УДК 624.014

МЕСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЕТЧАТЫХ КУПОЛОВ С ШАРНИРНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ СТЕРЖНЕЙ В УЗЛАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКИ

К. К. Глушко[1], К. А. Глушко[2], Н. В. Матвеенко[3], Н. Н. Шалобыта[4]

[1] К. т. н., доцент кафедры архитектуры, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: konstantin.glushko@bk.ru

[2] К. т. н., доцент, доцент кафедры природообустройства, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: diki69niki@mail.ru

[3] Старший научный сотрудник ОЛ НИЦИС, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: nikifarych@yandex.ru

[4] К. т. н., доцент, проректор по научной работе, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: nnshalobyta@bstu.by

Реферат

Сетчатые купола в качестве несущих конструкций покрытий зданий применяются с второй половины XIX века, тем не менее совершенствование методов расчёта таких конструкций ведётся и до сих пор. Особую сложность вызывает оценка критических нагрузок, вызывающих их потерю устойчивости, поскольку деформирование сетчатых куполов изначально геометрически нелинейно. В настоящее время существуют два основных метода решения подобных задач: численный и аналитический. Несмотря на широкое развитие численных методов, аналитические методы по-прежнему остаются актуальны из-за своей простоты и однозначности решений. Развитие систем компьютерной математики позволяет уменьшить количество математических упрощений, снижающих точность аналитических методов, увеличить количество наиболее значимых переменных на стадии формализации и построения математических моделей устойчивости сетчатых куполов. Одним из вопросов, не решённым однозначно до настоящего времени, является вопрос местной устойчивости сетчатых куполов, а именно определения критической нагрузки, вызывающей продавливание их узлов к центру кривизны описанной поверхности.

В результате анализа существующих подходов к решению задачи потери устойчивости формы однослойных сетчатых куполов с шарнирными узлами отдано предпочтение разработке методики проверки устойчивости их формы, основанной на аналитических зависимостях изменения внутренних усилий в стержнях, учитывающих геометрически нелинейное деформирование образующих их стержневых многогранников.

В представленной работе рассмотрена задача местной устойчивости стальных сетчатых куполов с шарнирным соединением стержней в узлах при действии внешней нагрузки на стержни, распределённой по треугольному закону. Определены зависимости изменения параметров критической нагрузки, распределённой по длине стержней. Для более точного описания продольно-поперечного изгиба в стержнях применён метод конечных разностей. Сформулировано условие местной устойчивости сетчатых куполов.

Ключевые слова: сетчатый купол, устойчивость, продольно-поперечный изгиб, жёсткость, критическая нагрузка, узел.

LOCAL STABILITY OF MESH DOMES WITH HINGED CONNECTION OF RODS IN NODES UNDER DISTRIBUTED LOAD ACTIONS

K. K. Hlushko, K. A. Hlushko, N. V. Matweenko, N. N. Shalobyta

Abstract

Mesh domes as load-bearing structures of building coverings have been used since the second half of the 19th century; nevertheless, the methods of calculation of such structures are still being improved. The evaluation of critical loads causing their loss of stability is particularly difficult, since the deformation of mesh domes is initially geometrically nonlinear. Currently, there are two main methods for solving such problems: numerical and analytical. Despite the wide development of numerical methods, analytical methods are still relevant because of their simplicity and unambiguity of solutions. The development of computer mathematics systems allows to reduce the number of mathematical simplifications that reduce the accuracy of analytical methods, to increase the number of the most important variables at the stage of formalization and construction of mathematical models of stability of mesh domes. One of the issues that has not been solved unambiguously up to the present time is the issue of local stability of mesh domes, namely, the determination of the critical load that causes their nodes to push through to the center of curvature of the described surface.

As a result of the analysis of existing approaches to solving the problem of loss of stability of the shape of single-layer mesh domes with hinged nodes, preference was given to the development of a technique for checking the stability of their shape based on analytical dependences of changes in the internal forces in the rods, taking into account geometrically nonlinear deformation of the rod polyhedrons forming them.

In the presented work the problem of local stability of steel mesh domes with hinged connection of rods in nodes under the action of external load on the rods distributed according to the triangular law is considered. The dependences of changes in the parameters of the critical load distributed along the length of the rods have been determined. For a more accurate description of longitudinal-transverse bending in the rods, the finite difference method is applied. The condition of local stability of mesh domes is formulated.

Keywords: mesh dome, stability, longitudinal-transverse bending, stiffness, critical load, knot.

Введение

Необходимость перекрытия больших пролётов вызывает необходимость применения пространственных конструкций, которые наиболее эффективны по расходу материалов к единице перекрываемой площади, имеют высокую жёсткость и опыт применения в строительстве [1].

В работах [1–15] изложены решения задачи местной устойчивости сетчатых куполов с жёскими, податливыми и шарнирными узлами при действии сосредоточенной узловой нагрузки. Малая изученность отдельных видов устойчивости конструкций такого вида, как, например, вопрос о наступлении местной устойчивости сетчатых куполов, нагруженных распределенной по поверхности нагрузкой, передаваемой на стержни, не сосредоточенно в узлах, а распределенно по длине, препятствуют широкому применению [1]. Как правило, такое нагружение характерно для беспрогонной кровли (в сетчатых куполах, применяемых в качестве световых фонарей для верхнего света в помещениях зданий различного назначения), внешняя оболочка покрытия при этом соединена со стержнями непосредственно. При этом длины стержней сетчатых куполов позволяют устроить остекление без дополнительных несущих конструкций. В этом случае внешняя нагрузка, распределённая по криволинейной поверхности по некоторому закону, передаётся на стержни с переменной шириной грузовой площадки. При незначительной разнице

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23

в длинах стержней максимальные значения распределённой нагрузки на стержни будет находиться в их середине. Стержни сетчатого купола будут при этом испытывать продольно-поперечный изгиб, сопровождающийся поворотом их концов и изменением проекций внутренних усилий. Поскольку угол поворота хорды стержня при перемещении узлов сетчатого купола при потере местной устойчивости имеет тот же порядок малости, что и угол поворота концов стержня, необходимо учесть влияние последних на величину критической нагрузки, приводящей к продавливанию узлов стержневых многогранников, образующих сетчатый купол, к центру описанной сферы.

