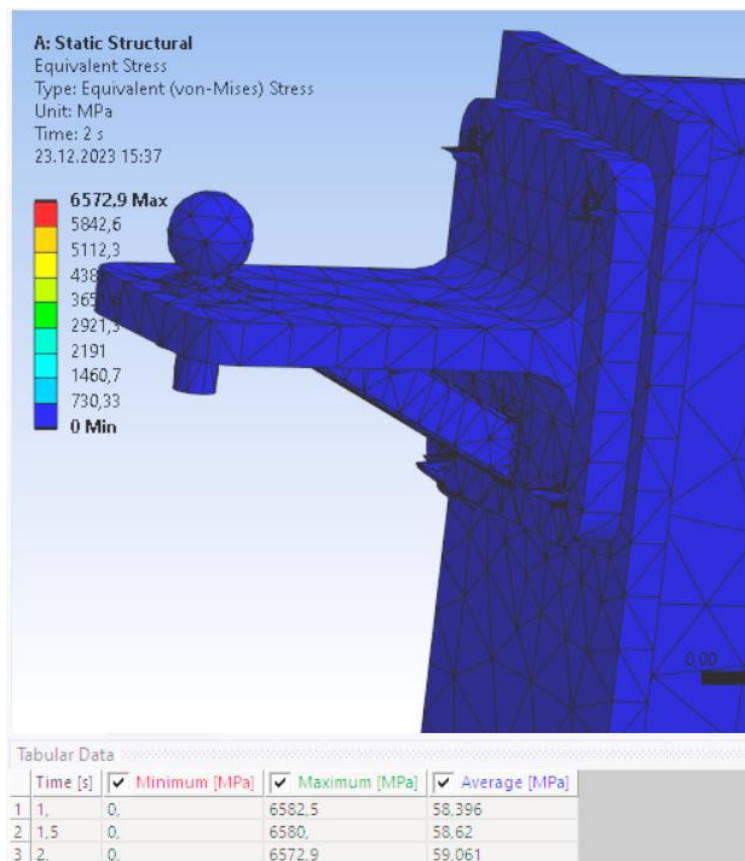


Рисунок 10.18 – Этюра напряжений

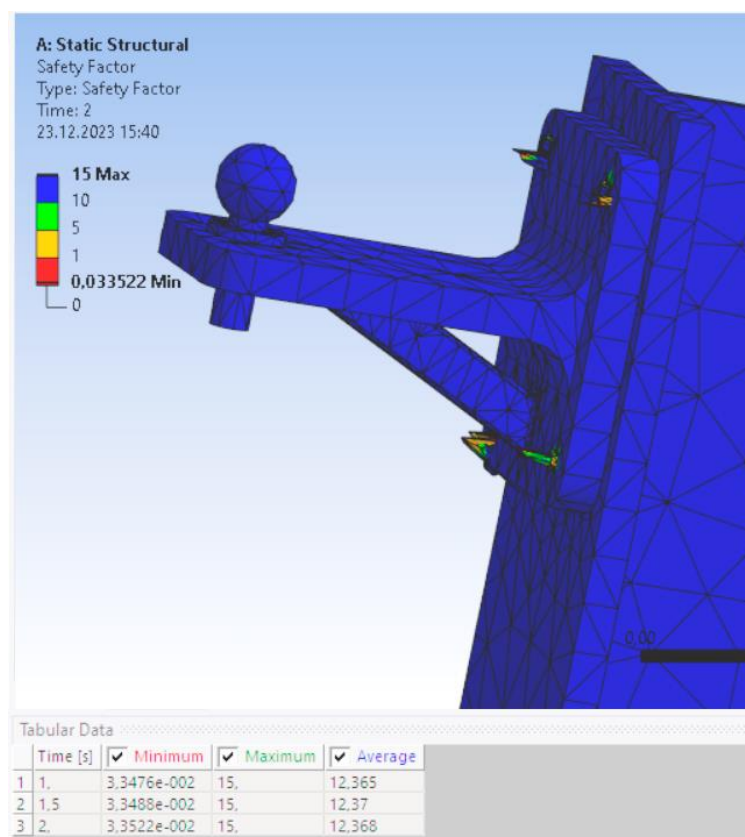


Рисунок 10.19 – Этюра запаса прочности

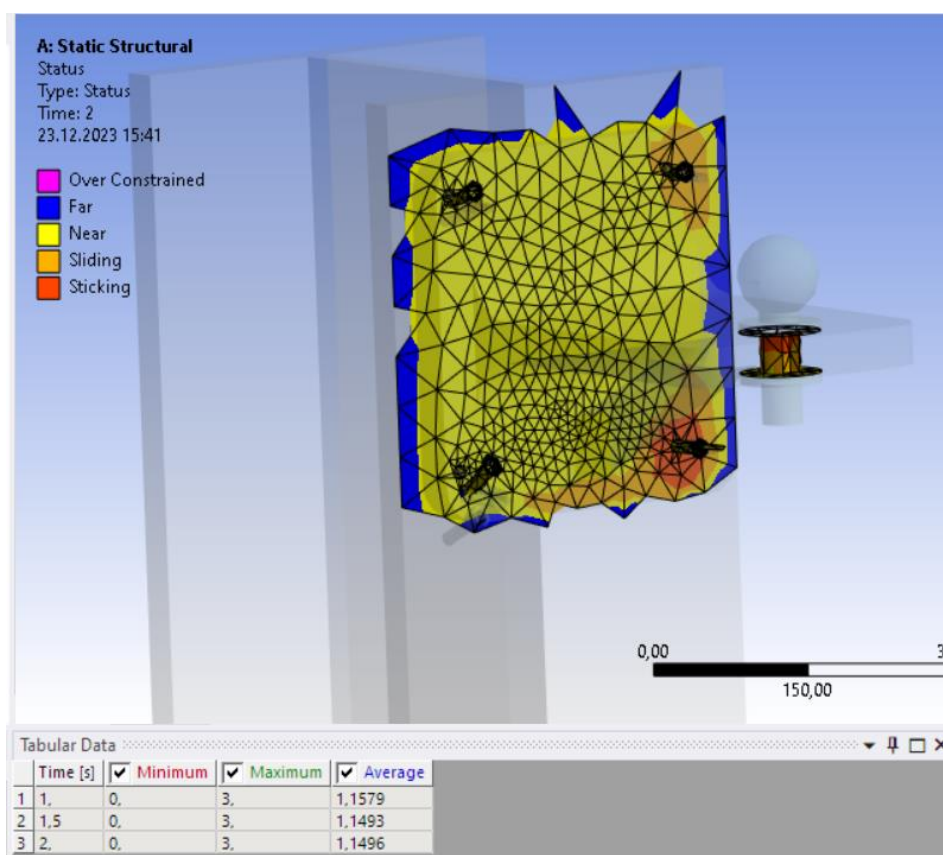


Рисунок 10.20 – Результат напряженно-деформированного состояния грани полки

Вывод

В соответствии с сортаментом металлических изделий вычертили по размерам эскиз стойки и создали параметрическую 3D-модель детали «Стойка», «Полка», «Шаровый палец».

Создали сборку «Опорный узел» – трехмерные детали объединили в единую конструкцию опорного узла, используя условия сопряжения деталей, «библиотеку проектирования Toolbox» для добавления компонентов крепежных изделий.

Изучили инструменты *SolidWorks Simulation* «Статический расчет», «Частотный анализ» на примере сборки «Опорный узел» с болтовыми соединениями, оптимизировали данные модели по двум критериям: максимизация коэффициента запаса прочности и минимизация массы металла оценили полученные результаты и получили сведения по прочности нашей детали – **«Опорный узел может выдержать нагрузку $F = 3800$ Н, в пределах одновременного соблюдения двух условий: $2 \leq FOS \leq 3$ для сборки и $FOS \geq 2$ для болтов».**

Определили частоты собственных колебаний и построили график отклика конструкции.

Произвели расчеты в *ПК ANSYS*.

11 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ

11.1 Общие сведения о ПК *Lira* и *Scad*

ПК *Lira* [1, 2, 3] и *SCAD* [4, 5] предназначен для расчета конструкций на прочность жесткость устойчивость при статическом или динамическом нагружении. В основу расчета положен метод конечных элементов (МКЭ). С помощью МКЭ рассчитываются плоские и пространственные стержневые системы, пластины и оболочки, мембраны, массивные тела. Также могут быть рассчитаны комбинированные системы: рамно-связевые конструкции многоэтажных зданий, плиты на упругом основании и т. д.

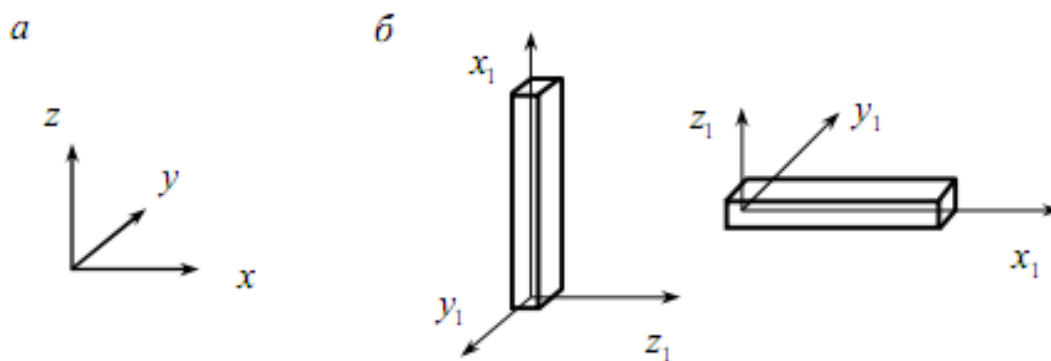
Статические воздействия могут быть силовыми, температурными или заданными перемещениями отдельных точек конструкций. Динамическое нагружение задается в виде вибрационной нагрузки от технологического оборудования, пульсации ветра, ударных и сейсмических воздействий.

Рассчитываемые системы могут иметь произвольные очертания и условия закрепления. Библиотека компонентов содержит большое количество различных конечных элементов (КЭ). В ПК *Lira* и *Scad* решаются различные задачи, по результатам расчета осуществляется выбор невыгодных комбинаций нагрузок, проверка или подбор размеров поперечных сечений, диаметров арматуры.

