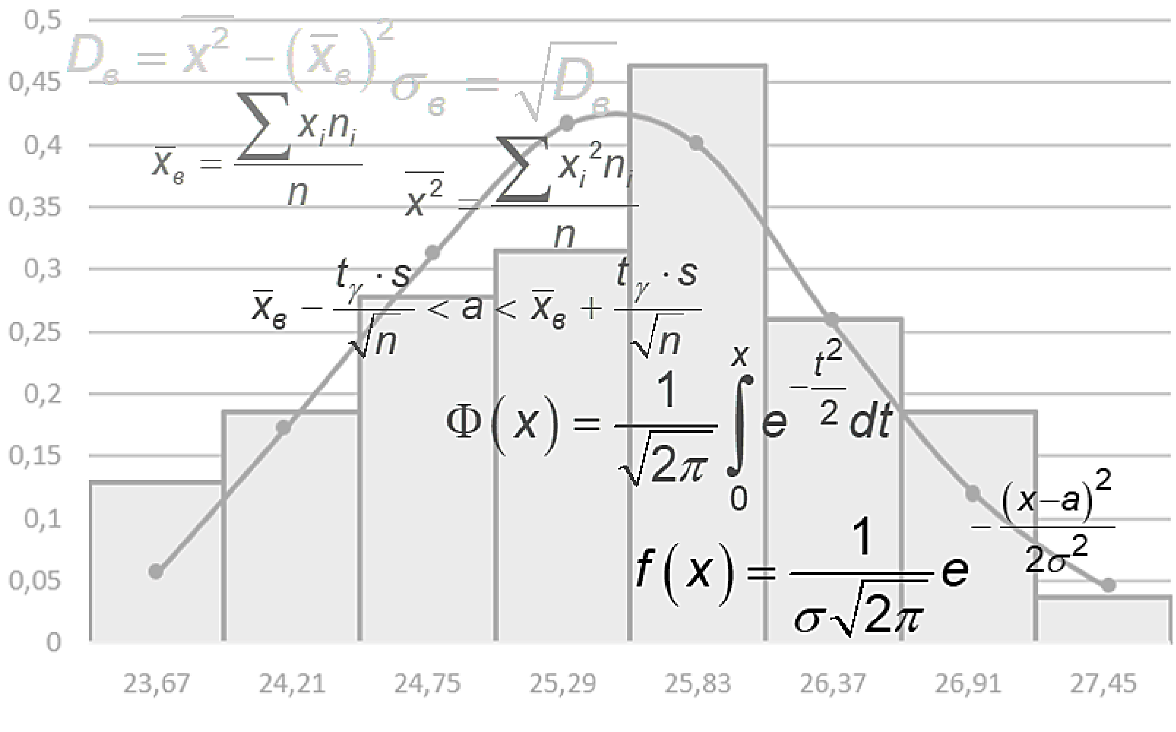
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

# *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА*

## Задания, методические указания




Брест 2024

УДК 519.2
ББК 22.17

В настоящей учебно-методическом пособии предложены задачи и упражнения по основным темам раздела «Математическая статистика», которые изучают студенты технических специальностей учреждений высшего образования в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика». Издание содержит краткие теоретические сведения, задания для аудиторной и индивидуальной работы, варианты индивидуальной работы с методическими рекомендациями и пояснениями к решению.

Издание является переработанным, исправленным и дополненным.

Составители: Каримова Т.И., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики;

Жук А.И., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики;

Защук Е.Н., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики;

Мельникова И.Н., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики.

Рецензенты: Мирская Е.И., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики БрГУ им. А.С. Пушкина;

Козинский А.А., кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры интеллектуальных информационных технологий БрГТУ.

***СОДЕРЖАНИЕ***

## 1. Эмпирические законы распределения. Числовые характеристики выборки

Совокупность всех возможных объектов данного вида, над которыми проводят наблюдения, или совокупность всех возможных наблюдений, проводимых в одинаковых условиях над некоторой случайной величиной, называют *генеральной совокупностью*.

Отобранные из генеральной совокупности объекты называют *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Число $N$ элементов генеральной совокупности и число $n$ элементов выборки называют *объемами генеральной* и *выборочной совокупности* $(N >> n)$.

Расположение выборочных наблюдений значений случайной величины в порядке неубывания называют *ранжированием*. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют *вариантой*.

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называют *частотой варианты*.

*Дискретным вариационным рядом* распределения называют ранжированную совокупность вариант $x_i$ с соответствующими им частотами или относительными частотами. Если вариационный ряд дискретной случайной величины представить в виде ломаной линии, соединяющей на плоскости точки с координатами $(x_k;n_k)$, то такой график называют *полигоном* или *многоугольником распределения*.

Для выборки достаточно большого объема, среди вариант которой мало одинаковых, составляют интервальное распределение частот. *Интервальным вариационным рядом* называют упорядоченную последовательность интервалов варьирования случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений случайной величины.

| *Интервалы* | $a_0 - a_1$ | $a_1 - a_2$ | $\dots$ | $a_{k-1} - a_k$ |
|---|---|---|---|---|
| *Частоты* $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $\dots$ | $n_k$ |

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки. Число интервалов $k$ обычно выбирают не менее 5 и не более 15. $a_0 = x_{\min}$, $a_1 = a_0 + h, ...,$ $a_k = a_0 + kh$. Оптимальную длину интервалов распределения выборки определяют по формуле Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n} \text{ или } h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n}.$$

Интервальный вариационный ряд графически изображают в виде гистограммы. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $h$, а высоты равны $\frac{n_k}{h}$ – плотность частоты.

*Гистограммой относительных частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $h$, а высоты равны $\frac{n_k}{nh}$ – плотность относительной частоты.

*Выборочной (эмпирической) функцией распределения* называют функцию $F^*(x)$, задающую для каждого значения $x$ относительную частоту события $X < x$. Следовательно, по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где $n$ – объем выборки, $n_x$ – число выборочных значений величины $X$, меньших $x$.

***Пример 1.1.*** В супермаркете проводились наблюдения над числом $X$ покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения проводились в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) и дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число $X$ является дискретной случайной величиной, а полученные данные представляют собой выборку из $n = 30$ наблюдений. Составьте ряд распределения частот и найдите эмпирическую функцию распределения.

***Решение.*** Составим ранжированный ряд:

60, 60, 60, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120.

Получено 6 групп, то есть шесть различных значений случайной величины (шесть вариант). Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты и соответствующую относительную частоту. Результаты сведем в таблицу, которая и будет представлять вариационный ряд.

| *Номер группы, k* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Число обращений покупателей в кассу,* $x_k$ | 60 | 65 | 70 | 75 | 100 | 120 |
| *Частота,* $n_k$ | 3 | 3 | 7 | 5 | 8 | 4 |
| *Относительная частота,* $w_k = \frac{n_k}{n}$ | $\frac{3}{30}$ | $\frac{3}{30}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{5}{30}$ | $\frac{8}{30}$ | $\frac{4}{30}$ |

Составим эмпирическую функцию распределения. Объем выборки по условию примера $n = 30$. Наименьшая варианта равна 60, значит, при $x \le 60$ $n_x = 0$. Тогда $F^*(x) = \dfrac{0}{30} = 0$ при $x \le 60$. Если $60 < x \le 65$, то неравенство $X < x$ выполняется для варианты $x_1 = 60$, которая встречается 3 раза, поэтому $n_x = 3$ и $F^*(x) = \dfrac{3}{30}$. Если $65 < x \le 70$, то неравенство $X < x$ выполняется для вариант $x_1 = 60$ и $x_2 = 65$, которые встречаются по 3 раза, поэтому $n_x = 3 + 3 = 6$ и $F^*(x) = \dfrac{6}{30}$ и т.д. В результате эмпирическая функция распределения будет иметь вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 60; \\ 3/30, & 60 < x \le 65; \\ \dfrac{3+3}{30} = 6/30, & 65 < x \le 70; \\ \dfrac{3+3+7}{30} = 13/30, & 70 < x \le 75; \\ \dfrac{3+3+7+5}{30} = 18/30, & 75 < x \le 100; \\ \dfrac{3+3+7+5+8}{30} = 26/30, & 100 < x \le 120; \\ \dfrac{3+3+7+5+8+4}{30} = 1, & x > 120. \end{cases}$$

*Статистические оценки параметров распределения*

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются *статистическими*. Если статистическая оценка характеризуется одним числом, то ее называют *точечной*. К числу таких оценок относят выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

*Выборочную среднюю* определяют как среднее арифметическое полученных по выборке значений:

$$\bar{x}_в = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k ,$$

где $x_k$ – варианта выборки, $n_k$ – частота варианты, $n$ – объем выборки.

*Выборочная дисперсия* представляет собой среднее арифметическое квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2.$$

Величину $s^2$ называют *несмещенной* или *«исправленной» выборочной дисперсией* и вычисляют по формуле:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_в.$$

***Пример 1.2.*** Найдите несмещенную оценку дисперсии случайной величины $X$ на основании данного распределения выборки:

| $x_k$ | 2 | 7 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $n_k$ | 8 | 14 | 10 | 18 |

***Решение.*** Находим выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{8\cdot 2 + 14\cdot 7 + 10\cdot 9 + 18\cdot 10}{8+14+10+18} = 7{,}68;$$

Далее находим выборочную дисперсию:

$$D_в\left(X\right) = \frac{8\cdot 2^2 + 14\cdot 7^2 + 10\cdot 9^2 + 18\cdot 10^2}{8+14+10+18} - \left(7{,}68\right)^2 = 7{,}58.$$

Находим несмещенную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{50}{49}\cdot 7{,}58 = 7{,}73.$$

*Ответ:* $s^2 = 7{,}73.$

### *Задания для аудиторной работы*

**1.1.** В результате проверки партии деталей по сортам получены значения:

1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 2, 2, 3.

а) Составьте вариационный ряд, статистическое распределение частот (относительных частот);

б) постройте полигон частот;

в) найдите эмпирическую функцию распределения и постройте ее график;

г) найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

**1.2.** Дана выборка объема 50.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 60 | 41 | 51 | 33 | 42 | 45 | 21 | 53 | 60 |
| 68 | 52 | 47 | 46 | 42 | 43 | 57 | 44 | 54 | 59 |
| 77 | 47 | 28 | 27 | 49 | 49 | 14 | 28 | 61 | 30 |
| 61 | 35 | 47 | 46 | 58 | 45 | 42 | 21 | 30 | 40 |
| 67 | 65 | 39 | 35 | 41 | 60 | 54 | 42 | 59 | 60 |

а) Составьте вариационный ряд, интервальное распределение частот;

б) постройте гистограмму относительных частот;

в) найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

**1.3.** Найдите несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии по выборке

| $x_i$ | 1250 | 1275 | 1280 | 1300 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 20 | 25 | 50 | 5 |

**1.4.** В результате пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены значения (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$, $s^2$, $s$.

### *Задания для индивидуальной работы*

**1.5.** По данным наблюдений получена выборка:

1; 2; 3; 5; 5; 4; 2; 1; 1; 2; 3; 5; 5; 6; 6; 2; 3; 2; 5; 1.

а) Найдите статистическое распределение выборки;

б) постройте полигон относительных частот;

в) составьте эмпирическую функцию распределения и постройте ее график;

г) найдите числовые характеристики выборки: $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

**1.6.** В результате проверки предприятий области по величине выработки на одного рабочего получено интервальное распределение выборки:

| *Выработка на одного рабочего в %* | 80-90 | 90-100 | 100-110 | 110-120 | 120-130 |
|---|---|---|---|---|---|
| *Число предприятий* | 2 | 6 | 15 | 46 | 29 |

Постройте гистограмму частот. Найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$, $s^2$, $s$.

**1.7.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$.

| $x_i$ | 2 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 15 | 20 | 10 | 10 | 45 |

Постройте полигон частот, график эмпирической функции распределения. Найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

**1.8.** По заданному интервальному распределению

| *Интервалы* | 1–5 | 5–9 | 9–13 | 13–17 | 17–21 |
|---|---|---|---|---|---|
| *Частоты* | 10 | 20 | 50 | 12 | 8 |

Постройте гистограмму относительных частот, график эмпирической функции $F^*(x)$. Найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

**1.9.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 25$.

| $x_i$ | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 6 | 3 | 3 | 7 | 3 | 2 |

Найдите несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

**1.10.** По заданному распределению найдите несмещенные оценки для $\bar{x}_{ген}$ и $D_{ген}$.

| $x_i$ | 2560 | 2600 | 2620 | 2650 | 1700 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 8 | 15 | 9 | 6 |

## *2. Точечные и интервальные оценки для неизвестных параметров генеральной совокупности*

Любой параметр $\tilde{\theta}$, найденный по выборке, извлеченной из генеральной совокупности СВ $X$, является подходящей оценкой (подходящим приближенным значением) параметра $\theta$ этой совокупности, если:

1. $M\left(\tilde{\theta}\right)=\theta$. В этом случае параметр $\tilde{\theta}$ называют *несмещенной* оценкой неизвестного параметра $\theta$ генеральной совокупности.

2. При данном объеме выборки $n$ $\tilde{\theta}$ имеет минимальную дисперсию, $D\left(\tilde{\theta}\right)=\min$. В этом случае параметр $\tilde{\theta}$ называют *эффективной* оценкой неизвестного параметра $\theta$.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\tilde{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$, то параметр $\tilde{\theta}$ называют *состоятельной* оценкой неизвестного параметра $\theta$.

Точечная оценка определяется одним числом, при этом выборка должна быть достаточно большого объема.

Выборочное среднее $\bar{x}_в$ является *несмещенной* и *состоятельной* оценкой генеральной средней $\bar{x}_{ген}$: $\bar{x}_{ген}\approx\bar{x}_в$, причем $M\left(\bar{x}_в\right)=\bar{x}_{ген}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{x}_в-\bar{x}_Г\right|<\varepsilon\right)=1$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является исправленная дисперсия $s^2$.

$$D_{ген}\approx s^2\text{, где } s^2=\frac{n}{n-1}\cdot D_B,\quad M\left(s^2\right)=D_{ген}.$$

Генеральное среднее квадратическое отклонение не имеет несмещенных оценок.

$$\sigma_{ген}\approx\sigma_в \text{ или } \sigma_{ген}\approx s\text{, но } M\left(\sigma_в\right)\neq\sigma_{ген} \text{ и } M\left(s\right)\neq\sigma_{ген}.$$

При $n<30$ применяют интервальные оценки.

Интервал $\left(\tilde{\theta}-\delta, \tilde{\theta}+\delta\right)$, покрывающий параметр $\theta$ с заданной вероятностью (надежностью) $\gamma$, называют *доверительным интервалом*.

$$P\left(\tilde{\theta}-\delta<\theta<\tilde{\theta}+\delta\right)=P\left(\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta\right)=\gamma\text{, где } \delta \text{ – точность оценки.}$$

Пусть СВ $X$ подчинена нормальному распределению с параметрами $a = M(X)$ и $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, т.е. $X \sim N(a;\sigma)$.

а) Доверительный интервал для неизвестного параметра $a$ при *известном* $\sigma$:

$$\bar{x}_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } 2\Phi(t) = \gamma$$

$$\text{или } P\left( \left| a - \bar{x}_в \right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \gamma .$$

б) Доверительный интервал для неизвестного параметра $a$ при *неизвестном* $\sigma$:

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где $t_\gamma = t(\gamma, n)$ находят по таблице приложения 5, $s$ – исправленное среднее квадратическое отклонение, $n$ – объем выборки, $\gamma$ – надежность.

в) Доверительный интервал для неизвестного параметра $\sigma$ :

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \text{ если } q < 1, \text{ или } 0 < \sigma < s(1+q), \text{ если } q > 1.$$

Число $q = q(\gamma, n)$ находят по таблице приложения 6.

### ***Задания для аудиторной работы***

**2.1.** Найдите, с надежностью 0,99, доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания $a$ нормально распределенного признака $X$, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, $\bar{x}_в = 10,2$, объем выборки $n = 16$.

**2.2.** Найдите минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по $\bar{x}_в$ будет равна 0,2, если $\sigma = \sigma(X) = 1,5$.

**2.3.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

| $x_i$ | –0,5 | –0,4 | –0,2 | 0 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |

Оцените с надежностью 0,95 математическое ожидание $a$ и среднее квадратическое отклонение нормально распределенного признака $X$ при помощи доверительных интервалов.