Построение методики проверки устойчивости сетчатых куполов с шарнирными узлами

Целью представленной работы является определение параметра критической величины распределённой внешней нагрузки по длине стержня в сетчатых куполах, составленных из шарнирно-стержневых многогранников.

На рисунке 1 представлен план радиально-кольцевого сетчатого купола и его фрагмент в пределах смежных плоскостей симметрии.

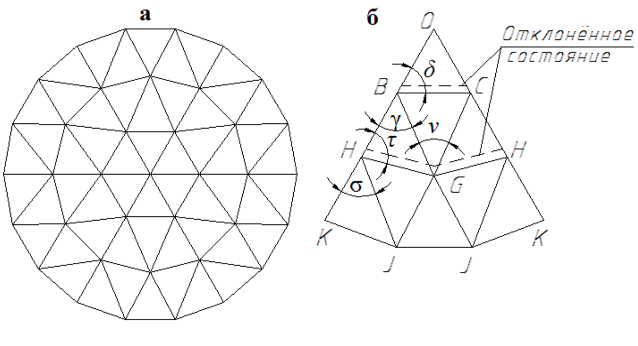


Рисунок 1 – План двухъярусного фрагмента сетчатого купола (а), его сегмент в исходном и в равновесном отклонённом состоянии в плане (б)

Следует рассмотреть деформирование стержней трёхъярусного фрагмента сетчатого купола, приняв его опирание шарнирно-неподвижным.

Основные предпосылки, принятые в расчёте:

1) форма равновесия симметрична, вертикально действующая внешняя нагрузка является осесимметричной;

2) длины стержней различаются незначительно и могут быть приняты одинаковыми;

3) моменты инерции относительно горизонтальной оси поперечного сечения стержня и площади поперечных сечений стержней одинаковы;

4) материал стержней изотропен, деформирование стержней является упругим;

5) размерами узлов на напряжённо-деформированное состояние сетчатых куполов можно пренебречь;

6) воздействия на сетчатые купола являются силовыми;

7) стержни кольцевых рядов горизонтальны как в исходном состоянии, так и в отклонённом равновесном состоянии в силу симметрии;

8) кривизна стержней велика, продольные деформации изогнутых стержней принимаются равными продольным деформациям их хорд.

Вывод зависимостей, позволяющих определить величины безразмерных параметров продольных деформаций стержней относительно безразмерных параметров перемещений, приведён в работе, посвящённой исследованию местной устойчивости сетчатых куполов с шарнирными узлами с учётом их деформирования [16–20]. В работах [16, 17, 19] произведено сравнение характера деформирования стержневого многогранника в составе двухъярусного и трёхъярусного сетчатых куполов. При сравнении параметров критических нагрузок, которые являются локальными максимумами на полученных диаграммах равновесных состояний, выявлено, что расхождение между ними не превышает 0,7 % – 1 %. Из этого следует, что влияние напряжённо-деформированного состояния стержней, находящихся за пределами двух верхних ярусов купола, оказывает малое влияние на характер деформирования верхнего стержневого многогранника. При этом выявлено, что в загруженной части сетчатого купола можно выделить двухъярусный фрагмент, нагрузка на узлы которого может быть принята осесимметричной и перпендикулярной его основанию без значительной погрешности. Геометрические параметры двухъярусного сетчатого купола и геометрические характеристики поперечных сечений его стержней должны быть аналогичны выделенному в полноразмерном сетчатом куполе двухъярусному фрагменту. Таким образом, проверку местной устойчивости сетчатых куполов можно производить не только при осесимметричном их загружении в целом, но и при загружении некоторой области, внутри которой нагрузка на выделенные двухъярусные фрагменты может быть принята осесимметричной.

Принимая неизменным обозначения узлов двухъярусного фрагмента сетчатого купола, эти зависимости можно записать в следующем виде:

$$\frac{N_{OC}}{\rho_1^2 EA} = \bar{\varepsilon}_{OC} = \chi_1\left(1-0.5\chi_1\right)+0.5\cdot\varepsilon_{BC}\sec\delta\,; \qquad (1)$$

$$\frac{N_{CH}}{\rho_1^2 EA} = \bar{\varepsilon}_{CH} = 9\chi_2\left(1-0.5\chi_2\right)-0.5\cdot\varepsilon_{BC}\sec\delta\,; \qquad (2)$$

$$\frac{N_{CG}}{\rho_1^2 EA} = \bar{\varepsilon}_{CG} = 9\chi_2\left(1-0.5\chi_2\right)-0.5\cdot\varepsilon_{BC}\sec\delta\cos\gamma\,; \qquad (3)$$

из условий равновесия продольных сил в узлах типа *B*, пренебрегая проекциями поперечных сил на касательную плоскость в этих узлах:

$$\frac{N_{BC}}{\rho_1^2 EA} = \bar{\varepsilon}_{BC} = \frac{9\chi_2\left(1-0.5\chi_2\right)\left(1+2\cos\gamma\right)-\chi_1\left(1-0.5\chi_1\right)}{2\cos\delta+\sec\delta\left(1+\cos^2\gamma\right)}\,, \qquad (4)$$

где χ_1, χ_2 – безразмерные параметры перемещений узлов, численно равные отношению перемещения узла в пределах яруса купола *f* к высоте яруса Δ;

N_i – продольная сила в стежне, м;

ρ_1 – угол наклона стержней верхнего яруса к касательной плоскости в точке касания узла *O* описанной сферы.

В работах [16–18, 20] изложено построение методики проверки устойчивости сетчатых куполов с жёсткими узлами, в которых учтено влияние продольно-поперечного изгиба стержней, приводящего к изменению поперечной силы. Следует использовать дифференциальное уравнение продольного изгиба для установления изменения величины поперечной силы в стержнях также и для шарнирно-стержневых сетчатых куполов. Для этого следует рассмотреть дифференциальное уравнение изгиба стержня четвёртого порядка:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}+N\frac{d^2w}{dx^2}=q\left(x\right), \qquad (5)$$

q(x) – закон изменения распределённой нагрузки по длине стержня, Н/м,

N – величина продольной силы в стержне, Н.

Для установления закона действующей нагрузки на стержень необходимо рассмотреть фрагмент однослойного сетчатого купола, находящийся в секторе симметрии. На рисунке 2 показан рассматриваемый фрагмент и верхний стержневой многогранник с обозначением грузовых площадей.

