Если $V^{*}-V'\leq\varepsilon$, где ε – заданная точность вычислений, то полученная точка считается оптимальной. В противном случае весь процесс, начиная с пункта 4, повторяется.

Л и т е р а т у р а

1. Коршун Л.И., Сыроквашко И.С. Расчет оптимальных шарнирно-стержневых систем с обеспечением заданных динамических характеристик. Тезисы докладов VI конференции молодых ученых и специалистов Прибалтики и БССР по проблемам стройматериалов и конструкций. Таллин, 1973.

2. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., "Мир", 1972.

3. Полак Э. Численные методы оптимизации. М., "Мир", 1974.

А.С.Хвмутовский, А.Ф.Смирнов

УДК 624.041.2:681.142.2

МИНИМАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ СТОЙКИ С ЗАДАННОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Рассматривается вопрос о распределении материала по длине стойки переменного сечения с упругими связями, нагруженной вертикальной P и следящей T силами (рис. I), при условии минимума объема и ограничениях по прочности и устойчивости. Частные случаи этой задачи для консольных и шарнирно опертых стоек при действии вертикальной силы рассматривались в работах [3 - 8].

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стойки имеет вид

$$y''=\frac{-(P+T)y+\left(r_{11}\delta+T\frac{\delta}{\ell}\right)x}{EJ_x}. \qquad (I)$$

Граничные условия: $x=0 \quad y=0;$

$$x=\ell \quad y=\delta. \quad y'=\frac{r_{11}\delta\ell-P\delta}{r_{22}}.$$

Так как величина δ не определена, то при $x=\ell$

$$\frac{y'}{y}=\frac{r_{11}\ell-P}{r_{22}} \qquad (2)$$

Пусть форма сечения такова, что $J_x = kF_x^2$ (3)

Введем новую переменную

$$z_1 = \frac{(r_{11}+\frac{T}{\ell})\delta x - T(\eta+1)y}{T(\eta+1)}, \qquad (4)$$

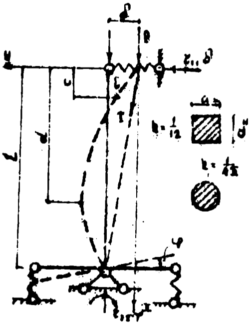

Рис.I.Расчетная схема стойки переменного сечения с упругими связями

где $\eta = \frac{P}{T}$

Тогда $z_1'' = -y''$. (5)

Обозначив $U_x = F_x\sqrt{\frac{KE}{T(\eta+1)}}$, $z_1' = z_2$ и учтя (3) - (5), перепишем уравнение (I) в виде системы

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -\frac{z_1}{U_x^2}. \end{cases} \qquad (6)$$

Граничные условия:

$x = 0$ $z_1 = 0$ $x = \ell$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(r_{11}+\frac{T}{\ell}) - \frac{T(\eta+1)(r_{11}\ell - P)}{r_{22}}}{(r_{11}+\frac{T}{\ell})\ell - T(\eta+1)} = A. \qquad (7)$$

Согласно поставленной задаче необходимо минимизировать функционал

$$V = \int_0^{\ell} U_x dx, \qquad (8)$$

где U_x - величина пропорциональная площади.

Для решения используем принцип максимума Понтрягина [6]. Составляем функцию H :

$$H = \psi_1 z_2 - \psi_2 \frac{z_1}{U_x^2} + \psi_3 U_x. \qquad (9)$$

Уравнения для функций ψ_i имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = \frac{\psi_2}{U_x^2}; \\ \frac{d\psi_2}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z_2} = -\psi_1; \\ \frac{d\psi_3}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial V} = 0; \quad \psi_3 = C_3. \end{cases} \qquad (10)$$

Условия трансверсальности дают

$x = 0$ $\psi_2(0) = 0$;

$x = \ell$ $\frac{\psi_1(\ell)}{\psi_2(\ell)} = -A$.

Из рассмотрения систем (6) и (10) и их граничных условий следует, что z_1 пропорционально ψ_2, а $z_2 - \psi_1$.