**2.4.** Из генеральной совокупности нормально распределенного признака $X$ извлечена выборка объема $n$, найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s$. Определите доверительный интервал, покрывающий $\sigma_{ген}$ с надежностью $\gamma = 0,999$, если $n = 10$, $s = 5,1$.

### *Задания для индивидуальной работы*

**2.5.** СВ $X \sim N(a, \sigma)$. Составьте доверительный интервал для неизвестного параметра распределения *a*, если

а) $\gamma = 0{,}99$; $\sigma = 5$; $\overline{x}_в = 16{,}8$; $n = 25$;

б) $\gamma = 0{,}95$; $\sigma = 5$; $\overline{x}_в = 14$; $n = 25$.

**2.6.** СВ $X \sim N(a, \sigma)$. Составьте доверительный интервал для неизвестного параметра распределения $\sigma$, если

а) $\gamma = 0{,}95$, $n = 16$, $s = 1$;

б) $\gamma = 0{,}999$, $n = 50$, $s = 16$.

**2.7.** СВ $X \sim N(a, \sigma)$. Для данной выборки

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | –2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $n_i$ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

составьте доверительные интервалы для неизвестных параметров распределения *a* и $\sigma$ с надежностью 0,95.

## *3. Статистическая проверка гипотез. Критерии Пирсона и Колмогорова*

При решении практических задач модель закона распределения в общем случае заранее неизвестна, поэтому возникает необходимость выбора модели закона распределения, согласующейся с результатами выборочных наблюдений.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений СВ *X* с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$. Проверяют гипотезу $H_0$, утверждающую, что СВ *X* распределена по закону, имеющему функцию распределения $F(x)$, равную функции $F_0(x)$, то есть проверяют нулевую (основную) гипотезу $H_0$: $F(x) = F_0(x)$.

Пусть из некоторой генеральной совокупности взята выборка достаточно большого объема *n* и составлено распределение частот дискретное

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

или интервальное

| *Интервалы* | $a_0 - a_1$ | $a_1 - a_2$ | $a_2 - a_3$ | … | $a_{k-1} - a_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | … | $n_k$ |

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $n_i$ – эмпирические частоты, $i = \overline{1,k}$.

*Теоретические* (*выравнивающие*) частоты $n_i'$ определяют по формуле: $n_i' = n \cdot P_i$, $i = \overline{1, k}$, где $P_i = P(X = x_i)$ для дискретного распределения и $P_i = P\left(a_{i-1} < X < a_i\right)$ для непрерывного распределения.

Если $X \sim N(a, \sigma)$, где $a \approx \bar{x}_в$, $\sigma \approx \sigma_в$, то $P_i = \dfrac{h}{\sigma_в} \cdot \varphi\left(\dfrac{a_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right)$, где

$h = x_i - x_{i-1}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ или

$$P_i = P\left(a_{i-1} < X < a_i\right) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Плотность вероятности для СВ $X$ равна $f(x) = \dfrac{1}{\sigma_в \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x}_в)^2}{2\sigma_в^2}}$.

Если СВ $X$ имеет показательное распределение, то плотность вероятности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ и $\lambda = \dfrac{1}{\bar{x}_в}$,

$$P_i = P\left(a_{i-1} < X < a_i\right) = e^{-\frac{a_{i-1}}{\bar{x}_в}} - e^{-\frac{a_i}{\bar{x}_в}}.$$

Критерии, с помощью которых проверяют нулевую гипотезу о неизвестном распределении, называют *критериями согласия.*

*Критерий Пирсона.* При уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$ выдвигают нулевую гипотезу $H_0$ и ей альтернативную гипотезу $H_1$.

$H_0$: в генеральной совокупности признака $X$ есть нормальное (показательное) распределение,

$H_1$: в генеральной совокупности признака $X$ нет выбранного распределения.

Составляют выборочную статистику $\chi^2_{набл} = \sum \dfrac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$.

По таблице «Критические точки распределения $\chi^2$» (приложение 4) находят $\chi^2_{крит}\left(\alpha,\ k - r - 1\right)$, где $k$ – число пар значений для дискретного распределения или число интервалов для непрерывного распределения, $r$ – число параметров распределения ($r = 2$ для нормального распределения, $r = 1$ для показательного распределения).

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу $H_0$, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, то гипотезу $H_0$ отвергают, различие в частотах $n_i$ и $n_i'$ значимо.

*Критерий Колмогорова* применяют *только* для проверки гипотез о непрерывном распределении.

При уровне значимости $\alpha$ проверяют гипотезы

$H_0$: в генеральной совокупности действует теоретическая функция $F(x)$ выбранного распределения.

$H_1$: выбранное распределение не имеет такой функции распределения.

Составляют выборочную статистику

$$\lambda_{опыт} = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \le i \le k} \left| F^*(x_i) - F(x_i) \right|,$$

где $F^*(x)$ – эмпирическая функция распределения, $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$.

$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right)$ для нормального распределения.

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$, $\lambda = \dfrac{1}{\bar{x}_в}$ для показательного распределения.

По таблице значений функции Колмогорова находим $\lambda_{крит}$. Если $\lambda_{опыт} < \lambda_{крит}$, то принимают гипотезу $H_0$, если $\lambda_{опыт} > \lambda_{крит}$, то $H_0$ отвергают.

***Пример 3.1.*** В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено распределение

| *Время, t (час)* | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Частота,* $n_i$ | 133 | 45 | 15 | 4 | 2 | 1 |

Проверьте при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

***Решение.*** Известно, что плотность показательного распределения имеет вид $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, $\lambda = \dfrac{1}{t_в}$ и

$$P\ (a < t < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Занесем данные и необходимые вычисления в таблицу.

| Время, $t$ | $n_i$ | $t_i$ | $t_i \cdot n_i$ | $P_i$ | $200\ P_i$ | $\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0-5 | 133 | 2,5 | 332,5 | $1-0,3734=0,6266$ | 125,3 | 0,473 |
| 5-10 | 45 | 7,5 | 337,5 | $0,3734-0,1395=0,2339$ | 46,78 | 0,068 |
| 10-15 | 15 | 12,5 | 187,5 | $0,1395-0,0521=0,0874$ | 17,48 | 0,352 |
| 15-30 | 7 | 22,5 | 157,5 | $0,0521-0,0027=0,0494$ | 9,88 | 0,840 |
| $\sum$ | 200 | | 1015 | | 199,44 | 1,733 |

Интервалы, где $n_i < 5$, объединим в один. Получим интервал от 15 до 30.

$$t_в = \frac{1015}{200} = 5,075; \quad \lambda = 0,197.$$

Плотность распределения имеет вид $f(t) = 0,197e^{-0,197t}, \ t \ge 0$.

По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверим, значимо или нет различие в частотах $n_i$ и $n_i'$.

$$\chi^2{}_{набл} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 1,733; \ \chi^2{}_{крит}(0,05;\ 4-1-1) = \chi^2{}_{крит}(0,05;2) = 6,00.$$

Так как $\chi^2{}_{набл} < \chi^2{}_{крит}$, то различие в $n_i$ и $n_i'$ незначимо, и нет оснований отвергать гипотезу о показательном распределении в генеральной совокупности.

Проверим эту гипотезу по критерию Колмогорова. Найдем эмпирическую функцию распределения $F^*(a_i)$ и теоретическую функцию распределения $F(a_i) = 1 - e^{-0,197a_i}$.

| $a_i$ | $n_i$ | $F^*(a_i)$ | $F(a_i)$ | $\lvert F^*(a_i) - F(a_i) \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 |
| | 133 | | | |
| 5 | | 0,665 | $1-0,3734=0,6266$ | 0,0384 |
| | 45 | | | |
| 10 | | 0,890 | $1-0,1395=0,8605$ | 0,0295 |
| | 15 | | | |
| 15 | | 0,965 | $1-0,0521=0,9479$ | 0,0171 |
| | 7 | | | |
| 30 | | 1,000 | $1-0,0027=0,9973$ | 0,0027 |

$$\lambda_{опыт} = \sqrt{200} \cdot \max\left| F^*(a_i) - F(a_i) \right| = \sqrt{200} \cdot 0,0384 = 0,543.$$

$$\lambda_{крит}(0,05) = 1,358; \ \ 0,543 < 1,358.$$

Следовательно, гипотеза о показательном распределении не отвергается.

### *Задания для аудиторной работы*

**3.1.** При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 12 | 16 | 40 | 13 | 8 | 5 |
| $n_i'$ | 4 | 11 | 15 | 43 | 15 | 6 | 6 |

**3.2.** Используя критерий Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверьте гипотезу о виде распределения в генеральной совокупности, выдвинув ее для заданного распределения частот.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| $n_i$ | 7 | 10 | 17 | 13 | 8 |

**3.3.** Используя критерии Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверьте, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением, если:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Интервал* | (–20; –10) | (–10; 0) | (0; 10) | (10; 20) | (20;30) | (30;40) | (40;50) |
| *Частота* | 20 | 47 | 80 | 89 | 40 | 16 | 8 |

**3.4.** Используя критерии Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверьте, согласуется ли гипотеза о показательном распределении с заданным эмпирическим распределением, если:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Интервал* | 0-90 | 90-180 | 180-270 | 270-360 | 360-450 | 450-540 | 540-630 |
| *Частота* | 50 | 33 | 21 | 8 | 4 | 2 | 2 |

### *Задания для индивидуальной работы*

**3.5.** Используя критерий Пирсона при $\alpha = 0{,}01$ проверьте, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности признака $X$ с эмпирическим распределением выборки.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| $n_i$ | 15 | 26 | 30 | 40 | 36 | 25 | 18 |

**3.6.** Используя критерии Пирсона и Колмогорова при $\alpha = 0{,}05$, проверьте, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Интервал* | 3-8 | 8-13 | 13-18 | 18-23 | 23-28 | 28-33 | 33-38 |
| *Частота* | 6 | 8 | 15 | 20 | 16 | 8 | 7 |

**3.7.** Используя критерии Пирсона и Колмогорова при $\alpha = 0{,}05$, проверьте, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.

| *Интервал* | 0-80 | 80-160 | 160-240 | 240-320 | 320-400 | 400-480 | 480-560 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Частота* | 48 | 30 | 21 | 9 | 7 | 3 | 2 |

## *4. Линейная корреляционная зависимость. Прямые регрессии $Y$ на $X$ и $X$ на $Y$. Значимость $r_в$*

Между СВ $X$ и $Y$ существует корреляционная зависимость, если с изменением одной переменной меняется условная средняя другой переменной, т.е. $\bar{y}_x = f(x)$ или $\bar{x}_y = \varphi(y)$.

*Условной средней* $\bar{y}_x$ называют среднее арифметическое всех значений $y$, соответствующих данному значению $x$.

*Уравнение прямой регрессии $Y$ на $X$* имеет вид

$$\bar{y}_x - \bar{y}_в = r_в \frac{\sigma_в(y)}{\sigma_в(x)} \cdot (x - \bar{x}_в).$$

*Уравнение прямой регрессии $X$ на $Y$* имеет вид

$$\bar{x}_y - \bar{x}_в = r_в \frac{\sigma_в(x)}{\sigma_в(y)} \cdot (y - \bar{y}_в),$$

где $r_в = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в}{\sigma_в(x) \cdot \sigma_в(y)}$ – *выборочный коэффициент корреляции*, причем $|r_в| \le 1$.

В случае несгруппированных данных

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i}{n},\ \bar{x^2} = \frac{\sum x^2}{n},\ \sigma_в^2(x) = \bar{x}^2 - (\bar{x}_в)^2,$$

$$\bar{y}_в = \frac{\sum y_i}{n},\ \bar{y}^2 = \frac{\sum y^2}{n},\ \sigma_в^2(y) = \bar{y}^2 - (\bar{y}_в)^2,\ \overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n}.$$

В случае сгруппированных данных получим корреляционную таблицу. Расчетные формулы для числовых характеристик:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i m_x}{n},\ \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i{}^2 m_x}{n},\ \sigma_в^2(x) = \bar{x}^2 - (\bar{x}_в)^2,$$

$$\bar{y}_В = \frac{\sum y_j m_y}{n},\ \overline{y^2} = \frac{\sum y_j{}^2 m_y}{n},\ \overline{xy} = \frac{\sum\sum x_i y_j m_{xy}}{n}.$$

Прямые регрессии проходят через точку $(\bar{x}_в; \bar{y}_в)$. Чем меньше угол между ними, тем теснее линейная зависимость между СВ $X$ и $Y$.

*Значимость выборочного коэффициента корреляции*

При уровне значимости $\alpha$ выдвигают гипотезы:

$H_0: r_{ген} = 0$ – в генеральной совокупности нет линейной зависимости или $r_в$ незначимый коэффициент;

$H_0: r_{ген} \neq 0$ – линейная зависимость между $X$ и $Y$ в генеральной совокупности есть, т.е. $r_в$ значимый коэффициент.

По данным выборки составляют выборочную статистику $t_{набл} = \dfrac{r_в \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}}$, $n$ – объем выборки.

По «Критические точки распределения Стьюдента» (приложение 3) находят $t_{крит}(\alpha; n-2)$.

Если $|t_{набл}| < t_{крит}$, то гипотезу $H_0$ принимают.

Если $|t_{набл}| > t_{крит}$, то гипотезу $H_0$ отвергают и принимают гипотезу $H_1$.

Число $r_в^2$ называют *коэффициентом детерминации*. Он определяет долю рассеивания наблюдаемых значений зависимой СВ $y_i$ относительно значений, полученных из эмпирического уравнения регрессии $Y$ на $X$**.** Остальная доля отклонений может быть вызвана либо случайными ошибками, либо тем, что линейная регрессионная модель плохо согласуется с экспериментальными данными. Например, если $r_в^2 = 0,75$, это означает, что 75% вариации зависимой переменной объясняется полученными уравнениями.

***Пример 4.1.*** По 10 предприятиям собраны данные о затратах на ремонт оборудования *y* (млн. руб.) в зависимости от времени его использования *x* (годы). Найдите

1) $\bar{x}_в$, $\bar{y}_в$, $\sigma_в(x)$, $\sigma_в(y)$;

2) коэффициент корреляции $r_в$ и запишите уравнения прямых регрессии; оцените значимость $r_в$;

3) постройте корреляционное поле и графики прямых;

4) вычислите коэффициент детерминации, пояснить его смысл;

5) какие средние затраты на ремонт оборудования можно ожидать при девятилетнем его использовании?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x, годы* | 4 | 5 | 5 | 6 | 8 | 10 | 8 | 7 | 11 | 6 |
| *y, ден. ед.* | 1,5 | 2,0 | 1,4 | 2,3 | 2,7 | 4,0 | 2,3 | 2,5 | 6,6 | 1,7 |

Составим расчетную таблицу.

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1,5 | 16 | 2,25 | 6,0 |
| 5 | 2,0 | 25 | 4,0 | 10,0 |
| 5 | 1,4 | 25 | 1,96 | 7,0 |
| 6 | 2,3 | 36 | 5,29 | 13,8 |
| 8 | 2,7 | 64 | 7,29 | 21,6 |
| 10 | 4,0 | 100 | 16,00 | 40,0 |
| 8 | 2,3 | 64 | 5,29 | 18,4 |
| 7 | 2,5 | 49 | 6,25 | 17,5 |
| 11 | 6,6 | 121 | 43,56 | 72,6 |
| 6 | 1,7 | 36 | 2,89 | 10,2 |
| $\sum$ 70 | 27,0 | 536 | 94,78 | 217,1 |

$$\bar{x}_в = \frac{70}{10} = 7; \quad \overline{x^2} = \frac{536}{10} = 53,6; \quad \sigma_в^2(x) = 53,6 - 49 = 4,6; \quad \sigma_в(x) = 2,145;$$

$$\bar{y}_в = \frac{27}{10} = 2,7; \;\; \overline{y^2} = \frac{94,78}{10} = 9,478; \;\; \sigma_в^2(y) = 9,478 - 7,29 = 2,188;$$

$$\sigma_в(y) = 1,479.$$

$$\overline{xy} = \frac{217,1}{10} = 21,71; \;\; r_в = \frac{21,71 - 7 \cdot 2,7}{2,145 \cdot 1,479} = 0,886.$$

Величина коэффициента $r_в$ говорит о достаточно тесной линейной зависимости между СВ $X$ и $Y$ в выборке. Проверим $r_в = 0,886$ на значимость при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

$H_0: r_{ген} = 0,$

$H_1: r_{ген} \neq 0.$

$$t_{набл} = \frac{0,886\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,886^2}} = 5,404, \;\; t_{крит}(0,05;\,8) = 2,31;$$

т.к. $t_{набл} > t_{крит}$, то гипотеза $H_0$ отвергается и принимается гипотеза $H_1$, т.е. в генеральной совокупности между случайными величинами $X$ и $Y$ есть линейная зависимость.