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23

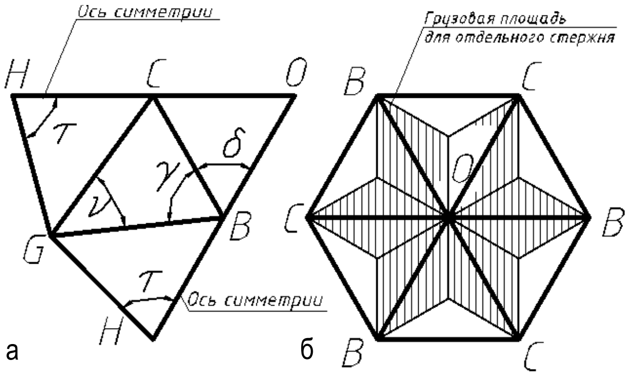


Рисунок 2 – Фрагмент сетчатого купола (а) и определение грузовых площадей (б)

В силу переменной ширины грузовой площадки величина распределённой нагрузки будет изменяться по длине стержня, при этом максимальное значение придётся на его середину. Решение дифференциального уравнения (5) произведено для случая действия нагрузки на стержень, распределённой по длине по закону параболы как непрерывной функции, площадь которой равна площади нагрузки, распределённой по треугольному закону. Таким образом, равнодействующие величины нагрузок, распределённых по длине стержня по треугольному закону и по закону параболы, равны по значению, величины значений поперечных сил на концах также равны. Непрерывная функция распределённой нагрузки может быть записана в следующем виде:

$$q(\xi)=3q_{\max}\xi\left(1-\xi\right), \tag{6}$$

где $q(\xi)$ – закон изменения непрерывной параболической нагрузки по длине стержня, Н/м;

$\xi = x/L$ – безразмерная координата длины;

x – текущая координата, м;

L – длина стержня, м.

Такое представление формы внешней нагрузки является несколько приближённым, однако при значительной разнице длин смежных стержней изменение распределённой нагрузки может быть аппроксимировано при помощи выражения (6). Приняв равным нулю вертикальные перемещения концов стержней, а также приняв равными нулю изгибающие моменты на концах, общее решение дифференциального уравнения (5) теперь запишется в следующем виде:

$$w=\frac{q_{\max}L^4}{u^6EI}\left(6\left(\cos\left(u\cdot\xi\right)-\frac{\sin\left(u\cdot\xi\right)\left(\cos u-1\right)}{\sin u}\right)-\frac{1}{4}\left(u^4\xi^4-2u^4\xi^3+12u^2\xi^2+\xi u^2\left(u^2+12\right)+24\right)\right), \tag{7}$$

где u – безразмерный параметр продольной силы в стержне:

$$u=l\sqrt{\frac{N}{EI}}=\sqrt{\frac{\varepsilon\rho_1^2L^2EA}{EI}}=n\sqrt{\varepsilon}, \tag{8}$$

n – эквивалентная гибкость, параметр, связывающий геометрические характеристики подобранного сечения и геометрические характеристики стержневого многогранника [12]:

$$n=\sqrt{\frac{L^2\rho_1^2EA}{EI}}=\frac{\rho_1\cdot L}{i}=\frac{\Delta_1}{i}, \tag{9}$$

Δ_1 – стрела подъёма верхнего стержневого многогранника, м,

i – радиус инерции поперечного сечения, м.

Выражение для определения величины поперечной силы на концах стержня может быть получено из уравнения (7):

$$Q=EI\frac{d^3w}{dx^3}=\frac{q_{\max}L}{4}\varphi\left(u\right), \tag{10}$$

где $\varphi\left(u\right)$ – функция изменения величины поперечной силы на конце стержня из-за поворота концевого поперечного сечения:

$$\varphi\left(u\right)=12\frac{4\sin^2(0.5u)-u\sin u}{u^3\sin u}, \tag{11}$$

при этом

$$\lim_{u\to 0}\varphi\left(u\right)=1. \tag{12}$$

Выражение для определения величины углов поворота концов стержней может быть получено путём дифференцирования уравнения (7):

$$\theta=\frac{q_{\max}L^3}{EI}\cdot\left(\frac{1}{4u^2}+\frac{3}{u^4}+\frac{12\left(\cos^2\left(0.5u\right)-1\right)}{u^5\sin u}\right). \tag{13}$$

Уравнение равновесия внутренних сил в узлах меридиональной дуги при отсутствии сосредоточенных внешних сил можно записать в следующем виде:

$$N_{CH}\cdot\left(3\rho_1\left(1-\chi_2\right)+\theta_{CH}\right)+2N_{CG}\cdot\left(3\rho_1\left(1-\chi_2\right)+\theta_{CG}\right)-N_{OC}\left(\rho_1\left(1-\chi_1\right)+\theta_{OC}\right)=Q_{OC}-Q_{CH}-2Q_{CG}; \tag{14}$$

$$N_{OC}\left(\rho_1\left(1-\chi_1\right)+\theta_{OC}\right)=Q_{OC}, \tag{15}$$

разделив которые на ρ_1^3EA и соотнеся правые и левые части, можно получить следующее уравнение, которое решается относительно безразмерных параметров перемещений узлов χ_2 нижнего яруса рассматриваемого двухъярусного фрагмента сетчатого купола, при задании параметров перемещения узлов верхнего яруса χ_1 и эквивалентной гибкости n:

$$\frac{3\left(1-\chi_2\right)\left(\varepsilon_{CH}+2\varepsilon_{CG}\right)-\varepsilon_{OC}\left(1-\chi_1\right)}{\varepsilon_{OC}\left(1-\chi_1\right)}=\frac{\varphi_{OC}-\omega\cdot\left(\varphi_{CH}+2\varphi_{CG}\right)}{\varphi_{OC}}+n^2\frac{\Theta_{OC}-\omega\cdot\left(\Theta_{CH}+2\Theta_{CG}\right)}{\varphi_{OC}}, \tag{16}$$

где ω – соотношение максимальных величин распределённых нагрузок в верхнем и нижележащем ярусе рассматриваемого двухъярусного фрагмента сетчатого купола;

Θ – правая часть выражения (13), стоящая внутри скобок, применённая для соответствующего стержня.