11.1.1 Подготовка исходных данных ПК *Lira* и *Scad*

Исходные данные задаются в режиме диалога при помощи графического препроцессора. Для подготовки исходных данных рассчитываемую задачу необходимо разбить на узлы и конечные элементы. Элементы, имеющие одинаковые жесткостные характеристики, объединяются в один тип жесткости.

Расчетная схема вводится в правой декартовой системе координат x, y, z (рисунок 11.1а); для КЭ важное значение имеет местная (локальная) система координат – для стержневых КЭ местная система координат x_1, y_1, z_1 принимается таким образом, чтобы ось x_1 проходила вдоль оси стержня, а остальные оси направляются в соответствии с правой системой координат по направлениям, обычно совпадающим с центральными осями сечений (рисунок 11.1б).



а) общая система координат; б) местная система координат

Рисунок 11.1 – Системы координат для стержневого КЭ

Координаты узлов при вводе данных для любой системы задаются в общей пространственной системе координат, в соответствии которой любой узел имеет шесть степеней свободы, которые нумеруются следующим образом:

- 1 – линейное перемещение вдоль оси x ;
- 2 – линейное перемещение вдоль оси y ;
- 3 – линейное перемещение вдоль оси z ;
- 4 – поворот вокруг оси x ;
- 5 – поворот вокруг оси y ;
- 6 – поворот вокруг оси z .

Шарниры используются для описания прикрепления стержней к узлам в виде устранения линейных или угловых связей по осям местной системы координат.

Для стержневых КЭ указываются:

- EA – жесткость на растяжение-сжатие (кН);
- EJ_y – жесткость на изгиб относительно оси y_1 (кН·м²);
- EJ_z – жесткость на изгиб относительно оси z_1 (кН·м²);
- GJ_k – жесткость на кручение (кН·м²);
- GA_y – жесткость на сдвиг вдоль оси y_1 (кН);
- GA_z – жесткость на сдвиг вдоль оси z_1 (кН).

Для стальных конструкций поперечное сечение может быть назначено с использованием базы данных из сортамента прокатных профилей.

Связи накладываются в общей системе координат и имеют следующие обозначения:

- X – линейная связь вдоль оси x ;
- Y – линейная связь вдоль оси y ;
- Z – линейная связь вдоль оси z ;
- U_x – связь от поворота вокруг оси x ;
- U_y – связь от поворота вокруг оси y ;
- U_z – связь от поворота вокруг оси z .

Нагрузки в виде сосредоточенных сил и моментов прикладываются в узлы по направлениям общей системы координат. Распределенные нагрузки прикладываются к элементам и задаются по направлениям местной или общей системы координат. Нагрузки могут прикладываться по различным вариантам загрузки. Положительные моменты направлены по часовой стрелке, если смотреть с конца соответствующей оси.

11.1.2 Признак схемы *ПК Lira* и *Scad*

Признак схемы позволяет существенно упрощать ввод данных, например, для плоской рамы (балки) нет необходимости ставить опорные связи из плоскости; для фермы не нужно устанавливать шарниры по концам КЭ и т. п. Наиболее часто используемые признаки схемы приведены в таблице 11.1. Пользователь должен понимать при выборе признака схемы, какую систему рассчитывает (плоскую или пространственную, ферму, раму или балочный ростверк) и знать,

что представляют собой узлы (жесткие или шарнирные) и как стержни прикреплены к узлам – это все нужно продумать, чтобы правильно задать расчетную модель задачи и проанализировать полученные результаты, используя программный комплекс как инструмент для решения поставленной инженерной задачи.

Таблица 11.1 – Признаки схемы для различных типов задач

Признак схемы	Плос- кость	Количество степеней свободы	Линейные перемещения			Угловые перемещения			Рассчитываемая Система
			1	2	3	4	5	6	
1	xOz	2	+	–	+	–	–	–	Плоская ферма, панель
2	xOz	3	+	–	+	–	+	–	Плоская рама, балка, арка
3	xOy	3	–	–	+	+	+	–	Балочный ростверк, плита
4	–	3	+	+	+	–	–	–	Пространственная ферма, массивное тело
5	–	6	+	+	+	+	+	+	Система общего вида

11.1.3 Последовательность решения задачи в ПК Lira и Scad

1. Создать новый проект (задачу).
 2. Подготовить расчетную схему:
 - ввести координаты узлов;
 - задать элементы;
 - описать жесткости и назначить их КЭ;
 - установить опорные связи;
 - задать нагрузки.
 3. Проверить корректность ввода исходных данных:
 - визуальная проверка расчетной схемы;
 - заданных типов жесткости и назначения их КЭ;
 - правильность расстановки опорных связей, шарниров;
 - корректность стыков в узлах схемы КЭ различных типов;
 - правильность задания нагрузок и т. д.
 4. Провести расчет задачи.
 5. Вывести результаты расчета (эпюры усилий, деформированную схему, поля напряжений).
 6. Проанализировать полученные результаты. Сопоставить результаты расчета с предполагаемыми.
 7. При необходимости провести серию дополнительных расчетов:
 - по различным моделям;
 - с различным числом и типами КЭ;
- с учетом сгущения сетки КЭ в местах резкого изменения напряжений.

11.2 Общие сведения о программе *Sirius*

Программа *Sirius* разработана в БрГТУ на кафедре теоретической и прикладной механики студентом группы КП-5 И. М. Гойшиком под руководством кандидата технических наук, доцента В. И. Игнатьюка. *Sirius* позволяет рассчитывать плоские стержневые системы – рамы, балки, фермы – с жестким либо шарнирным соединением в узлах на действие статических внешних нагрузок – сосредоточенных сил и моментов, равномерно распределенных нагрузок.

Ввод исходных данных в программе может осуществляться в двух вариантах – в табличном и графическом. В программе предусмотрен также ряд проверок ввода исходных данных на их корректность, включая проверки на геометрическую неизменяемость расчетной модели. Результаты расчета представляются как в численном виде – в таблицах перемещений и усилий, так и в графическом виде – в виде эпюр усилий $M Q N$.

Программа обладает удобным интерфейсом, высокая наглядность представления исходных данных и результатов расчета. Программа ориентирована на использование в учебном процессе на первоначальном этапе ознакомления студентов со строительной механикой, поэтому *Sirius* широко распространена в студенческой среде и за пределами БрГТУ.

11.3 Общие сведения о программе *SdCAD*

Программа *SdCAD* разработана в БрГТУ О. В. Костюк (расчетный модуль), интерфейс – Н. В. Бочаровой под руководством кандидата технических наук, профессора кафедры строительных конструкций В. П. Уласевича.

Характерная особенность расчета стержневых систем – необходимость при расчете учитывать ее деформированную схему равновесия, поэтому при расчете рассматривается не постоянная расчетная схема как расчетная модель, а n деформированных схем равновесия, определенных n возможными комбинациями действующих на систему нагрузок или других силовых воздействий. Одну из них необходимо принять за исходное состояние, тогда все оставшиеся $n-1$ принято считать за рассчитываемые.

Численно-аналитический метод расчета позволяет рассчитывать по деформированному состоянию сложные многоэлементные конструктивные схемы, рассматривая их с позиции общего класса задач – нелинейно деформируемых комбинированных балочно-вантовых систем произвольной геометрической структуры. Универсальность и высокая точность метода расчета по деформированному состоянию обусловлена следующими его составляющими: нелинейной системой разрешающих уравнений в матричной форме, построенной на принципах МКЭ в форме перемещений, универсальным конечным элементом «Гибкий стержень», позволяющим получить в матричной форме нелинейную систему разрешающих уравнений, способную моделировать работу всех возможных прямолинейных стержней рассчитываемой системы с учетом деформированного состояния.

При выводе результатов на эпюрах в *SdCAD* две эпюры – для деформационного и линейного расчета, результаты близки между собой, но если система имеет повышенную деформативность, то сразу можно увидеть, что эпюры усилий отличаются, и для подбора сечений будем брать более точные значения усилий, вычисленные для деформационного расчета.

11.4 Общие сведения о программе *Arka2*, *Arka3*

Программа *Arka2*, *Arka3* разработана в БрГТУ на кафедре строительной механики студентом группы КП-14 А. Ю. Игнатовым под руководством кандидата технических наук, доцента В. И. Игнатюка.

Программа *Arka2* и *Arka3* являются учебными программами и для выполнения расчета арки в них необходимо предварительно вычислить вручную усилия в двух контрольных сечениях арки, значения которых вводятся в программу и проверяются ею. Программа выполнит расчет арки только после того, как значения усилий в контрольных сечениях будут вычислены верно.

В программе *Arka2* предусмотрен расчет двухшарнирных арок с разным законом изменения оси криволинейного стержня (круговая, параболическая, синусоидальная, эллиптическая, гипербоидальная, катеноидальная, стрельчатая) и изменения размеров поперечного сечения вдоль оси, которые назначаются при проектировании. Двухшарнирная арка представляет собой статически неопределимую систему с одной лишней связью, расчет выполняется методом сил с использованием численного интегрирования.

В программе *Arka3* предусмотрен расчет симметричных трехшарнирных арок на неподвижные вертикальные и горизонтальные сосредоточенные и распределенные (в том числе трапецеидальные) нагрузки. Трехшарнирные арки статически определимы и относятся к распорным системам, в которых при действии только вертикальных нагрузок возникают и горизонтальные опорные реакции, называемые распором.

Результаты расчета арки представляются в графическом и в табличном видах – показываются эпюры внутренних усилий M , Q и N в арке, ее деформированный вид и усилия во всех сечениях, включая характерные. Результаты расчета арки вместе с исходными данными могут быть выведены на печать. Внутренние силы и перемещения при необходимости могут быть вычислены для любого заданного сечения, что осуществляется вызовом соответствующих процедур.

Программы *Arka2* и *Arka3* имеют удобный интерфейс, графическое и табличное представление исходных данных и результатов расчета, может быть использована и для проектирования, так как результаты расчета имеют высокую точность, так как получены аналитическим способом.

11.5 Общие сведения о ПК *SolidWorks*

Система автоматизированного проектирования *SolidWorks* содержит широкий набор функций трехмерного моделирования пространственных твердотельных и деформируемых объектов, направленных на создание единых электронных моделей деталей, сборочных узлов из этих деталей и механических систем в целом.

Система *SolidWorks* включает базовые конфигурации *SolidWorks Standart*, *SolidWorks Professional*, *SolidWorks Premium*, а также различные прикладные модули: для инженерных расчетов – *SolidWorks Simulation Standart*, *SolidWorks Simulation Professional*, *SolidWorks Flow Simulation*, для анализа технологичности – *SolidWorks Plastics* и другие.

