

НОВЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ *IN-SITU* ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ СУЩЕСТВУЮЩИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Дереченник С.С., Тур В.В.

ВВЕДЕНИЕ. В настоящее время реализуется план разработки международных норм по проектированию железобетонных конструкций определенных, например TC250, как разработка Еврокодов нового поколения (G2). Этот период совпадает по времени с переработкой ряда национальных норм по железобетону, в частности СНБ 5.03.01 [1], и Национальных приложений к Еврокоду-2 (EC2).

Следует подчеркнуть, что в отличие от действующих норм проектирования, вновь разрабатываемые Еврокоды, а следом и Национальные приложения к ним, предполагают внесение специальных разделов, содержащих требования и адекватные расчетные модели для проверок предельных состояний существующих конструкций. Как оказалось, в отличие от национальной практики, в которой оценивание технического состояния существующих конструкций всегда уделяли достаточно пристальное внимание, в европейской практике этот вопрос оказался довольно новым, особенно применительно к зданиям и сооружениям. Традиционно этому вопросу достаточно много внимания уделялось при оценивании технического состояния мостов. Поэтому для разработки разделов, относящихся к оцениванию существующих конструкций, в рамках рабочей группы комитета TC250/SD2/WG1 была создана специальная тематическая группа TG3 (Assessment of existing structures – Оценивание существующих конструкций).

Естественно, что при разработке моделей сопротивления, применяемых для проверок предельных состояний существующих конструкций, одним из ключевых вопросов является адекватное определение свойств материалов, в частности *in-situ* прочности. При применении метода частных коэффициентов для проверок предельных состояний железобетонных конструкций, основным параметром, описывающим физико-механические свойства бетона, является *in-situ* характеристическая прочность.

В общем случае процедура оценивания *in-situ* прочности бетона включает два этапа:

- 1) **Подготовка исходных данных для оценивания**, получаемых либо по результатам прямых испытаний выбуренных кернов в прессе, либо косвенными методами неразрушающего контроля с учетом оцененных неопределенностей получения результатов. Следует отметить, что важным вопросом в данном случае является оценивание выбросов; этот вопрос достаточно подробно рассмотрен, например, в [2].
- 2) **Собственно процедура оценивания полученных результатов испытаний** с применением адекватных зависимостей для вычисления эстиматоров квантилей прочности, т.е. характеристической *in-situ* прочности бетона. При этом следует различать две возможные процедуры оценивания *in-situ* характеристической прочности бетона:
 - а) оценивание соответствия прочности поставленного бетона указанному в спецификации классу по прочности на сжатие. В этом случае применимы критерии, разработанные для оценивания соответствия в рамках производственного контроля, как это, например, определено в СТБ EN 206 [3];
 - б) установление характеристической *in-situ* прочности бетона в существующей конструкции, как базовой характеристики для проверок предельных состояний конструктивного элемента в рамках метода частных коэффициентов. В данном случае основной целью испытаний следует считать не установление класса прочности бетона на сжатие (который, как известно, является величиной, получаемой прямым испытанием на образцах, хранившихся в стандартных условиях), а именно получение характеристики для выполнения проверочных расчетов. Разработка методов расчета эстиматора соответствующей квантили вероятностного распределения прочности является задачей довольно непростой. Особенно, когда подобное оценивание необходимо выполнять, опираясь на

ограниченные выборки результатов испытаний (как правило, $3 \leq N \leq 6$), как это имеет место при испытаниях выбуренных кернов.

Учитывая то обстоятельство, что в настоящее время выполняется переработка как европейского EN 13791 (CEN TG250/SG2), так и национального СТБ 2264 (ТКС8) стандартов, представляется целесообразным рассмотреть некоторые ключевые положения, касающиеся критериев оценивания характеристической *in-situ* прочности в соответствии с поставленной целью. Необходимо отметить, что в рамках EN 13791 испытание кернов является основным методом получения исходных данных для оценивания, а применение методов неразрушающего контроля рассматривается как альтернатива.

1. ОЦЕНИВАНИЕ *IN-SITU* ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА НА СЖАТИЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ СОГЛАСНО ТРЕБОВАНИЯМ EN 13791

1.1 Актуальная версия EN 13791 (2006)

В соответствии с действующим стандартом [4] характеристическую *in-situ* прочность бетона на сжатие следует определять, пользуясь двумя методами (подходами) в зависимости от количества полученных единичных результатов испытаний:

- подход А (доступно для анализа как минимум 15 единичных результатов испытаний).

В данном случае эстиматор квантили $\hat{f}_{p,\gamma}$ *in-situ* прочности бетона имеет вид двойного критерия, опирающегося на работы R.Caspeele и L.Taerwe [5]:

$$\min \begin{cases} f_{ck, is} = f_{cm(n), is} - k_2 \cdot s, \\ f_{ck, is} = f_{is, lowest} + 4, \end{cases} \quad (1)$$

где s – стандартное отклонение для выборки результатов испытаний согласно [4]; если рассчитанное значение стандартного отклонения меньше 2 МПа, следует принять $s = 2,0$ МПа;

k_2 – коэффициент, принимаемый равным 1,48 при отсутствии дополнительных указаний;

- подход В (доступно для анализа от 3 до 14 единичных результатов испытаний):

$$\min \begin{cases} f_{ck, is} = f_{cm(n), is} - k, \\ f_{ck, is} = f_{is, lowest} + 4, \end{cases} \quad (2)$$

где k – коэффициент, зависящий от количества единичных результатов испытаний, принимаемый по Таблице 2 EN 13791 [4].

Как видно, двойной критерий (2) является некоторой модификацией нестатистического критерия, принятого в EN 206 [3] для оценивания соответствия на стадии начального производства (метод А по EN 206). Несмотря на то, что в отличие от критерия, принятого в EN 206, значение коэффициента в критерии (2) зависит от количества результатов испытаний, в работе [6] показано, что данный критерий разработан без ясного статистического обоснования. Из выполненного в этой работе анализа видно, что обеспеченность эстиматора квантили $\hat{f}_{p,\gamma}$ зависит от вида функции распределения прочности в популяции произведенного бетона и стандартного отклонения. Оценка с использованием критерия (2) может давать в ряде случаев непредсказуемый результат.

1.2 Проект новой версии EN 13791 (2016)

Новый подход к определению характеристической *in-situ* прочности бетона по результатам испытаний образцов, отобранных в полевых условиях, предложил Т.А.Harrison [7]. В соответствии с этим подходом используются методы оценивания, изложенные в приложении D

к EN 1990 [8], опирающиеся на нормальный закон распределения для прочности. Значения эstimатора определяют по формуле:

$$f_{ck, is} = \hat{f}_{p, \gamma} = f_{cm(n), is} - t_{0.05} \cdot s_n \cdot \sqrt{1 + (1/n)}, \quad (3)$$

где s_n – стандартное отклонение (минимальное значение установлено равным 3 МПа, независимо от средней прочности);

Следует отметить, что при ближайшем рассмотрении зависимостей (1)...(3), применяемых в приведенных стандартах для вычисления эstimаторов *in-situ* прочности, возникают закономерные вопросы, на которые инженер, производящий оценивание бетона, не обращает должного внимания:

- 1) Какова обеспеченность единичной оценки *in-situ* характеристической прочности, полученной с использованием эstimаторов $\hat{f}_{ck, is}$, содержащихся как в действующих, так и в разрабатываемых Евростандартах? Остается ли эта обеспеченность постоянной, либо изменяется в процессе оценивания различных групп результатов, происходящих из испытаний одной партии?
- 2) Какой показатель может быть принят в качестве базы сравнения для оценки эффективности предлагаемого эstimатора *in-situ* характеристической прочности?