В случае растяжения в стержнях типа *ВС* кольцевых направлений в выражении (11) тригонометрические функции необходимо заменить на одноимённые гиперболические.

Выражения (6) – (16) являются приближёнными из-за приближённого представления внешней нагрузки, распределённой по параболическому закону на стержень, и могут быть использованы для первоначального, приближённого отыскания величин χ_1 и χ_2. Для более точного решения следует воспользоваться методом конечных разностей при решении дифференциального уравнения (5), представив его запись в следующем виде, разделив каждый стерженъ на количество участков k:

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23

$$\Delta^4 w + \frac{u^2}{k^2}\Delta^2 w = \frac{L^4}{k^4 EI} q\,, \tag{17}$$

где функция нагрузки представлена в следующем виде:

$$q = q_{\max}\cdot\begin{cases}\dfrac{2}{k}i, & i \le \dfrac{k}{2};\\[2mm] 1-\dfrac{2}{k}i, & \dfrac{k}{2} < i \le k;\ i = 1,2,3\ldots k,\end{cases} \tag{18}$$

k – число участков разбиения стержня по длине;

i – порядковый номер участка разбиения длины стержня, порядковый номер узла (при начале нумерации узлов, в которых составляются конечные разности по длине стержня i = 0).

В матричной записи уравнение (16) может быть представлено в виде:

$$[D][w] = \frac{q_{\max}L^4}{k^4 EI}[\overline{q}]\,, \tag{19}$$

где Δ – обозначение конечной разности, обозначает разницу между значениями функции изогнутой оси в точке i и i-1;

$[\overline{q}]$ – вектор-столбец отношений величин нагрузок к максимальной величине на каждом участке разбиения, представленных методом правых прямоугольников до середины стержня и левых прямоугольников от его середины до конца, Н/м; величины его членов изменяются от нуля на концах до единицы в середине;

$[w]$ – вектор-столбец неизвестных величин прогибов нейтральной оси стержня, м;

$[D]$ – суммарная матрица коэффициентов при неизвестных и граничных условий:

$$[D_4] = \begin{bmatrix} \multicolumn{7}{c}{\boxed{\text{Область граничных условий (2 строки)}}}\\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \ldots\\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \ldots\\ \ldots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1\\ \multicolumn{7}{c}{\boxed{\text{Область граничных условий (2 строки)}}} \end{bmatrix},\ [D_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}\ [\overline{q}] = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ q_2/q_{\max}\\ \ldots\\ q_{k-2}/q_{\max}\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}; \tag{20}$$

$$[D] = [D_4] + \frac{u^2}{k^2}[D_2]. \tag{21}$$

Схема деления стержня на узлы, в которых производится решение уравнения (17), и нумерация участков длиной L/k приведена на рисунке 3.

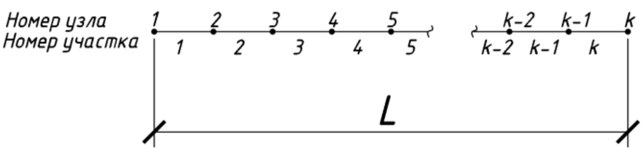


Рисунок 3 – Схема разбиения стержня по длине

Формулировка возможных граничных условий для шарнирного закрепления обоих концов

$$\Delta^2 w_0 = 0.\ \Delta^2 w_k = 0; \tag{22}$$

$$w_0 = 0,\ w_k = 0. \tag{23}$$

Чтобы производные функции изогнутой оси стержня в начальной и конечной точках одного порядка точности при формулировании граничных условий, следует использовать интерполяционный полином Лагранжа:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{k} w_i l_i(x)\,, \tag{24}$$

где

$$l(x) = \prod_{j=0,\, j\ne i}^{k} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\cdot\frac{x-x_{j+1}}{x_i-x_{j+1}}\cdot\frac{x-x_{j+2}}{x_i-x_{j+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,. \tag{25}$$

Тогда конечные разности первого и второго порядка в начальной и конечной точках запишутся в следующем виде:

$$\Delta w_0 = -\frac{137}{60}w_0 + 5w_1 - 5w_2 + \frac{10}{3}w_3 - \frac{5}{4}w_4 + \frac{1}{5}w_5; \tag{26}$$

$$\Delta w_k = \frac{137}{60}w_k - 5w_{k-1} + 5w_{k-2} - \frac{10}{3}w_{k-3} + \frac{5}{4}w_{k-4} - \frac{1}{5}w_{k-5}; \tag{27}$$

$$\Delta^2 w_0 = \frac{1}{12}\left(45w_0 - 154w_1 + 214w_2 - 156w_3 + 61w_4 - 10w_5\right); \tag{28}$$

$$\Delta^2 w_k = \frac{1}{12}\left(45w_k - 154w_{k-1} + 214w_{k-2} - 156w_{k-3} + 61w_{k-4} - 10w_{k-5}\right). \tag{29}$$

Уравнение (19) может быть решено матричным методом:

$$[w] = \frac{q_{\max}L^4}{k^4 EI}[D]^{-1}[\overline{q}] \tag{30}$$

или

$$[w] = \frac{q_{\max}L^4}{k^4 EI}[W]\,, \tag{31}$$

где

$$[W] = [D]^{-1}[\overline{q}] \tag{32}$$

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23

является функцией-формой безразмерных ординат прогибов стержня, и члены которой численно равны w_i/L.

Величина поперечной силы на левом конце стержня может быть найдена при помощи следующего выражения:

$$\frac{EIk^3}{L^3}\Delta^3 w_{0,j}=\frac{q_{\max,j}L}{4}\varphi_j, \quad (33)$$

откуда

$$\varphi_j=\frac{4}{k}\Delta^3 W_{0,j}, \quad (34)$$

$$\Delta^3 W_{0,j}=\frac{1}{4}\left(-17W_{0,j}+71W_{1,j}-118W_{2,j}+98W_{3,j}-41W_{4,j}+7W_{5,j}\right), \quad (35)$$

здесь j – наименование стержня (OC. BC, CH и CG).