Коэффициент корреляции $r_в^2 = (0,886)^2 = 0,78$. Поэтому 78% рассеивания зависимой переменной $Y$ объясняется линейной регрессией $Y$ на $X$, а 22% рассеивания $Y$ остаются необъяснимыми (или случайные ошибки эксперимента или линейная регрессионная модель не очень хорошо согласуется с экспериментальными данными).

Составим уравнение прямой регрессии $Y$ на $X$:

$$\bar{y}_x - 2,7 = 0,886 \cdot \frac{1,479}{2,145} \cdot (x - 7) \text{ или } \bar{y}_x = 0,61x - 1,58.$$

Уравнение прямой регрессии $X$ на $Y$:

$$\bar{x}_y - 7 = 0{,}886 \cdot \frac{2{,}145}{1{,}479} \cdot (y - 2{,}7) \text{ или } \bar{x}_y = 1{,}28y + 3{,}53.$$

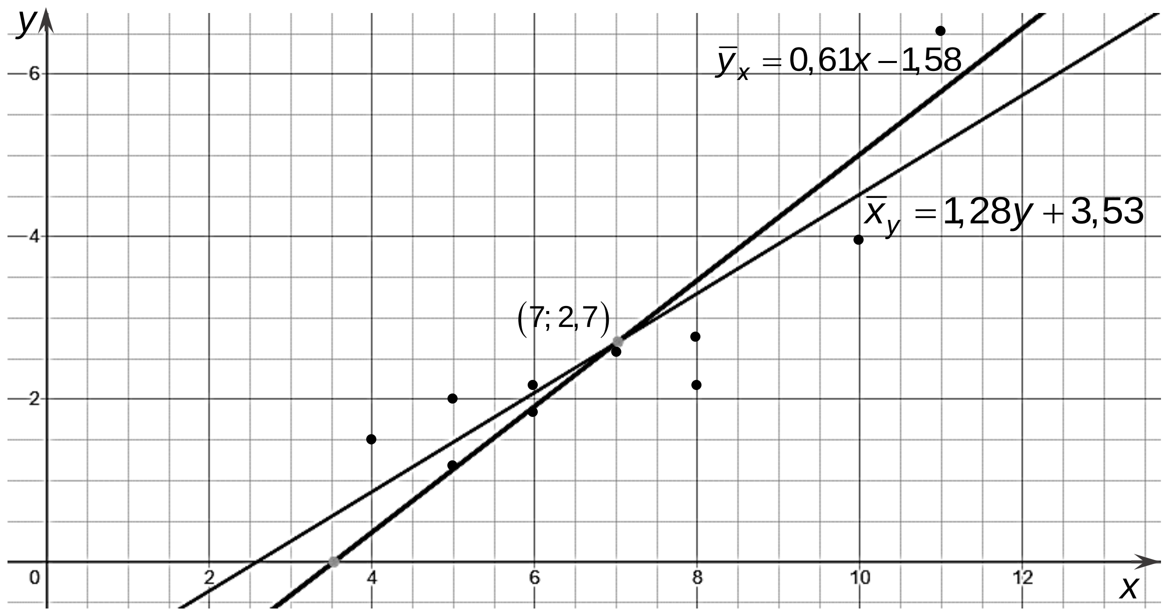
Построим прямые регрессии и данные таблицы $(x_i, y_i)$.

$\bar{y}_x = 0{,}61x - 1{,}58$

| $x$ | 4 | 11 |
|---|---|---|
| $\bar{y}_x$ | 0,86 | 5,13 |

$\bar{x}_y = 1{,}28y + 3{,}53.$

| $y$ | 1,44 | 6,6 |
|---|---|---|
| $\bar{x}_y$ | 5,32 | 11,98 |




Если $x = 9$, то $\bar{y}_x = 0{,}61 \cdot 9 - 1{,}58 = 3{,}91$(млн. руб.) – такие расходы на ремонт можно ожидать при девятилетнем использовании оборудования.

### ***Задания для аудиторной работы***

**4.1.** Для данных в таблице наблюдаемых значений двух СВ $X$ и $Y$, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определите:

1) числовые характеристики СВ $X$ и $Y$;

2) коэффициент корреляции $r_в$ и составьте уравнения прямых регрессии;

3) постройте их графики и корреляционное поле;

4) оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость $r_в$;

5) найдите $\bar{y}_x(9)$.

| $x_i$ | 4 | 4,5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 7,2 | 7,8 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 |

**4.2.** Для данных в таблице наблюдаемых значений двух СВ $X$ и $Y$, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определите:

1) числовые характеристики СВ $X$ и $Y$;

2) коэффициент корреляции $r_в$ и составьте уравнения прямых регрессии;

3) постройте их графики и корреляционное поле;

4) оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость $r_в$.

| $X$ \ $У$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 2 | 1 | | | | | | | 3 |
| 35 | | 5 | 3 | | | | | | 8 |
| 45 | | | 4 | 2 | 4 | | | | 10 |
| 55 | | | | | 2 | 3 | 1 | 5 | 11 |
| 65 | | | | | | | 6 | 2 | 8 |
| $n_y$ | 2 | 6 | 7 | 2 | 6 | 3 | 7 | 7 | 40 |

**4.3.** Для данных в таблице наблюдаемых значений двух СВ $X$ и $Y$, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определите:

1) числовые характеристики СВ $X$ и $Y$;

2) коэффициент корреляции $r_в$ и составьте уравнения прямых регрессии;

3) постройте их графики и корреляционное поле;

4) оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость $r_в$;

5) найдите $\bar{y}_x(46)$.

| $X$ \ $У$ | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | $n_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 120-140 | | | | 3 | 4 | 7 |
| 140-160 | | | 2 | 5 | 2 | 9 |
| 160-180 | | 6 | 10 | 4 | 2 | 22 |
| 180-200 | 1 | 4 | 7 | | | 12 |
| $n_x$ | 1 | 10 | 19 | 12 | 8 | 50 |

### *Задания для индивидуальной работы*

**4.4.** Компания контролирует 10 фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице приведены данные о производительности труда $y_i$ (тысячи изделий в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики $x_i$ (тыс. квт.ч. в год на одного работающего) $i=\overline{1,10}$.

1) Составьте уравнения прямых регрессии;

2) вычислите $r_в$ и коэффициент детерминации (пояснить их смысл);

3) найдите среднюю производительность труда $\bar{y}_x$, если $x = 15{,}5$.

| $x_i$ | 10 | 12 | 12,5 | 13 | 14 | 14,5 | 15,2 | 15,8 | 16 | 16,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 7 | 6 | 7 | 8 | 7 | 8 | 10 | 11 | 11 | 12 |

**4.5.** Для данных таблицы значений двух СВ $X$ и $Y$, найдите числовые характеристики СВ $X$ и $Y$ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\sigma_x, \sigma_y$; выборочный коэффициент корреляции $r_в$ и оцените его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$; найдите уравнения прямых регрессий $Y$ на $X$ и $X$ на $Y$ и изобразите в системе координат их графики.

| X \ Y | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | 5 | 7 | 2 |
| 15 | | | 2 | 8 | 6 | |
| 20 | | | 8 | 21 | 10 | |
| 25 | 5 | 2 | 6 | | | |
| 30 | 3 | 5 | | | | |

**4.6.** По выборке объема $n = 120$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (*X, Y)*, найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0{,}4$. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: \ r \neq 0$.

**4.7.** По наблюдаемым значениям $(0; 4{,}5)$; $(2; 3{,}5)$; $(4; 5)$; $(6; 7)$; $(8; 6{,}5)$ найдите выборочный коэффициент корреляции и проверьте его значимость при $\alpha = 0{,}05$, предполагая, что выборка взята из нормального распределения. Найдите выборочное уравнение линейной регрессии *y* на *x*, постройте прямую на корреляционном поле.

**4.8.** У восьми выпускников зафиксировано следующее количество баллов, полученных на централизованном экзамене по математике (*X*) и по русскому языку (*Y*)

| *X* | 90 | 60 | 46 | 68 | 82 | 71 | 66 | 78 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y* | 75 | 69 | 45 | 49 | 58 | 54 | 59 | 70 |

Рассчитайте выборочный коэффициент корреляции между *X* и *Y*.

**4.9.** Определите выборочный коэффициент корреляции между двумя переменными агрессивности (*X*) и IQ (*Y*) у школьников по полученным данным тестирования.

| *X* | 24 | 27 | 26 | 21 | 20 | 31 | 26 | 22 | 20 | 18 | 30 | 29 | 24 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y* | 100 | 115 | 117 | 119 | 134 | 94 | 105 | 103 | 111 | 124 | 122 | 109 | 110 | 86 |

## *Контрольные задания*

***Задание 1.*** В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака $X$ были получены выборочные данные.

1) Составьте дискретный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины $X$ и постройте полигон частот;

2) найдите эмпирическую функцию распределения признака $X$ и постройте ее график;

3) вычислите числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднеквадратическое отклонение;

4) сформулируйте гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины $X$. На основании пунктов 1 и 3 обоснуйте выбор вида распределения. Запишите аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения, используя оценки, полученные в пункте 3, и найдите теоретические (выравнивающие частоты) и теоретическую интегральную функцию распределения;

5) приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, по критерию согласия Пирсона подтвердите или отвергните выдвинутую гипотезу о виде распределения.

### *Вариант 1*

2 4 2 4 3 3 3 2 0 6 1 2 3 2 2 4 3 3 5 1 0 2 4 3 2
2 3 3 1 3 3 3 1 1 2 3 1 4 3 1 7 4 3 4 2 3 2 3 3 1
4 3 1 4 5 3 4 2 4 5 3 6 4 1 3 2 4 1 3 1 0 0 4 6 4
7 4 1 3

### *Вариант 2*

0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 3 1 5 2 0
2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2 2 0 2 1 1 3
2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 2 3 4 3 2 3 2 4 2

### *Вариант 3*

3 7 4 6 1 4 2 4 6 5 3 2 9 0 5 6 7 7 3 1 5 5 4 2 6
2 1 5 3 3 1 5 6 4 4 3 4 1 5 5 3 4 3 7 4 5 6 7 5 2
4 6 6 7 7 3 5 4 4 3 5 5 7 6 6 1

### *Вариант 4*

4 6 0 2 1 3 3 1 2 5 3 1 2 2 4 4 4 3 2 5 2 5 1 2 3
0 3 0 5 1 2 1 3 0 4 0 2 2 1 0 5 1 4 2 4 2 1 3 1 0
6 1 2 1 4 2 2 0 2 4 2 2 1 2 2

### *Вариант 5*

0 0 3 1 0 0 1 3 1 4 1 0 3 0 2 0 0 0 0 1 1 1 1 3 2
0 0 1 4 1 0 5 0 2 0 1 2 1 2 0 1 2 1 0 0 1 0 1 1 0
2 1 4 2 0 1 5 0 0 2 1 2 0 1 1 1 2 6 0 2 2 1 2 2 0
0 0 2 0 0 0 1 0 4

### *Вариант 6*

2 0 0 3 1 2 2 2 3 4 1 2 3 3 2 1 1 3 3 0 4 1 3 3 0
1 0 0 1 2 1 1 3 2 3 0 1 0 4 2 3 1 2 1 1 1 1 2 1 2
5 2 1 3 2 3 1 1 1 1 2 1 1 1 3 1 3 1 2 1 2 1 1 0 0
3 3 1 2 3

### *Вариант 7*

1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 0 1 6 1 5 0 2
0 1 1 2 1 0 0 2 1 0 2 5 1 1 2 1 0 1 2 3 0 0 0 3 0
3 1 1 0 2 3 2 2 1 0 2 1 1 1 0 2 0 5 0 0 2 1 0 2 1
1 4 0 1 0 2 3 2 2 2 1 0 1 0 1 3 1 1 2 1 2 1 0 1 1
3 3 1 2 1

### *Вариант 8*

1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 2 0 1 1 2
0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1
2 3 0 0 0 3 0 3 1 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 0 2 1 1
0 1 1 4 0 0 5 0 0 2 1 2 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 0 2 1

### *Вариант 9*

2 0 1 4 2 0 1 5 2 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 1 1 2 1 0
1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 1 1 4 0 6 0 2 1
1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 0 1 1 0
3 1 1 2 1 2 1 0 1 0 1 0 2 1 4 1 2 1 2 0 5 0 0 0 1

### *Вариант 10*

1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 0 5 0 0 0 1 2 1 0 1 1 1 2 0 1
5 0 3 1 6 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0
0 2 1 0 2 1 1 2 4 0 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 3 3 1 0
2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 0 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 1 1 2

### *Вариант 11*

6 1 0 2 3 1 1 2 1 2 1 1 2 1 0 4 1 3 3 0 2 1 1 4 0
0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 2 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1
0 5 6 0 0 1 2 1 0 1 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 1 5 0 0
1 2 1 3 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 2 0 1 1 0 3 3 1 2 0

### ***Вариант 12***

0 1 0 1 0 2 0 1 1 2 1 2 1 1 2 0 1 1 0 1 0 3 1 1 2
1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 5 0 0 0 1 2 1 1 5 0 0 0 2 1 3
2 1 0 1 1 3 3 1 2 0 2 1 1 3 1 1 2 1 0 2 0 2 3 2 2
0 0 0 2 1 1 0 0 0 0 1 1 2 0 1 1 1 0 2 3 3 0 2 4 3

### ***Вариант 13***

1 2 1 2 1 3 4 1 0 3 3 0 5 5 0 0 1 2 1 0 7 0 0 0 2
1 1 2 1 6 1 1 1 2 5 2 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 1 1 0 2
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 0 0 3 0 3 2 2 1 0 1
1 0 1 0 2 1 0 2 3 2 0 2 3 0 2 1 1 4 1 2 1 3 3 1 1

### ***Вариант 14***

2 1 1 1 2 1 2 2 0 5 1 2 7 1 5 0 0 0 2 1 1 1 2 6 1
1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 0 2 0 1 1 3 3 1 2
1 6 0 0 3 0 3 1 1 0 1 1 2 0 1 0 2 3 2 2 1 0 2 1 1
3 1 0 1 1 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 4 0 5 0 0 0 1 2 1 0

### ***Вариант 15***

1 1 4 3 1 4 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 1 0 1 2 0 1 1 2
0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1
2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 1 1 4 0 0 6 2 1 1 0 2 3 2
0 2 3 2 2 0 2 1 1 2 0 1 2 1 1 1 1 2 0 2 0 5 0 0 1

### ***Вариант 16***

1 2 1 5 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 3 2 2 0 2 1 1 4
1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 3 0 3 1 1
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 7 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 5 0 0 0
1 1 2 1 0 1 6 3 3 1 2 1 0 0 0 0 0 6 2 1 1 0 2 3 2

### ***Вариант 17***

6 0 1 2 1 0 1 6 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 1 1 4 0 2 0
1 1 2 0 1 1 0 3 5 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 5 0 2 3
2 0 1 1 4 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 3 2 2 1 0
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 0 2 1 2

### ***Вариант 18***

0 5 0 0 5 1 2 1 6 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 1 2 0 1
1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 2 0 1 1 2 0 1 5 0 1
1 2 1 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 2 5 1 4 6 0 0 2 1
1 0 2 3 2 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 2 3 2 2

### *Вариант 19*

5 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 1 1 4 0 0 4 2
3 2 0 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 5 0
3 0 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 2 3 2
2 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 6 0 0 3 0 3 1 1 2 1 1 0

### *Вариант 20*

6 5 0 1 5 1 0 2 1 1 4 2 1 2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 1 1
2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 1 0 1 1
3 3 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 0 0
5 2 1 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 0 2 7 2 0 2 3 2 2

### *Вариант 21*

5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 2 3 4 3 2 3 2 4 2
5 2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 3 1 5 0 1 1 5 5
3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 0 4 2 0

### *Вариант 22*

5 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 3 1 5 2 0 5 5 3 0 2
2 2 3 2 0 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 1 4 3 2 3 2 4 2 0
2 1 1 3 1 3 5 3 5 2 5 2 1 1 0 4 2 0 5

### *Вариант 23*

2 1 1 0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 1 1 2 3
5 5 2 0 2 2 3 2 2 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2 2 0
2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 1 3 4 3 2 3 2 4 2 6

### *Вариант 24*

4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 5 5 3 1 5 2
5 2 2 3 1 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 3 2 2 0 2 1 1 0
2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 1 3 2 4 3 2 3 2 4

### *Вариант 25*

6 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 0 4 2 3 4 2 3
2 2 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 1 1 5 2 0 4 3 5 3 2 2 0 2
5 1 3 2 3 5 1 5 2 5 2 1 1 5 2 3 2 4 2

### *Вариант 26*

2 4 2 0 4 2 0 5 1 1 3 0 0 2 4 3 2 1 3 0 4 5 1 2 3
3 1 5 2 0 0 2 3 2 1 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 3 4 3 5
5 3 2 6 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 1 1 1

**Вариант 27**

1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 5 5 3 2 2 0 2 3 2 4 2
1 3 1 5 2 0 2 2 1 2 1 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 4 2 0
5 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 2 3 4 3 1

**Вариант 28**

0 2 0 5 1 2 6 4 3 2 3 3 0 4 5 1 4 1 3 0 3 1 5 0 0
2 2 1 2 2 1 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2 2 2 4 2 1 1
0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 1 2 3 4 3 2 3 1 7 6

**Вариант 29**

0 2 2 4 3 0 3 3 0 4 5 1 3 1 6 2 0 2 1 3 1 2 3 2 4
2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 4 2 0 5 1 1 3 2 3 4 2 6
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 0 5 3 5 2 5 2 1 1 4 7

**Вариант 30**

0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 1 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 1 3 1 5
2 0 2 2 3 2 2 1 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 5 5 3 2 2 0
2 1 1 3 2 3 0 0 5 3 5 2 5 2 1 1 2 3 4 3 2 3 2 4 2
6 7 1 0

***Задание 2.*** В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда.

1) Запишите значения выборки в виде вариационного ряда;

2) найдите размах варьирования; по формуле Стерджеса найдите оптимальное число интервалов, длину интервала и составьте интервальное распределение частот выборки;

3) постройте гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

4) найдите числовые характеристики выборки $\bar{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, s$.

