

ОПЕРАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

А.М. Кирисюк

(БрГТУ, Брест)

Уравнения вида $\varphi(t) + \int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t)$ называется интеграль-

ными уравнениями типа свёртки. Будем предполагать, что $f(t)$ и $k(t)$ достаточно гладкие функции и имеют конечный порядок роста при $t > 0$. В этом случае искомая функция $\varphi(t)$ будет оригиналом. Решение уравнений возможно с помощью преобразования Лапласа. Аналогичным является метод решения систем интегральных уравнений типа свёртки. В работе рассмотрим решения следующих уравнений и систем:

$$\int_0^t \ell^{t-\tau} \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau = x'' - x' + \ell'(1 - \cos t), \text{ где } x(0) = x'(0) = 1$$

Пользуясь теоремой запаздывания и теоремами об интегрировании и дифференцировании оригинала, получаем операторное уравнение

$$\frac{X(p)}{(p-1)^2+1} = p^2 X(p) - p - 1 - pX(p) + 1 + \frac{1}{(p-1)(p^2-2p+2)},$$

из которого находим операторное решение $X(p) = \frac{1}{p-1}$. Применяя

теорему запаздывания, находим $x(t) = e^t$.

Решив интегральное уравнение: $\int_0^t x(\tau) d\tau + x(t) = f(t)$, если $f(t)$ при

$0 \leq t < 1$; $f(t) = 2-t$ при $1 \leq t < 2$; $f(t) = 0$ при $t \geq 2$ и применяя теорему запаздывания и теорему об интегрировании оригинала, получаем операторное уравнение $X(p) \left(\frac{p+1}{p} \right) = \frac{1}{p^2} (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$, из которого находим операторное решение

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+1} e^{-p} - \frac{1}{p+1} e^{-2p}.$$

Переходя к оригиналу, получаем решение исходного уравнения:

$$x(t) = 1 - e^{-t} - 2(1 - e^{-(t-1)})\eta(t-1) + (1 - e^{-(t-2)})\eta(t-2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
2. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981