С учётом выражений (26) – (29) выражение (16) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{3(1-\chi_2)(\varepsilon_{CH}+2\varepsilon_{CG})-\varepsilon_{OC}(1-\chi_1)}{\varepsilon_{OC}(1-\chi_1)}=$$
$$=\frac{\Delta^3 W_{0,OC}-\omega\cdot\left(\Delta^3 W_{k,CH}+2\Delta^3 W_{k,CG}\right)}{\Delta^3 W_{0,OC}}+n^2\frac{\Delta W_{0,OC}-\omega\cdot\left(\Delta W_{k,CH}+2\Delta W_{k,CG}\right)}{k^2\Delta^3 W_{0,OC}}. \quad (36)$$

Решение уравнения (33) производится в следующем порядке:

1) первоначально решается уравнение (16) относительно параметров χ_1, задавшись параметрами χ_1, n и ω;

2) параметры χ_1, n и ω подставляются в выражения (1) – (4) и (8);

3) производится решение уравнения (32) с нормализацией вектора полученного решения;

4) производится решение уравнение (36) относительно параметров χ_2, задавшись параметрами χ_1 и ω, полученные значения будут несколько уточнены от найденных первоначально в уравнении (16);

5) далее повторно производится решение уравнений (32) и (36) согласно п. 2–4 до достижения результата вычисления параметров χ_1 с необходимой точностью.

Функциональная зависимость, описывающая процесс деформирования верхнего стержневого многогранника, может быть получена из уравнения равенства вертикальных проекций продольных и поперечных усилий в стержнях, соединяемых в верхнем узле:

$$R=\frac{\varepsilon_{OC}(1-\chi_1)}{k\left(\Delta^3 k^2 W_{k,OC}-n^2\Delta W_{k,}\right)_{OC}}, \quad (37)$$

величина R здесь комплексно связывает нагрузку на стержень, его жёсткость на растяжение и сжатие, длину стержня и стрелу подъёма верхнего стержневого многогранника:

$$R=\frac{q_{\max,OC}L}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3. \quad (38)$$

Условие местной устойчивости сетчатого купола может быть сформулировано в виде следующего неравенства:

$$\frac{q_{\max,OC}L}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3<\frac{\varepsilon_{OC}(1-\chi_1)}{k\left(\Delta^3 k^2 W_{k,OC}-n^2\Delta W_{k,OC}\right)}. \quad (39)$$

В представленной работе применён метод экстраполяции производных Рунге-Ромберга для определения такого количества k участков разбиения стержня по длине, при котором величина экстраполированного приращения производной была бы сопоставима с погрешностью её округления. Решение уравнения (32) производилось с числом участков N = 6, 12, 24, 48 разбиения стержня по длине. При этом погрешность вычисления производных второго порядка точности уменьшалась в 4, 16 и 64 раз соответственно. Величина погрешности первой численной производной безразмерной функции изогнутой оси по методу Рунге-Ромберга [19] произведена следующим образом:

$$O=\frac{W_{h/2}-W_h}{3}, \quad (40)$$

где $W_{h/2}$ – численная производная безразмерной функции изогнутой оси, определённая с использованием дробного (уменьшенного вдвое) шага; W_h – то же, с использованием принятого шага.

Оценка погрешности старших численных производных производилась путём последовательного дифференцирования первой производной.

При подстановке величин χ_1, χ_2 в уравнение (36) при фиксировании переменной n можно построить графические зависимости изменения приращений вертикальной проекций продольной силы в стержнях вблизи узла O, которые в каждом случае будут являться диаграммами равновесных состояний. На рисунке 4 изображены диаграммы равновесных состояний для шестиугольного плане стержневого многогранника, полученные для параметров эквивалентной гибкости n = 1 и n = 40 и неравномерности осесимметричного нагружения ω = 1; 0,75; 0,25; 0 распределённой нагрузкой.

Максимальное значение величины параметра нагрузки R на графиках 4а, 4б соответствует критическому значению. При превышении этих значений равновесие между вертикальными проекциями внутренних усилий в стержнях стержневых многогранников невозможно в их выпуклом состоянии и достигается только в вогнутом. Условие устойчивости сетчатого купола в случае продавливания его узлов можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{q_{\max,OC}L}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3<R_{кр}, \quad (41)$$

где величина $p_{кр}$ – значение критического безразмерного параметра нагрузки;

$P_{уз}$ – узловая нагрузка, приложенная к центральному узлу рассматриваемого стержневого многогранника, Н;

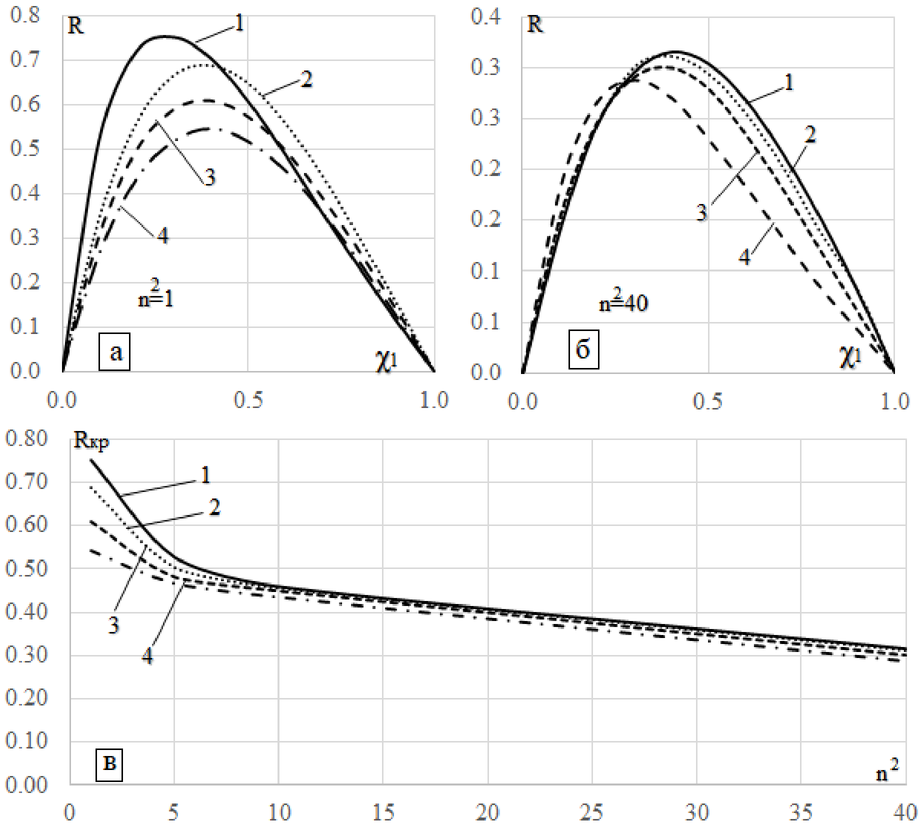
$R_{кр}$ – критическое значение безразмерного параметра нагрузки, определённое из диаграммы 4в.