5) приняв в качестве нулевой гипотезы $H_0$: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверьте ее по критериям Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

6) запишите аналитическое выражение для плотности полученного нормального распределения, постройте ее график на гистограмме относительных частот;

7) найдите доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности $\gamma = 0{,}95$.

### *Вариант 1*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16,1 | 21,8 | 18,6 | 17,9 | 20,7 | 22,4 | 19,1 | 17,1 | 14,3 | 18,8 |
| 17,2 | 18,8 | 15,8 | 21,2 | 18,1 | 17,8 | 16,9 | 18,5 | 19,2 | 17,5 |
| 20,5 | 14,9 | 19,8 | 17,7 | 15,1 | 21,1 | 19,9 | 22,5 | 17,3 | 16,2 |
| 17,8 | 19,3 | 16,8 | 19,1 | 18,6 | 14,0 | 15,7 | 14,2 | 20,5 | 19,1 |
| 15,2 | 17,2 | 23,0 | 17,9 | 20,3 | 16,3 | 19,5 | 15,9 | 21,4 | 17,1 |
| 18,2 | 16,7 | 18,4 | 21,8 | 14,5 | 15,3 | 18,1 | 23,0 | 20,2 | 20,1 |
| 20,4 | 22,6 | 17,2 | 21,1 | 21,7 | 20,9 | 15,8 | 17,4 | 21,6 | 19,1 |
| 16,5 | 18,9 | 14,0 | 21,5 | 15,5 | 21,3 | 18,3 | 14,7 | 16,6 | 17,5 |
| 18,1 | 15,4 | 19,8 | 20,5 | 18,2 | 14,3 | 19,5 | 16,4 | 15,6 | 18,7 |
| 20,1 | 21,1 | 18,2 | 19,3 | 22,1 | 20,2 | 22,8 | 20,8 | 18,9 | 17,4 |

### *Вариант 2*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21,4 | 22,5 | 18,6 | 16,3 | 22,2 | 19,4 | 14,2 | 16,7 | 19,7 | 17,1 |
| 14,1 | 18,4 | 20,4 | 18,7 | 16,5 | 17,5 | 21,2 | 20,4 | 17,7 | 20,1 |
| 20,8 | 14,8 | 17,6 | 21,8 | 15,5 | 17,4 | 19,7 | 14,9 | 18,5 | 17,9 |
| 16,8 | 19,5 | 21,5 | 17,2 | 22,8 | 20,6 | 17,9 | 22,1 | 19,2 | 15,8 |
| 22,6 | 20,9 | 14,4 | 18,1 | 17,8 | 15,6 | 15,9 | 20,3 | 15,5 | 16,7 |
| 16,5 | 16,2 | 15,2 | 18,9 | 15,1 | 18,2 | 19,3 | 14,5 | 21,9 | 16,1 |
| 15,7 | 19,1 | 18,1 | 19,1 | 17,1 | 21,4 | 18,3 | 20,8 | 20,2 | 19,8 |
| 16,1 | 18,3 | 18,5 | 19,5 | 21,3 | 22,4 | 14,0 | 15,3 | 16,4 | 17,3 |
| 20,9 | 18,8 | 15,4 | 18,9 | 17,5 | 21,6 | 21,1 | 20,5 | 20,7 | 19,6 |
| 21,7 | 23,0 | 18,4 | 16,6 | 18,5 | 14,3 | 18,2 | 22,7 | 17,7 | 15,1 |

### *Вариант 3*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 234 | 215 | 196 | 220 | 203 | 236 | 225 | 221 | 193 | 215 |
| 204 | 184 | 217 | 193 | 216 | 205 | 197 | 203 | 229 | 204 |
| 225 | 216 | 233 | 223 | 208 | 204 | 207 | 182 | 216 | 191 |
| 210 | 190 | 207 | 205 | 232 | 222 | 198 | 217 | 211 | 201 |
| 185 | 217 | 225 | 201 | 208 | 211 | 189 | 205 | 207 | 199 |
| 189 | 207 | 213 | 208 | 186 | 210 | 198 | 219 | 231 | 227 |
| 202 | 211 | 220 | 237 | 237 | 220 | 210 | 183 | 213 | 190 |
| 197 | 227 | 187 | 226 | 213 | 191 | 209 | 196 | 202 | 235 |
| 211 | 214 | 220 | 195 | 182 | 228 | 202 | 207 | 192 | 226 |
| 193 | 203 | 232 | 202 | 215 | 195 | 220 | 233 | 214 | 185 |

### *Вариант 4*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,3 | 7,6 | 0,7 | 7,3 | 3,4 | 10,3 | 5,7 | 9,9 | 2,2 | 7,2 |
| 2,3 | 4,7 | 9,7 | 11,3 | 5,8 | 4,9 | 3,3 | 0,5 | 7,5 | 4,6 |
| 5,0 | 0,4 | 8,9 | 7,1 | 9,6 | 11,5 | 5,9 | 9,0 | 5,3 | 2,4 |
| 9,5 | 5,9 | 1,0 | 9,1 | 2,5 | 6,0 | 8,2 | 3,2 | 10,9 | 6,1 |
| 10,2 | 2,6 | 4,5 | 3,1 | 6,2 | 11,7 | 6,3 | 0,2 | 7,0 | 9,2 |
| 1,2 | 6,4 | 11,9 | 6,9 | 8,1 | 6,5 | 2,9 | 6,2 | 4,4 | 11,4 |
| 9,4 | 7,9 | 0,3 | 6,8 | 4,2 | 11,9 | 7,8 | 1,7 | 5,1 | 8,8 |
| 8,7 | 11,1 | 7,7 | 1,8 | 5,5 | 10,5 | 4,3 | 3,8 | 1,4 | 11,2 |
| 1,1 | 7,3 | 3,7 | 4,4 | 11,8 | 8,6 | 1,9 | 5,6 | 10,1 | 8,4 |
| 10,0 | 11,6 | 5,2 | 2,1 | 5,7 | 4,8 | 7,4 | 0,8 | 4,7 | 3,6 |

## *Вариант 5*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,0 | 8,1 | 5,8 | 0,3 | 9,2 | 1,6 | 4,4 | 4,0 | 2,8 | 8,0 |
| 7,6 | 3,4 | 5,0 | 5,9 | 2,2 | 2,9 | 5,3 | 6,9 | 10,1 | 2,0 |
| 2,3 | 7,2 | 11,1 | 3,5 | 10,8 | 6,6 | 4,2 | 8,9 | 4,5 | 0,6 |
| 4,8 | 3,6 | 8,4 | 6,2 | 5,7 | 1,9 | 10,2 | 5,7 | 3,1 | 9,0 |
| 7,4 | 5,8 | 5,9 | 3,7 | 2,6 | 6,8 | 3,2 | 10,3 | 6,0 | 7,8 |
| 10,7 | 2,1 | 6,4 | 4,5 | 3,3 | 10,9 | 6,4 | 5,2 | 1,2 | 3,0 |
| 9,3 | 4,6 | 3,8 | 8,2 | 7,1 | 1,7 | 7,7 | 5,4 | 4,1 | 8,8 |
| 0,8 | 8,3 | 6,5 | 9,4 | 4,7 | 5,5 | 0,5 | 1,8 | 5,6 | 6,5 |
| 6,1 | 9,5 | 2,4 | 7,3 | 0,9 | 7,9 | 2,5 | 6,7 | 4,3 | 7,6 |
| 8,5 | 1,1 | 4,9 | 9,6 | 6,1 | 4,4 | 9,1 | 7,9 | 6,9 | 3,4 |

## *Вариант 6*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 24 | 28 | 20 | 32 | 17 | 22 | 24 | 26 | 30 |
| 30 | 22 | 26 | 35 | 28 | 24 | 30 | 32 | 28 | 18 |
| 20 | 26 | 32 | 34 | 26 | 28 | 22 | 30 | 17 | 24 |
| 30 | 28 | 18 | 22 | 24 | 26 | 34 | 28 | 22 | 20 |
| 28 | 35 | 32 | 22 | 26 | 24 | 26 | 24 | 30 | 24 |
| 18 | 24 | 26 | 28 | 35 | 30 | 26 | 22 | 26 | 28 |
| 20 | 30 | 17 | 24 | 32 | 28 | 22 | 26 | 24 | 30 |
| 34 | 26 | 24 | 28 | 22 | 30 | 35 | 32 | 20 | 17 |
| 28 | 22 | 36 | 30 | 20 | 26 | 28 | 23 | 24 | 32 |
| 20 | 26 | 30 | 24 | 32 | 17 | 22 | 28 | 35 | 26 |

## *Вариант 7*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 42 | 47 | 49 | 55 | 34 | 58 | 39 | 30 | 49 |
| 38 | 59 | 33 | 25 | 47 | 50 | 54 | 53 | 41 | 57 |
| 41 | 27 | 34 | 43 | 46 | 30 | 45 | 49 | 37 | 50 |
| 26 | 43 | 39 | 51 | 29 | 43 | 35 | 42 | 53 | 31 |
| 37 | 45 | 33 | 51 | 60 | 42 | 46 | 39 | 55 | 31 |
| 29 | 55 | 35 | 60 | 37 | 41 | 38 | 24 | 37 | 35 |
| 49 | 26 | 50 | 47 | 33 | 41 | 51 | 34 | 43 | 49 |
| 41 | 39 | 46 | 58 | 54 | 30 | 46 | 27 | 59 | 43 |
| 51 | 45 | 42 | 25 | 53 | 57 | 31 | 38 | 42 | 29 |
| 31 | 41 | 33 | 54 | 34 | 37 | 47 | 35 | 45 | 38 |

## *Вариант 8*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 28 | 43 | 40 | 38 | 44 | 31 | 43 | 49 | 37 |
| 38 | 41 | 32 | 43 | 25 | 51 | 29 | 47 | 44 | 32 |
| 49 | 24 | 38 | 40 | 32 | 34 | 31 | 28 | 37 | 46 |
| 43 | 35 | 41 | 25 | 37 | 46 | 38 | 24 | 41 | 50 |
| 47 | 31 | 37 | 44 | 49 | 34 | 32 | 41 | 29 | 38 |
| 28 | 44 | 43 | 35 | 32 | 37 | 40 | 35 | 29 | 50 |
| 31 | 26 | 34 | 43 | 38 | 41 | 25 | 37 | 46 | 34 |
| 46 | 38 | 50 | 37 | 34 | 47 | 51 | 28 | 35 | 40 |
| 49 | 37 | 25 | 29 | 46 | 34 | 37 | 49 | 38 | 32 |
| 44 | 29 | 34 | 32 | 40 | 47 | 26 | 24 | 44 | 43 |

### *Вариант 9*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 95 | 75 | 85 | 60 | 77 | 55 | 63 | 80 | 67 |
| 90 | 78 | 57 | 76 | 84 | 82 | 75 | 68 | 73 | 62 |
| 62 | 81 | 77 | 72 | 97 | 68 | 85 | 56 | 92 | 71 |
| 73 | 78 | 98 | 63 | 83 | 85 | 70 | 90 | 66 | 91 |
| 86 | 68 | 55 | 93 | 71 | 96 | 77 | 81 | 86 | 72 |
| 82 | 62 | 70 | 78 | 67 | 87 | 91 | 99 | 78 | 87 |
| 91 | 58 | 81 | 97 | 75 | 83 | 71 | 66 | 61 | 76 |
| 73 | 85 | 65 | 90 | 86 | 61 | 54 | 75 | 78 | 93 |
| 87 | 58 | 72 | 92 | 66 | 98 | 65 | 81 | 76 | 63 |
| 95 | 83 | 65 | 57 | 80 | 87 | 61 | 92 | 56 | 71 |

### *Вариант 10*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 68,7 | 72,1 | 69,5 | 66,1 | 77,3 | 60,1 | 69,3 | 78,1 | 75,1 | 57,3 |
| 77,1 | 67,4 | 63,1 | 69,4 | 81,1 | 82,6 | 64,8 | 72,5 | 62,5 | 80,7 |
| 65,8 | 78,3 | 77,6 | 57,7 | 80,7 | 64,4 | 72,8 | 67,3 | 83,1 | 70,6 |
| 58,0 | 60,7 | 75,3 | 81,3 | 67,1 | 69,6 | 82,4 | 62,3 | 66,9 | 80,6 |
| 62,7 | 73,8 | 68,9 | 83,8 | 57,0 | 72,6 | 65,6 | 78,7 | 59,5 | 70,0 |
| 80,5 | 68,5 | 77,7 | 74,1 | 63,5 | 84,0 | 83,9 | 64,0 | 58,1 | 73,5 |
| 59,3 | 76,8 | 83,7 | 66,7 | 62,1 | 80,4 | 71,1 | 79,1 | 73,0 | 66,3 |
| 74,8 | 74,9 | 78,9 | 71,3 | 61,9 | 71,7 | 76,1 | 74,7 | 75,5 | 67,8 |
| 70,8 | 77,9 | 71,2 | 71,6 | 71,5 | 59,9 | 70,9 | 64,9 | 71,8 | 65,0 |
| 69,1 | 65,2 | 63,7 | 72,9 | 75,4 | 74,3 | 62,9 | 71,9 | 71,4 | 61,3 |

### *Вариант 11*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 141 | 136 | 41 | 69 | 153 | 117 | 124 | 103 | 162 | 181 |
| 24 | 172 | 62 | 197 | 121 | 59 | 110 | 154 | 67 | 101 |
| 58 | 81 | 142 | 179 | 85 | 87 | 39 | 159 | 199 | 135 |
| 107 | 163 | 133 | 178 | 98 | 150 | 200 | 192 | 125 | 171 |
| 56 | 116 | 169 | 148 | 138 | 104 | 73 | 119 | 90 | 114 |
| 190 | 113 | 20 | 127 | 94 | 157 | 111 | 31 | 53 | 77 |
| 132 | 75 | 91 | 66 | 115 | 72 | 44 | 26 | 128 | 97 |
| 105 | 166 | 137 | 46 | 64 | 186 | 82 | 96 | 176 | 149 |
| 33 | 188 | 58 | 156 | 139 | 86 | 112 | 174 | 106 | 76 |
| 130 | 43 | 108 | 152 | 129 | 37 | 119 | 71 | 96 | 109 |