Необходимо понимать, что оценка *in-situ* характеристической прочности для ограниченной выборки результатов испытаний прочности (как правило, не более 6 результатов испытаний выбуренных кернов для некоторой группы конструктивных элементов) базируется на единичном значении эstimатора $\hat{f}_{ck, is}$, полученного по зависимостям, содержащимся в стандарте. Следует отметить, что обеспеченность γ оценки характеристической прочности $\hat{f}_{ck, is} = \hat{f}_{p, \gamma}$ в этом случае является неизвестной. Несмотря на то, что все результаты полевых испытаний прочности получают по образцам, отобраным из конструкции, изготовленной из одной партии оцениваемого бетона, другая партия результатов испытаний даст другое значение эstimатора $\hat{f}_{ck, is}$, соответствующее другой обеспеченности в функции распределения эstimатора.

2. НОВЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА В СУЩЕСТВУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫБОРКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

2.1 Обоснование и формулировка нового метода

Нами был разработан новый метод оценивания характеристической прочности бетона в существующих конструкциях (без оценивания соответствия его какому-либо классу прочности) на основе порядковых (непараметрических) статистик, который может быть применим в случаях ограниченной исходной информации (т.е. при ограниченном числе результатов испытаний).

Исходной предпосылкой нового метода является известный способ интервального оценивания квантилей [9, 10], в котором с использованием биномиального распределения вычисляется вероятность принадлежности квантили f_p заданного уровня p любому непараметрическому интервалу $[f_{c(r)}, f_{c(s)}]$ вариационного ряда $f_{c(1)} \leq f_{c(2)} \leq \dots \leq f_{c(R)} \leq \dots \leq f_{c(N)}$, получаемого путем ранжирования исходного ряда единичных результатов испытаний (выборки измерений) $f_{c1}, f_{c2}, \dots, f_{cN}$.

Непосредственное применение данного способа вызывает существенные проблемы в случае анализа положения квантили невысокого уровня (например, оцениванию характеристического значения прочности материала f_{ck} соответствует уровень $p = 0,05$). Поскольку квантиль f_p с вероятностью не менее 0,5 покрывается размахом исходного ряда (т.е. войдет

в диапазон $[f_{c(1)}, f_{c(N)}]$) лишь при выполнении условия $N \geq \log 0,5 / \log(1-p)$, для типового значения $p = 0,05$ имеем: $N \geq 14$. В подавляющем большинстве случаев анализа прочности бетона в существующих конструкциях число N результатов испытаний значительно меньше, поэтому истинное характеристическое значение прочности $f_{ck, is}$ практически всегда будет меньше (возможно, даже существенно) минимального значения прочности в исходной выборке.

Ранее нами была разработана оригинальная процедура получения оценки «снизу» искомой квантили с произвольно задаваемой обеспеченностью. Под обеспеченностью (коэффициентом доверия) γ оценки $\hat{f}_{p, \gamma}$ квантили уровня p понимается вероятность того, что оценка не превысит истинного значения квантили. Такая процедура позволила создать новый критерий статистического оценивания соответствия прочности бетона, и описана нами ранее [11].

Применяя аналогичный подход к задаче анализа прочности бетона в существующих конструкциях, сформулируем новый метод вычисления оценки характеристической прочности бетона (т.е. квантили уровня $p = 0,05$) как линейной комбинации трех первых порядковых статистик эмпирического ряда измерений:

$$f_{ck, is} = \hat{f}_{0,05, \gamma} = f_{c \min} - \lambda_1 \cdot \Delta_{2-1} - \lambda_2 \cdot \Delta_{3-2}, \quad (4)$$

где $f_{c \min} = \min f_{ci} = f_{c(1)}$ – наименьшее значение в группе из n последовательных единичных результатов f_{ci} испытаний ($3 \leq N \leq 15$);

$\Delta_{2-1} = f_{c(2)} - f_{c(1)}$ и $\Delta_{3-2} = f_{c(3)} - f_{c(2)}$ – неотрицательные разности;

$f_{c(1)}$, $f_{c(2)}$ и $f_{c(3)}$ – соответственно, первая, вторая и третья порядковые статистики (первый, второй и третий члены вариационного ряда, составленного по возрастанию единичных результатов f_{ci} испытаний),

$\lambda_1 = \lambda_1(\gamma, N)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma, N)$ – безразмерные тестовые коэффициенты, зависящие от объема N выборки результатов испытаний, а также от заданной обеспеченности γ оценки.

В качестве примера, значения тестовых коэффициентов, найденные для уровней обеспеченности искомой квантили $\gamma = 0,5$ и $\gamma = 0,75$, округленные до сотых долей, приведены в Таблице 1 [12].

Таблица 1 – Тестовые коэффициенты λ_1 , λ_2 для расчета оценки характеристической прочности бетона для выборки объема N при различной обеспеченности оценки [12]

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Обеспеченность $\gamma = 0,50$													
λ_1	0,38	0,38	0,34	0,28	0,23	0,17	0,11	0,05	0,0	-0,05	-0,10	-0,14	-0,19
λ_2	0,68	0,66	0,62	0,56	0,50	0,44	0,39	0,34	0,29	0,24	0,20	0,15	0,12
Обеспеченность $\gamma = 0,75$													
λ_1	1,06	1,16	1,15	1,10	1,03	0,96	0,88	0,805	0,73	0,66	0,59	0,52	0,46
λ_2	1,32	1,39	1,37	1,32	1,26	1,18	1,11	1,04	0,97	0,90	0,84	0,78	0,72

Верификация нового метода оценивания *in-situ* прочности детально представлена в наших работах [12,13]. Было показано, что новый метод оценивания имеет явные преимущества перед известными методами стандарта EN 13791 (методы **A** и **B**, см., соответственно, п.п. 1.1 и 1.2), так как дает возможность получить несмещенную и состоятельную оценку характеристической прочности бетона в существующих конструкциях при ограниченном количестве результатов испытаний прочности. Помимо этого, новый метод позволяет получать оценку с заранее заданной обеспеченностью (коэффициентом доверия).

Вместе с тем, отмечены также состоятельность и более высокая эффективность оценок, получаемых методами **A** и **B**, однако данное преимущество выглядит сомнительным с точки зрения обеспечения надежности (безопасности) конструкций из следующих соображений:

во-первых, уровень обеспеченности этих оценок, установленный в результате выполненной симуляции, колеблется в широких пределах, а априори (при практическом применении известных методов) вообще неизвестен;

во-вторых, в некоторых случаях (например, для бетона класса С 30/35 при $\sigma = 5$ МПа и $N > 10$) в достаточно узкий, ввиду формально высокой эффективности оценки, интервал ее рассеяния истинное значение характеристической прочности вообще не попадает (!).

2.2. Восстановление вероятностного распределения оценки квантили новым методом и определение уровня обеспеченности оценок для известных методов

Необходимо особо отметить, что представленные выше свойства оценок относятся ко всей популяции произведенного бетона. В реальной ситуации, когда оценивается отдельная партия бетона (область существующей конструкции), ситуация несколько иная.

Как уже указывалось (см., например, Табл. 1), новый метод оценивания допускает выполнение оценивания при произвольном задании уровня обеспеченности γ . Нами были найдены значения безразмерных тестовых коэффициентов λ_1 , λ_2 критерия в широком диапазоне значений γ (приведены на рисунке 1), что дает возможность вычислять значения оценки характеристической прочности, соответствующие различным процентилям (например, децилям) вероятностного распределения.