Система *SolidWorks* позволяет осуществлять:

- гибридное параметрическое моделирование – твердотельное моделирование, моделирование поверхностей, каркасное моделирование, а также их комбинации;

- проектирование деталей с учетом специфики и способов изготовления – пресс-формы, штамповка, литье и т. п.;

- проектирование сборок.

Система *SolidWorks* содержит:

- *библиотеки проектирования*, включая библиотеки: физических свойств материалов; текстур и штриховок; типовых конструктивных элементов; стандартных деталей и узлов; прокатного сортамента; элементов листовых деталей;

- *экспертные системы* для поиска оптимальных решений; редактирования 3D-моделей и сборок, стандартных компонентов; анализа сопряжений сборок.

Система *SolidWorks* позволяет:

- выполнять инженерный анализ, включая расчеты прочности, массово-инерционных характеристик, кинематики и динамики механизмов;

- проводить анализ технологичности моделей;

- оформлять чертежи;

- создавать анимации механизмов и др.

Система *SolidWorks* позволяет моделировать трехмерные объекты практически любой степени сложности. При этом в программе предусмотрено создание трех видов трехмерных моделей:

твердотельная модель – трехмерная электронная геометрическая модель, представляющая форму пространственного изделия в виде сплошного твердого либо деформируемого тела;

поверхностная модель – трехмерная электронная геометрическая модель, представленная рядом ограниченных поверхностей, определяющих форму изделия в пространстве;

каркасная модель – трехмерная электронная геометрическая модель, представленная пространственным набором (композицией) точек, отрезков и кривых, определяющих в пространстве форму изделия.

По накладываемым геометрическим взаимосвязям и простановке размер-

ных взаимосвязей для деталей и между деталями электронные модели классифицируют следующим образом:

редактируемые – модели деталей, в которых размерные взаимосвязи не связаны между собой и изменение одного или нескольких значений размерных взаимосвязей приводит к планируемым изменениям формы моделей деталей;

нередатируемые – модели деталей, в которых размерные взаимосвязи не связаны между собой, но изменение одного или нескольких значений их приводит к непредсказуемым изменениям формы моделей деталей;

частично связанные – модели деталей, в которых несколько размерных взаимосвязей связаны между собой или они образуют несколько групп связанных размерных взаимосвязей, которые между собой не связаны;

полностью связанные – модели деталей, в которых все размерные взаимосвязи связаны между собой и зависят от одного значения основной (доминирующей) размерной взаимосвязи.

Система *SolidWorks* позволяет выполнять построение электронных моделей деталей, используя различные пути (последовательности) построения, определяющие стратегию построения электронных моделей.

Система *SolidWorks 2021* использует ленточный интерфейс, структура которого показана ниже на рисунке и представлена панелями команд, разделенных вкладками.

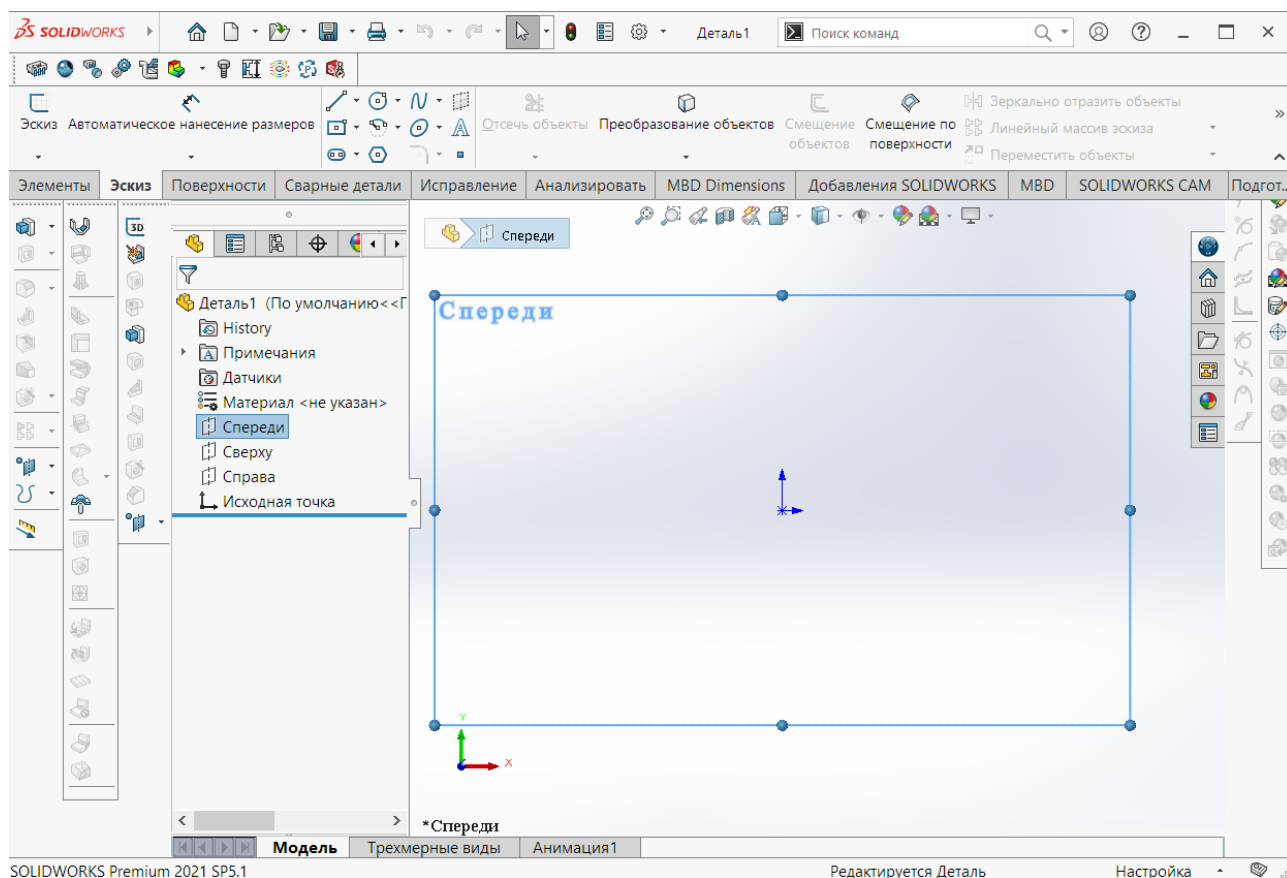


Рисунок 11.2 – Интерфейс SolidWorks

Основные элементы интерфейса.

1. **Кнопка «SolidWorks»** – представляет доступ к командам работы с файлами (создать, открыть, сохранить, печатать файл и т. д.), и к настройкам и параметрам систем SolidWorks. Команды становятся доступными при наведении курсора с помощью мыши.

2. **Панель команд** – элемент интерфейса, в котором сгруппированы команды и инструменты. Панель команд может располагаться в любом месте поля интерфейса.

3. **Панель «Быстрого доступа»** – панель команд, в которой сгруппирован набор наиболее используемых команд.

4. **Диспетчер задач (Command Manager)** – основной элемент ленточного интерфейса.

5. **Вкладка** – элемент ленточного интерфейса, в котором сгруппированы определенные наборы панелей команд.

6. **Команда** – элемент интерфейса, позволяющий запустить действие, которое необходимо выполнить.

7. **Панель «Дерево построений»** – панель команд, в которой сгруппированы команды и инструменты, позволяющие вносить изменения в свойства, в параметры и корректировать созданные объекты. Панель разделена на вкладки, основные из которых следующие.

7.1. **Вкладка «Дерево конструирования» (Feature Manager)** – отображает структуру моделей – детали, сборочной единицы или электронного чертежа.

7.2. **Вкладка «Менеджер свойств» (Property Manager)** – предназначена для настройки свойств и других параметров команд в SolidWorks.

7.3. **Вкладка «Менеджер конфигурации» (Configuration Manager)** – служит для создания, выбора и просмотра конфигураций моделей, деталей и сборок в документе.

8. **Строка состояния** – отражает информацию о выполняемых задачах.

9. **Панель «Управляемый просмотр»** – содержит команды навигации и отображения объектов в графическом окне.

10. **Панель задач** – отображает команды, обеспечивающие доступ к ресурсам, библиотекам повторно используемых элементов проектирования SolidWorks, к видам и другим объектам и сведениям системы.

11. **Графическое окно** – область отображения объектов в SolidWorks.

11.5.1 Общие сведения о проектировании конструкций в SolidWorks

SolidWorks – современное решение для автоматизации конструкторской и технологической подготовки производства, система создает удобную интегрированную среду трехмерного проектирования, охватывая все стадии разработки продукции. Программный комплекс (ПК) SolidWorks позволяет построить трехмерную твердотельную параметрическую модель деталей, а также сборочного узла и выполнить статический расчет в SolidWorks Simulation.

Деталью в SolidWorks называется трехмерный объект, состоящий из некоторого количества элементов. Элементы – это отдельные геометрические формы,

в сочетании образующие деталь. Основные формообразующие элементы – бобышки и вырезы строятся на базе плоских эскизов. Другие элементы – оболочки, скругления, фаски преобразуют уже существующую 3D-модель.

Для проектирования деталей выполняется сначала создание эскиза на плоскости, затем по эскизу создается объемная модель детали при помощи инструмента «Вытянутая бобышка», «Повернутая бобышка» ..., а после при необходимости вырезаются отверстия или выполняются скругления кромок.

Детали объединяются в сборки, используя необходимые сопряжения. Существуют сборки двух типов: первый тип – полностью определенная сборка, в которой зафиксированы все степени свободы; второй тип – это сборки, в которых некоторые степени свободы оставлены незафиксированными, так что некоторые компоненты можно перемещать или вращать. Эти типы сборок используются для механизмов.

К детали/сборке, предъявляются такие требования, как: прочность, жесткость, виброустойчивость, надежность, технологичность. Эти требования называются критериями работоспособности.

Прочность – способность сопротивляться нагрузкам, не разрушаясь и не имея при этом больших пластических деформаций. Это один из главных критериев.

Жесткость – это способность детали сопротивляться изменению формы под действием сил.

Виброустойчивость. Вибрация вызывает дополнительные переменные напряжения и приводит к усталостному разрушению деталей. Особенно опасными являются резонансные колебания.

Надежность – свойство объекта выполнять заданные функции, сохраняя значения установленных эксплуатационных показателей в требуемых пределах.

