

И.С.Сыровяшко

УДК 624.041.2.

К РАСЧЕТУ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ
ФЕРМ С ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ НЕ НИЖЕ ЗАДАННОЙ

В работе рассматривается задача отыскания упругой статически неопределимой фермы наименьшего объема при соблюдении условий прочности, жесткости, ограничения на основную частоту собственных колебаний и конструктивных ограничений.

Задавыми считаются геометрия и материал, внешняя узловая нагрузка и предельные допустимые значения напряжений в стержнях, перемещений узлов и основной частоты собственных колебаний. Минимальные площади поперечных сечений стержней назначаются из условия обеспечения устойчивости по предельным значениям гибкости той или иной группы стержней.

Как было показано в работе [1], аналогичная задача для статически определимых систем представляет собой модель выпуклого математического программирования и может быть решена методом возможных направлений. Однако для статически неопределимых ферм в ограничении задачи необходимо дополнительно ввести условия совместности деформаций. Эти условия выражаются в виде нелинейных равенств

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_{ij} l_i}{E F_i} = 0; \quad (j=1, \dots, m), \quad (I)$$

где N_i - полное усилие в i -ом стержне; $\bar{N}_{ij}$ - усилие в i -ом стержне от действия лишней неизвестной $X_j = 1$; n - число стержней; m - число лишних неизвестных. Метод возможных направлений в обычной форме не позволяет решать задачу оптимизации, в состав ограничений которой входят нелинейные равенства. Поэтому для решения данной задачи предлагается использовать сочетание методов возможных направлений и штрафных функций [2], [3].

Суть такого комбинированного подхода состоит в том, что задача условной минимизации функции цели $f(x) \rightarrow \min$ со смешанными ограничениями

$$g_l(x) \leq 0, \quad l=1, \dots, k;$$

$$h_j(x) = 0, \quad j=k+1, \dots, k+m$$

заменяется условной минимизацией новой целевой функции

$$f(x) + \sum_{j=k+1}^{k+m} \frac{1}{2\gamma_j} [h_j(x)]^2 \rightarrow \min$$

с ограничениями в форме неравенств $g_l(x) \leq 0$,

где $\gamma_j > 0$ - изменяющаяся скалярная величина, причем $\gamma_j^{k+1} < \gamma_j^k$. Выражение $\sum_{j=k+1}^{k+m} \frac{1}{2\gamma_j} [h_j(x)]^2$ представляет собой квадратичную функцию штрафа, которая предотвращает блуждание поиска слишком далеко от ограничений в форме равенств.

Таким образом, задача оптимизации статически неопределимой фермы при заданных условиях может быть сформулирована как модель математического программирования и представлена в следующем виде.

Найти минимум целевой функции

$$V(F, x) = \sum_{i=1}^n F_i \ell_i + \sum_{j=k+1}^{k+m} \frac{1}{2\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_{ij} \bar{N}_{ij} \ell_i}{E F_i} \right)^2 \quad (2)$$

при ограничениях:

на основную частоту собственных колебаний

$$g_1(F, x) = 1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sum_{k=1}^3 m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{(N_{ik}^0 + \sum_{j=k+1}^{k+m} X_j^0 \bar{N}_{ij})^2}{E F_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{(N_{ik}^0 + \sum_{j=k+1}^{k+m} X_j^0 \bar{N}_{ij})^2 \ell_i}{E F_i}} \leq 0, \quad (3)$$

на перемещение K -го узла

$$g_2(F, x) = \frac{1}{\Delta_K} \sum_{i=1}^n \frac{(N_{ik}^0 + \sum_{j=k+1}^{k+m} X_j^0 \bar{N}_{ij}) \bar{N}_{ik} \ell_i}{E F_i} - 1 \leq 0 \quad (4)$$

на прочность стержней

$$g_p(F, x) = \frac{|N_i^a + \sum_{j=1}^m x_j^a \bar{N}_{ij}|}{\bar{S}_i \bar{F}_i} - 1 \leq 0, \quad p=3, \dots, n+3; \quad (5)$$

на минимальные площади сечений стержней

$$g_t(F) = 1 - \frac{F_t}{\bar{F}_t} \leq 0, \quad t = n+4, \dots, 2n+4, \quad (6)$$

где N_i^a и N_i^m - соответственно усилие в i -ом стержне основной системы от внешней и условной узловой нагрузки $m_k Y_k$; m_k и Y_k - масса и перемещение K -го узла от статической нагрузки; x_j^a и x_j^m - усилие в j -ой лишней связи от внешней и условной узловой нагрузки $m_k Y_k$; $\bar{N}_{ik}$ - усилие в i -ом стержне основной системы от силы $P = 1$, приложенной в K -ом узле; $\bar{\omega}$, $\bar{\Delta}_k$, $\bar{S}_i$, $\bar{F}_i$ - соответственно предельные допустимые значения основной частоты собственных колебаний, перемещения K -го узла, а также напряжения и площади сечения i -го стержня; S - число масс системы.

Сформулированная задача может быть решена предлагаемым комбинированным методом в следующем порядке.

1. Принимаются произвольные значения площадей сечений стержней $\bar{F}^A$, находящихся в области допустимых решений и соответствующие им значения усилий в лишней стержнях $\bar{X}^A$. Выбираются скалярные величины $\delta > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, $\gamma_j > 0$.