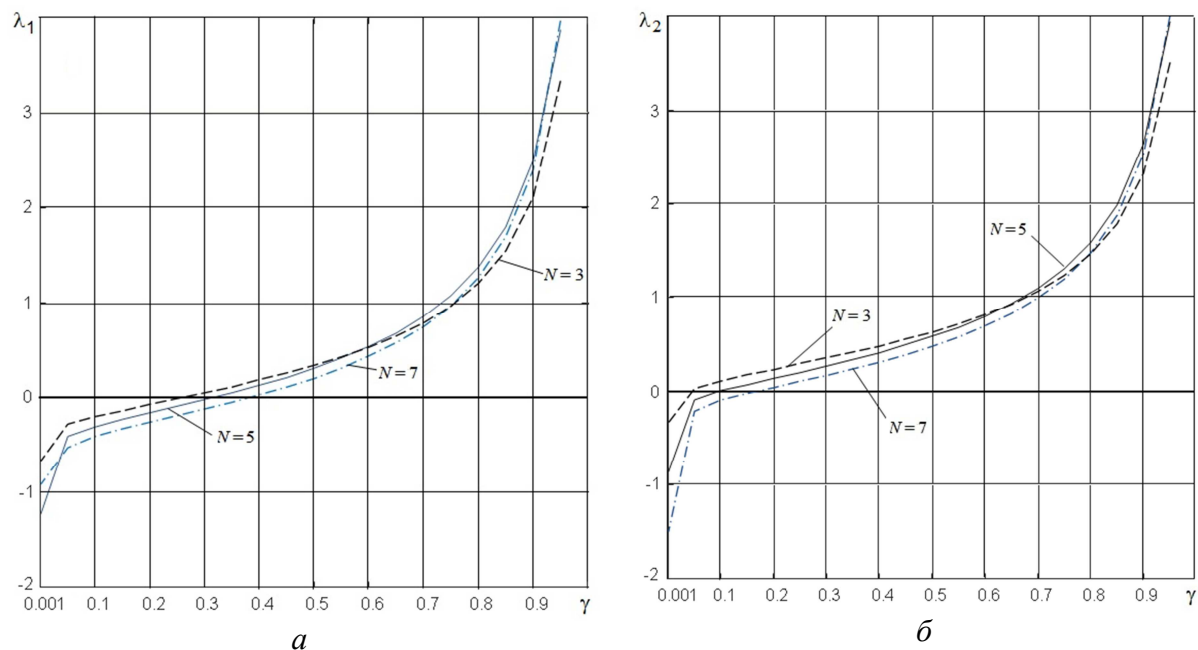


Рисунок 1 – Значения тестовых коэффициентов λ_1 (а) и λ_2 (б) критерия для расчета оценок характеристической прочности бетона с различной обеспеченностью по выборке объема N

В свою очередь, это позволяет, с заданной точностью, численным методом восстановить эмпирическое распределение вероятности $g(\hat{f}_{ck, is})$ оценки 0,05-квантили для конкретной выборки результатов измерений прочности. На рисунке 2 представлены примеры восстанов-

ленных распределений эстиматора квантили – для случая минимального объема выборки ($N = 3$) и диапазона параметра $\gamma = 0,05 \dots 0,95$ с шагом, равным 0,05 (уменьшая шаг, можно получать почти гладкие функции).

Существенное влияние на результаты оценивания оказывает размах эмпирической выборки (изменчивость результатов внутри эмпирического теста). Ввиду значительной изменчивости, формально, более высоким результатам измерения прочности в выборке $\{ 36,1; 36,5; 42,6 \text{ МПа} \}$ соответствует распределение (показано на рисунке точечной линией), в котором вероятность того, что оценка характеристической прочности окажется ниже указанной в классе (30 МПа), достигает 0,35. Напротив, выборка $\{ 33,5; 34,4; 35,6 \text{ МПа} \}$, включает очевидно более низкие результаты, но имеет и меньшую изменчивость, поэтому вероятность недостаточной (относительно указанной в классе) оценки характеристической прочности не превышает 0,15 (как первая, так и вторая выборки принадлежат одному и тому же классу бетона С 30/35).

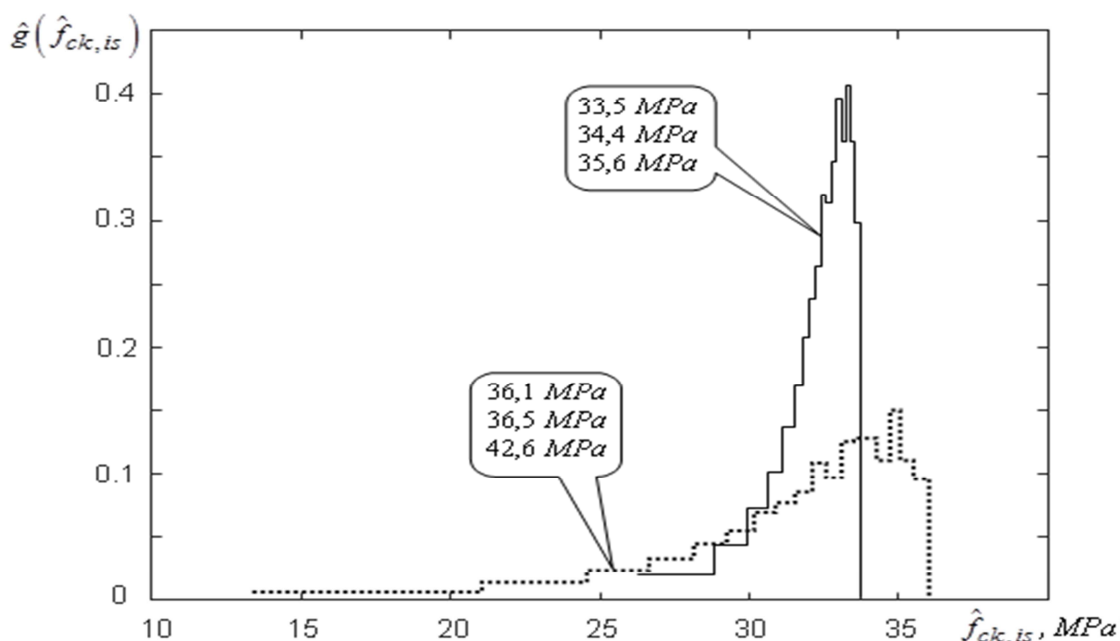


Рисунок 2 – Примеры вероятностных распределений характеристической прочности бетона класса С 30/35, восстановленных по ограниченным выборкам с использованием нового метода оценивания (в выносках приведены численные значения результатов испытаний прочности)

Восстановленное вероятностное распределение 5%-квантили прочности бетона дает возможность получить оценку характеристической прочности с любым заданным уровнем обеспеченности (в диапазоне вплоть до $\gamma = 0,95$). При этом важнейшим становится вопрос назначения этого уровня. Например, вряд ли уровень обеспеченности $\gamma = 0,50$ может считаться достаточным для целей практического оценивания прочности бетона в существующих конструкциях. Ведь в этом случае результат оценивания по конкретной выборке результатов с вероятностью 0,5 может оказаться завышенным относительно фактической характеристической прочности (так называемое «переоценивание»), но и с такой же вероятностью $1 - \gamma = 0,5$ – заниженным («недооценивание»).

В связи с этим, наряду с методами стандарта EN 13791 (методы **A** и **B**) следует рассмотреть также способ оценивания, внесенный в CEN Guide на основе стандарта EN 1990, позволяющий, в предположении логнормального распределения параметра прочности, получить оценку с фиксированной обеспеченностью $\gamma = 0,75$ – **метод С**:

$$\begin{cases} f_{ck, is} = \hat{f}_{p, 0.75} = \exp(m_y - k_N s_y) \cdot [f_c] \\ m_y = \sum \ln x_i / N, \quad x_i = f_{ci} / [f_c] \\ s_y = \sqrt{\sum (\ln x_i - m_y)^2 / (N - 1)} \end{cases}, \quad (5)$$

где f_{ci} , $i = \overline{1, N}$ – единичные результаты измерения прочности бетона, МПа;

k_N – коэффициент, зависящий от количества n единичных результатов испытаний ($k_N = 3,37$ для $N = 3$ [*]).

$[f_c] = 1$ МПа – единица измерения прочности бетона.