Технологичность – одна из комплексных характеристик сборочного узла, которая выражает удобство его производства, ремонтпригодность и эксплуатационные качества.

Инструкции для создания деталей и сборок в *SolidWorks*:

Последовательность проектирования конструкций:

- выбор конструктивной плоскости для создания двумерного эскиза (Сверху, Спереди, Справа);
- преобразование эскиза в твердотельный элемент («Вытянутая бобышка/основания», «Повернутая бобышка/основания», «По траектории»);
- формирование детали из различных элементов, компоновка созданных деталей в сборку.

При этом гибкие инструменты конструктора *SolidWorks* позволяют изменять значения любого размера, накладывать взаимосвязи на взаимное расположение объектов в течение всего процесса проектирования.

Эскиз состоит из некоторого числа простейших геометрических объектов: отрезков, сплайнов, дуг и т. п., соединенных между собой. Построение эскизов основано на применении различных инструментов рисования, создания взаимосвязей и задания размеров. Плоский эскиз можно создавать на любой плоскости

(Спереди, Сверху или Справа): на плоскости, созданной инструментами Справочной геометрии плоскости, на плоских гранях твердотельных объектов.

В *SolidWorks* существует возможность создавать **трехмерные эскизы**. Графические объекты (трехмерные линии, сплайны, точки) в таких эскизах располагаются в трехмерном пространстве и не связаны с определенными плоскостями эскизов.

Взаимосвязи представляют собой ограничения на расположения плоских объектов эскиза. Основной целью добавления взаимосвязей является уменьшение числа управляющих размеров.

Эскиз может находиться в одном из трех состояний.

1. Полностью определенный – все линии и кривые в эскизе, а также их расположение однозначно описываются размерами и (или) взаимосвязями. Цвет объектов эскиза – черный, в Дереве построения такой эскиз отображается без каких-либо значков.

2. Переопределенный – размеры или взаимосвязи находятся в противоречии либо дублируют друг друга. В переопределенном эскизе графические объекты, для которых не было найдено решение, имеют красный цвет, объекты, находящиеся в конфликте друг с другом, – желтый. В Дереве построения такой эскиз отображается со значком «+».

3. Недоопределенный – не определены некоторые размеры или взаимосвязи, их можно изменять. Цвет объектов эскиза – синий. В Дереве построения такой эскиз отображается со значком «-».

Сборкой называется документ, в котором детали и другие сборки сопряжены друг с другом в единую конструкцию. Сборку можно создавать, используя проектирование «снизу-вверх», проектирование «сверху-вниз» или комбинацию этих двух методов.

Файл сборки в *SolidWorks* (расширение *SLDASM) не содержит в себе описание геометрии деталей. Без полного комплекта составляющих деталей, сборок (узлов), типовых библиотечных элементов файл сборки является пустым объектом. Добавление компонента в сборку создает связь между ними. Изменения в компоненте сборки автоматически отражаются на сборке.

В общем, сборочное изделие представляет собой многоуровневую древовидную структуру. Файл сборки, как и реальное изделие, может включать не только отдельные детали, а также и другие сборки (узлы). Уровень вложенности при этом не ограничен.

Общий принцип создания сборочной модели по методу «снизу-вверх» полностью соответствует указанному процессу сборки. Предварительно необходимо построить трехмерные модели деталей, а затем объединить их в единую конструкцию путем наложения ограничений на пространственное положение объектов.

При проектировании «сверху-вниз» трехмерные модели деталей разрабатываются в контексте одной сборки на основе геометрических элементов других деталей. В соответствии с данным методом, первоначально создаваемая сборка является исходной информацией для выполнения последующей детализации.

После размещения деталей и узлов в сборке необходимо задать **сопряжения** между ними – геометрические взаимосвязи между компонентами сборки. При добавлении сопряжений следует определить допустимые направления линейного или вращательного движения компонентов. Последовательность, в которой добавляются сопряжения в группу, значения не имеет, все сопряжения решаются одновременно.

Для создания сопряжений необходимо активизировать команду «Условия сопряжения» на панели инструментов «Сборки», выбрать сопрягаемые поверхности деталей, указать тип сопряжения.

Системой поддерживаются следующие типы сопряжений.

1. Совпадение – выбранные грани, плоскости и кромки (в комбинации друг с другом или с одной вершиной) разделяют одну и ту же бесконечную линию.
2. Параллельность – выбранные элементы одинаково направлены и находятся на постоянном расстоянии.
3. Перпендикулярность – выбранные элементы располагаются под углом 90° друг к другу.
4. Касательность – выбранные элементы касаются (как минимум один элемент должен быть цилиндрическим, коническим или сферическим).
5. Концентричность – выбранные элементы разделяют центральную точку.
6. Расстояние – выбранные элементы расположены на заданном расстоянии.
7. Угол – выбранные элементы расположены под заданным углом.

Физическая динамика – позволяет увидеть реалистичное движение компонентов сборки. Все детали отождествляются с абсолютно упругими телами и при попытке смещения/поворота одного из них выполняется попытка повторить кинематику движений всего механизма, описанную множеством сопряжений (т. е. происходит перемещение или вращение всей цепочки затрагиваемых компонентов в пределах допустимых степеней свободы).

Для расчета на прочность в *SolidWorks Simulation* необходимо последовательное выполнение основных шагов.

1. Задать материал для детали или сборки.
2. Задать набор контактов компонентов, которые указываются в разделе «контакт компонентов», для сборочных узлов.
3. Определить виды и места креплений (ограничений) конструкции.
4. Приложить заданную внешнюю нагрузку.
5. Построить сетку для исследования. Создание сетки зависит от активных параметров формирования сетки.
6. Запустить исследование.

Использование *SolidWorks Simulation* дает возможность быстро и точно получить эпюры напряжений, перемещений, деформаций детали или сборки. Имеется возможность проработки разных вариантов нагружения, закрепления, контакта компонентов сборки или механизмов. Это дает возможность определить наиболее подходящий материал деталей, размеры конструктивных элементов, варианты крепежных элементов, а также при расчете оптимизировать характеристики конструкции. Возможность получить визуализированные эпюры напряжений, перемещений,

деформаций и запаса прочности позволяет наиболее точно определить места опасных сечений, изменить характеристики конструкции на стадии проектирования без затрат на изготовление и испытание опытных образцов.

После выполнения статического расчета и получения необходимого запаса прочности, если конструкция подвергается динамическим нагрузкам можно перейти к расчету усталостной прочности, который подразумевает действие циклической нагрузки. Это необходимо для того, чтобы проверить, выдержит ли данная конструкция заданное количество циклов нагружения.

Следующим шагом в разработке конструкции является частотный анализ. Каждая конструкция имеет тенденцию вибрировать на определенных частотах, называемых собственными. Каждая частота собственных колебаний ассоциируется с определенной формой, называемой формой колебаний, которую модель стремится принимать при вибрировании на этой частоте. Когда конструкция возбуждена динамической нагрузкой на частоте, которая совпадает с одной из ее собственных частот, (такое состояние называется резонансом) в конструкции возникают большими перемещениям и напряжениям. Частотные исследования в *SolidWorks Simulation* могут помочь избежать резонанса.

По данным модели детали или сборки, используя инструмент «Создать чертежи из детали/сборки» есть возможность сформировать листы для выпуска пакета чертежей готовой продукции. А также возможность создания спецификаций в автоматическом режиме, что очень экономит время на проектирование и корректировку сборочных узлов.

11.6 Общие сведения о ПК ANSYS

ANSYS Mechanical – инструмент, позволяющий методом конечных элементов (МКЭ) приближенно решать некоторые задачи механики деформированного твердого тела. С его помощью, например, можно выполнить анализ конструкции на предмет статической прочности и устойчивости, проанализировать собственные формы и частоты колебаний, построить амплитудно-частотные характеристики. *ANSYS Mechanical* позволяет решать связанные, параметрические и контактные задачи. При этом среда *Workbench* обеспечивает автоматическую передачу данных между расчетными кодами *ANSYS* при подготовке геометрии, конечно-элементной модели, решателями и средствами обработки результатов (формат модели «*Parasolid.x_t*», использовался в разделе 10, для импорта модели из *SolidWorks* в *ANSYS Workbench*).

Первая зона стартового окна среды *Workbench*, показанная ниже на рисунке, содержит вкладки *File*, *View*, *Tools*, *Units*, *Extension*, *Jobs*, *Help*.

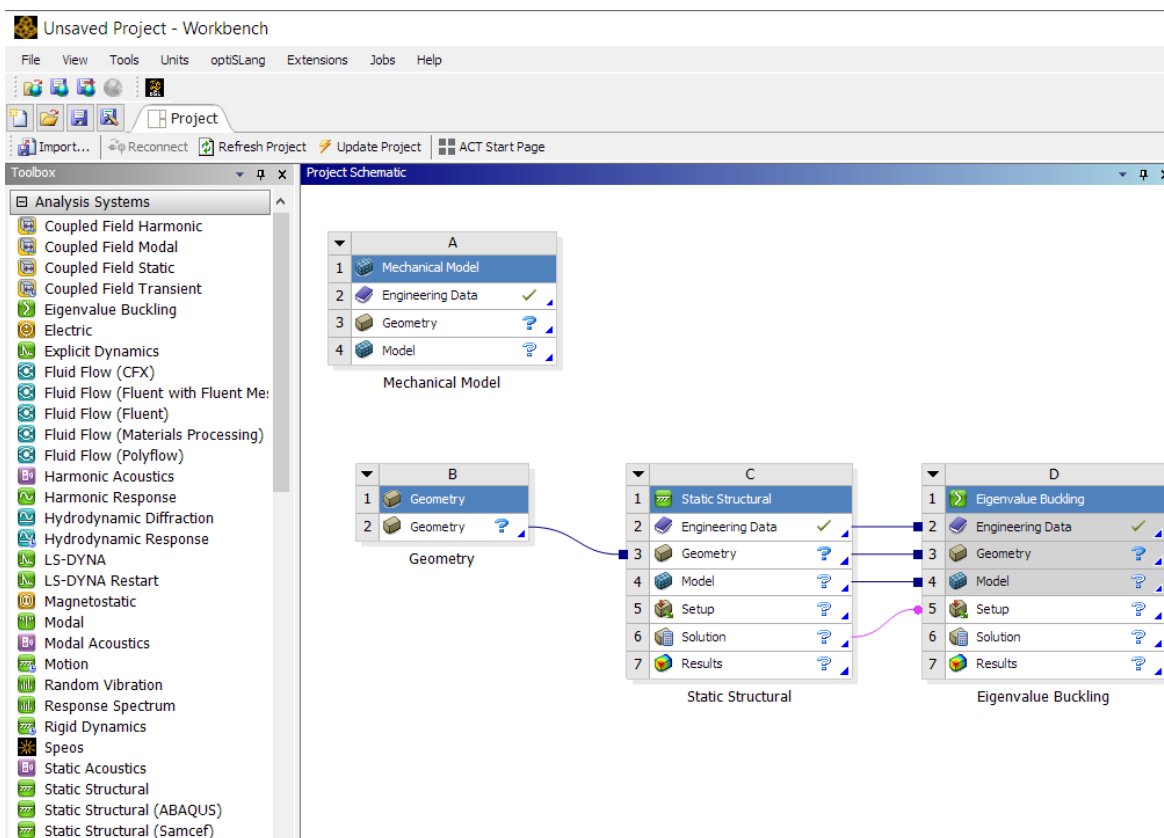


Рисунок 11.3 – Интерфейс и блоки ANSYS Workbench

1. **File** позволяет создать новый проект или загрузить имеющийся, а также сохранить проект, находящийся в работе.