Положим, что

$$\psi_2 = -\frac{1}{2} C_3 B^2 z_1. \qquad (11)$$

Из условия максимума гамильтониана H находим:

$$U_x = B^{\frac{1}{2}} z_1^{\frac{2}{3}}. \qquad (12)$$

Так как в начале стойки прогибы незначительны, то можно считать, что

$$U_x = U'_o = \frac{T(n+1)}{\sigma_o}\sqrt{\frac{KE}{T(n+1)}} = const. \qquad (13)$$

С учетом (13) имеем:

$$U_x = \left| \begin{array}{ll} U_o \text{ при } B^{\frac{1}{2}} z_1^{\frac{2}{3}} \leq U_o; \\ B^{\frac{1}{2}} z_1^{\frac{2}{3}} \quad \text{при } B^{\frac{1}{2}} z_1^{\frac{2}{3}} > U_o. \end{array} \right. \qquad (14)$$

Для нижней части стойки решение системы уравнений (6) при условии (12) имеет вид:

$$U_x = \frac{3D_1}{4}(1+\cos V). \qquad (15)$$

Значения D_1 и V определяются соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{3\sqrt{3}}{8} D_1 (V+\sin V) = D_3 - x & \text{при } x \leq d; \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} D_1 (V+\sin V) = x - D_5 & \text{при } x > d. \end{array} \right\} \qquad (16)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{2}{3} U_1 + \frac{2}{3} A^2 U_1^3; \qquad (17)$$

$$D_3 = \ell - \frac{3\sqrt{3}}{8} D_1 \left[\arccos\left(\frac{4U_1}{3D_1} - 1\right) + \sqrt{1-\left(\frac{4U_x}{3D_1} - 1\right)^2}\right]; \qquad (18)$$

$$V = \arccos\left(\frac{4U_x}{3D_1} - 1\right); \qquad (19)$$

$$U_1 = U_{x=\ell};$$

d – расстояние до сечения, где U_x максимально.

Для верхней части при $U_x = U_o$ получаем

$$z_1'' = -\frac{z_1}{U_o^2}.$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия имеет вид

$$z_1 = U_o \sqrt{D_2} \sin \frac{x}{U_o}. \qquad (20)$$

Величину U_1, расстояние до точки переключения C, а также значения V_o при $x = C$ определим из условия сопряжения в точке C:

$$U_o = \frac{3}{4} D_1 (1+\cos V_o); \qquad (21)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} D_1 (V_o + \sin V_o) = D_3 - C. \qquad (22)$$

Кроме того, в точке C

$$\frac{z'_{1\,c-0}}{z_{1\,c-0}} = \frac{z'_{1\,c+0}}{z_{1\,c+0}}. \qquad (23)$$

Для верхней части постоянного сечения

$$\frac{z'_{1\,c-0}}{z_{1\,c-0}} = \frac{1}{U_o} \operatorname{ctg} \frac{c}{U_o}.$$

При определении этого же отношения для нижней части воспользуемся выражением (I2). Тогда

$$\frac{z'_{1,c+0}}{z_{1,c+0}}=\frac{3}{2}\frac{U'_x}{U_x}. \tag{24}$$

Величину U'_x определим из (I5) с использованием первого уравнения (I6). Подставив найденные значения U_x и U'_x в (24), получим

$$\frac{z'_{1,c+0}}{z_{1,c+0}}=\frac{\sqrt{3}}{U_0}\operatorname{tg}\frac{V_0}{2}.$$

Теперь уравнение (23) запишется в виде

$$\operatorname{Ctg}\frac{c}{U_0}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{V_0}{2}. \tag{25}$$

Определив из (2I), (22), (25) величины U, C, V_0 находим минимальный объем, вычисляя (8) с учетом (I3) и (I5):

$$V=\left[U_0 c+\frac{\sqrt{3}}{8}\left(U_1+\frac{1}{3}A^2U_1^3\right)\left(\frac{3}{2}V_0+2\sin V_0+\frac{\sin 2V_0}{4}+\frac{3V_1}{2}+2\sin V_1+\frac{\sin 2V_1}{4}\right)\right]\sqrt{\frac{T(n+1)}{KE}}. \tag{26}$$

Здесь V_1 устанавливается из (I9), полагая, что $U_x=U_1$. В случае прямоугольного сечения с постоянной высотой h расстояние от точки переключения определится из выражения:

$$\frac{2\sqrt{U_0}\,(Ac+i-A\ell)}{(Ac+2-A\ell)(\ell-c)+2U_0A}=\operatorname{tg}\frac{c}{\sqrt{U_0}}, \tag{27}$$

где

$$U_0=\frac{KE}{\sigma_0}.$$

Искомое управление с учетом условий прочности запишется в виде:

$$U_x=\begin{cases} U_0 & \text{при } 0\leq x\leq c; \\ \frac{1}{2}(c^2-x^2)c_1(x-c)+U_0 & \text{при } c\leq x\leq \ell. \end{cases} \tag{28}$$