Сравнительный анализ методов оценивания характеристической *in-situ* прочности бетона на сжатие, с использованием восстановленных распределений, выполнялся на эмпирических результатах испытаний, полученных в полевых условиях для нескольких групп бетонов с характеристической прочностью в диапазоне 30...40 МПа. Объем группы – от 61 до 89 тестов, или от 183 до 267 единичных результатов (все тесты состояли из трех результатов). Для этих тестов, с использованием нового метода, восстанавливали распределение эstimатора прочности ($N = 3$) с шагом уровня обеспеченности $\Delta\gamma = 0,05$, а затем вычисляли оценки *in-situ* характеристической прочности указанными выше методами **A**, **B** и **C**. Результаты сравнения уровней обеспеченности приведены на рисунке 3. В приведенных примерах восстановленных распределений обеспеченность эstimатора *in-situ* характеристической прочности уменьшается при движении по «ступенькам» гистограммы слева направо: начало первой (крайней слева) «ступеньки» соответствует обеспеченности оценки $\gamma = 0,95$, второй – обеспеченности $\gamma = 0,90$, и т.д.

Сравнение положений эstimаторов, вычисленных известными методами, с гистограммами восстановленных распределений показало, что методы **A** и **B** весьма неустойчивы с точки зрения фактической обеспеченности получаемых оценок, которая может меняться в очень широких пределах – от 0,25...0,35 (как на рис. 3а) до более чем 0,95 (как на рис. 3в). Установлено, что занижение обеспеченности (т.е. «переоценивание» характеристической прочности бетона) имеет место при большом относительном размахе результатов испытаний прочности $v = (\Delta_{2-1} + \Delta_{3-2}) / f_{c\min}$ (более 0,23 в примере рис. 3а). Напротив, при малых значениях относительного размаха ($v = 0,03$ на рис. 3в и $v = 0,06$ на рис. 3г) наблюдается явное завышение обеспеченности, что означает существенное «недооценивание» параметра прочности. Лишь при средних значениях относительного размаха (например, $v = 0,08$ на рис. 3б) все три рассматриваемых метода дают сходный результат оценивания или даже совпадают.

Как уже указывалось, оценки, получаемые методами **A** и **B**, являются эффективными и состоятельными (но, в общем случае, также и смещенными). Однако в реальной ситуации, когда оценивается *in-situ* отдельная партия бетона (конкретный тест, содержащий всего лишь нескольких результатов испытаний), ситуация меняется: значимость формальной эффективности оценок «в целом» уступает более важному здесь свойству несмещенности. Наблюдаемые при этом отклонения оценок, получаемых методами **A** и **B**, от оценки по методу **C**, достигающие величины $\pm 4...5$ МПа и более, можно считать практически неприемлемыми.

Уровень обеспеченности оценок, получаемых методом **C**, варьируется в сравнительно узком диапазоне $\gamma = 0,70...0,80$ (см., например, рис. 5а и рис. 5г), что в целом соответствует декларируемому, для данного метода, фиксированному значению обеспеченности $\gamma = 0,75$ [*]. С этой точки зрения, данный метод следует признать наилучшим среди анализируемых известных методов.

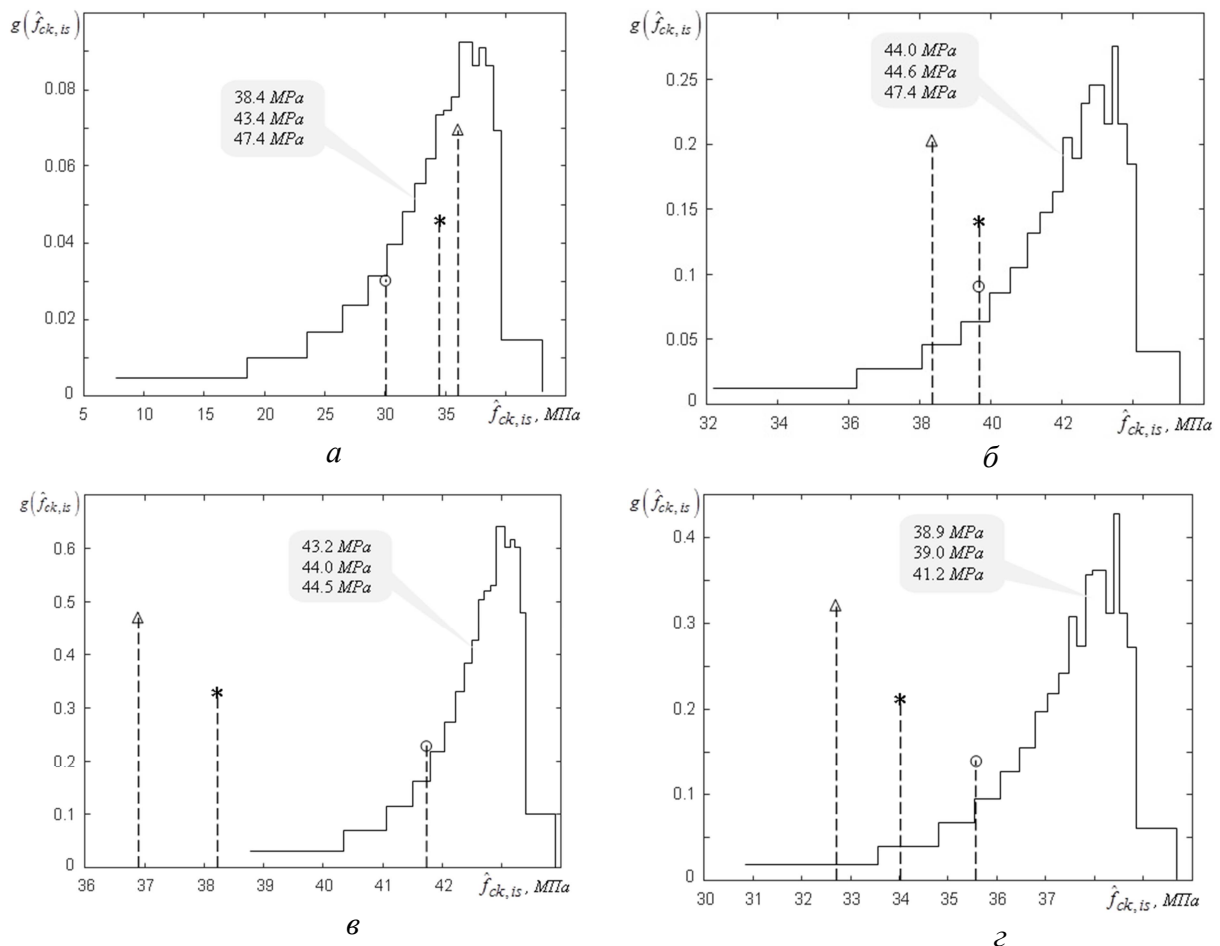


Рисунок 3 – Примеры вероятностных распределений эstimатора *in-situ* характеристической прочности бетона, восстановленных по ограниченным выборкам с использованием нового метода оценивания (в выносках приведены численные значения результатов испытаний прочности) – в сравнении с оценками, полученными другими методами:

▷ – метод A; * – метод B; ○ – метод C

Однако, по нашему мнению, оценивание *in-situ* характеристической прочности бетона с заранее заданным (фиксированным) значением обеспеченности оценки γ не является оправданным. Само по себе оценивание, в конечном счете, направлено на проверку фактического выполнения некоторых условий, обеспечивающих требуемую надежность существующей железобетонной конструкции, но ни один из известных методов (включая также и метод C) не содержит обоснования требуемого уровня обеспеченности γ , при которой следует подтверждать (или опровергать) выполнение таких условий.

Поэтому рассмотрим далее вопрос оценивания *in-situ* характеристической прочности бетона во взаимосвязи с вопросом достижения некоторой заданной надежности для конкретной анализируемой железобетонной конструкции.