Задача о местной потере устойчивости сетчатых куполов с действием распределённой внешней нагрузки на стержни рассматривается, по всей видимости, впервые. По этой причине верификация предложенной выше методики проведена с использованием конечно-элементного программного комплекса SAP 2000.

Было произведено сравнение диаграмм равновесных состояний, полученных на основе представленной численно-аналитической методике, и диаграмм деформирования для верхнего стержневого многогранника шарнирно-стержневых двухъярусных сетчатых куполов, сеть которых построена по радиально-кольцевой схеме (рисунок 1). Длины стержней меридионального направления, моменты инерции поперечных сечений в плоскости изгиба, стрелы подъёма стержневого многогранника верхнего яруса подбирались так, чтобы соблюдались квадраты эквивалентных гибкостей были бы равны тем, которые принимались для решения местной устойчивости сетчатых куполов по представленной выше методике: n^2 = 1, n^2 = 5, n^2 = 10, n^2 = 20, n^2 = 40, форма верхнего стержневого многогранника в плане – правильный шестиугольник. Опирание рассматриваемого двухъярусного фрагмента сетчатого

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23

купола принималось шарнирно-неподвижным. Были произведены численные расчёты в программе SAP2000 с учётом геометрической нелинейности, полагая модуль упругости материала стержней постоянным (материал – сталь, E = 206000 МПа) и не рассматривая иные формы потери устойчивости. На рисунке 5а показан рассмотренный способ приложения перемещений ко всем узлам, на рисунке 5(б) – общий вид расчётной модели. Перемещения найдены по описанной выше методике так, чтобы суммы вертикальных проекций внутренних усилий были равны (ω = 1). Такое сравнение результатов, безусловно, является выборочным из произвольного количества вариантов, однако не влияет на общность полученных выводов.



а – даграммы равновесных состояний стержневого многогранника сетчатого купола при $n^2 = 1$, б – то же при $n^2 = 40$, в – графики изменения параметров критических нагрузок при различных величинах квадрата эквивалентной гибкости;
1 – ω = 1, 2 – ω = 0,75, 3 – ω = 0,5, 4 – ω = 0

Рисунок 4 – Диаграммы равновесных состояний шестиугольного стержневого многогранника

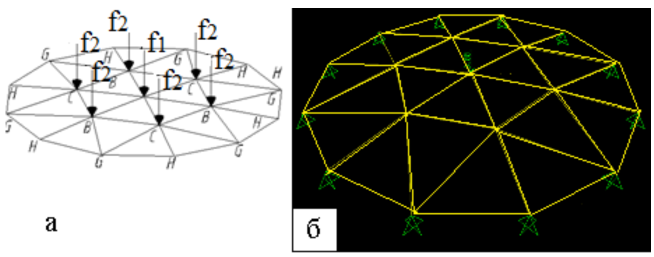


Рисунок 5 – Варианты задания перемещений узлов двухъярусного фрагмента сетчатого купола (а), общий вид расчётной модели (б)

В качестве аргумента при проведении численных расчётов принимались вертикальные перемещения узлов, найденные по изложенным выше зависимостям, их горизонтальные перемещения не ограничивались. Величины вертикальных перемещений узлов второго яруса f_2, вычисленные по представленной выше методике, и в SAP2000 различаются не более чем на 12 %, что приводит к расхождению безразмерных параметров нагрузок на 5–30 %, причём большей величине расхождений соответствуют меньшие значения ординат, кроме этого наблюдаются разные характеры деформирования стержневых многогранников в отдельных случаях диаграмма равновесных состояний, полученная при использовании численного метода расчёта не имеет критических точек, в отличие от одноимённой диаграммы, полученной аналитически. Следует также отметить, что величины критических нагрузок, полученные с использованием численного метода расчёта, всегда завышены относительно аналогичных значений, полученных по предложенным выше зависимостям. Также следует отметить, что в конечно-элементных программных комплексах для расчёта конструкций зданий и сооружений отсутствуют критерии, по которым можно судить о наступлении (или ненаступлении) такого вида потери устойчивости.

В работе [5, 10, 11] приведены методики оценки местной устойчивости сетчатых куполов, созданных из стержневых многогранников с шестью стержнями, соединяющимися шарнирно в каждом узле, при действии узловой нагрузки, определённые для случая центрального сжатия в стержнях без учёта влияния продольно-поперечного изгиба. Безразмерные критические параметры узловых нагрузок определяются как $P/EA \cdot (L/\Delta_1)^3$. Преобразовав их во внешнюю равномерно распределённую нагрузку на поверхность покрытия, поделив на $\frac{3\sqrt{3}}{8}L^2$ – грузовую площадь, приходящуюся на каждый узел сетчатого купола и умножив на $L/2$ – максимальную ширину грузовой площадки на стержень, можно получить значения максимальных параметров безразмерных значений, распределённых по длине стержня нагрузок. При этом величина внешней распределённой по площади покрытия нагрузки остаётся неизменной. В таблице 1 приведены значения безразмерных параметров узловых нагрузок и приведение их к распределённым по длине стержней.

Таблица 1 – Безразмерные параметры узловых нагрузок, приведенных к распределённым по длине стержней

Безразмерный параметр узловой нагрузки $\frac{P}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3$	
ω = 1	1,155
ω = 0	0,577
Безразмерный параметр узловой нагрузки, приведенной к максимальному значению распределённой по длине стержня с $\frac{q_{\max,OC}L}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3=\frac{P}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}L^2}\cdot\frac{L}{2}\approx 0,769\frac{P}{EAL}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3$	
ω = 1	0,769·1,155 = 0,888
ω = 0	0,769·0,577 = 0,443

Используя выше изложенную методику, можно определить параметры максимальных значений нагрузок при величине эквивалентной гибкости n→0. Так, при этом ω = 1 соответствует $\frac{q_{\max,OC}L}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3=0,725$, а при ω = 1 $\frac{q_{\max,OC}L}{EA}\left(\frac{L}{\Delta_1}\right)^3=0,411$. Расхождения при этом соответствуют от 22 % до 8 %.