### *Вариант 12*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 101 | 65 | 64 | 35 | 96 | 67 | 30 | 93 | 123 |
| 16 | 135 | 138 | 90 | 158 | 121 | 49 | 137 | 89 | 145 |
| 68 | 150 | 88 | 93 | 53 | 38 | 159 | 40 | 76 | 37 |
| 104 | 34 | 99 | 102 | 78 | 128 | 124 | 52 | 98 | 139 |
| 18 | 81 | 25 | 115 | 71 | 94 | 84 | 55 | 131 | 70 |
| 87 | 126 | 57 | 141 | 15 | 125 | 149 | 36 | 103 | 82 |
| 39 | 140 | 77 | 54 | 100 | 86 | 129 | 48 | 80 | 144 |
| 69 | 109 | 130 | 147 | 146 | 73 | 105 | 113 | 17 | 94 |
| 21 | 97 | 51 | 50 | 19 | 142 | 32 | 66 | 110 | 114 |
| 92 | 33 | 112 | 91 | 61 | 85 | 71 | 151 | 56 | 41 |

### *Вариант 13*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,053 | 0,026 | 0,037 | 0,056 | 0,041 | 0,035 | 0,031 | 0,046 | 0,021 | 0,049 |
| 0,035 | 0,039 | 0,043 | 0,031 | 0,038 | 0,045 | 0,023 | 0,026 | 0,037 | 0,037 |
| 0,030 | 0,041 | 0,021 | 0,047 | 0,026 | 0,046 | 0,053 | 0,025 | 0,038 | 0,030 |
| 0,049 | 0,054 | 0,039 | 0,034 | 0,051 | 0,033 | 0,029 | 0,039 | 0,033 | 0,050 |
| 0,026 | 0,039 | 0,033 | 0,020 | 0,042 | 0,038 | 0,046 | 0,033 | 0,051 | 0,027 |
| 0,029 | 0,038 | 0,027 | 0,043 | 0,035 | 0,023 | 0,038 | 0,042 | 0,054 | 0,042 |
| 0,022 | 0,045 | 0,034 | 0,055 | 0,037 | 0,050 | 0,025 | 0,020 | 0,035 | 0,043 |
| 0,041 | 0,051 | 0,027 | 0,046 | 0,029 | 0,037 | 0,041 | 0,039 | 0,029 | 0,034 |
| 0,025 | 0,047 | 0,030 | 0,050 | 0,023 | 0,030 | 0,055 | 0,035 | 0,045 | 0,031 |
| 0,034 | 0,022 | 0,042 | 0,031 | 0,049 | 0,049 | 0,039 | 0,056 | 0,047 | 0,025 |

### *Вариант 14*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,024 | 0,032 | 0,030 | 0,036 | 0,028 | 0,038 | 0,041 | 0,038 | 0,030 | 0,028 |
| 0,041 | 0,034 | 0,023 | 0,038 | 0,026 | 0,036 | 0,034 | 0,023 | 0,032 | 0,026 |
| 0,030 | 0,026 | 0,034 | 0,028 | 0,024 | 0,026 | 0,030 | 0,028 | 0,038 | 0,034 |
| 0,028 | 0,034 | 0,040 | 0,036 | 0,030 | 0,034 | 0,032 | 0,040 | 0,036 | 0,032 |
| 0,041 | 0,032 | 0,038 | 0,034 | 0,026 | 0,026 | 0,034 | 0,028 | 0,036 | 0,030 |
| 0,030 | 0,028 | 0,036 | 0,040 | 0,028 | 0,028 | 0,030 | 0,034 | 0,038 | 0,040 |
| 0,036 | 0,032 | 0,030 | 0,038 | 0,034 | 0,034 | 0,032 | 0,024 | 0,036 | 0,032 |
| 0,038 | 0,023 | 0,034 | 0,032 | 0,026 | 0,038 | 0,041 | 0,028 | 0,026 | 0,030 |
| 0,032 | 0,028 | 0,032 | 0,026 | 0,038 | 0,030 | 0,036 | 0,034 | 0,032 | 0,023 |
| 0,030 | 0,032 | 0,024 | 0,036 | 0,030 | 0,026 | 0,032 | 0,028 | 0,040 | 0,038 |

### *Вариант 15*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,98 | 1,34 | 0,81 | 0,88 | 1,10 | 0,70 | 1,15 | 1,23 | 1,24 | 1,43 |
| 0,80 | 1,16 | 1,24 | 0,75 | 0,99 | 1,41 | 0,88 | 0,79 | 1,34 | 1,09 |
| 0,89 | 1,26 | 1,42 | 1,35 | 0,80 | 1,17 | 0,90 | 1,00 | 1,36 | 1,25 |
| 1,18 | 0,82 | 1,01 | 0,90 | 1,36 | 1,25 | 0,67 | 0,91 | 1,11 | 0,69 |
| 0,86 | 1,04 | 1,45 | 1,31 | 1,22 | 1,09 | 0,73 | 1,11 | 0,95 | 0,84 |
| 0,96 | 0,78 | 1,23 | 1,13 | 1,04 | 1,44 | 1,32 | 1,29 | 0,68 | 0,86 |
| 1,33 | 1,08 | 0,87 | 0,67 | 1,28 | 0,97 | 1,14 | 0,83 | 1,33 | 1,40 |
| 1,38 | 1,46 | 1,37 | 1,02 | 0,92 | 1,27 | 1,19 | 0,93 | 1,27 | 0,83 |
| 0,93 | 1,26 | 1,04 | 1,11 | 1,47 | 1,07 | 0,72 | 0,77 | 1,20 | 1,28 |
| 1,11 | 1,10 | 0,77 | 1,10 | 0,95 | 1,05 | 1,08 | 1,48 | 1,07 | 0,92 |

### *Вариант 16*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,87 | 0,83 | 0,99 | 0,80 | 0,75 | 0,75 | 1,00 | 0,72 | 0,94 | 0,84 |
| 0,83 | 0,88 | 0,95 | 0,80 | 0,65 | 0,88 | 0,83 | 0,92 | 0,65 | 0,71 |
| 0,74 | 0,71 | 0,66 | 0,80 | 0,94 | 0,74 | 0,87 | 0,71 | 0,82 | 0,90 |
| 0,79 | 0,79 | 0,91 | 0,96 | 0,87 | 0,91 | 0,79 | 0,87 | 0,96 | 0,98 |
| 0,87 | 1,00 | 0,90 | 0,94 | 0,71 | 1,01 | 0,72 | 0,79 | 0,74 | 0,67 |
| 0,90 | 0,83 | 0,72 | 0,82 | 0,74 | 0,84 | 0,91 | 0,76 | 0,88 | 0,80 |
| 0,83 | 0,92 | 0,86 | 0,76 | 0,82 | 0,70 | 0,86 | 0,78 | 0,96 | 0,68 |
| 0,91 | 0,78 | 0,70 | 0,86 | 0,84 | 0,66 | 0,92 | 0,76 | 0,95 | 0,84 |
| 0,91 | 0,75 | 0,86 | 0,78 | 0,70 | 0,82 | 0,99 | 0,83 | 0,86 | 0,67 |
| 0,88 | 0,70 | 0,95 | 0,83 | 0,75 | 0,95 | 0,79 | 0,65 | 0,84 | 0,78 |

### *Вариант 17*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,86 | 1,74 | 2,08 | 1,08 | 1,42 | 1,44 | 1,77 | 2,45 | 1,18 | 2,11 |
| 1,53 | 1,84 | 1,37 | 2,12 | 0,80 | 1,46 | 1,16 | 1,81 | 1,64 | 1,87 |
| 0,83 | 1,68 | 1,66 | 2,21 | 1,21 | 2,19 | 2,25 | 1,67 | 1,17 | 2,29 |
| 2,10 | 1,13 | 2,27 | 0,81 | 2,39 | 1,75 | 1,14 | 1,94 | 2,09 | 1,54 |
| 1,38 | 1,91 | 1,15 | 2,17 | 1,45 | 1,24 | 1,73 | 1,07 | 1,79 | 2,60 |
| 2,37 | 1,35 | 2,39 | 1,63 | 1,86 | 1,59 | 2,30 | 2,48 | 1,27 | 0,84 |
| 1,31 | 1,96 | 1,19 | 0,85 | 1,10 | 2,16 | 0,99 | 1,72 | 1,83 | 1,47 |
| 2,28 | 1,29 | 1,93 | 1,78 | 2,14 | 1,76 | 1,51 | 1,48 | 2,18 | 2,59 |
| 1,90 | 1,71 | 2,55 | 1,88 | 2,38 | 1,65 | 2,51 | 1,28 | 2,34 | 1,69 |
| 1,56 | 2,15 | 2,31 | 1,39 | 1,85 | 1,82 | 0,91 | 2,51 | 2,13 | 1,49 |

### *Вариант 18*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,6 | 2,5 | 0,8 | 1,3 | 2,0 | 3,7 | 3,3 | 0,8 | 3,5 | 2,4 |
| 3,3 | 2,9 | 0,6 | 3,9 | 2,7 | 0,9 | 2,5 | 1,1 | 1,5 | 3,2 |
| 1,7 | 2,6 | 4,1 | 2,7 | 2,5 | 3,2 | 2,9 | 2,0 | 2,9 | 2,0 |
| 1,5 | 3,7 | 1,5 | 1,2 | 2,4 | 2,8 | 1,2 | 2,5 | 3,2 | 2,0 |
| 1,1 | 0,7 | 1,9 | 2,6 | 3,2 | 1,9 | 3,1 | 4,0 | 0,9 | 2,8 |
| 1,9 | 3,3 | 2,5 | 1,6 | 2,4 | 2,9 | 4,0 | 3,1 | 3,9 | 2,4 |
| 4,2 | 2,8 | 1,2 | 1,7 | 3,5 | 2,3 | 1,5 | 3,1 | 1,7 | 1,6 |
| 2,4 | 3,6 | 3,1 | 2,1 | 1,3 | 2,9 | 2,3 | 3,9 | 0,7 | 2,6 |
| 1,6 | 2,7 | 1,9 | 2,4 | 1,6 | 2,7 | 3,2 | 2,8 | 1,1 | 2,1 |
| 4,1 | 1,9 | 3,6 | 3,5 | 2,4 | 2,1 | 1,3 | 4,1 | 1,1 | 2,1 |

### *Вариант 19*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22,7 | 64,8 | 40,6 | 14,5 | 62,8 | 34,5 | 53,4 | 26,1 | 69,3 | 52,5 |
| 36,2 | 58,7 | 25,3 | 43,1 | 27,4 | 80,1 | 68,4 | 63,3 | 13,4 | 55,4 |
| 51,9 | 31,3 | 19,3 | 44,5 | 49,9 | 26,9 | 80,8 | 56,4 | 66,1 | 27,5 |
| 66,3 | 44,7 | 42,7 | 17,5 | 51,7 | 49,3 | 66,5 | 37,3 | 23,4 | 67,6 |
| 66,9 | 18,9 | 25,5 | 27,2 | 80,4 | 50,4 | 10,8 | 47,7 | 58,4 | 29,2 |
| 42,9 | 50,7 | 38,4 | 19,7 | 63,8 | 40,4 | 20,1 | 65,3 | 45,5 | 76,3 |
| 50,2 | 51,1 | 28,6 | 47,9 | 78,4 | 57,4 | 34,9 | 43,5 | 32,5 | 48,4 |
| 18,6 | 26,2 | 47,1 | 71,4 | 27,1 | 35,4 | 75,7 | 41,7 | 49,5 | 27,3 |
| 72,7 | 70,2 | 14,9 | 52,4 | 62,3 | 25,4 | 43,2 | 80,3 | 39,5 | 33,1 |
| 79,1 | 24,6 | 11,1 | 64,3 | 46,7 | 77,2 | 67,8 | 35,1 | 53,1 | 65,8 |

### *Вариант 20*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 83,8 | 36,7 | 81,2 | 65,3 | 42,0 | 50,1 | 92,4 | 85,6 | 83,5 | 72,1 |
| 76,3 | 69,4 | 56,5 | 47,3 | 23,1 | 65,1 | 56,4 | 25,1 | 83,4 | 59,5 |
| 41,6 | 24,4 | 11,8 | 70,1 | 57,1 | 87,4 | 69,1 | 30,1 | 65,4 | 49,9 |
| 55,9 | 74,2 | 32,3 | 92,1 | 20,7 | 35,3 | 60,2 | 32,1 | 74,5 | 31,4 |
| 38,6 | 92,5 | 45,8 | 58,4 | 53,4 | 35,9 | 48,3 | 60,1 | 46,2 | 37,4 |
| 50,9 | 39,9 | 45,3 | 74,4 | 21,2 | 29,7 | 45,8 | 41,4 | 56,9 | 65,8 |
| 54,7 | 70,9 | 15,1 | 47,7 | 12,7 | 80,9 | 74,9 | 65,7 | 47,5 | 39,1 |
| 48,6 | 87,1 | 36,1 | 47,2 | 26,1 | 27,3 | 47,4 | 28,1 | 83,9 | 76,2 |
| 66,3 | 51,4 | 11,6 | 30,9 | 25,7 | 76,7 | 22,6 | 19,3 | 64,1 | 54,2 |
| 56,7 | 20,3 | 92,6 | 29,5 | 52,0 | 29,9 | 75,1 | 20,5 | 76,5 | 18,4 |

### *Вариант 21*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22,7 | 18,8 | 16,8 | 29,1 | 29,7 | 21,1 | 20,4 | 24,5 | 26,0 | 28,7 |
| 20,6 | 32,1 | 25,1 | 27,5 | 16,0 | 28,8 | 26,8 | 17,4 | 31,5 | 21,4 |
| 15,0 | 22,3 | 25,5 | 27,7 | 20,9 | 31,9 | 24,9 | 26,3 | 21,2 | 28,0 |
| 24,0 | 22,4 | 24,8 | 17,2 | 30,8 | 23,7 | 15,2 | 23,1 | 27,1 | 18,6 |
| 26,4 | 23,2 | 20,0 | 33,0 | 27,9 | 24,5 | 26,9 | 19,7 | 21,5 | 19,8 |
| 16,8 | 21,7 | 23,4 | 18,1 | 16,9 | 24,2 | 25,3 | 25,8 | 16,6 | 23,6 |
| 22,9 | 26,6 | 22,0 | 17,8 | 28,0 | 25,7 | 24,7 | 29,8 | 18,2 | 29,6 |
| 32,5 | 19,1 | 25,4 | 26,2 | 20,7 | 28,1 | 24,4 | 18,4 | 22,1 | 30,1 |
| 24,1 | 32,2 | 30,0 | 22,6 | 29,2 | 32,7 | 30,7 | 22,5 | 30,0 | 27,3 |
| 30,9 | 22,5 | 19,3 | 28,9 | 26,7 | 15,8 | 20,3 | 30,4 | 24,3 | 31,6 |

### *Вариант 22*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15,0 | 25,2 | 25,8 | 29,3 | 24,9 | 30,0 | 22,9 | 20,1 | 30,4 | 24,5 |
| 22,4 | 29,6 | 19,3 | 25,1 | 25,3 | 17,5 | 19,8 | 28,3 | 22,7 | 26,4 |
| 29,8 | 17,2 | 25,1 | 21,4 | 27,3 | 20,5 | 22,0 | 16,4 | 30,8 | 28,7 |
| 23,5 | 19,6 | 27,5 | 23,7 | 33,1 | 27,9 | 23,0 | 31,7 | 18,9 | 28,4 |
| 20,7 | 15,2 | 27,3 | 27,1 | 19,9 | 30,4 | 33,3 | 31,2 | 27,7 | 33,9 |
| 18,5 | 24,1 | 28,1 | 15,6 | 22,4 | 18,3 | 15,8 | 30,2 | 19,4 | 30,8 |
| 30,9 | 31,9 | 26,9 | 19,6 | 26,7 | 32,5 | 21,8 | 17,3 | 33,5 | 24,5 |
| 16,2 | 22,5 | 18,1 | 17,9 | 30,6 | 23,1 | 21,2 | 26,1 | 32,1 | 25,6 |
| 24,3 | 26,5 | 15,4 | 26,3 | 16,0 | 25,4 | 21,1 | 28,5 | 20,5 | 23,3 |
| 23,2 | 17,7 | 28,9 | 24,7 | 21,7 | 29,1 | 23,9 | 21,9 | 19,1 | 33,7 |