2. **View** позволяет добавить или убрать дополнительные окна в стартовое графическое окно интерфейса *ANSYS Workbench*. Для этого необходимо поставить или убрать галочку напротив названия интересующего окна путем нажатия левой кнопки мыши (ЛКМ) на соответствующее название {*Toolbox, Properties* и т. д.).

3. **Tools** позволяет выполнить основные настройки среды *Workbench*.

4. **Units** дает возможность выбрать удобную для поставленной задачи систему единиц измерений. При этом можно переходить из одной системы единиц в другую на любом этапе работы с проектом, что значительно упрощает ввод или чтение данных. Для выбора необходимой системы единиц поставьте галочку напротив интересующей системы.

Вторая зона стартового окна среды *Workbench* содержит окно *Toolbox* и имеет вид раскрывающихся списков. Среди них:

- ⌚ **Analysis Systems**, содержащий готовые шаблоны расчетных схем;
- ⌚ **Component Systems**, включающий в себя индивидуальные блоки;
- ⌚ **Design Exploration**, предлагающий инструменты параметрической оптимизации.

В списке *Analysis Systems* присутствуют готовые шаблоны расчетных схем для анализа статической прочности – *Static Structural*, устойчивости – *Eigenvalue Buckling*, анализа собственных форм и частот колебаний – *Modal*, анализа вынужденных гармонических колебаний – *Harmonic Response* и др.

В списке *Component Systems* присутствуют индивидуальные блоки для описания свойств материалов – *Engineering Data*, блок построения геометрии – *Geometry*, блок настройки конечно-элементной модели – *Mechanical Model* и др.

Третья зона стартового окна среды *Workbench* содержит окно *Project Schematic*. Оно предназначено для работы с шаблонами расчетных схем и индивидуальными блоками, используемыми в проекте.

Работа с индивидуальными блоками и расчетными шаблонами:

1) В окне *Toolbox* разверните меню *Component Systems*, содержащее индивидуальные блоки. Найдите блок *Geometry*. Он предназначен для построения геометрии исследуемой конструкции средствами встроенного *ANSYS Workbench* модуля *DesignModeler* или *SpaceClaim*.

2) Добавьте этот блок в проект, перетащив его в окно *Project Schematic*. При этом удерживайте на блоке *Geometry* ЛКМ. Таким способом можно добавить любые доступные блоки или готовые шаблоны расчетных схем из окна *Toolbox*.

3) В левом верхнем углу блока есть кнопка, вызов которой ЛКМ или правой кнопкой мыши (ПКМ) открывает выпадающее меню, которое позволяет выполнить манипуляции над блоком. Например, дублировать (*Duplicate*), удалить (*Delete*) или переименовать блок (*Rename*).

4) Для манипуляций с конкретной ячейкой блока, в данном случае с ячейкой A2, нажмите на нее ПКМ. Так возможно, например, обновить (*Update*) или удалить данные о геометрии (*Reset*), а также импортировать готовую геометрию (*Import Geometry*).

5) Теперь добавьте тип анализа будущей конструкции. В окне *Toolbox* разверните меню *Analysis Systems*, содержащее готовые шаблоны расчетных схем. Найдите шаблон *Static Structural*. Он позволяет проводить статический прочностной анализ. Аналогично тому, как был добавлен блок *Geometry*, добавьте шаблон *Static Structural*. Удерживая на нем ЛКМ, перенесите его в окно *Project Schematic*. При этом, если нужно использовать геометрию из блока *Geometry*, шаблон *Static Structural* перетащите на вторую строку блока A (в ячейку A2), а не на свободное место. В этом случае будет установлена связь.

6) Добавьте в проект шаблон *Eigenvalue Buckling* из окна *Toolbox* меню *Analysis Systems*, который предназначен для решения задач устойчивости. Он позволяет определить коэффициент запаса по потере устойчивости или критическую силу потери устойчивости. С этой целью перенесите шаблон *Eigenvalue Buckling* (удерживая ЛКМ) в окно *Project Schematic* на ячейку B6 *Solution*. Это необходимо, так как сам по себе шаблон *Eigenvalue Buckling* не способен работать самостоятельно (находиться в окне *Project Schematic* без связи с блоком *Static Structural*).

Для решения задач в *ANSYS Mechanical* необходимо пройти следующую цепочку действий:

- Ⓟ задать свойства материала – ячейка *Engineering Data*;
- Ⓟ построить или импортировать геометрию – ячейка *Geometry*;
- Ⓟ настроить конечно-элементную модель – ячейка *Model*;

- ⌚ задать граничные условия и нагрузки – ячейка *Setup*;
- ⌚ выполнить расчет – ячейка *Solution*;
- ⌚ вывести результаты – ячейка *Results*.

Предварительная настройка геометрической модели.

Перед началом работы с ячейкой *Geometry* необходимо установить требуемые настройки будущей новой или импортированной готовой геометрии. Настройки выполняются в окне *Properties*, представленном на рисунке ниже, для ячейки *Geometry*.

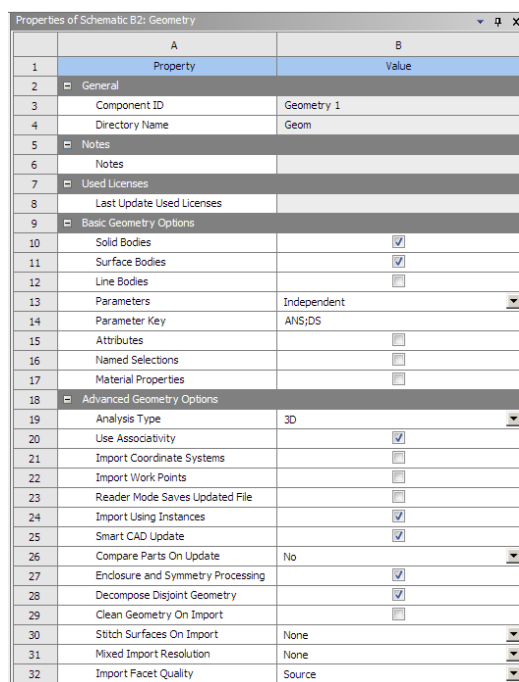


Рисунок 11.4 – Окно *Properties* для ячейки *Geometry*

Если окно *Properties* в стартовом интерфейсе графического окна *ANSYS Workbench* отсутствует, его можно добавить манипуляцией *View – Properties*.

Нажатие ЛКМ на строку *Geometry* индивидуального блока *Geometry* открывает необходимую таблицу настроек *Properties of Schematic: Geometry* в правой части окна интерфейса *ANSYS Workbench*.

Выпадающее меню *Basic Geometry Options* окна *Properties of Schematic: Geometry* предназначено для настройки импортируемых моделей. Оно позволяет выбрать тип геометрических объектов, которые создаст *ANSYS* при генерации импортированной геометрии: твердые тела (*Solid Bodies*), оболочки (*Surface Bodies*) и балки (*Line Bodies*). Кроме того, через него можно загрузить параметры, атрибуты, группы и свойства материалов.

Меню *Advanced Geometry Options* окна *Properties of Schematic: Geometry* предназначено для настройки импортированных моделей, а также для настройки типа анализа: двумерный анализ (*Analysis Type 2D*) или трехмерный анализ (*Analysis Type 3D*). При этом выбрать тип анализа необходимо до начала работы с геометрией. По умолчанию же установлен трехмерный тип анализа.

Двумерный анализ (*Analysis Type 2D*) предназначен для решения:

- осесимметричных задач, в которых геометрия, граничные условия и нагрузки имеют осевую симметрию. Например, цилиндрический бак с полусферическими днищами, работающий под давлением;
- задач плоского напряженного состояния, где напряжение не меняется по толщине конструкции. Например, прямозубая зубчатая передача в случае равномерного распределения нагрузки по ширине зуба;
- задач плоского деформированного состояния, в которых геометрия, граничные условия и нагрузки постоянны в каждом сечении исследуемой конструкции. Например, прямой участок трубопровода в грунте.

Трехмерный анализ (*Analysis Type 3D*) предназначен для исследования плоских или пространственных рам, пластин, оболочек и объемных сплошных тел.

11.6.1 Общие сведения о проектировании конструкций в ПК ANSYS

Запустите *ANSYS Workbench*, а затем сохраните проект: *File — Save*. Добавьте готовый шаблон статического прочностного анализа *Static Structural* из окна *Toolbox* выпадающего меню *Analysis Systems*: удерживая на шаблоне *Static Structural* ЛКМ, перетащите его в окно *Project Schematic*.

1. **Описание свойств материала:** по умолчанию в строке *Engineering Data* описана и готова к использованию в расчетах конструкционная сталь с модулем Юнга $E = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$.

2. **Построение геометрии:** по умолчанию *ANSYS Workbench* подготовлен к решению трехмерных задач.

2.1. Выполните построение геометрии: нажмите ЛКМ на строке *Geometry* шаблона *Static Structural* и в появившемся меню выберите *New DesignModeler Geometry* — программу для построения геометрии.

2.2. Установите удобные для данной задачи единицы измерения: *Units — Millimeter*.