В работе [21] исследован вопрос о местной устойчивости сетчатых куполов с шарнирным соединением стержней в узлах при действии сосредоточенной узловой нагрузки. Было произведено сравнение результатов расчёта критических нагрузок на примере двухъярусного фрагмента сетчатого купола диаметром 5 м, радиус описанной сферы 12,625 м, материал стержней – сталь, E = 206000 МПа, тип поперечного сечения – труба ϕ60х4 мм, стержни опорного контура закреплены шарнирно-неподвижно. Величины критических нагрузок для верхнего стержневого многогранника были найдены для коэффициентов неравномерности загружения ω = 1, ω = 0,75, ω = 0,5, ω = 0 и приведены к распределённой нагрузке на стержень. Найденные величины критических нагрузок, приведенных к распределённым превосходят значения критических нагрузок на стержень по изложенной выше методике на 20–46 % по причине совместного сжатия и изгиба стержней.

Выводы

1. Получены зависимости, позволяющие определить величины проекций внутренних усилий на концах шарнирно-опёртых стержней, загруженных распределённой нагрузкой по треугольному закону с максимальным значением посередине.

2. Получены зависимости, описывающие процесс деформирования стержневых многогранников, образующих шарнирно-стержневые сетчатые купола, которые позволяют учитывать их геометрически нелинейное деформирование, продольно-поперечный изгиб стержней, изменение углов поворота их концов, что даёт возможность вычислить величины критических значений распределённых нагрузок.

3. Разработана и предложена методика проверки местной устойчивости шарнирно-стержневых сетчатых куполов. Нагрузка на стержни которых передаётся непосредственно, без использования прогонов. Сформулировано условие их местной устойчивости формы.

Список цитированных источников

1. Журавлев, А. А. Пространственные деревянные конструкции / А. А. Журавлев, Г. Б. Вержбовский, Н. Н. Ерёменко. – Ростов н/Д : РГСУ, 2003. – 518 с.
2. Тур, В. И. Влияние податливости узловых соединений на напряженно-деформированное состояние металлического сетчатого купола / В. И. Тур, А. В. Тур // Фундаментальные исследования. Технические науки. – 2014. – № 6. – С. 1165–1168.
3. Abedi, K. Progressive collapse of single-layer braced domes / K. Abedi, G. A. R. Parke // International Journal of Space Structures. – 1991. – № 11 (3). – P. 291–306.
4. Abedi, K. Propagation of local instabilities in braced domes / K. Abedi : doctoral dissertation. – University of Surrey, 1997. – 333 p.
5. Gioncu, V. Buckling of Reticulated Shells: State-of-theArt / V. Gioncu // International Journal of Space Structures. – 1995. – Vol. 10, Iss. 1. – P. 1–46.
6. Sumirin, N. Snap-Through Buckling Problem of Spherical Shell Structure / Nuroji Sumirin, Besari Sahari // International Journal of Science and Engineering(IJSE). – 2015. – Vol. 8, Iss. 1. – P. 54–59.
7. Zabojszcza, P. Stability analysis of the single-layer dome in probabilistic description by the Monte Carlo method / P. Zabojszcza, U. Radoń // Journal of theoretical and applied mechanics. – 2020. – Vol. 58, Iss. 2. – P. 425–436.
8. Zhravlev, A. Local stability and natural motions of the multi-face dome rod structure / A. A. Zhravlev, D. A. Zhravlev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2020. – Vol. 19, Iss. 2. – P. 32–40.
9. Савельев, В. А. Влияние начальных несовершенств и неравномерности загружения на устойчивость сферического купола с жёсткими узлами / В. А. Савельев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 5. – С. 32–34.
10. Савельев, В. А. Теоретические основы проектирования металлических куполов : автореф. дис. … д-ра техн. наук : 05.23.01 / В. А. Савельев. – М., 1995. – 39 с.
11. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – Vol. 5. – S. 129–136.
12. Kato, S. Dynamic Elasto-Plastic Buckling Simulation System for Single Layer Reticular Domes with Semi-Rigid Connections under Multiple Loadings / S. Kato, M. Murata // International Journal of Space Structures. – 1997. – Vol.12, Iss. 3–4. – P. 161–172.
13. Lopez, A. Numerical model and experimental tests on single-layer latticed domes with semi-rigid joints / A. Lopez, I. Puente, M. A. Serna // Computers and Structures. – 2007. – Vol. 85. – P. 360–374.
14. Журавлев, А. А. К вопросу о местной устойчивости сетчатых куполов с треугольной решеткой / А. А. Журавлев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1971. – № 5. – С. 77–80.
15. Журавлев, А. А. Устойчивость стержневых систем в форме выпуклых конфигураций на плоскости и в пространстве / А. А. Журавлев // Известия РГАС. – 1996. – № 1. – С. 42–48.
16. Глушко, К. К. Влияние начальных несовершенств формы на местную устойчивость сетчатого купола при действии осесимметричной узловой нагрузки / К. К. Глушко // Актуальные проблемы исследования материалов, конструкций, технологий и организации строительства в трансграничном аспекте : сборник статей II Международной научной конференции, Брест, 18–20 октября 2017 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. М. Семенюк [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2017. – С. 32–36.
17. Глушко, К. К. Исследование устойчивости формы стержневых многогранников сетчатых куполов / К. К. Глушко // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сб. ст. II Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 29–30 марта 2018 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. М. Семенюк [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2018. – С. 24–33.