3. АДАПТАЦИЯ НОВОГО МЕТОДА ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА К РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСТРУКЦИИ

3.1. Условия обеспечения расчетной (целевой) надежности железобетонных конструкций

Анализ надежности конструкции выполним на типовом примере расчета сжатой железобетонной колонны, в котором состояние колонны X определяется как разность ее сопротивления сжатию R и внешней сжимающей нагрузки E (с учетом ошибок k_R и k_E модели сопротивления и модели нагрузки, соответственно):

$$X = k_R \cdot R - k_E \cdot E = k_R (bh \cdot f_c + \rho \cdot bh \cdot f_y) - k_E (G + Q_{50}), \quad (6)$$

где b и h – соответственно, ширина и высота поперечного сечения колонны, m ;

f_c и f_y – прочность на сжатие, соответственно, бетона и металла арматуры, $Па$;

ρ – коэффициент армирования колонны;

G – величина постоянной нагрузки на колонну, H ;

Q_{50} – величина наибольшей, за период 50 лет, переменной нагрузки на колонну, H .

Все входящие в (6) переменные (за исключением коэффициента армирования $\rho = 0,005$) являются непрерывными случайными величинами, поэтому состояние колонны – также непрерывная случайная величина с некоторым распределением $g_X(X)$, тогда вероятность отказа (разрушения) колонны за установленный период:

$$q(t = 50 \text{ лет}) = \Pr\{X \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 g_X(X) dX. \quad (7)$$

Путем деления (6) на масштабный коэффициент $k_R bh$, зависящий, в основном, от сечения колонны, получаем некоторое нормированное, к сечению колонны, состояние X^* – как разность прочности бетона на сжатие f_c и нормированной (к сечению колонны) нагрузки E^* :

$$X^* = f_c - E^* = f_c - \frac{k_E (G + Q_{50}) / k_R - \rho \cdot bh \cdot f_y}{bh}, \quad (8)$$

при этом вероятность отказа, очевидно, не претерпит изменений: $\Pr\{X^* \leq 0\} = \Pr\{X \leq 0\} = q$.

Для вероятностного моделирования распределения функции $g_X(X^*)$ состояния колонны рассчитаем полувероятностным методом частных коэффициентов значения переменных, входящие в (7), определим их как случайные величины и сведем их в таблицу 2.

Таблица 2 – Характеристика переменных функции состояния железобетонной колонны, как непрерывных случайных величин

Обозначение переменной	Наименование переменной	Единица измерения	Параметры функции вероятностного распределения			
			тип функции	характеристическое значение	среднее значение	коэффициент вариации
f_c	прочность бетона	$МПа$	N	30	38	4,8 / 38
f_y	прочность арматуры	$МПа$	LN	500	560	0,054
b	ширина сечения колонны	m	N	0,5	0,5	0,033
h	высота сечения колонны	m	N	0,5	0,5	0,033
G	постоянная нагрузка	$кН$	N	2000	2000	0,10
Q_{50}	переменная нагрузка	$кН$	GU	1500	0,6×1500	0,35
k_R	ошибка модели сопротивления	–	LN	–	1	0,10
k_E	ошибка модели нагрузки	–	LN	–	1	0,10

Примечание. Типы функций: N – нормальное распределение; LN – логнормальное распределение; GU – распределение Гумбеля.

На рисунке 4 приведен пример результата вероятностно-статистического моделирования нормированной функции состояния для бетона класса С 30/37, а также принцип варьирования прочности бетона, что позволяет анализировать зависимость вероятности q отказа конструкции от характеристической прочности (фактора) $f_{ck, is}$.

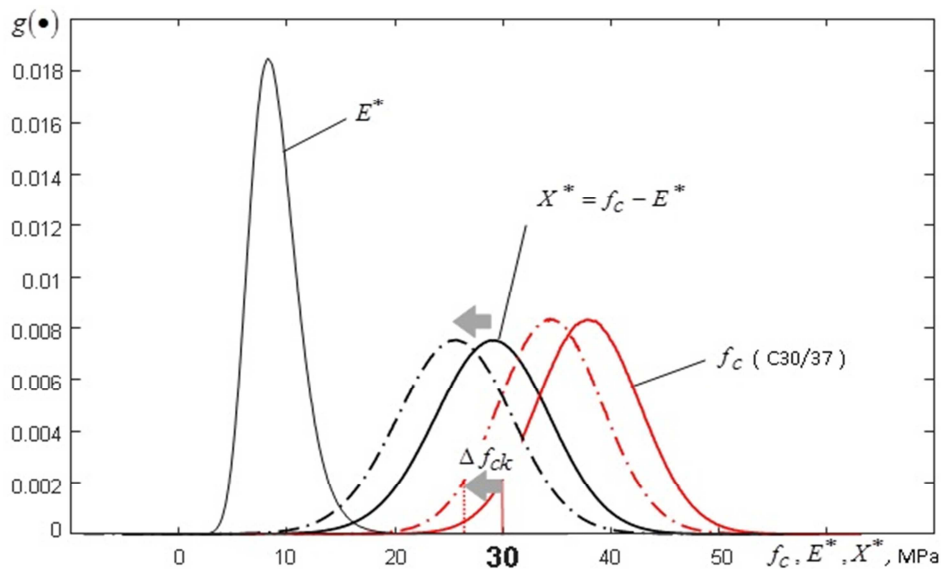


Рисунок 4 –Пример вероятностно-статистического моделирования нормированной (к сечению колонны) функции состояния X^* , как разности прочности бетона на сжатие f_c и нормированной (к сечению колонны) нагрузки E^* (стрелками показаны смещения функций прочности и состояния при изменении характеристической прочности бетона f_{ck})

В области малых значений вероятностей отказа (например $q \leq 10^{-3} \ll 1$) зависимость $q = q(f_{ck})$ может быть весьма точно аппроксимирована логарифмической регрессионной моделью (т.е. линейной моделью в полулогарифмических координатах) вида:

$$\lg q = a - b \cdot f_{ck} / [f], \quad (9)$$

где a, b – коэффициенты регрессионной модели,

$[f]$ – единица измерения параметра прочности бетона, $[f] = 1 \text{ МПа}$.

Так, например, представленная на рис. 5 модель (9) с коэффициентами $a = 2,3$ и $b = 0,288$ имеет коэффициент детерминации $R^2 = 0,9998$.

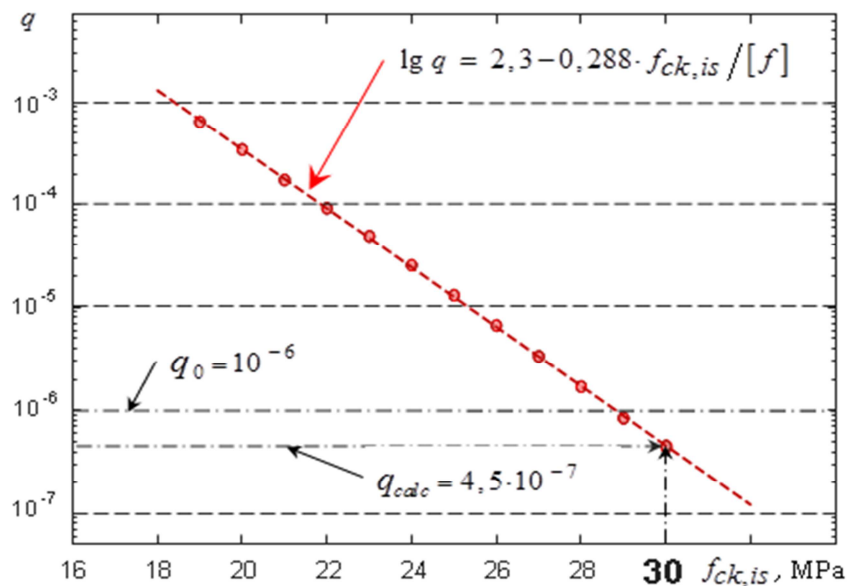


Рисунок 5 – Зависимость вероятности q отказа сжатой железобетонной колонны (в примере по данным табл. 3) от характеристической прочности бетона f_{ck} ,

где $[f] = 1 \text{ МПа}$ – единица измерения параметра прочности бетона

Вычислительные эксперименты, выполненные по моделям (8) и (9) для различных исходных данных, позволили сделать следующие заключения.