2.3. В окне *Tree Outline* ЛКМ необходимо выделить главную плоскость (например, *XYPlane*) и создать на ней эскиз при помощи кнопки *New Sketch*.

2.4. Расположите рабочую плоскость *XYPlane* фронтально. Для этого нажмите ПКМ на *XYPlane* и в появившемся меню выберите *Look at*.

2.5. Выделите ЛКМ созданный эскиз *Sketch 1* и при помощи кнопки *Sketching* включите инструменты эскизирования *Sketching Toolboxes*.

2.6. Для удобства эскизирования отобразите на рабочей плоскости сетку. Для этого в окне *Sketching Toolboxes*, в выпадающем меню *Settings*, в строке *Grid* установите галочку *Show in 2D* и включите привязку к узлам этой сетки *Snap*.

2.7. Используя инструменты в выпадающем меню *Draw*, нарисуйте эскиз.

2.8. В окне *Sketching Toolboxes*, в выпадающем меню *Dimensions* выберите инструмент *General* и проставьте размеры для построенного эскиза.

2.9. Перейдите в моделирование при помощи кнопки *Modeling*. Создайте поверхность по эскизу: выделите ЛКМ в окне *Tree Outline* эскиз *Sketch1*, затем выберите *Concept — Surfaces From Sketches*.

2.10. В окне *Tree Outline* добавится инструмент *SurfaceSkl*. Настройка этого инструмента (или любого иного из окна *Tree Outline*) выполняется в окне *Details View*. В строке *Base Objects* выберите *Apply* (подтвердите, что поверхность строится по эскизу *Sketch1*). Далее сгенерируйте поверхность при помощи кнопки *Generate*.

2.11. Закройте *DesignModeler*.

3. **Настройка расчетной модели:**

3.1. Двойным нажатием Ж М на строке *Model* шаблона *Static Structural* приступите к настройке расчетной модели.

3.2. Выполните базовое разбиение геометрии на конечные элементы (КЭ) без каких-либо дополнительных настроек: в окне *Outline* выделите ПК строку *Mesh* и в появившемся меню выберите *Generate Mesh*.

3.3. Задайте нагрузку: выделите узел, в который будет приложена нагрузка. Нажмите в любой зоне графического окна ПКМ, выберите *Inset Force*. После этого в дереве проекта, в окне *Outline*, в выпадающем меню *Static Structural* появится новый элемент – *Force*. Настройка этого элемента выполняется в окне *Details of «Force»*.

3.4. Запустите расчет задачи: в окне *Outline* выделите ПКМ строку *Solution* и в появившемся меню выберите *Solve (F5)*.

4. **Вывод результатов:**

4.1. Выделите ПКМ в окне *Outline* строку *Solution*, затем выберите *Insert* → *Deformation* → *Total*. После чего в окне *Outline*, в выпадающем меню *Solution* добавится инструмент *Total Deformation*.

4.2. Загрузка добавленного результата производится путем выделения ПКМ строки *Solution* и выбора в появившемся меню *Evaluate All Results*.

Задание к лабораторной работе № 4

	L1	L2	L3	L4	L5	L6	a1	a2	$\alpha 1$	$\alpha 2$	P1	P2	q
1	2,3	5,4	5,9	3,2	2,8	7,4	2,7	1,6	15	40	37	86	30
2	2,4	5,5	6,0	3,3	2,9	7,3	2,8	1,7	16	41	38	87	31
3	3,3	5,6	6,1	3,4	3,0	7,2	2,8	1,7	17	42	39	88	32
4	3,4	5,7	6,2	3,5	3,1	7,1	2,9	1,8	18	43	40	89	33
5	4,3	5,8	6,3	3,6	3,2	7,0	2,9	1,8	19	44	41	90	34
6	4,4	5,9	6,4	3,7	3,3	6,9	3,0	1,9	20	45	42	91	32
7	5,3	6,0	6,5	3,8	3,4	6,8	3,0	1,9	21	46	43	92	30
8	5,4	6,1	6,6	3,9	3,5	6,7	3,1	2,0	22	47	44	93	28
9	6,3	6,2	6,7	4,0	3,6	6,6	3,1	2,0	23	48	45	94	26
10	2,3	7,4	9,8	6,0	4,2	9,3	3,5	3,0	30	52	25	95	34
11	7,3	7,5	9,7	5,9	4,1	9,2	3,8	3,0	31	53	26	96	37
12	7,4	7,6	9,6	5,8	4,0	9,1	3,8	2,9	32	54	27	97	40
13	8,3	7,7	9,5	5,7	3,9	9,0	3,9	2,9	33	55	28	98	43
14	2,3	7,4	12,6	6,8	2,4	7,2	5,3	3,6	36	79	23	68	84
15	9,3	7,5	12,5	6,7	2,3	7,1	3,8	3,4	37	80	24	69	87
16	9,4	7,6	12,4	6,6	2,2	7,0	3,8	3,3	38	81	25	70	90
17	9,1	7,4	12,3	6,5	2,1	6,9	3,7	3,3	39	82	26	71	93
18	8,8	7,2	12,2	6,4	2,0	6,8	3,6	3,2	40	83	27	72	96
19	2,2	7,6	9,3	6,8	2,2	12,3	3,0	2,5	32	53	18	87	34
20	1,8	8,2	10,1	5,3	1,8	10,5	4,3	2,5	24	67	30	50	56
21	1,5	8,0	10,0	5,2	1,7	10,4	4,0	2,6	25	68	31	51	59
22	1,2	7,8	9,9	5,1	1,6	10,3	3,9	2,6	26	69	32	52	62
23	0,9	7,6	9,8	5,0	1,5	10,2	3,8	2,5	27	70	33	53	65
24	0,6	7,4	9,7	4,9	1,4	10,1	3,7	2,5	28	71	34	54	68
25	3,0	7,2	9,6	4,8	1,3	10,0	3,6	2,4	29	72	35	55	71
26	2,7	7,0	9,5	4,7	1,2	9,9	3,5	2,4	30	73	36	56	74
27	2,4	6,8	9,4	4,6	1,1	9,8	3,4	2,3	31	74	37	57	77
28	4,2	1,8	2,8	5,3	6,4	4,5	0,9	2,7	42	70	15	91	45
29	5,3	1,9	2,9	5,4	6,5	4,4	1,0	2,7	43	71	16	92	44
30	5,4	2,0	3,0	5,5	6,6	4,3	1,0	2,8	44	72	17	93	43
31	6,3	2,1	3,1	5,6	6,7	4,2	1,1	2,8	45	73	18	94	42
32	2,3	7,4	9,8	6,0	4,2	9,3	3,5	3,0	30	52	25	95	41
33	7,3	7,5	9,7	5,9	4,1	9,2	3,8	3,0	31	53	26	96	40
34	7,4	7,6	9,6	5,8	4,0	9,1	3,8	2,9	32	54	27	97	39
35	8,3	7,7	9,5	5,7	3,9	9,0	3,9	2,9	33	55	28	98	38
36	8,4	7,8	9,4	5,6	3,8	8,9	3,9	2,8	34	56	29	99	37
37	9,3	7,9	9,3	5,5	3,7	8,8	4,0	2,8	35	57	30	100	36
38	9,4	8,0	9,2	5,4	3,6	8,7	4,0	2,7	36	58	31	101	35
39	9,5	8,1	9,1	5,3	3,5	8,6	4,1	2,7	37	59	32	102	34
40	8,3	8,2	9,0	5,2	3,4	8,5	4,1	2,6	38	60	33	103	33
41	8,4	8,3	8,9	5,1	3,3	8,4	4,2	2,6	39	61	34	104	32
42	9,3	8,4	8,8	5,0	3,2	8,3	4,2	2,5	40	62	35	105	31
43	9,4	8,5	8,7	4,9	3,1	8,2	4,3	2,5	41	63	36	106	30
44	9,1	8,3	8,6	4,8	3,0	8,1	4,2	2,4	42	64	37	107	29
45	8,8	8,1	8,5	4,7	2,9	8,0	4,1	2,4	43	65	38	108	28
46	8,5	7,9	8,4	4,6	2,8	7,9	4,0	2,3	44	66	39	109	27
47	8,2	7,7	8,3	4,5	2,7	7,8	3,9	2,3	45	67	40	110	26
48	7,9	7,5	8,2	4,4	2,6	7,7	3,8	2,2	46	68	41	111	25
49	7,6	7,3	8,1	4,3	2,5	7,6	3,7	2,2	47	69	42	112	24
50	7,3	7,1	8,0	4,2	2,4	7,5	3,6	2,1	48	70	43	113	23