2. Из данной точки осуществляется спуск на границу области допустимых решений по направлению антиградиента целевой функции $\bar{X}^A = - \bar{\nabla} V(F, x)$, где $\bar{\nabla} V(F, x)$ - вектор градиента целевой функции. Шаг спуска в этом направлении t определяется как наименьший положительный корень уравнений

$$g_s(F^A + \bar{S}_s^A t_s, X_j^A + \bar{S}_j^A t_s) = 0, \\ l = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; s = 1, \dots, \nu$$

Новые значения переменных, лежащие в точке на границе допустимой области, определяются по зависимостям

$$\bar{F}^0 = \bar{F}^A + \bar{S}^A t, \quad \bar{X}^0 = \bar{X}^A + \bar{S}^A t.$$

3. По полученным переменным вычисляется значение целевой функции

$$V^0(F^0, X^0) = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^0 \bar{\omega}_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\bar{F}_j^0} \left(\sum_{k=1}^n \frac{N_{kj} \bar{Y}_k \bar{\omega}_k}{\bar{E} \bar{F}_i^0} \right)^2.$$

4. Осуществляется перемещение в направлении, ведущим

внутри допустимой области, вдоль которого значение целевой функции убывает. Для этого выявляется, к какой из ограничивающих поверхностей с заданной погрешностью δ принадлежит данная точка. Пусть ею оказалась поверхность, соответствующая ограничению

$$-\delta \leq g_i(F^0; x^0) \leq \delta.$$

Таких поверхностей, называемых активными в данной точке, может оказаться несколько.

Для определения возможного направления спуска решается задача линейного программирования, т.е. следует минимизировать формулу

$$U = \eta$$

при ограничениях

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} \beta_1 + \frac{\partial U}{\partial F_2} \beta_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_m} \beta_{m+m} - \eta \leq 0, \quad -1 \leq \beta_i \leq 1, \\ -1 \leq \beta_{i+m} \leq 1.$$

Значения β_i можно задавать любыми положительными числами. Эта величина играет роль "отталкивающего" фактора. При $\beta_i = 0$ направление спуска будет отрезаться к касательной активной поверхности в данной точке. При слишком больших значениях β_i направление спуска приближается к касательной линии уровня целевой функции. В большинстве случаев значение $\beta_i = 1$ обеспечивает получение приемлемых результатов. Решение задачи линейного программирования дает компоненты вектора искомого направления $\bar{x}^0$ и значение целевой функции U . Если при этом оказалось, что $U \leq -\delta$, то следует перейти к пункту 5. Если $\delta \leq \delta_1$, то необходимо принять $\delta_1 = 0,5 \delta$, $\tau_j = 0,5 \tau_j$ и перейти к пункту 2. Если $\delta > \delta_1$, то принять $\delta = 0,5 \delta$ и перейти к пункту 3.

5. Вычисляется шаг спуска в полученном направлении как наименьший положительный корень уравнений

$$g_i(F_i^0 + \beta_i^0 t_i, x_j^0 + \beta_{i+m}^0 t_i) = 0, \\ i=1, \dots, l, j=1, \dots, m, \beta=1, \dots, p.$$

Вдесь p - число ограничений задачи.

6. Определяются новые значения переменных и значение целевой функции по зависимостям

$$F' = F^0 + \bar{x}^0 t, \quad x' = x^0 + \bar{x}^0 t,$$

$$V'(F', x') = \sum_{i=1}^n F_i t_i + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\tau_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{x}_i t_i}{F_i} \right)^2.$$

Если $V^2 - V'^2 \leq \epsilon$, где ϵ - заданная точность вычислений, то полученная точка считается оптимальной. В противном случае весь процесс, начиная с пункта 4, повторяется.

Л и т е р а т у р а

1. Коршун Л.И., Сыровашко И.С. Расчет оптимальных шарнирно-стержневых систем с обеспечением заданных динамических характеристик. Тезисы докладов XI конференции молодых ученых и специалистов Прибалтики и БССР по проблемам стройматериалов и конструкций. Таллин, 1973.

2. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., "Мир", 1972.

3. Полак В. Численные методы оптимизации. М., "Мир", 1974.

А.С.Хамутовский, А.Ф.Смирнов

УДК 624.041.2:681.142.2

МИНИМАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ СТОЙКИ С ЗАДАННОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Рассматривается вопрос о распределении материала по длине стойки переменного сечения с упругими осями, нагруженной вертикальной P и следящей T силами (рис. 1), при условии минимума объема и ограничениях по прочности и устойчивости. Частные случаи этой задачи для консольных и шарнирно опертых стоек при действии вертикальной силы рассматривались в работах [3 - 8].

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стойки имеет вид

$$y'' = \frac{-(P+T)y + (z_n \delta + T \frac{\delta}{x})x}{EI_x} \quad (1)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad y=0; \\ x=l & \quad y=\delta. \quad y' = \frac{z_n \delta l - P \delta}{z_{12}} \end{aligned}$$

Так как величина δ не определена, то при $x = l$

$$\frac{y'}{y} = \frac{z_n l - P}{z_{12}} \quad (2)$$