### *Вариант 23*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 137 | 100 | 209 | 185 | 67 | 110 | 208 | 183 | 59 | 170 |
| 54 | 195 | 30 | 162 | 226 | 247 | 48 | 228 | 255 | 134 |
| 127 | 156 | 81 | 106 | 135 | 170 | 133 | 68 | 174 | 143 |
| 87 | 146 | 78 | 176 | 31 | 204 | 145 | 85 | 229 | 47 |
| 231 | 131 | 110 | 207 | 241 | 168 | 206 | 60 | 181 | 178 |
| 220 | 142 | 203 | 153 | 172 | 93 | 154 | 103 | 108 | 234 |
| 129 | 101 | 144 | 235 | 114 | 77 | 89 | 182 | 112 | 58 |
| 83 | 153 | 104 | 202 | 39 | 164 | 95 | 154 | 121 | 193 |
| 66 | 241 | 123 | 91 | 164 | 57 | 250 | 225 | 76 | 125 |
| 190 | 158 | 201 | 160 | 239 | 211 | 33 | 221 | 151 | 56 |

### *Вариант 24*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 195 | 47 | 160 | 250 | 223 | 182 | 96 | 44 | 229 | 145 |
| 184 | 177 | 102 | 128 | 217 | 27 | 221 | 131 | 51 | 203 |
| 140 | 201 | 245 | 130 | 163 | 29 | 132 | 185 | 179 | 174 |
| 31 | 99 | 78 | 127 | 69 | 210 | 133 | 226 | 42 | 114 |
| 140 | 73 | 161 | 240 | 149 | 53 | 205 | 155 | 191 | 93 |
| 181 | 117 | 84 | 176 | 194 | 78 | 154 | 76 | 28 | 120 |
| 146 | 224 | 239 | 103 | 207 | 126 | 124 | 152 | 66 | 241 |
| 56 | 25 | 82 | 116 | 151 | 91 | 60 | 204 | 77 | 159 |
| 169 | 178 | 79 | 129 | 107 | 171 | 71 | 209 | 135 | 74 |
| 250 | 134 | 123 | 147 | 180 | 173 | 247 | 165 | 88 | 199 |

### Вариант 25

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 157,2 | 137,1 | 136,0 | 131,1 | 142,1 | 152,0 | 150,2 | 125,7 | 146,6 | 141,6 |
| 138,5 | 143,4 | 147,3 | 144,2 | 158,3 | 146,0 | 140,8 | 135,8 | 150,9 | 156,4 |
| 145,1 | 122,4 | 139,1 | 155,5 | 150,2 | 146,2 | 159,6 | 146,2 | 164,1 | 140,5 |
| 156,4 | 141,6 | 134,4 | 149,2 | 145,3 | 128,4 | 150,6 | 133,7 | 142,1 | 136,9 |
| 127,2 | 138,2 | 160,8 | 155,2 | 121,8 | 150,5 | 144,5 | 150,5 | 141,4 | 128,0 |
| 136,2 | 145,9 | 162,5 | 136,9 | 142,9 | 146,4 | 153,2 | 161,4 | 150,8 | 141,6 |
| 149,8 | 154,1 | 148,4 | 144,8 | 150,8 | 129,3 | 145,3 | 141,2 | 146,4 | 135,5 |
| 134,8 | 147,1 | 137,5 | 159,7 | 142,7 | 145,7 | 150,3 | 123,5 | 139,6 | 153,6 |
| 138,4 | 166,8 | 148,8 | 152,5 | 151,6 | 133,4 | 145,5 | 144,5 | 144,4 | 140,8 |
| 152,1 | 137,4 | 132,1 | 149,7 | 166,2 | 151,1 | 145,1 | 139,5 | 130,1 | 145,6 |

### Вариант 26

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,85 | 3,91 | 2,34 | 4,19 | 4,23 | 2,16 | 5,96 | 4,05 | 6,38 | 3,01 |
| 6,60 | 5,92 | 3,11 | 5,72 | 4,14 | 4,01 | 6,47 | 3,99 | 3,88 | 1,51 |
| 3,18 | 4,69 | 3,06 | 1,46 | 3,03 | 4,08 | 3,08 | 5,81 | 3,23 | 6,75 |
| 5,64 | 4,56 | 2,93 | 2,47 | 4,67 | 3,95 | 2,19 | 1,98 | 6,21 | 4,73 |
| 3,36 | 2,64 | 7,68 | 2,65 | 6,28 | 3,86 | 3,61 | 4,45 | 4,78 | 5,47 |
| 4,61 | 3,58 | 6,68 | 3,14 | 6,55 | 5,76 | 4,63 | 4,57 | 2,59 | 3,39 |
| 1,29 | 5,69 | 4,26 | 5,61 | 3,29 | 7,08 | 2,91 | 4,59 | 2,28 | 4,62 |
| 2,71 | 4,31 | 2,26 | 4,64 | 3,45 | 5,56 | 4,07 | 2,24 | 4,31 | 3,81 |
| 1,48 | 5,52 | 4,26 | 4,17 | 7,49 | 5,01 | 7,85 | 5,49 | 2,01 | 4,89 |
| 4,45 | 4,98 | 5,42 | 4,60 | 5,10 | 4,96 | 4,63 | 5,05 | 4,84 | 1,98 |

### Вариант 27

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 76,23 | 45,29 | 92,41 | 35,48 | 56,81 | 45,67 | 54,01 | 45,88 | 25,56 | 65,91 |
| 48,11 | 6,32 | 26,31 | 74,27 | 27,82 | 88,04 | 36,12 | 56,97 | 4,97 | 46,31 |
| 55,78 | 46,85 | 57,31 | 37,28 | 66,41 | 28,53 | 72,48 | 29,34 | 38,34 | 62,35 |
| 46,82 | 39,47 | 81,04 | 54,06 | 48,64 | 61,22 | 40,56 | 30,11 | 78,45 | 48,53 |
| 86,24 | 47,51 | 66,92 | 42,74 | 48,83 | 47,83 | 64,02 | 57,84 | 41,63 | 53,75 |
| 65,21 | 43,82 | 58,31 | 33,71 | 44,95 | 68,91 | 32,84 | 45,21 | 84,47 | 31,27 |
| 49,29 | 83,09 | 55,11 | 94,75 | 49,85 | 58,86 | 55,30 | 69,44 | 50,41 | 35,07 |
| 67,27 | 41,75 | 50,56 | 34,05 | 37,91 | 71,25 | 17,84 | 14,51 | 18,23 | 51,93 |
| 50,89 | 9,41 | 16,31 | 51,33 | 70,58 | 15,91 | 51,84 | 59,31 | 25,01 | 60,31 |
| 85,52 | 59,71 | 75,26 | 52,22 | 95,73 | 19,04 | 60,85 | 22,91 | 53,84 | 15,02 |

### Вариант 28

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,58 | 1,95 | 0,89 | 1,76 | 1,54 | 2,28 | 1,13 | 2,59 | 1,91 | 1,60 |
| 1,19 | 1,70 | 2,58 | 1,31 | 2,54 | 1,80 | 2,20 | 1,49 | 2,69 | 1,51 |
| 1,77 | 1,93 | 1,48 | 2,21 | 1,64 | 2,92 | 1,25 | 1,97 | 0,90 | 1,78 |
| 1,12 | 2,48 | 1,38 | 1,79 | 1,75 | 0,67 | 2,22 | 1,62 | 1,82 | 1,09 |
| 1,61 | 1,71 | 0,95 | 2,23 | 1,46 | 1,99 | 2,24 | 1,72 | 2,03 | 1,25 |
| 1,28 | 2,04 | 1,83 | 1,69 | 1,81 | 1,22 | 2,05 | 1,07 | 1,74 | 1,88 |
| 1,80 | 0,69 | 2,07 | 1,29 | 2,27 | 2,75 | 1,41 | 2,08 | 2,30 | 2,15 |
| 1,34 | 1,84 | 1,73 | 2,31 | 1,86 | 1,40 | 2,46 | 0,73 | 2,33 | 1,85 |
| 1,02 | 2,13 | 1,66 | 2,84 | 1,16 | 2,34 | 1,44 | 2,89 | 2,09 | 2,90 |
| 1,87 | 1,43 | 2,11 | 0,84 | 1,91 | 2,44 | 2,10 | 1,75 | 2,60 | 1,68 |

### Вариант 29

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30,2 | 51,9 | 43,1 | 58,9 | 34,1 | 55,2 | 47,9 | 43,7 | 53,2 | 34,9 |
| 47,8 | 65,7 | 37,8 | 68,6 | 48,4 | 67,5 | 27,3 | 66,1 | 52,0 | 55,6 |
| 54,1 | 26,9 | 53,6 | 42,5 | 59,3 | 44,8 | 52,8 | 42,3 | 55,9 | 48,1 |
| 44,5 | 69,8 | 47,3 | 35,6 | 70,1 | 39,5 | 70,3 | 33,7 | 51,8 | 56,1 |
| 28,4 | 48,7 | 41,9 | 58,1 | 20,4 | 56,3 | 46,5 | 41,8 | 59,5 | 38,1 |
| 41,4 | 70,4 | 31,4 | 52,5 | 45,2 | 52,3 | 40,2 | 60,4 | 27,6 | 57,4 |
| 29,3 | 53,8 | 46,3 | 40,1 | 50,3 | 48,9 | 35,8 | 61,7 | 49,2 | 45,8 |
| 45,3 | 71,5 | 35,1 | 57,8 | 28,1 | 57,6 | 49,6 | 45,5 | 36,2 | 63,2 |
| 69,1 | 25,1 | 65,1 | 49,7 | 62,1 | 46,1 | 39,9 | 62,4 | 50,1 | 33,1 |
| 33,3 | 49,8 | 39,8 | 45,9 | 37,3 | 78,0 | 64,9 | 28,8 | 62,5 | 58,7 |

### Вариант 30

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 88 | 72 | 100 | 60 | 116 | 74 | 36 | 143 | 114 | 70 |
| 56 | 76 | 30 | 76 | 89 | 53 | 117 | 90 | 135 | 103 |
| 35 | 128 | 70 | 86 | 43 | 76 | 61 | 113 | 34 | 83 |
| 62 | 84 | 50 | 69 | 120 | 91 | 102 | 47 | 119 | 99 |
| 33 | 76 | 91 | 37 | 85 | 17 | 85 | 63 | 121 | 74 |
| 46 | 85 | 63 | 104 | 77 | 92 | 54 | 78 | 42 | 105 |
| 85 | 79 | 49 | 80 | 93 | 32 | 106 | 81 | 64 | 79 |
| 73 | 19 | 80 | 65 | 107 | 123 | 51 | 94 | 80 | 108 |
| 52 | 83 | 124 | 81 | 96 | 82 | 109 | 20 | 95 | 68 |
| 66 | 41 | 82 | 98 | 111 | 67 | 125 | 97 | 112 | 58 |

***Задание 3.*** По данному интервальному распределению частот выборки

1) постройте полигон и гистограмму частот;

2) найдите эмпирическую функцию $F^*(x)$ и постройте ее график;

3) найдите числовые характеристики $\bar{x}_в$, $D_в, \sigma_в$;

4) выдвините гипотезу о виде распределения случайной величины $X$ в генеральной совокупности;

5) запишите аналитическое выражение для плотности распределения и теоретической функции распределения;

6) при $\alpha = 0{,}05$ по критериям Пирсона и Колмогорова подтвердите или отвергните выдвинутую гипотезу о виде распределения.

### Вариант 1

| *Интервалы* | 0-50 | 50-100 | 100-150 | 150-200 | 200-250 | 250-300 | 300-350 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 45 | 23 | 17 | 8 | 4 | 3 | 2 |

### Вариант 2

| *Интервалы* | 0-60 | 60-120 | 120-180 | 180-240 | 240-300 | 300-360 | 360-420 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 35 | 23 | 17 | 7 | 12 | 1 | 2 |

### *Вариант 3*

| *Интервалы* | 0-70 | 70-140 | 140-210 | 210-280 | 280-350 | 350-420 | 420-490 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 33 | 27 | 13 | 7 | 5 | 3 | 1 |

### *Вариант 4*

| *Интервалы* | 0-40 | 40-80 | 80-120 | 120-160 | 160-200 | 200-240 | 240-280 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 41 | 30 | 20 | 10 | 4 | 3 | 2 |

### *Вариант 5*

| *Интервалы* | 0-56 | 56-112 | 112-168 | 168-224 | 224-280 | 280-336 | 336-392 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 35 | 24 | 17 | 7 | 4 | 2 | 1 |

### *Вариант 6*

| *Интервалы* | 0-66 | 66-132 | 132-198 | 198-264 | 264-330 | 330-396 | 396-462 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 39 | 27 | 16 | 8 | 5 | 3 | 2 |

### *Вариант 7*

| *Интервалы* | 0-76 | 76-152 | 152-228 | 228-304 | 304-380 | 380-456 | 456-532 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 45 | 32 | 20 | 10 | 6 | 4 | 3 |

### *Вариант 8*

| *Интервалы* | 0-80 | 80-160 | 160-240 | 240-320 | 320-400 | 400-480 | 480-560 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ i | 48 | 30 | 21 | 9 | 7 | 3 | 2 |

### *Вариант 9*

| *Интервалы* | 0-90 | 90-180 | 180-270 | 270-360 | 360-450 | 450-540 | 540-630 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 50 | 33 | 21 | 8 | 4 | 2 | 2 |

### *Вариант 10*

| *Интервалы* | 0-100 | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 44 | 29 | 19 | 7 | 3 | 1 | 2 |

### *Вариант 11*

| *Интервалы* | 0-44 | 44-88 | 88-132 | 132-176 | 176-220 | 220-264 | 264-308 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 46 | 24 | 18 | 10 | 5 | 7 | 4 |

### *Вариант 12*

| *Интервалы* | 0-54 | 54-108 | 108-162 | 162-216 | 216-270 | 270-324 | 324-378 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 51 | 26 | 21 | 8 | 6 | 5 | 3 |

### *Вариант 13*

| *Интервалы* | 0-64 | 64-128 | 128-192 | 192-256 | 256-320 | 320-384 | 384-448 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 52 | 27 | 20 | 9 | 5 | 4 | 3 |

## *Вариант 14*

| *Интервалы* | 0-74 | 74-148 | 148-222 | 222-296 | 296-370 | 370-444 | 444-518 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 51 | 26 | 17 | 6 | 4 | 5 | 4 |

## *Вариант 15*

| *Интервалы* | 0-50 | 50-100 | 100-150 | 150-200 | 200-250 | 250-300 | 300-350 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 45 | 23 | 17 | 8 | 4 | 3 | 2 |

## *Вариант 16*

| *Интервалы* | 0-60 | 60-120 | 120-180 | 180-240 | 240-300 | 300-360 | 360-420 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 35 | 23 | 17 | 7 | 12 | 1 | 2 |

## *Вариант 17*

| *Интервалы* | 0-70 | 70-140 | 140-210 | 210-280 | 280-350 | 350-420 | 420-490 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 33 | 27 | 13 | 7 | 5 | 3 | 1 |

## *Вариант 18*

| *Интервалы* | 0-40 | 40-80 | 80-120 | 120-160 | 160-200 | 200-240 | 240-280 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 41 | 30 | 20 | 10 | 4 | 3 | 2 |

## *Вариант 19*

| *Интервалы* | 0-56 | 56-112 | 112-168 | 168-224 | 224-280 | 280-336 | 336-392 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 35 | 24 | 17 | 7 | 4 | 2 | 1 |

## *Вариант 20*

| *Интервалы* | 0-30 | 30-60 | 60-90 | 90-120 | 120-150 | 150-180 | 180-210 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 54 | 28 | 15 | 9 | 6 | 7 | 3 |

## *Вариант 21*

| *Интервалы* | 0-66 | 66-132 | 132-198 | 198-264 | 264-330 | 330-396 | 396-462 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 39 | 27 | 16 | 8 | 5 | 3 | 2 |

## *Вариант 22*

| *Интервалы* | 0-76 | 76-152 | 152-228 | 228-304 | 304-380 | 380-456 | 456-532 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 45 | 32 | 20 | 10 | 6 | 4 | 3 |

## *Вариант 23*

| *Интервалы* | 0-80 | 80-160 | 160-240 | 240-320 | 320-400 | 400-480 | 480-560 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 48 | 30 | 21 | 9 | 7 | 3 | 2 |

## *Вариант 24*

| *Интервалы* | 0-90 | 90-180 | 180-270 | 270-360 | 360-450 | 450-540 | 540-630 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 50 | 33 | 21 | 8 | 4 | 2 | 2 |

### *Вариант 25*

| *Интервалы* | 0-100 | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 44 | 29 | 19 | 7 | 3 | 1 | 2 |

### *Вариант 26*

| *Интервалы* | 0-44 | 44-88 | 88-132 | 132-176 | 176-220 | 220-264 | 264-308 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 46 | 24 | 18 | 10 | 5 | 7 | 4 |

### *Вариант 27*

| *Интервалы* | 0-54 | 54-108 | 108-162 | 162-216 | 216-270 | 270-324 | 324-378 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 51 | 26 | 21 | 8 | 6 | 5 | 3 |

### *Вариант 28*

| *Интервалы* | 0-64 | 64-128 | 128-192 | 192-256 | 256-320 | 320-384 | 384-448 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 52 | 27 | 20 | 9 | 5 | 4 | 3 |

### *Вариант 29*

| *Интервалы* | 0-74 | 74-148 | 148-222 | 222-296 | 296-370 | 370-444 | 444-518 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 51 | 26 | 17 | 6 | 4 | 5 | 4 |

### *Вариант 30*

| *Интервалы* | 0-30 | 30-60 | 60-90 | 90-120 | 120-150 | 150-180 | 180-210 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 54 | 28 | 15 | 9 | 6 | 7 | 3 |

***Задание 4.*** Дана таблица распределения объема $n = 100$ двух случайных величин $X$ и $Y$. Известно, что между $X$ и $Y$ существует линейная корреляционная зависимость.