Задание к лабораторной работе № 5

	L1	L2	L3	L4	h1	h2	h3	M	P1	P2	q
1	2.3	5.4	5.9	3.2	2.8	3.7	2.7	3.0	37	86	30
2	2.4	5.5	6.0	3.3	2.9	3.6	2.8	4.0	38	87	31
3	3.3	5.6	6.1	3.4	3.0	3.5	2.8	5.0	39	88	32
4	3.4	5.7	6.2	3.5	3.1	3.4	2.9	6.0	40	89	33
5	4.3	5.8	6.3	3.6	3.2	3.3	2.9	7.0	41	90	34
6	4.4	5.9	6.4	3.7	3.3	3.2	3.0	8.0	42	91	32
7	5.3	6.0	6.5	3.8	3.4	3.1	3.0	9.0	43	92	30
8	5.4	6.1	6.6	3.9	3.5	3.0	3.1	10.0	44	93	28
9	6.3	6.2	6.7	4.0	3.6	2.9	3.1	11.0	45	94	26
10	2.3	7.4	9.8	6.0	3.1	10.4	5.5	23.0	35	95	50
11	7.3	7.5	9.7	5.9	3.0	10.4	3.8	24.0	36	96	53
12	7.4	7.6	9.6	5.8	2.9	10.3	3.8	25.0	37	97	56
13	8.3	7.7	9.5	5.7	2.8	10.3	3.9	26.0	38	98	59
14	2.3	7.4	12.6	6.8	2.4	4.8	7.3	5.4	60	68	84
15	9.3	7.5	12.5	6.7	2.3	4.8	3.8	6.4	61	69	87
16	9.4	7.6	12.4	6.6	2.2	4.7	3.8	7.4	62	70	90
17	9.1	7.4	12.3	6.5	2.1	4.7	3.7	8.4	63	71	93
18	8.8	7.2	12.2	6.4	2.0	4.6	3.6	9.4	64	72	96
19	2.2	7.6	9.3	6.8	4.8	7.3	5.4	60.0	23	68	34
20	1.8	8.2	10.1	5.3	4.3	5.3	5.8	58.0	30	50	56
21	1.5	8.0	10.0	5.2	4.2	5.3	4.0	59.0	31	51	59
22	1.2	7.8	9.9	5.1	4.1	5.2	3.9	60.0	32	52	62
23	0.9	7.6	9.8	5.0	4.0	5.2	3.8	61.0	33	53	65
24	0.6	7.4	9.7	4.9	3.9	5.1	3.7	62.0	34	54	68
25	3.0	7.2	9.6	4.8	3.8	5.1	3.6	63.0	35	55	71
26	2.7	7.0	9.5	4.7	3.7	5.0	3.5	64.0	36	56	74
27	2.4	6.8	9.4	4.6	3.6	5.0	3.4	65.0	37	57	77
28	4.2	1.8	2.8	5.3	6.4	4.5	5.9	7.0	15	91	45
29	5.3	1.9	2.9	5.4	6.5	4.4	5.7	8.0	16	92	44
30	5.4	2.0	3.0	5.5	6.6	4.3	5.6	9.0	17	93	43
31	6.3	2.1	3.1	5.6	6.7	4.2	5.5	10.0	18	94	42
32	2.3	7.4	9.8	6.0	4.2	9.3	12.1	11.0	25	95	41
33	7.3	7.5	9.7	5.9	4.1	9.2	12.0	12.0	26	96	40
34	7.4	7.6	9.6	5.8	4.0	9.1	11.8	13.0	27	97	39
35	8.3	7.7	9.5	5.7	3.9	9.0	11.7	14.0	28	98	38
36	8.4	7.8	9.4	5.6	3.8	8.9	11.6	15.0	29	99	37
37	9.3	7.9	9.3	5.5	3.7	8.8	11.4	16.0	30	100	36
38	9.4	8.0	9.2	5.4	3.6	8.7	11.3	17.0	31	101	35
39	9.5	8.1	9.1	5.3	3.5	8.6	11.2	18.0	32	102	34
40	8.3	8.2	9.0	5.2	3.4	8.5	11.1	19.0	33	103	33
41	8.4	8.3	8.9	5.1	3.3	8.4	10.9	20.0	34	104	32
42	9.3	8.4	8.8	5.0	3.2	8.3	10.8	21.0	35	105	31
43	9.4	8.5	8.7	4.9	3.1	8.2	10.7	22.0	36	106	30
44	9.1	8.3	8.6	4.8	3.0	8.1	10.5	23.0	37	107	29
45	8.8	8.1	8.5	4.7	2.9	8.0	10.4	24.0	38	108	28
46	8.5	7.9	8.4	4.6	2.8	7.9	10.3	25.0	39	109	27
47	8.2	7.7	8.3	4.5	2.7	7.8	10.1	26.0	40	110	26
48	7.9	7.5	8.2	4.4	2.6	7.7	10.0	27.0	41	111	25
49	7.6	7.3	8.1	4.3	2.5	7.6	9.9	28.0	42	112	24
50	7.3	7.1	8.0	4.2	2.4	7.5	9.8	29.0	43	113	23

Задание к лабораторной работе № 7

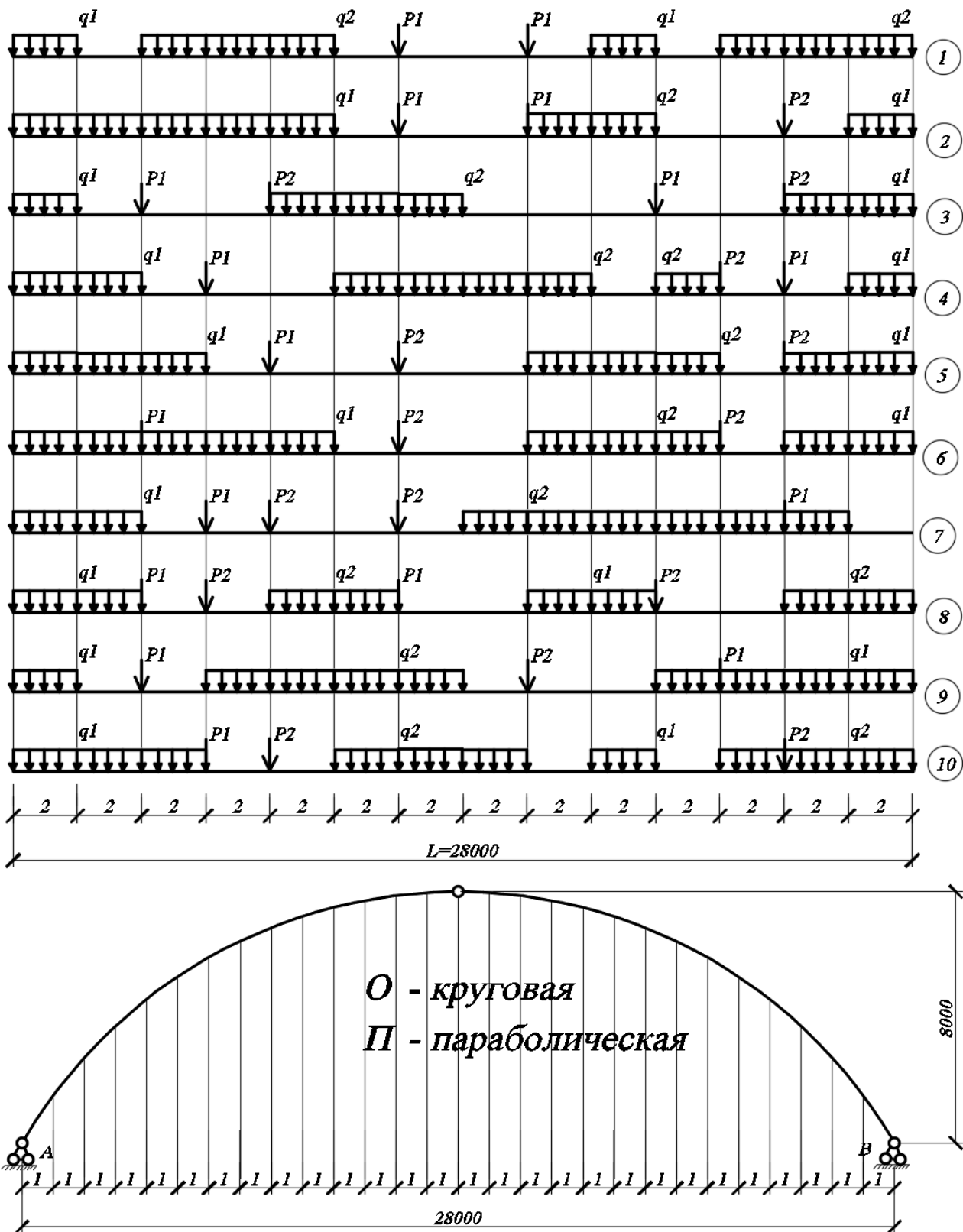


Рисунок – Задание внешней нагрузки, схема арки

	Вид арки	№ нагр.	P1	P2	q1	q2							
1	О	1	37	86	5	15	26	П	6	36	56	4	21
2	П	2	38	87	6	18	27	О	7	37	57	8	24
3	О	3	39	88	4	21	28	О	1	15	91	11	65
4	П	4	40	89	8	24	29	П	2	16	92	8	50
5	О	5	41	90	9	24	30	О	3	17	93	10	15
6	П	6	42	91	5	32	31	П	4	18	94	10	35
7	О	7	43	92	9	37	32	О	5	25	95	11	40
8	П	8	44	93	7	32	33	П	6	26	96	12	45
9	О	9	45	94	12	35	34	О	7	27	97	8	25
10	П	10	35	95	16	46	35	П	8	28	98	9	30
11	О	1	36	96	14	35	36	О	9	29	99	10	15
12	П	2	37	97	9	20	37	П	10	30	100	8	5
13	О	3	38	98	8	18	38	П	1	31	101	10	8
14	П	4	60	68	9	24	39	О	2	32	102	5	50
15	О	5	61	69	5	32	40	П	3	33	103	7	55
16	П	6	62	70	9	37	41	О	4	34	104	9	60
17	О	7	63	71	5	15	42	П	5	35	105	5	24
18	П	8	64	72	6	18	43	О	6	36	106	6	27
19	О	9	23	68	4	21	44	П	7	37	107	7	35
20	П	10	30	50	9	24	45	О	8	38	108	12	18
21	О	1	31	51	5	32	46	П	9	39	109	14	21
22	П	2	32	52	9	37	47	О	10	40	110	16	24
23	О	3	33	53	4	21	48	П	1	41	111	2	15
24	П	4	34	54	8	24	49	О	2	42	112	3	18
25	О	5	35	55	9	24	50	П	3	43	113	4	21

Задание к лабораторной работе № 10

	A, мм	B, мм	C, мм	R, мм	d, мм						
1	220	250	45	45	15	26	250	350	300	35	20
2	320	260	350	35	23	27	250	280	350	60	22
3	300	280	350	30	14	28	200	200	390	16	20
4	220	250	300	45	15	29	200	140	390	23	20
5	250	280	380	40	12	30	160	110	360	14	16
6	250	200	380	50	20	31	240	210	370	21	24
7	200	150	350	30	10	32	180	180	310	19	18
8	300	300	360	50	18	33	260	180	360	26	26
9	220	250	300	45	15	34	240	190	360	18	24
10	320	260	350	35	23	35	200	250	310	23	20
11	300	280	350	30	14	36	300	270	390	27	30
12	250	350	300	35	20	37	280	210	360	23	28
13	380	380	380	60	24	38	190	140	360	12	19
14	350	300	350	50	20	39	280	210	390	21	28
15	230	200	350	25	8	40	290	140	360	28	29
16	350	300	380	60	18	41	260	200	360	23	26
17	360	200	350	50	25	42	290	250	390	23	29
18	320	280	350	35	20	43	310	220	330	23	31
19	360	350	380	40	20	44	260	250	370	28	26
20	380	300	320	30	20	45	270	210	330	23	27
21	320	350	360	60	25	46	280	270	310	19	28
22	330	300	320	50	20	47	220	180	240	14	22
23	350	380	300	35	15	48	260	270	360	19	26
24	280	250	230	20	10	49	200	250	310	23	20
25	330	380	350	30	15	50	200	200	360	25	20

