РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДУ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ДЮАМЕЛЯ

С.В. Лапич

(БрГТУ, Брест)

При решении прикладных задач, в частности задачи анализа выходных процессов линейных динамических систем (электрических цепей), возникает необходимость в решении задачи, которая по своей сути сводится к решению ЛДУ.

Требуется решить ЛДУ следующего вида:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

Решаем уравнение (1), когда $f(t) = 1$, и получаем уравнение следующего вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_n x = 1 \qquad (2)$$

при тех же начальных нулевых условиях. После преобразования по Лапласу получаем: $A(p)X(p) = F(p)$ для уравнения (1) и $A(p)X_1(p) = \dfrac{1}{p}$ для уравнения (2). Преобразовывая данные выражения, получим решение искомого уравнения (1) в виде интеграла Дюамеля:

$$x(t) = L^{-1}X(p) = L^{-1}(pX_1(p)F(p)) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau .$$

Интеграл Дюамеля позволяет находить решения ЛДУ при нулевых начальных условиях, не находя изображения для правой части. Формулу целесообразно использовать, когда производится исследование какой-либо динамической системы, работа которой описывается левой частью уравнения (1). Для неё один раз находим решения уравнения (2) с начальными нулевыми условиями, а затем ищутся решения (1) при любых $f(t)$.

В работе требуется найти решения нескольких линейных ДУ с непосредственным использованием интеграла Дюамеля:

а) $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}$; б) $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$; при $x(0) = x'(0) = 0$.

Применив интеграл Дюамеля для следующих уравнений, получим искомые решения данных уравнений:

а) $x(t) = e^t - 1 + (e^t + 1)(\ln(e^t + 1) - t - \ln 2)$;

б) $x(t) = (e^t + 2)\ln\dfrac{e^t + 2}{3} - e^t + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов М.Л, Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
2. Пантелеев А.В, Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.:Высш. шк., 2001.