Во-первых, и функция вероятностного распределения нормированной нагрузки $g_E(E^*)$, и функция $g_X(X^*)$ состояния колонны существенно отличаются от гауссовых. Это обусловлено как негауссовым распределением некоторых составляющих функцию (8) переменных (например, переменная Q_{50} распределена по Гумбелю), так и применением ряда нелинейных операций (умножения, деления) с другими случайными величинами (переменными). В результате расчетное значение вероятности отказа конструкции оказывается существенно меньшим целевого значения $q_0 = 10^{-6}$ (в рассматриваемом примере по табл. 2 и рис. 5 эта вероятность ниже более чем вдвое: $q_{calc} = q(f_{ck} = 30 \text{ МПа}) = 4,5 \cdot 10^{-7}$, а величина индекса надежности при этом составила 5,44 против величины 4,75 в предположении нормального распределения). Таким образом, при использовании полувероятностного метода частных коэффициентов имеет место определенный запас надежности.

Во-вторых, в полулогарифмических координатах модель, описывающая вероятность отказа (9), оказывается практически линейной. При изменении коэффициента вариации прочности бетона меняется лишь положение этой линии, но ее наклон (например, абсолютная величина b углового коэффициента отрицательного наклона) остается постоянным. Коэффициент b связан прямой зависимостью с долей $\chi = Q_{50}/(G + Q_{50})$ переменной нагрузки в общей нагрузке. Отметим, что в рассматриваемом примере (см. табл. 2 и рис. 4) оба названных параметра достигают практически максимальных, для железобетонных конструкций, значения: $b = 0,288$ и $\chi = 0,43$.

Модель (9) позволяет определить оценку вероятности отказа конструкции по любой конкретной оценке *in-situ* характеристической прочности бетона $\hat{f}_{ck, is}$, найденной любым из известных методов. Возможно также и решение обратной задачи поиска некоторой «целевой» характеристической прочности, соответствующей целевой надежности (например, вероятности отказа конструкции $q_0 = 10^{-6}$): $f_{ck}^o = [f] \cdot (a - \lg q_0) / b$.

Однако наибольшие возможности исследования открываются при совместном использовании модели (9) и восстановленного новым методом по (1) вероятностного распределения $g(\hat{f}_{ck, is})$ оценки 0,05-квантили прочности бетона, как множества оценок $\hat{f}_{ck}(\gamma)$ для различных значений γ обеспеченности оценки.

Прежде всего, это позволяет однозначно, как показано на рисунке 6, определить функцию распределения оценки вероятности отказа $h(\hat{q})$. Следует отметить, что найденная функция $h(\hat{q})$ не идентична функции $g(\hat{f}_{ck, is})$, поскольку является результатом нелинейного (показательного) преобразования $\varphi(\bullet)$:

$$q = \varphi(f_{ck}) = 10^{a - b \cdot f_{ck} / [f]}. \quad (10)$$

В этом случае появляется возможность сформулировать условия, обеспечивающие требуемую надежность существующей железобетонной конструкции – например, в виде достижения некоторой средней вероятности \bar{q} ее отказа.

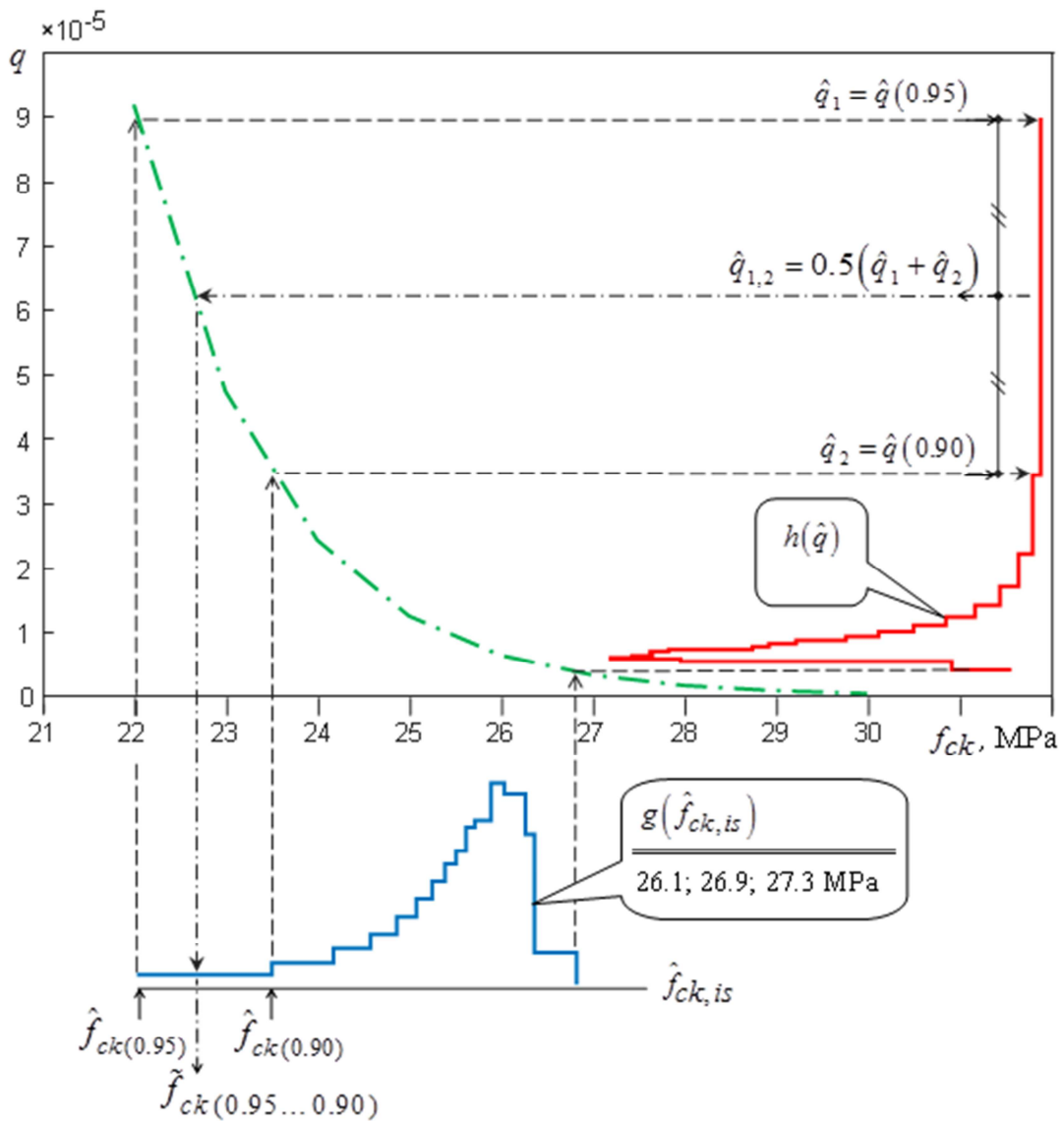


Рисунок 6 – Пример нелинейного преобразования восстановленного распределения оценки *in-situ* характеристической прочности бетона (внизу вдоль оси абсцисс) в функцию распределения вероятности отказа сжатой железобетонной колонны (справа вдоль оси ординат), а также пример вычисления эквивалентной характеристической прочности для одной ступеньки гистограммы

3.2. Показатели прочности, эквивалентные среднему уровню конструкционной надежности (ALSR¹) железобетонных конструкций

Величина оценки вероятности отказа в рамках моделей (1) и (9) является, в конечном счете, функцией $\hat{q} = \varphi(\hat{f}_{ck(\gamma)}) = \hat{q}(\gamma)$ величины γ обеспеченности оценок. Если функция $g(\hat{f}_{ck,is})$ непрерывна и определена на некотором интервале величины γ , искомое среднее соответствует математическому ожиданию на этом же интервале: $\bar{\hat{q}} = \int \hat{q} h(\hat{q}) d\hat{q}$.