1) Оцените тесноту корреляционной зависимости и значимость выборочного коэффициента корреляции $r_в$.

2) составьте уравнения прямых регрессии $Y$ на $X$ и $X$ на $Y$;

3) постройте на графике прямые регрессии и корреляционное поле;

### *Вариант 1*

| $X$ \ $Y$ | 2,2 | 3,6 | 5,0 | 6,4 | 7,8 | 9,2 | 10,6 | 12 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 5 | 3 | 4 | | | | | | 12 |
| 360 | | 7 | 8 | | | | | | 15 |
| 520 | | | 9 | 10 | 14 | | | | 33 |
| 680 | | | | 8 | 7 | 6 | | | 21 |
| 840 | | | | | 2 | 3 | 2 | | 7 |
| 1000 | | | | | | | 6 | 6 | 12 |
| $n_y$ | 5 | 10 | 21 | 18 | 23 | 9 | 8 | 6 | 100 |

**Вариант 2**

| Y / X | 2-4 | 4-6 | 6-8 | 8-10 | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 180-210 | | | | | 5 | 3 | 2 | 2 | 12 |
| 210-240 | | | | | 8 | 7 | 6 | | 21 |
| 240-270 | | | | 11 | 12 | 10 | | | 33 |
| 270-300 | | 3 | 4 | 5 | | | | | 12 |
| 300-330 | | 8 | 6 | | | | | | 14 |
| 330-360 | 5 | 3 | | | | | | | 8 |
| $n_y$ | 5 | 14 | 10 | 16 | 25 | 20 | 8 | 2 | 100 |

**Вариант 3**

| Y / X | 21,8-22,2 | 22,2-22,6 | 22,6-23,0 | 23,0-23,4 | 23,4-23,8 | 23,8-24,2 | 24,2-24,6 | 24,6-25,0 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,9-1,1 | 3 | 2 | 1 | | | | | | 6 |
| 1,1-1,3 | | | 4 | 5 | | | | | 9 |
| 1,3-1,5 | | | 10 | 7 | 6 | | | | 23 |
| 1,5-1,7 | | | | 12 | 9 | 5 | | | 26 |
| 1,7-1,9 | | | | | 7 | 4 | 3 | | 14 |
| 1,9-2,1 | | | | | | 5 | 9 | 8 | 22 |
| $n_y$ | 3 | 2 | 15 | 24 | 22 | 14 | 12 | 8 | 100 |

**Вариант 4**

| Y / X | 21,0 | 21,3 | 21,6 | 21,9 | 22,2 | 22,5 | 22,8 | 23,1 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,90 | 1 | 3 | 2 | | | | | | 6 |
| 1,05 | | 4 | 2 | 3 | | | | | 9 |
| 1,20 | | | 5 | 7 | 6 | | | | 18 |
| 1,35 | | | | 6 | 14 | 9 | | | 29 |
| 1,50 | | | | | 7 | 6 | 7 | | 20 |
| 1,65 | | | | | | 6 | 7 | 5 | 18 |
| $n_y$ | 1 | 7 | 9 | 16 | 27 | 21 | 14 | 5 | 100 |

**Вариант 5**

| Y / X | 60-68 | 68-76 | 76-84 | 84-92 | 92-100 | 100-108 | 108-116 | 116-124 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 6 | 2 | 4 | | | | | | 12 |
| 1,3 | | 3 | 8 | 6 | | | | | 17 |
| 1,6 | | | | 8 | 14 | 5 | | | 27 |
| 1,9 | | | | 7 | 8 | 9 | | | 24 |
| 2,2 | | | | | 4 | 5 | 6 | | 15 |
| 2,5 | | | | | | 1 | 1 | 3 | 5 |
| $n_y$ | 6 | 5 | 12 | 21 | 26 | 20 | 7 | 3 | 100 |

### Вариант 6

| X \ Y | 50-62 | 62-74 | 74-86 | 86-98 | 98-110 | 110-122 | 122-134 | 134-146 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,7-1,1 | 2 | 3 | 5 | | | | | | 10 |
| 1,1-1,5 | | 6 | 3 | 5 | | | | | 14 |
| 1,5-1,9 | | | 5 | 8 | 15 | | | | 28 |
| 1,9-2,3 | | | | 6 | 9 | 10 | | | 25 |
| 2,3-2,7 | | | | | 1 | 6 | 8 | | 15 |
| 2,7-3,1 | | | | | | 3 | 4 | 1 | 8 |
| $n_y$ | 2 | 9 | 13 | 19 | 25 | 19 | 12 | 1 | 100 |

### Вариант 7

| X \ Y | 10-30 | 30-50 | 50-70 | 70-90 | 90-110 | 110-130 | 130-150 | 150-170 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100-150 | | | | | | 3 | 7 | 2 | 12 |
| 150-200 | | | | | 5 | 4 | 6 | | 15 |
| 200-250 | | | | 7 | 9 | 8 | | | 24 |
| 250-300 | | | 5 | 14 | 7 | | | | 26 |
| 300-350 | | 4 | 7 | 5 | | | | | 16 |
| 350-400 | 3 | 4 | | | | | | | 7 |
| $n_y$ | 3 | 8 | 12 | 26 | 21 | 15 | 13 | 2 | 100 |

### Вариант 8

| X \ Y | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 750 | 2 | 4 | 2 | | | | | | 8 |
| 1250 | | | 6 | 7 | 3 | | | | 16 |
| 1750 | | | | 6 | 13 | 9 | | | 28 |
| 2250 | | | | 6 | 8 | 9 | | | 23 |
| 2750 | | | | | 7 | 8 | 1 | | 16 |
| 3250 | | | | | | 1 | 5 | 3 | 9 |
| $n_y$ | 2 | 4 | 8 | 19 | 31 | 27 | 6 | 3 | 100 |

### Вариант 9

| X \ Y | 0,1-0,3 | 0,3-0,5 | 0,5-0,7 | 0,7-0,9 | 0,9-1,1 | 1,1-1,3 | 1,3-1,5 | 1,5-1,7 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150-350 | 3 | 4 | 5 | | | | | | 12 |
| 350-550 | | 6 | 2 | 8 | | | | | 16 |
| 550-750 | | | | 5 | 14 | 9 | | | 28 |
| 750-950 | | | | 6 | 8 | 6 | | | 20 |
| 950-1150 | | | | | 5 | 7 | 4 | | 16 |
| 1150-1350 | | | | | | | 5 | 3 | 8 |
| $n_y$ | 3 | 10 | 7 | 19 | 27 | 22 | 9 | 3 | 100 |

### *Вариант 10*

| Y / X | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 250-350 | 2 | 3 | 6 | | | | | | 11 |
| 350-450 | | | 3 | 6 | 5 | | | | 14 |
| 450-550 | | | | 4 | 15 | 8 | | | 27 |
| 550-650 | | | | 8 | 5 | 10 | | | 23 |
| 650-750 | | | | | 7 | 6 | 3 | | 16 |
| 750-850 | | | | | | | 6 | 3 | 9 |
| $n_y$ | 2 | 3 | 9 | 18 | 32 | 24 | 9 | 3 | 100 |

### *Вариант 11*

| Y / X | 140-180 | 180-220 | 220-260 | 260-300 | 300-340 | 340-380 | 380-420 | 420-460 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,1-14,1 | 1 | 4 | 5 | | | | | | 10 |
| 14,1-19,1 | | 6 | 7 | 2 | | | | | 15 |
| 19,1-24,1 | | | 5 | 8 | 6 | | | | 19 |
| 24,1-29,1 | | | | 9 | 13 | 6 | | | 28 |
| 29,1-34,1 | | | | | 7 | 8 | 4 | | 19 |
| 34,1-39,1 | | | | | | | 6 | 3 | 9 |
| $n_y$ | 1 | 10 | 17 | 19 | 26 | 14 | 10 | 3 | 100 |

### *Вариант 12*

| Y / X | 110 | 130 | 150 | 170 | 190 | 210 | 230 | 250 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 3 | 4 | | | | | | 8 |
| 13 | | 5 | 6 | 5 | | | | | 16 |
| 16 | | | 4 | 8 | 6 | | | | 18 |
| 19 | | | 6 | 15 | 9 | | | | 30 |
| 22 | | | | | 5 | 6 | 7 | | 18 |
| 25 | | | | | | 1 | 7 | 2 | 10 |
| $n_y$ | 1 | 8 | 20 | 28 | 20 | 7 | 14 | 2 | 100 |

### *Вариант 13*

| Y / X | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 | 25-27 | 27-29 | 29-31 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,1-2,5 | 3 | 2 | 4 | | | | | | 9 |
| 2,5-2,9 | | 5 | 6 | 1 | | | | | 12 |
| 2,9-3,3 | | | 6 | 9 | 4 | | | | 19 |
| 3,3-3,7 | | | | 8 | 16 | 7 | | | 31 |
| 3,7-4,1 | | | | | 8 | 6 | 5 | | 19 |
| 4,1-4,5 | | | | | | 4 | 5 | 1 | 10 |
| $n_y$ | 3 | 7 | 16 | 18 | 28 | 17 | 10 | 1 | 100 |

### *Вариант 14*

| Y / X | 12,5-15,5 | 15,5-18,5 | 18,5-21,5 | 21,5-24,5 | 24,5-27,5 | 27,5-30,5 | 30,5-33,5 | 33,5-36,5 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5-2,1 | 2 | 4 | 6 | | | | | | 12 |
| 2,1-2,7 | | 2 | 7 | 6 | | | | | 15 |
| 2,7-3,3 | | | 6 | 8 | 5 | | | | 19 |
| 3,3-3,9 | | | | 8 | 14 | 4 | | | 26 |
| 3,9-4,5 | | | | | 3 | 6 | 8 | | 17 |
| 4,5-5,1 | | | | | | | 5 | 6 | 11 |
| $n_y$ | 2 | 6 | 19 | 22 | 22 | 10 | 13 | 6 | 100 |

### *Вариант 15*

| Y / X | 1200 | 2700 | 4200 | 5700 | 8200 | 9700 | 11200 | 12700 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 4 | 2 | 5 | | | | | | 11 |
| 520 | | | 7 | 5 | 2 | | | | 14 |
| 1020 | | | | 9 | 14 | 6 | | | 29 |
| 1520 | | | | 7 | 8 | 6 | | | 21 |
| 2020 | | | | | 4 | 5 | 7 | | 16 |
| 2520 | | | | | | 3 | 2 | 4 | 9 |
| $n_y$ | 4 | 2 | 12 | 21 | 28 | 20 | 9 | 4 | 100 |

### *Вариант 16*

| Y / X | 400-500 | 500-600 | 600-700 | 700-800 | 800-900 | 900-1000 | 1000-1100 | 1100-1200 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 140-180 | | | | | | 2 | 5 | 3 | 10 |
| 180-220 | | | | | 5 | 4 | 5 | | 14 |
| 220-260 | | | | 15 | 5 | 7 | | | 27 |
| 260-300 | | | 4 | 9 | 8 | | | | 21 |
| 300-340 | | 4 | 5 | 7 | | | | | 16 |
| 340-380 | 3 | 4 | 5 | | | | | | 12 |
| $n_y$ | 3 | 8 | 14 | 31 | 18 | 13 | 10 | 3 | 100 |

### *Вариант 17*

| Y / X | 12000 | 12570 | 13140 | 13710 | 14280 | 14850 | 15420 | 15990 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1500 | 1 | 6 | 4 | | | | | | 11 |
| 1600 | | | 4 | 7 | 5 | | | | 16 |
| 1700 | | | | 6 | 15 | 6 | | | 27 |
| 1800 | | | | 8 | 8 | 4 | | | 20 |
| 1900 | | | | | 5 | 5 | 6 | | 16 |
| 2000 | | | | | | 5 | 2 | 3 | 10 |
| $n_y$ | 1 | 6 | 8 | 21 | 33 | 20 | 8 | 3 | 100 |

### *Вариант 18*

| Y / X | 120-140 | 140-160 | 160-180 | 180-200 | 200-220 | 220-240 | 240-260 | 260-280 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80-90 | 3 | 4 | 2 | | | | | | 9 |
| 90-100 | | 5 | 7 | 5 | | | | | 17 |
| 100-110 | | | | 8 | 14 | 6 | | | 28 |
| 110-120 | | | | | 8 | 9 | 6 | | 23 |
| 120-130 | | | | | | 5 | 6 | 3 | 14 |
| 130-140 | | | | | | | 5 | 4 | 9 |
| $n_y$ | 3 | 9 | 9 | 13 | 22 | 20 | 17 | 7 | 100 |

### *Вариант 19*

| Y / X | 7,6-8,4 | 8,4-9,2 | 9,2-10,0 | 10,0-10,8 | 10,8-11,6 | 11,6-12,4 | 12,4-13,2 | 13,2-14,0 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 115-125 | 5 | 6 | | | | | | | 11 |
| 125-135 | | 3 | 4 | 6 | | | | | 13 |
| 135-145 | | | 4 | 5 | 6 | | | | 15 |
| 145-155 | | | | 6 | 13 | 7 | | | 26 |
| 155-165 | | | | | | 6 | 9 | 5 | 20 |
| 165-175 | | | | | | | 7 | 8 | 15 |
| $n_y$ | 5 | 9 | 8 | 17 | 19 | 13 | 16 | 13 | 100 |

### *Вариант 20*

| Y / X | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 | 10,0 | 10,5 | 11,0 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 115 | | | | | | 4 | 3 | 2 | 9 |
| 120 | | | | | 8 | 7 | | | 15 |
| 125 | | | | 8 | 7 | 4 | | | 19 |
| 130 | | | 7 | 15 | 3 | | | | 25 |
| 135 | | 2 | 9 | 8 | | | | | 19 |
| 140 | 1 | 4 | 8 | | | | | | 13 |
| $n_y$ | 1 | 6 | 24 | 31 | 18 | 15 | 3 | 2 | 100 |

### *Вариант 21*

| Y / X | 200-400 | 400-600 | 600-800 | 800-1000 | 1000-1200 | 1200-1400 | 1400-1600 | 1600-1800 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,5-7,5 | 1 | 2 | 5 | | | | | | 8 |
| 7,5-12,5 | | 2 | 7 | 4 | | | | | 13 |
| 12,5-17,5 | | | 9 | 6 | 4 | | | | 19 |
| 17,5-22,5 | | | | 14 | 6 | 7 | | | 27 |
| 22,5-27,5 | | | | | 1 | 8 | 9 | | 18 |
| 27,5-32,5 | | | | | | 4 | 5 | 6 | 15 |
| $n_y$ | 1 | 4 | 21 | 24 | 11 | 19 | 14 | 6 | 100 |