Здесь

$$c_1=\frac{2U_0A+Ac^2+2\ell-A\ell^2}{2(Ac+1-A\ell)}. \tag{29}$$

Объем будет равен

$$V=\frac{T(n+1)}{KE}\left(U_0\ell-\frac{c^3}{3}-\frac{\ell^3}{6}+\frac{1}{2}c^2\ell-c_1c\ell+c_1\frac{\ell^2}{2}+c_1\frac{c^2}{2}\right). \tag{30}$$

Рассмотрим случай работы материала за пределом упругости. Для этого заменим модуль упругости E касательным модулем $E_к$. Зависимость $E_к$ от нормальных напряжений примем, как и в [2] в виде:

$$E_к=\begin{cases} E & \text{при } \sigma\leq\sigma_{пц}; \\ E\left(1-\frac{\sigma-\sigma_{пц}}{R}\right) & \text{при } \sigma>\sigma_{пц}, \end{cases} \tag{31}$$

где $\quad R = \sigma_т - \sigma_{пц}$

$\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности.

Будем рассматривать стойку прямоугольного сечения с постоянной высотой. В этом случае уравнения (6) примут вид

$$\begin{cases} z_1' = z_2 ; \\ z_2' = -\dfrac{z_1}{U_x}, \end{cases} \tag{32}$$

где

$$U_x = F_x \frac{kE_k}{T(\eta+1)} . \tag{33}$$

Минимизируется функционал $\quad v = \int^{l} F_x d_x .$ (34)

Площадь F_x выразим через U_x, использовав (3I)

$$F_x = \begin{cases} \dfrac{T(\eta+1)U_x}{kE} & \text{при } U > U_{пц} \\ T(\eta+1)\varkappa\left(\dfrac{U_x}{kE} - \dfrac{1}{R}\right) & \text{при } U \le U_{пц}, \end{cases} \tag{35}$$

где

$$U_{пц} = \frac{kE}{\sigma_{пц}}, \quad \varkappa = \frac{R}{R+\sigma_{пц}} . \tag{36}$$

(37)

Гамильтониан $\quad H = \Psi_3 F(U) + \Psi_1 z_2 - \Psi_2 \dfrac{z_1}{U_x} .$

Функция $F(u)$ непрерывна, однако ее производная

$$\frac{dF}{du} = \begin{cases} \dfrac{T(\eta+1)}{kE} & \text{при } U > U_{пц} \\ \dfrac{T(\eta+1)}{kE}\varkappa & \text{при } U < U_{пц} \end{cases} \tag{38}$$

в точке $U_x = U_{пц}$ терпит конечный разрыв. Аналогично ведет себя гамильтониан H. Определим стационарные точки из уравнения

$$\frac{dH}{du} = \Psi_3 \frac{dF}{du} + \Psi_2 \frac{z_1}{U_x^2} = 0 . \tag{39}$$

Как и прежде, переменная z_1 пропорциональна Ψ_2, а $\Psi_3 = C_3$. Положим, что $\Psi_2 = B^2 z_1$, а $C_3 = -kE / T(\eta + I)$. Тогда с учетом (38) равенство (39) примет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \begin{cases} -\varkappa + \dfrac{B^2 z_1^2}{U_x^2} = 0 & \text{при } U_x < U_{пц} \\ -1 + \dfrac{B^2 z_1^2}{U_x^2} = 0 & \text{при } U_x > U_{пц} . \end{cases} \tag{40}$$

Из (40) получим

$$U_x = \begin{cases} \dfrac{B z_1}{\sqrt{\varkappa}} & \text{при } U < U_{пц} \\ B z_1 & \text{при } U > U_{пц} \end{cases} \tag{4I}$$

В интервале $\quad U_{пц}\sqrt{\varkappa} \le B z_1 \le U_{пц} \quad$ стационарных точек нет. Исследовав граничные точки этого интервала, убеждаемся, что гамильтониан H достигает максимума при $U_x = U_{пц}$. С учетом прочности получим следующую картину оптимального управления:

$$U_{x} = \begin{cases} U_0 & \text{при } B z_1 \le U_0\sqrt{\varkappa}\,; \\ B z_1 \varkappa^{-\frac{1}{2}} & \text{-"- } U_0\sqrt{\varkappa} \le B z_1 \le U_{пц}\sqrt{\varkappa}\,; \\ U_{пц} & \text{-"- } U_{пц}\sqrt{\varkappa} \le B z_1 \le U_{пц}\,; \\ B z_1 & \text{-"- } B z_1 > U_{пц}\,. \end{cases} \tag{42}$$

Величина U_0 должна определиться с учетом $F_\varkappa$:

$$U_0 \frac{kE}{\sigma_0}\left(1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_{пц}}{R}\right). \tag{43}$$