В рассматриваемом же примере функция $g(\hat{f}_{ck,is})$ представлена в виде гистограммы с $K-1=19$ интервалами равной вероятности ($\Delta\gamma=0,05$), то есть множеством оценок: $\{\hat{f}_{ck(\gamma_k)}, \gamma_k = 1 - k \Delta\gamma, k = 1, K\}$. Аналогичным множеством описывается также функция

¹ ALSR – Average Level of Structural Reliability (англ.)

$h(\hat{q}) : \{ \hat{q}_k = \hat{q}(\gamma_k), j = \overline{1, K} \}$, тогда средняя вероятность отказа \bar{q} может быть получена как выборочное среднее для средних арифметических величин $\bar{q}_{k, k+1}$, вычисляемых для каждого интервала:

$$\bar{q} = \sum_{k=1}^{K-1} \hat{q}_{k, k+1} / (K-1) = \sum_{k=1}^{K-1} (\hat{q}_k + \hat{q}_{k+1}) / (2K-2). \quad (11)$$

Следует уточнить, что в рассматриваемом примере по выражению (10) фактически вычисляется усеченное выборочное среднее, т.к. интервал γ ограничен сверху значением $\gamma_{\max} = 0,95$, т.е. оценивание выполняется на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma_{\max} = 0,05$.

Под эквивалентной характеристической прочностью $\tilde{f}_{ck} = \Phi^{-1}(\bar{q})$, соответствующей среднему уровню \bar{q} конструкционной надежности ALSR, понимаем значение характеристической прочности $f_{ck, is}$ из интервала определения восстановленного распределения $g(\hat{f}_{ck, is})$, обеспечивающее тот же уровень надежности согласно (9).

Важно отметить, что эквивалентная характеристическая прочность \tilde{f}_{ck} не есть арифметическое среднее (или математическое ожидание) функции $g(\hat{f}_{ck, is})$, а может быть отнесена к известному среднему Колмогорова (англ. *quasi-arithmetic mean*):

$$\tilde{f}_{ck} = M_{\Phi}(f_{ck}) = \Phi^{-1} \left[\left(\Phi(f_{ck1}) + \dots + \Phi(f_{ckK}) \right) / K \right]. \quad (12)$$

По аналогии с часто используемыми вариантами «степенных» средних (арифметическое, геометрическое, гармоническое и др.), величина \tilde{f}_{ck} может быть названа «средним показателем». Так как функция (9) выпуклая, среднее вида (11), согласно известному неравенству Йенсена (англ. *Jensen's inequality* [14]), всегда меньше среднего арифметического: $\tilde{f}_{ck} < \bar{f}_{ck}$. Преобразованием выражения (9) к экспоненциальной функции:

$$q = \Phi(f_{ck}) = 10^{a - b \cdot f_{ck} / [f]} = 10^a \cdot 10^{-b \cdot f_{ck} / [f]} = A \cdot e^{-b \cdot \ln 10 \cdot f_{ck} / [f]} = A \cdot e^{B \cdot f_{ck}}, \quad (13)$$

с учетом инвариантности среднего Колмогорова к масштабированию (множителю A), среднее показательное сводится к версии известной функции LSE (англ. *log-sum-exp* – логарифм суммы экспонент аргументов) с постоянным сдвигом. Такая функция используется в математике как плавное приближение к максимальной функции, и встречается, например, в задачах машинного обучения (в качестве кумулянта биномиального семейства), а также разделения однофазных смесей данных [15].

На рис. 8 (снизу, вдоль оси абсцисс) представлена функция распределения $g(\hat{f}_{ck, is})$ ступенчатого вида, восстановленная с шагом $\Delta\gamma = 0,05$ на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma_{\max} = 0,05$ (на отрезке параметра уровня обеспеченности $\gamma \in (0; 0,95]$), а также соответствующая ей функция $h(\hat{q})$ для вероятности отказа конструкции (справа, вдоль оси ординат). Здесь же иллюстрирован пример вычисления некоторой промежуточной величины $\tilde{f}_{ck} (0,95 \dots 0,90)$ – как эквивалентной характеристической прочности (среднего показательного с основанием степени $10^{-0,288} \square 0,515$) для первой (слева) из $K-1=19$ ступенек гистограммы распределения.

Таким образом, известная зависимость вероятности отказа железобетонной конструкции от характеристической прочности бетона $q = \Phi(f_{ck})$, а также восстановленное распределение

оценки *in-situ* этой характеристической прочности $g(\hat{f}_{ck, is})$ однозначно определяют величину \tilde{f}_{ck} эквивалентной характеристической прочности, которая обеспечивает (на принятом уровне значимости α) некоторый средний уровень конструкционной надежности ALSR для данной конструкции. Более того, на множестве оценок $\{\hat{f}_{ck}(\gamma)\}$ (т.е. на восстановленном распределении $g(\hat{f}_{ck, is})$), можно определить также и соответствующую величину эквивалентной обеспеченности $\tilde{\gamma}$, для которой $\hat{f}_{ck}(\tilde{\gamma}) = \tilde{f}_{ck}$. Этот результат оказывается весьма важным в практическом плане.

Нами установлено, что эквивалентная обеспеченность $\tilde{\gamma}$ оценки *in-situ* характеристической прочности (представлено на рис. 7) не зависит от параметра положения (абсолютных значений) распределения прочности, но растет с увеличением параметра масштаба распределения, например – с увеличением разности между третьей и первой порядковыми статистиками вариационного эмпирического ряда измерений прочности $\Delta = f_{c(3)} - f_{c(1)} = \Delta_{3-2} + \Delta_{2-1}$ (т.е. размаха выборки в случае $N=3$).

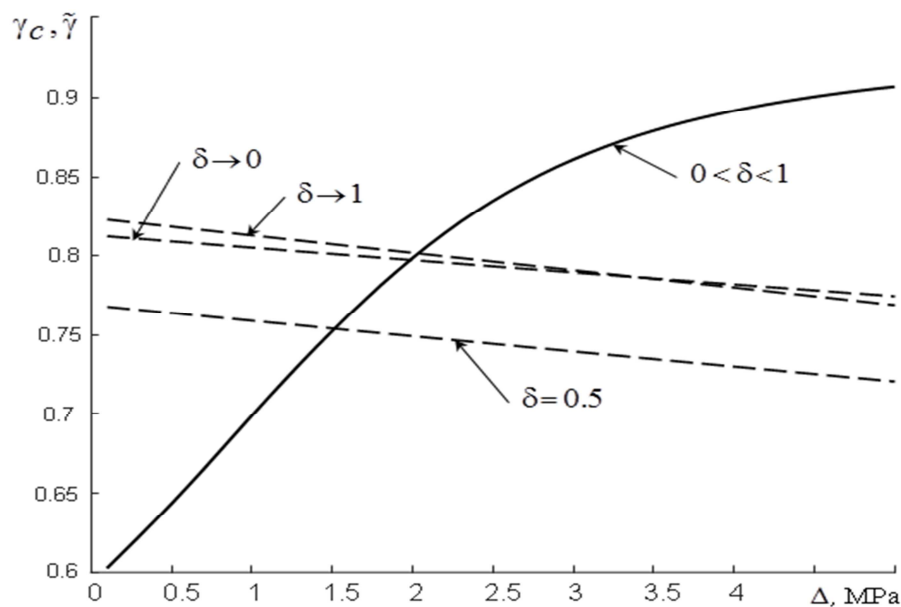


Рисунок 7 – Влияние размаха выборки (объема $N=3$) измерений прочности бетона на обеспеченность оценки характеристической *in-situ* прочности по методу $C(\gamma_c)$, пунктирные линии) и на эквивалентную обеспеченность согласно новому методу ($\tilde{\gamma}$, сплошные линии) при различном соотношении $\delta = \Delta_{3-2}/\Delta_{2-1}$ разностей эмпирического вариационного ряда измерений прочности

Как показано на рисунке 6 для случая $N=3$, с увеличением размаха выборки Δ от 0,1 до 5 МПа эквивалентная обеспеченность $\tilde{\gamma}$ монотонно растет с 0,6 до 0,92, при этом она практически нечувствительна к соотношению разностей $\delta = \Delta_{3-2}/\Delta_{2-1}$.