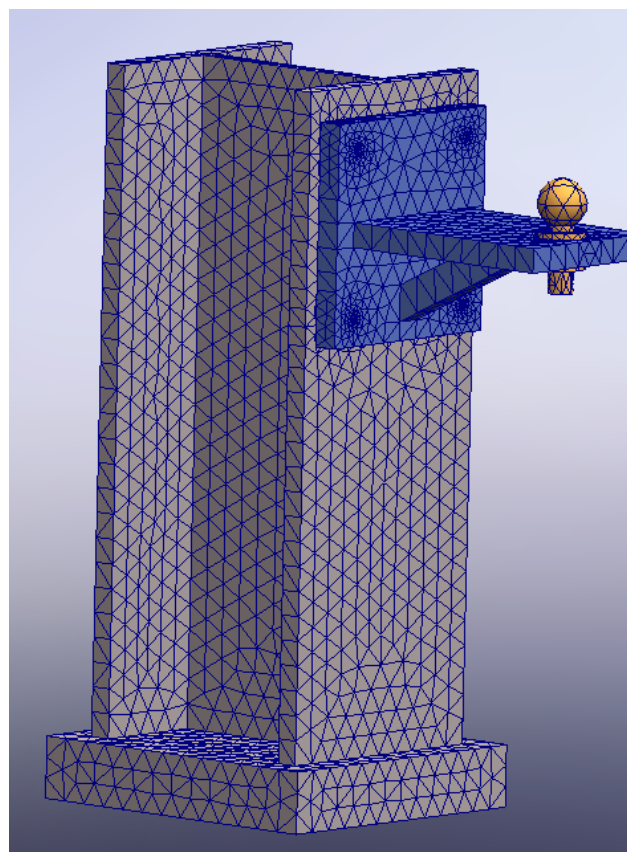
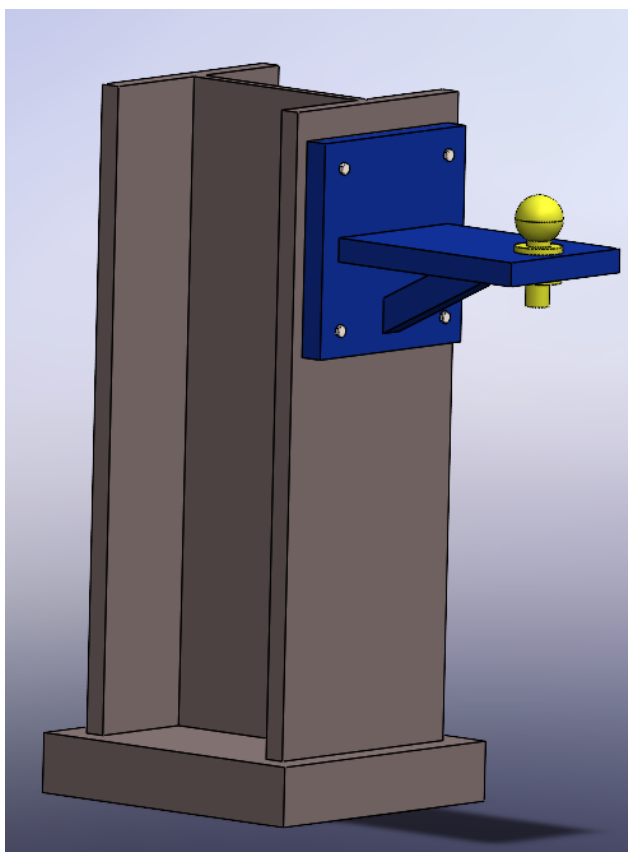


Рисунок – Сборка «Опорный узел», конечно-элементная модель

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современный расчет строительных конструкций невозможно представить без использования программных комплексов, которые предоставляют пользователю большое число инструментов в области автоматизированного проектирования. Программные комплексы сегодня имеют очень большие и широкие возможности для решения самых сложных инженерных задач. При этом программные комплексы накладывают на пользователя определенные требования:

- умение правильно сформировать расчетную схему;
- производить расчеты сооружений по различным моделям;
- анализировать полученные результаты.

При освоении программных комплексов программных комплексов *Lira*, *Scad* и компьютерных программ *Sirius*, *Arka2*, *Arka3* рекомендуется использовать учебную литературу из библиографического списка и ресурсы сети Интернет.

Список использованных источников

1. LiraLand. Группа компаний. – URL: <http://www.liraland.ru> (дата обращения: 23.12.2024).
2. Scad Office. Вычислительный комплекс Scad / В. С. Карпиловский [и др.]. – М. : АСВ, 2007. – 592 с.
3. Алямовский А. А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation / А. А. Алямовский. – М. : ДМК Пресс, 2019. – 463с.
4. Алямовский, А. А. SolidWorks Simulation. Инженерный анализ для профессионалов: задачи, методы, рекомендации / А. А. Алямовский. – М. : ДМК Пресс, 2015. – 562 с.
5. Гузенков, В. Н. SolidWorks 2016: Трехмерное моделирование деталей и выполнение электронных чертежей : учебное пособ. / В. Н. Гузенков, П. А. Журбенко, Т. В. Бондарева. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 124 с.
6. Дударева, Н. Ю. SolidWorks 2009 для начинающих / Н. Ю. Дударева, С. А. Загайко. – М. : БХВ-Петербург, 2013. – 448 с.
7. Зиновьев, Д. В. Основы проектирования в SolidWorks 2016 / Д. В. Зиновьев. –Vertex, 2017. – 276 с.
8. Игнатюк, В. И. Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В. И. Игнатюк, Н. В. Бочарова ; Брест. гос. техн. ун-т. – Брест : БрГТУ, 2015. – 100 с.
9. Караманский, Т. Д. Численные методы строительной механики / Т. Д. Караманский ; под ред. Г. К. Клейна ; пер с болг. – М. : Стройиздат, 1981. – 436 с.
10. Лира 9.4 Примеры расчета и проектирования : учеб. пособ. / Ю. В. Гензерский [и др.]. – К. : НИИАСС, 2006. – 124 с.
11. Лира 9.4. Руководство пользователя. Основы : учеб. пособ. / Е. Б. Стрелец-Стрелецкий [и др.]. – К. : ФАКТ, 2008. – 164 с.
12. Лукинских, С. В. Компьютерное моделирование и инженерный анализ в конструкторско-технологической подготовке производства : учеб. посособ. / С. В. Лукинских. – Екатеринбург : Урал. ун-т, 2020. – 168 с.
13. Семенов, А. А. Проектно-вычислительный комплекс Scad в учебном процессе. Статический расчет : учеб. пособ. / А. А. Семенов, А. И. Габитов. – М. : АСВ, 2005. – Ч. I. – 152 с.

Содержание

Введение.....	3
1 Лабораторная работа № 1 Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм.....	4
1.1 Создание фермы и ее статический расчет в ПК <i>Sirius</i>	8
1.2 Создание фермы и ее статический расчет в ПК <i>Lira</i>	10
1.3 Создание фермы и ее статический расчет в ПК <i>Scad</i>	18
1.4 Создание фермы и ее статический расчет в автоматизированной системе проектирования <i>SolidWorks</i>	22
1.5 Создание фермы и ее статический расчет в ПК <i>ANSYS</i>	30
2 Лабораторная работа № 2 Использование матриц влияния в расчетах ферм.....	33
3 Лабораторная работа № 3 Расчет балок методом конечных разностей....	36
4 Лабораторная работа № 4 Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок.....	46
5 Лабораторная работа № 5.....	55
5.1 Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам.....	55
5.2 Матричная форма определения перемещений в рамах.....	70
6 Лабораторная работа № 6 Исследование пространственной ферменной структуры в программных комплексах <i>Lira</i> , <i>Scad</i> , <i>SolidWorks</i> , <i>ANSYS</i>	78
7 Лабораторная работа № 7.....	87
7.1 Расчет усилий в трехшарнирных арках.....	87
7.2 Определение перемещений в трехшарнирных арках.....	102
7.3 Деформированный вид арки.....	108
8 Лабораторная работа № 8 Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования.....	112
9 Лабораторная работа № 9 Прочностной анализ и потеря устойчивости пространственного каркаса в программных комплексах <i>Lira</i> , <i>Scad</i> , <i>SolidWorks</i>	123
10 Лабораторная работа № 10 Проектирование опорного узла с болтовыми соединениями в ПК <i>SolidWorks Simulation</i> и <i>ANSYS</i>	133
11 Общие сведения о программных комплексах.....	146
11.1 Общие сведения о ПК <i>Lira</i> и <i>Scad</i>	146
11.1.1 Подготовка исходных данных ПК <i>Lira</i> и <i>Scad</i>	146
11.1.2 Признак схемы ПК <i>Lira</i> и <i>Scad</i>	147
11.1.3 Последовательность решения задачи в ПК <i>Lira</i> и <i>Scad</i>	148

11.2 Общие сведения о программе <i>Sirius</i>	149
11.3 Общие сведения о программе <i>SdCAD</i>	149
11.4 Общие сведения о программе <i>Arka2, Arka3</i>	150
11.5 Общие сведения о ПК <i>SolidWorks</i>	151
11.5.1 Общие сведения о проектировании конструкций в <i>SolidWorks</i>	153
11.6 Общие сведения о ПК <i>ANSYS</i>	157
11.6.1 Общие сведения о проектировании конструкций в ПК <i>ANSYS</i>	161
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Задание к лабораторной работе № 4.....	163
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Задание к лабораторной работе № 5.....	164
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Задание к лабораторной работе № 7.....	165
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 Задание к лабораторной работе № 10	167
Заключение.....	168
Список использованных источников.....	169

Учебное издание

Составители:

Бочарова Наталья Владимировна

Веремейчик Андрей Иванович

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Методические указания для студентов специальности
7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений
(профилизация «Промышленное и гражданское строительство,
строительство и гражданская инженерия,
цифровое моделирование и проектирование»)

Ответственный за выпуск: Веремейчик А. И.

Редактор: Винник Н. С.

Компьютерный набор и верстка: Тюшкевич П. Б.

Корректор: Северянина А. Г.

Издательство БрГТУ. Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1569 от 16.10.2017 г.

Подписано в печать 27.12.2024 г. Формат 60×84 ¹/₁₆.

Бумага «Performer». Гарнитура «Times New Roman».

Усл. печ. л. 10. Уч. изд. л. 10,75. Заказ № 1299. Тираж 30 экз.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Брестский государственный технический университет».

224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