Решение системы (32) при учете (42), (7) и последующее составление уравнений сопряжения в точках $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = C_3$ дает:

$$\frac{\sqrt{U_0}}{C_1 - c_1} = tg\frac{c_1}{\sqrt{U_0}}; \quad \frac{\sqrt{U_{пц}}}{C_1 - c_1} = tg\left(\frac{c_2}{\sqrt{U_{пц}}} + \varphi\right);$$

$$\frac{\sqrt{U_{пц}}}{C_2 - c_3} = tg\left(\frac{c_3}{\sqrt{U_{пц}}} + \varphi\right); \quad U_{пц} - U_0 = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + c_1(c_2 - C_1); \tag{44}$$

$$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{\varkappa}\,\sin c_3 U_{пц}^{-\frac{1}{2}} - \sin c_2 U_{пц}^{-\frac{1}{2}}}{\cos c_2 U_{пц}^{1/2} - \sqrt{\varkappa}\,\cos c_3 U_{пц}^{-1/2}};$$

$$U_{пц} = -\frac{c_3^2}{2} + C_2\left(c_3 + \frac{1}{A} - l\right) - \frac{l}{A} + \frac{l^2}{2}.$$

Определив c_1, c_2, c_3, C_2, C_1, ψ и учтя (28) и (42), получим

$$U_x = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \le x < c_1; \\ U_0 + c_1\left(\frac{c_1}{2} - C_1\right) - x\left(\frac{x}{2} - C_1\right) & \text{при } c_1 \le x \le c_2; \\ U_{пц} & \text{при } c_2 \le x \le c_3; \\ U_{пц} + c_3\left(\frac{c_3}{2} - C_2\right) - x\left(\frac{x}{2} - C_2\right) & \text{при } c_3 < x < l. \end{cases} \tag{45}$$

Зная закон изменения U_x нетрудно определить объем стойки:

$$V = \frac{T(n+1)}{kE}\Big\{\varkappa\Big[U_0 c_2 - c_1\left(\frac{c_1}{2} - C_1\right)(c_1 - c_2) + \frac{1}{6}\left(c_1^3 - c_2^3\right) - \\ - \frac{C_1}{2}\left(c_1^2 - c_2^2\right) + \frac{k\bar{E}c_2}{2}\Big] + U_{пц}\left(l - c_2\right) + c_3\left(\frac{c_3}{2} - C_2\right)\left(l - c_3\right) - \\ - \frac{1}{6}\left(l^3 - c_3^3\right) + \frac{C_2}{2}\left(l^2 - c_3^2\right). \tag{46}$$

Пример. Определить минимальный объем консольной стойки при неупругой и упругой работе материала и следующих данных:
$P = 25$ т, $T = 5$ т, $\sigma_{пц} = 2000$ кг/см^2, $\sigma_{пц} = 3000$ кг/см^2.

Для консольной стойки при $\tau_{11} = 0$, $\tau_{12} = \infty$ из (7)

$$A = -\frac{1}{\eta l}$$

Решив (44) и использовав (46), получим $C_1 = 1,68$ см, $C_2 = C_3 = 15,53$ см, $C_1 = 2961,76$ см, $C_2 = 1833,42$ см, $V = 1226308$ см^3.

В случае упругой работы материала $\sigma_0 = \sigma_{пц} = 2000$ кг/см^2. Из (27), (29) и (30) найдем $C = 15,5$ см, $C_1 = 1833,37$ см, $V = 1320676$ см^3.

Стойка постоянного сечения при работе материала в упругой стадии имела бы объем $V = 1496026$ см^3 [1].

Полученные зависимости справедливы для таких соотношений жесткостей упругих связей, при которых имеет место один знак кривизны упругой деформированной оси стержня.

Литература

1. Воеводин А.А. Устойчивость стойки при центральном сжатии несколькими силами. "Строительная механика", № 5, 1968.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., "Наука", 1967.

3. Воробьев Л.Н. Некоторые случаи устойчивости колонн, объем которых - минимум для заданной нагрузки. Известия Новочеркасского индустриального института, т.IV (XVIII), 1938.

4. Лурье А.И. Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. "Динамика и прочность машин". Труды ЛПИ, № 252. Л.-М., "Машиностроение", 1965.

5. Николаи Е.Н. Задача Лагранжа о найвыгоднейшем очертании колонн. Труды по механике. М., Физматгиз, 1955.

6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., "Наука", 1969.

7. Ципинас И.К. Применение теории оптимального управления в задачах синтеза сжатых стержней. Литовский механический сборник № 2 (7), Вильнюс, 1970.

8. Ченцов Н.Г. Стойки наименьшего веса. Труды ЦАГИ, № 265, 1936.