Для сравнения, на этом же рисунке показаны свойства оценки характеристической прочности, получаемой по методу C [*]. Обеспеченность этой оценки, напротив, мало зависит от размаха выборки (даже слегка снижается с его увеличением), но параметр δ уже существенно на нее влияет. Таким образом, декларируемая фиксированная обеспеченность оценки $\gamma = 0,75$ [*] фактически достигается только при средних значениях размаха при одновременном выполнении условия $\Delta_{3-2} \approx \Delta_{2-1}$.

3.3. Алгоритм оценивания *in-situ* эквивалентной характеристической прочности бетона

В соответствии с предложенным методом, оценивание *in-situ* характеристической прочности бетона в существующей железобетонной конструкции выполняют в следующем порядке:

- а) ранжируют (по возрастанию) выборки из N единичных результатов f_{ci} испытаний прочности бетона на сжатие для определения трех первых порядковых статистик $f_{c(1)}$, $f_{c(2)}$ и $f_{c(3)}$;
- б) вычисляют разность $\Delta = \Delta_{3-1} = f_{c(3)} - f_{c(1)}$;
- в) при известном коэффициенте b регрессионной модели (9) определяют эквивалентную обеспеченность $\tilde{\gamma}$ оценки, используя график, аналогичный представленному на рис. 6;
- г) используя найденное значение эквивалентной обеспеченности $\tilde{\gamma}$, для данного объема выборки N , по графикам на рис. 1 находят значения тестовых коэффициентов λ_1 и λ_2 ;
- д) вычисляют оценку эквивалентной характеристической прочности по уравнению (1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Предложен новый эстиматор $\hat{f}_{p,\gamma}$ оценивания характеристической *in-situ* прочности, основанный на положениях теории порядковых статистик. В рамках предложенного подхода существует возможность рассчитать значения коэффициентов λ_1 и λ_2 , входящих в аналитическое описание эстиматора $\hat{f}_{p,\gamma}$, для различных уровней γ вероятностной обеспеченности оценки. Это в свою очередь дает возможность выполнить численное восстановление функции распределения эстиматора по каждой конкретной выборке результатов испытаний ограниченного объема N , начиная с $N=3$ (!).

1. Предложенный подход к восстановлению распределения эстиматора по ограниченной выборке результатов позволяет получить «шаблон» для анализа эстиматоров другого типа. Анализ, проведенный на фоне данных, полученных в полевых испытаниях, показал, что обеспеченность оценок, получаемых известными методами, может изменяться в широких пределах – от 0,20 до 0,99 для метода **A** (EN 13791:2006 [4]), и от 0,45 до 0,99 для метода **B** (проект EN 13791:2016 [7,8]). В обоих этих методах наблюдается общая тенденция к завышению обеспеченности оценки, а тем самым – к занижению, по отношению к фактической характеристической прочности бетона, самой оценки, а значит и надежности оцениваемой конструкции.

2. Предложенный метод, позволяющий восстановить функцию распределения эстиматора $\hat{f}_{p,\gamma}$, должен также изменить и общий подход к оцениванию прочности бетона в существующих конструкциях, а именно: по конкретным результатам испытаний (начиная с $N=3$) численно восстанавливают функцию распределения $\hat{f}_{p,\gamma}$, а затем из нее принимают значение *in-situ* характеристической прочности для некоторого установленного уровня обеспеченности. Требуемый уровень обеспеченности оценки для эстиматора квантили $\hat{f}_{p,\gamma}$ устанавливают из совместного рассмотрения восстановленной функции распределения эстиматора *in-situ* характеристической прочности и показателей надежности анализируемой конструкции.

Список источников

1. Бетонные и железобетонные конструкции: СНБ 5.03.01-02. – Введ. 20.06.02. – Минск: Минстройархитектуры, 2003. – 177 с.

2. Тур, В.В. Новый подход к оцениванию прочности бетона на сжатие в существующих конструкциях / В.В.Тур, С.С.Дереченник, В.В.Колевчук // Проблемы современного бетона и железобетона: сборник науч. трудов. – Вып. 9. – Мн.: «Колорград», 2017. –С. 455–475.
3. Бетон. Требования, показатели, изготовление и соответствие: СТБ EN 206:2014 - 2016. – Введ. 01.07.17. – Минск: Госстандарт, 2017. – 108 с.
4. Оценка прочности на сжатие бетона в конструкциях и сборных элементах конструкций: СТБ EN 13791:2006 - 2012. – Введ. 10.02.12. – Минск: Госстандарт, 2012. – 26 с.
5. Caspeele, R. Numerical Bayesian updating of prior distributions for concrete strength properties considering conformity control / R.Caspeele, L.Taerwe // Advances in concrete construction. – 2013. – Vol. 1, No.1 – P. 85-102.
6. Holicky, M. Fractile estimation and sampling inspection in Building / M.Holicky, M.Vorlicek // Acta polytechnic CVUT. – 1992. – No. 1. – P. 87-96.
7. Harrison, T.A. Assessment of concrete compressive strength in structures / T.A.Harrison // XVII. ERMCO Congress Proceedings, Istanbul, Turkey, 4-5 June, 2015. – Turkish Ready Mixed Concrete Association, 2015. – P. 336-344.
8. Основы проектирования строительных конструкций: СТБ EN 1990:2004 - 2014. – Минск: Госстандарт, 2014. – 116 с.
9. Dawid, H.A. Order Statistics / H.A.Dawid. – NY: John Wiley & Sons, 1981. – 360 p.
10. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И.Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
11. Tur, V.V. An Innovation Conformity Criterion for Assessment of the Concrete Strength Under Uncertainty Conditions / V.V.Tur, S.S.Derechennik // High Tech Concrete: Where Technology and Engineering Meet: Proceedings of the 2017 *fib* Symposium, held in Maastricht, The Netherlands, June 12–14, 2017 / D.A.Hordijk and M.Luković (eds.) – Springer International Publishing AG 2018. – P. 1628–1635.
12. Tur, V. Assessment of the concrete compressive strength in existing structures based on core test results / V.Tur, S.Derechennik // Solid State Phenomena. – 2018. – Vol. 272. – p. 238-243.
13. Дереченник, С.С. Новый подход к оцениванию *in-situ* характеристической прочности бетона в существующих железобетонных конструкциях при ограниченном количестве результатов полевых испытаний / С.С.Дереченник, В.В.Тур // Вестник БрГТУ. Строительство и архитектура. – 2018. – № 1 (109). – С. 109-115.
14. Jensen, J.L.W.V. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes / J.L.W.V.Jensen // Acta Mathematica 1906, 30 (1), 175–193.
15. Nilsen, T. Guaranteed bounds on information-theoretic measures of univariate mixtures using piecewise log-sum-exp inequalities / T.Nilsen, K.Sun // Entropy 2016, 18 (12), 442.