Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с частной производной в условиях Коши

В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец (Беларусь)

В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области двух независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l - положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2$, $\partial_{x_1}^2$ - частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$\partial_{x_1} u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty), \quad u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty) \tag{3}$$

Функции f, φ, ψ, $\mu^{(j)}$, $j = 1, 2$ удовлетворяют следующим неоднородным условиям согласования:

$$\mu^{(1)}(0) - \varphi'(0) = \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{a}\left(\psi'(0) - \mu^{(1)\prime}(0) + f(0, 0)\right) = \delta^{(2)}, \tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = \sigma^{(1)}, \ \frac{1}{a}\left(\mu^{(2)\prime}(0) - \psi(l)\right) = \sigma^{(2)},$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\mu^{(2)\prime\prime}(0) - a^2 \varphi''(l) - f(0, l)\right) = \sigma^{(3)} \tag{5}$$

где φ', ψ', $\mu^{(j)\prime}$ - производные первого порядка функций φ, ψ, $\mu^{(j)}$ $j = 1, 2$, φ'', $\mu^{(2)\prime\prime}$ - вторые производные функций φ и $\mu^{(2)}$.

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}\left(\bar{Q}\right)$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$. Тогда функция $u = u^{(0)} + v$ является единственным классическим решением из класса $C^2\left(\bar{Q}\right)$ задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (4), (5) , где функция v определяется формулами*

$$v(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_0} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau,$$

где

$$w(x_0 - \tau, \tau, x_1) = G^{(1)}(x_1 - a x_0, \tau) + G^{(2)}(x_1 + a x_0, \tau)$$

$$G^{(j)}(z, \tau) = \begin{cases} G^{(j,0)}(z, \tau), & z \in [0, l], \tau \in [0, \infty), \\ G^{(j,l)}(z, \tau), & z \in D\left(g^{(j)}\right) \backslash [0, l], \tau \in [0, \infty) \end{cases}$$

$j = 1, 2$; $D\left(g^{(1)}\right) = (-\infty, l]$, $D\left(g^{(2)}\right) = [0, \infty)$,

$$G^{(j,0)}(z,\tau) = \frac{(-1)^j}{2a}\int\limits_0^z f(\tau,\xi)d\xi,\ z \in [0,l],\ j = 1,2,$$

$$G^{(1,1)}(z,\tau) = -\frac{1}{2a} f(\tau,0)\cdot z - \frac{1}{4a}\left. f(\tau,z)\right|_{x=0}\cdot z^2$$

$$G^{(2,1)}(z,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^l f(\tau,\xi)d\xi + \frac{1}{2a} f(\tau,l)(z-l) + \frac{1}{4a}\partial_z \left. f(\tau,z)\right|_{z=l}\cdot (z-l)^2,$$

а $u^{(0)}$ при условии, что $\tilde{C}^{(k)} = -C$, $k = 1, 2, \ldots$ определяется следующим образом

$$u^{(0)}(x) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0),$$

где функции $g^{(j)}(j = 1, 2)$ из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$. $\left(D\left(g^{(j)}\right)\right) = (-\infty, l]$,

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + (-1)^j\frac{1}{2a}\int\limits_0^z \varphi(\xi)d\xi + (-1)^j C,$$

$$g^{(1)}(z) = g^{(1,k)}(z) = \int\limits_0^z \tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi + g^{(2,k-1)}(-z) + 2\tilde{C}^{(k)},$$

$$z \in [-kl, -(k-1)l],\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$g^{(2)}(z) = g^{(2,k)}(z) = \tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) + g^{(1,k-1)}(2l - z),\ z \in [kl, (k+1)l],\ k = 1, 2, \ldots.$$

Литература

1. *В.И. Корзюк, И.С. Козловская, С.Н. Наумовец Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши. Вес. Нац. акад. навук Беларусі.* Сер.фіз.-мат. навук. № 1(2015), 7-20.

2. *В.И. Корзюк, И.С. Козловская* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных. *Дифференциальные уравнения.* Т. 48, № 5(2012), 700-709

3. *В.И. Корзюк, И.С. Козловская* Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных.*Доклады НАН Беларуси.* Т. 55, № 5(2011), 9-13.

4. *В.И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма* Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик. *Труды Ин-та математики НАН Беларуси.* Т. 17, № 2(2009), 23-34.