Чтобы функции g_2, g_4 принадлежали классу $C^4([0,+\infty))$, а функции g_1, g_3 — классу $C^4((-\infty, l])$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (1) должны выполняться равенства для $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ в общих точках соприкосновения

$$d^p g_1^{(k+1)}(-kl) = d^p g_1^{(k)}(-kl), \quad p = \overline{0,4},$$

$$d^p g_2^{(k+1)}(l+kl) = d^p g_2^{(k)}(l+kl), \quad p = \overline{0,4},$$

$$d^p g_3^{(k+1)}(-kl) = d^p g_3^{(k)}(-kl), \quad p = \overline{0,4},$$

$$d^p g_4^{(k+1)}(l+kl) = d^p g_4^{(k)}(l+kl), \quad p = \overline{0,4}.$$

Теорема 2. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0,l])$, $j = \overline{0,3}$, и $f \equiv 0$. В классе функциий $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^i \varphi_j(0) = d^i \varphi_j(l), \quad j = \overline{0,3}, \quad i = \overline{0, 4-j}.$$

Теорема 3. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0,l])$, $j = \overline{0,3}$ и $f \in C^2(\overline{Q})$. В классе функций $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^i \varphi_j(0) = d^i \varphi_j(l), \quad j = \overline{0,3}, \quad i = \overline{0, 4-j}, \quad f(0,0) = f(0,l).$$

Литература

1. Корзюк В.И., Винь Н.В. *Решение задачи для нестрого гиперболического с двукратными характеристиками уравнения* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2017. № 1. С. 38–52.

2. Korzyuk V.I., Vinh N.V. *Exact solutions for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations* // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2016. V. 7. № 5. P. 869–879.

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, УПРАВЛЕНИЕ ЗАДАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЗАДАЧ ИХ РЕШЕНИЯМИ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская, В.П. Сериков, В.А. Севастюк, С.Н. Наумовец

Данное сообщение ставит своей целью с помощью характеристического параллелограмма представлять решения смешанных задач в форме, удобной для дальнейшего анализа.

Для примера рассмотрим первую смешанную задачу для одномерного волнового уравнения.

На замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,l]$ области $Q = (0,\infty) \times (0,l)$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2) u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l — положительные действительные числа. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

и граничные условия на других частях границы ∂Q

$$u(x_0,0)\mu^{(1)}(x_0),\quad u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,l], \tag{3}$$

Здесь $f,\varphi,\psi,\mu^{(j)}$, $j=1,2,$ — заданные функции.

Суть метода характеристического параллелограмма заключается в следующем.

1. Методом характеристик в аналитическом виде находится решение задачи (1)–(3).

Теорема. *Пусть для функций задачи* (1) – (3) *выполнены включения* $\varphi\in C^2([0,l])$, $\psi\in C^1([0,l])$, $f\in C^1(\bar{Q})$, $\mu^{(j)}\in C^2([0,\infty))$, $j=1,2$. *Единственное классическое решение из класса* $C^2(\bar{Q})$ *данной задачи существует в аналитическом виде тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования*

$$\mu^{(1)}(0)-\varphi(0)=0\quad \psi(0)-d\mu^{(1)}(0)=0,\quad d^2\mu^{(1)}(0)-a^2d^2\varphi(0)-f(0,0)=0, \tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=0\quad d\mu^{(2)}(0)-\psi(l)=0,\quad d^2\mu^{(2)}(0)-a^2d^2\varphi(l)-f(0,l)=0, \tag{5}$$

2. С помощью характеристического параллелограмма классическое решение задачи (1) – (3) записывается в виде формулы

$$u((\boldsymbol{x})=u(A^{(k)})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(B^{(j)})-v_p(B^{(j)})]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(C^{(j)})-v_p(C^{(j)})]+$$
$$+v_p(A^{(k)})-v_p(A^{(1)})-u(A^{(1)}), \tag{6}$$

где $A^{(1)}=(x_0-(k-1)l/a,l-x_1)$, k — четное число, $\boldsymbol{x}\in Q^{(k)}$, $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)$;

$$u((\boldsymbol{x})=u(A^{(k)})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(B^{(j)})-v_p(B^{(j)})]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(C^{(j)})-v_p(C^{(j)})]+$$
$$+v_p(A^{(k)})-v_p(A^{(1)})+u(A^{(1)}), \tag{7}$$

где $A^{(1)}=(x_0-(k-1)l/a,x_1)$, k — нечетное число, $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)$;

$$B^{(j)}=\begin{cases}(x_0-x_1/a-(k-j)l/a,0), & j=k,k-2,k-4,\dots,\\ (x_0+x_1/a-(k-j+1)l/a,0), & j=k-1,k-3,\dots,\end{cases}$$

$$C^{(j)}=\begin{cases}(x_0+x_1/a-(k-j-1)l/a,l), & j=k,k-2,k-4,\dots,\\ (x_0-x_1/a-(k-j)l/a,l), & j=k-1,k-3,\dots.\end{cases}$$

В формулах (6)–(7) точка $A^{(1)}$ принадлежит прямоугольнику $\overline{Q^{(1)}}=[0,l/a]\times[0,l]$.

Продолжая дальше формулы (6) и (7) заканчиваются значениями функции на отрезке $\{\boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(1)}}|x_0=0,\ x_1\in[0,l]\}$, т.е. заданными функциями φ и ψ из условий Коши (2).

Формулы (6), (7) удобны для численной реализации решения задачи (1)–(3), геометрической интерпретации, анализа связей полученного решения с заданными функциями. В частности:

— изучается задача управления решением и его производными задачи (1)–(3) с помощью заданных на границе ∂Q функций;

— управление решением задачи $(1)-(3)$ через заданные функции на нескольких сечениях области Q;

— изучается задача Дирихле в прямоугольнике для волнового уравнения и т.д.

Метод характеристического параллелограмма применяется для других задач и уравнений.

Литература

1. Кастильо Ф.А., Корзюк В.И. *Общие краевые задачи для линейных гиперболических уравнений второго порядка. II* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1986. № 1. С. 47–53.
2. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Севастюк В.А. *О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Труды Ин-та математики. (в печати).
3. Корзюк В.И. *Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61. № 3. С. 7–13.
4. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П. *Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Тр. Ин-та математики. (в печати).
5. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в заданный момент времени. I* // Тр. Ин-та математики. 2010. Т. 18. № 2. С. 22–35.
6. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в заданный момент времени. II* // Тр. Ин-та математики. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.
7. Korzyuk V.I., Kovnatskaya O.A. *Strong Solution of Boundary Value Problem in Cylindrical Domain for a Fourth-Order Equation of Composite Type with Dirichlet Conditions on the Lateral Surface* // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Mathematical physics and modeling in economics, finance and education. Wydawnictwo WSFiZ. Siedlce, 2011. P. 58–67.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПОЛИНОМОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В.И. Корзюк, С.Н. Наумовец

В замыкании $\bar{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\mathbf{x}=(x_0,x_1)\in\bar{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 u - a^2\partial_{x_1}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l — положительные действительные числа. К уравнению (1) на нижней части границы области присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1), \quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0), \quad P_2(\partial_{x_1})u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0), \quad x_0\in[0,\infty), \tag{3}$$

где $P_2(\partial_{x_1})$ — дифференциальный полином второго порядка от производной оператора производной ∂_{x_1}.