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23

18. Глушко, К. К. Потеря местной устойчивости формы сетчатых куполов с жёсткими узлами / К. К. Глушко // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сб. ст. II Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 29–30 марта 2018 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. М. Семенюк [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2018. – С. 33–42.
19. Калиткин, Н. Н. Об экстраполяции на сгущающихся сетках / Н. Н. Калиткин // Математическое моделирование. – 1994. – № 1(6). – С. 86–98.
20. Драган, В. И. Определение продольных сил в стержнях и критических нагрузок, вызывающих местную потерю устойчивости сетчатого купола / В. И. Драган, К. К. Глушко // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сб. ст. Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 30–31 марта 2017 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. М. Семенюк [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2017. – С. 39–46.
21. Глушко, К. К. Местная устойчивость стальных сетчатых куполов с шарнирным соединением стержней в узлах / К. К. Глушко, К. А. Глушко // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Строительство и архитектура. – 2020. – № 1. – С. 36–42.

References

1. ZHuravlev, A. A. Prostranstvennye derevyannye konstrukcii / A. A. ZHuravlev, G. B. Verzhbovskij, N. N. Eryomenko. – Rostov n/D : RGSU, 2003. – 518 s.
2. Tur, V. I. Vliyanie podatlivosti uzlovyh soedinenij na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie metallicheskogo setchatogo kupola / V. I. Tur, A. V. Tur // Fundamental'nye issledovaniya. Tekhnicheskie nauki. – 2014. – № 6. – S. 1165–1168.
3. Abedi, K. Progressive collapse of single-layer braced domes / K. Abedi, G. A. R. Parke // International Journal of Space Structures. – 1991. – № 11 (3). – P. 291–306.
4. Abedi, K. Propagation of local instabilities in braced domes / K. Abedi : doctoral dissertation. – University of Surrey, 1997. – 333 p.
5. Gioncu, V. Buckling of Reticulated Shells: State-of-theArt / V. Gioncu // International Journal of Space Structures. – 1995. – Vol. 10, Iss. 1. – P. 1–46.
6. Sumirin, N. Snap-Through Buckling Problem of Spherical Shell Structure / Nuroji Sumirin, Besari Sahari // International Journal of Science and Engineering(IJSE). – 2015. – Vol. 8, Iss. 1. – P. 54–59.
7. Zabojszcza, P. Stability analysis of the single-layer dome in probabilistic description by the Monte Carlo method / P. Zabojszcza, U. Radoń // Journal of theoretical and applied mechanics. – 2020. – Vol. 58, Iss. 2. – P. 425–436.
8. Zhravlev, A. Local stability and natural motions of the multi-face dome rod structure / A. A. Zhravlev, D. A. Zhravlev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2020. – Vol. 19, Iss. 2. – P. 32–40.
9. Savel'ev, V. A. Vliyanie nachal'nyh nesovershenstv i neravnomernosti zagruzheniya na ustojchivost' sfericheskogo kupola s zhyostkimi uzlami / V. A. Savel'ev // Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij. – 1971. – № 5. – S. 32–34.
10. Savel'ev, V. A. Teoreticheskie osnovy proektirovaniya metallicheskih kupolov : avtoref. dis. … d-ra tekhn. nauk : 05.23.01 / V. A. Savel'ev. – M., 1995. – 39 s.
11. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – Vol. 5. – S. 129–136.
12. Kato, S. Dynamic Elasto-Plastic Buckling Simulation System for Single Layer Reticular Domes with Semi-Rigid Connections under Multiple Loadings / S. Kato, M. Murata // International Journal of Space Structures. – 1997. – Vol.12, Iss. 3–4. – P. 161–172.
13. Lopez, A. Numerical model and experimental tests on single-layer latticed domes with semi-rigid joints / A. Lopez, I. Puente, M. A. Serna // Computers and Structures. – 2007. – Vol. 85. – P. 360–374.
14. ZHuravlev, A. A. K voprosu o mestnoj ustojchivosti setchatyh kupolov s treugol'noj reshetkoj / A. A. ZHuravlev // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura. – 1971. – № 5. – S. 77–80.
15. ZHuravlev, A. A. Ustojchivost' sterzhnevyh sistem v forme vypuklyh konfiguracij na ploskosti i v prostranstve / A. A. ZHuravlev // Izvestiya RGAS. – 1996. – № 1. – S. 42–48.
16. Glushko, K. K. Vliyanie nachal'nyh nesovershenstv formy na mestnuyu ustojchivost' setchatogo kupola pri dejstvii osesimmetrichnoj uzlovoj nagruzki / K. K. Glushko // Aktual'nye problemy issledovaniya materialov, konstrukcij, tekhnologij i organizacii stroitel'stva v transgranichnom aspekte : sbornik statej II Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Brest, 18–20 oktyabrya 2017 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2017. – S. 32–36.
17. Glushko, K. K. Issledovanie ustojchivosti formy sterzhnevyh mnogogrannikov setchatyh kupolov / K. K. Glushko // Teoriya i praktika issledovanij i proektirovaniya v stroitel'stve s primeneniem sistem avtomatizirovannogo proektirovaniya (SAPR) : sb. st. II Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 29–30 marta 2018 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2018. – S. 24–33.
18. Glushko, K. K. Poterya mestnoj ustojchivosti formy setchatyh kupolov s zhyostkimi uzlami / K. K. Glushko // Teoriya i praktika issledovanij i proektirovaniya v stroitel'stve s primeneniem sistem avtomatizirovannogo proektirovaniya (SAPR) : sb. st. II Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 29–30 marta 2018 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2018. – S. 33–42.
19. Kalitkin, N. N. Ob ekstrapolyacii na sgushchayushchihsya setkah / N. N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovanie. – 1994. – № 1(6). – S. 86–98.
20. Dragan, V. I. Opredelenie prodol'nyh sil v sterzhnyah i kriticheskih nagruzok, vyzyvayushchih mestnuyu poteryu ustojchivosti setchatogo kupola / V. I. Dragan, K. K. Glushko // Teoriya i praktika issledovanij i proektirovaniya v stroitel'stve s primeneniem sistem avtomatizirovannogo proektirovaniya (SAPR) : sb. st. Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 30–31 marta 2017 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2017. – S. 39–46.
21. Glushko, K. K. Mestnaya ustojchivost' stal'nyh setchatyh kupolov s sharnirnym soedineniem sterzhnej v uzlah / K. K. Glushko, K. A. Glushko // Vestn. Brest. gos. tekhn. un-ta. Stroitel'stvo i arhitektura. – 2020. – № 1. – S. 36–42.

Материал поступил 27.03.2025, одобрен 13.04.2025, принят к публикации 14.04.2025

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-16-23