## *Вариант 22*

| Y / X | 210-310 | 310-410 | 410-510 | 510-610 | 610-710 | 710-810 | 810-910 | 910-1010 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-5 | | | | | | | 7 | 2 | 9 |
| 5-9 | | | | | | 7 | 8 | | 15 |
| 9-13 | | | | 15 | 5 | 9 | | | 29 |
| 13-17 | | | 6 | 6 | 7 | | | | 19 |
| 17-21 | | 5 | 9 | 2 | | | | | 16 |
| 21-25 | 2 | 4 | 6 | | | | | | 12 |
| $n_y$ | 2 | 9 | 21 | 23 | 12 | 16 | 15 | 2 | 100 |

## *Вариант 23*

| Y / X | 1435-1505 | 1505-1575 | 1575-1645 | 1645-1715 | 1715-1785 | 1785-1855 | 1855-1925 | 1925-1995 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 205-215 | 3 | 2 | 3 | | | | | | 8 |
| 215-225 | | 1 | 4 | 5 | | | | | 10 |
| 225-235 | | | 7 | 13 | 8 | | | | 28 |
| 235-245 | | | | | 9 | 6 | 6 | | 21 |
| 245-255 | | | | | | 7 | 8 | 3 | 18 |
| 255-265 | | | | | | 4 | 6 | 5 | 15 |
| $n_y$ | 3 | 3 | 14 | 18 | 17 | 17 | 20 | 8 | 100 |

## *Вариант 24*

| Y / X | 2400 | 2440 | 2480 | 2520 | 2560 | 2600 | 2640 | 2680 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 5 | 4 | 2 | | | | | | 11 |
| 305 | | 1 | 3 | 3 | | | | | 7 |
| 310 | | | 7 | 10 | 14 | | | | 31 |
| 315 | | | | 9 | 6 | 4 | | | 19 |
| 320 | | | | | | 8 | 5 | 7 | 20 |
| 325 | | | | | | | 6 | 6 | 12 |
| $n_y$ | 5 | 5 | 12 | 22 | 20 | 12 | 11 | 13 | 100 |

## *Вариант 25*

| Y / X | 80-160 | 160-240 | 240-320 | 320-400 | 400-480 | 480-560 | 560-640 | 640-720 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,5-12,5 | 4 | 5 | 2 | | | | | | 11 |
| 12,5-16,5 | | 6 | 7 | 5 | | | | | 18 |
| 16,5-20,5 | | | 6 | 8 | 14 | | | | 28 |
| 20,5-24,5 | | | | | 12 | 9 | 2 | | 23 |
| 24,5-28,5 | | | | | 6 | 4 | | | 10 |
| 28,5-32,5 | | | | | | 5 | 3 | 2 | 10 |
| $n_y$ | 4 | 11 | 15 | 13 | 32 | 18 | 5 | 2 | 100 |

### Вариант 26

| Y / X | 235-375 | 375-425 | 425-475 | 475-525 | 525-575 | 575-625 | 625-675 | 675-725 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22-34 | 6 | 6 | 4 | 3 | | | | | 19 |
| 34-46 | | | 6 | 9 | 5 | | | | 20 |
| 46-58 | | | | | 12 | 8 | 6 | | 26 |
| 58-70 | | | | | | 7 | 5 | 3 | 15 |
| 70-82 | | | | | | | 4 | 9 | 13 |
| 82-96 | | | | | | | | 7 | 7 |
| $n_y$ | 6 | 6 | 10 | 12 | 17 | 15 | 15 | 19 | 100 |

### Вариант 27

| Y / X | 26-46 | 46-66 | 66-86 | 86-106 | 106-126 | 126-146 | 146-166 | 166-186 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,6-6,2 | 6 | 4 | 4 | | | | | | 14 |
| 6,2-7,8 | | 8 | 7 | 2 | | | | | 17 |
| 7,8-9,4 | | | 3 | 8 | 9 | | | | 20 |
| 9,4-11,0 | | | | 16 | 5 | 8 | | | 29 |
| 11,0-12,6 | | | | | | 6 | 5 | | 11 |
| 12,6-14,2 | | | | | | 4 | 3 | 2 | 9 |
| $n_y$ | 6 | 12 | 14 | 26 | 14 | 18 | 8 | 2 | 100 |

### Вариант 28

| Y / X | 18,5 | 19,7 | 20,9 | 22,1 | 23,3 | 24,5 | 25,7 | 26,9 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 125 | 4 | 3 | 6 | | | | | | 13 |
| 200 | | 7 | 4 | 7 | | | | | 18 |
| 275 | | | | 15 | 9 | 7 | | | 31 |
| 350 | | | | | 8 | 5 | 6 | | 19 |
| 425 | | | | | | 4 | 3 | 1 | 8 |
| 500 | | | | | | | 6 | 5 | 11 |
| $n_y$ | 4 | 10 | 10 | 22 | 17 | 16 | 15 | 6 | 100 |

### Вариант 29

| Y / X | 1,5-8,5 | 8,5-15,5 | 15,5-22,5 | 22,5-29,5 | 29,5-36,5 | 36,5-43,5 | 43,5-50,5 | 50,5-57,5 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,47-0,61 | 5 | 3 | 2 | 2 | | | | | 12 |
| 0,61-0,75 | | 4 | 8 | 9 | 4 | | | | 25 |
| 0,75-0,89 | | | | | 17 | 9 | 6 | | 32 |
| 0,89-1,03 | | | | | 1 | 6 | 5 | | 12 |
| 1,03-1,17 | | | | | | 6 | 3 | 2 | 11 |
| 1,17-1,31 | | | | | | | 4 | 4 | 8 |
| $n_y$ | 5 | 7 | 10 | 11 | 22 | 21 | 18 | 6 | 100 |

### Вариант 30

| Y / X | 0,33-0,83 | 0,83-1,33 | 1,33-1,83 | 1,83-2,33 | 2,33-2,83 | 2,83-3,33 | 3,33-3,88 | 3,88-4,33 | $n_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38-62 | 3 | 3 | 4 | 6 | | | | | 16 |
| 62-86 | | 5 | 8 | 9 | | | | | 22 |
| 86-110 | | | | 13 | 8 | 9 | | | 30 |
| 110-134 | | | | | 9 | 2 | 4 | | 15 |
| 134-158 | | | | | | 1 | 3 | 5 | 9 |
| 158-182 | | | | | | | 5 | 3 | 8 |
| $n_y$ | 3 | 8 | 12 | 28 | 17 | 12 | 12 | 8 | 100 |

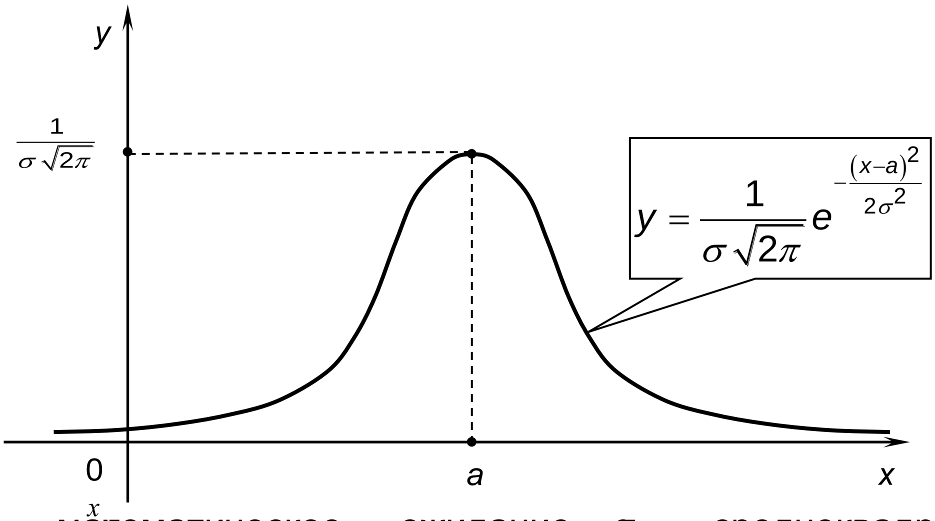
### *Методические указания к решению контрольных заданий*

Напомним некоторые виды распределения случайной величины (СВ) *X*, рассматриваемые в теории вероятностей.

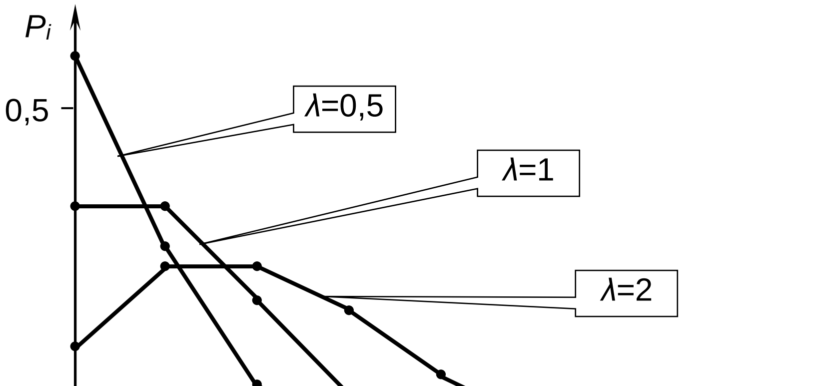
1. *Нормальное распределение* задают функцией плотности вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

график которой имеет вид




Здесь *a* – математическое ожидание, *σ* – среднеквадратическое отклонение, $\sigma^2$ – дисперсия СВ *X.* Одним из характерных свойств нормально распределенной величины является «правило трех $\sigma$», согласно которому практически все ее значения (99,73 %) попадают в интервал $(a-3\sigma;\, a+3\sigma)$ длиною 6*σ*.




2. *Распределение Пуассона* рассматривают для дискретных СВ. Вероятность того, что *X* примет значение равное *k* находят по формуле

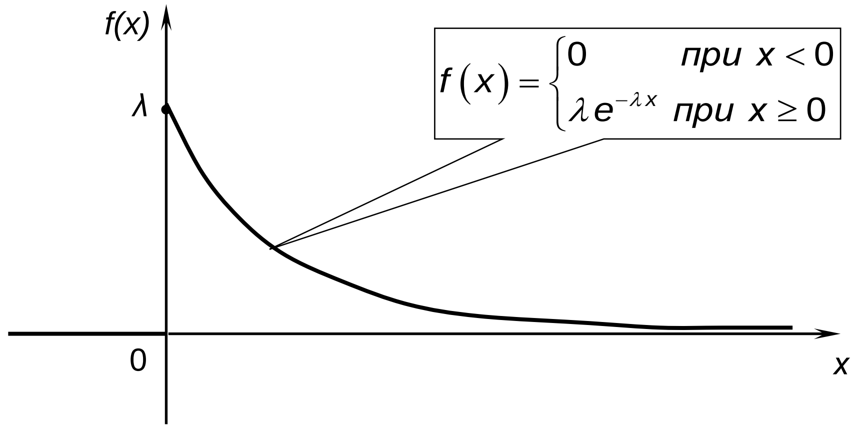
$$P_k=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Отличительной особенностью этого распределения является равенство математического ожидания и дисперсии: $M(X)=\sigma_X^2=\lambda$. На чертеже приведены многоугольники этого распределения при некоторых значениях *λ.*

3. *Показательное распределение* непрерывной неотрицательной СВ задается функцией плотности

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$$

и отличается тем, что у него совпадают математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение $M(X)=\sigma_X=\dfrac{1}{\lambda}$. Ниже приведен график.




Выдвигая гипотезу о виде распределения случайного признака, на первом шаге исходят из «похожести» формы гистограммы или полигона на одну из теоретических кривых.[1]

***Задание 1.*** Имеем выборочные данные:

0 5 0 0 0 1 2 1 0 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 1 1 2 0 1 1
0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2
1 0 2 1 1 2 1 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3
1 0 2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 3 0 1 2

Обозначим через $x_i$ варианты признака *X*. Из условия видим, что $x_i$ принимают одно из значений 0, 1, 2, 3, 4, 5. Следовательно, СВ *X* – дискретная случайная величина. Объем выборки $n=100$. Просматривая данные, подсчитываем частоты $n_i$ вариант $x_i$ и записываем в таблицу (графы 2 и 3). Сформируем общую таблицу, которая содержит вспомогательные и итоговые результаты подсчетов по всем пунктам задания. Будем заполнять ее по мере выполнения работы.

[1] Справедливости ради отметим, что для многих СВ, используемых в практике, вид распределения известен, и дело сводится к расчету параметров и оценке их надежности.

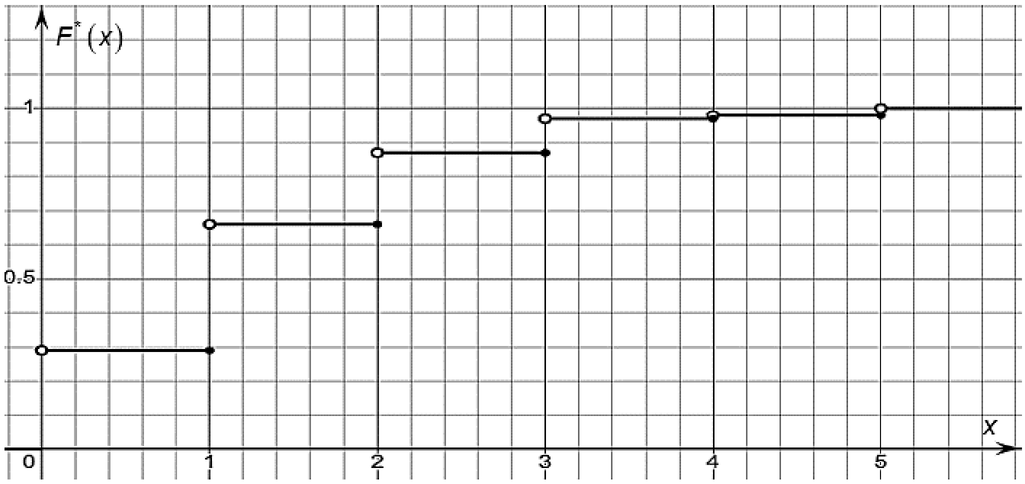
<table>
<tr><td>$i$</td><td>$x_i$</td><td>$n_i$</td><td>$\frac{n_i}{n}$</td><td>$F^*(x_i)$</td><td>$x_i\,n_i$</td><td>$x_i^2\,n_i$</td><td>$P_i$</td><td>$n_i' = nP_i$</td><td>$n_i$</td><td>$\frac{(n_i' - n_i)^2}{n_i'}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>29</td><td>0,29</td><td>0,29</td><td>0</td><td>0</td><td>0,2923</td><td>29,23</td><td>29</td><td>0.0018</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>37</td><td>0,37</td><td>0,66</td><td>37</td><td>37</td><td>0,3595</td><td>35,95</td><td>37</td><td>0,0307</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>21</td><td>0,21</td><td>0,87</td><td>42</td><td>84</td><td>0,2211</td><td>22,11</td><td>21</td><td>0,0557</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>10</td><td>0,10</td><td>0,97</td><td>30</td><td>90</td><td>0,0906</td><td rowspan="3">$\left.\begin{matrix}9,06\\2,79\\0,68\end{matrix}\right\}=12,53$</td><td rowspan="3">$\left.\begin{matrix}10\\1\\2\end{matrix}\right\}=13$</td><td rowspan="3">0,0176</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td><td>0,01</td><td>0,98</td><td>4</td><td>16</td><td>0,0279</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>0,02</td><td>1,00</td><td>10</td><td>50</td><td>0,0068</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td></td><td>100</td><td>1,00</td><td></td><td>123</td><td>277</td><td>0,9982</td><td></td><td></td><td>0,1058</td></tr>
</table>

Вычислим относительные частоты вариант $x_i$ по формуле $\frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{100}$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$. Результаты вносим в графу 4. Теперь совокупность граф 2 и 3 есть статистический ряд распределения частот, а граф 2 и 4 – статистический ряд распределения относительных частот.

Начертим *полигон частот*, откладывая на горизонтальной оси варианты $x_i$, а на вертикальной – соответствующие им частоты $n_i$. Затем полученные точки последовательно соединяем отрезками.


*Эмпирическую функцию* распределения определяют формулой $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где $n_x$ – сумма частот вариант, меньших $x$. В статистике она является аналогом интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$ в теории вероятностей. В соответствии с данными графы 4, получим:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 0{,}29, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 0{,}66, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 0{,}87, & \text{если} \quad 2<x\le 3,\\ 0{,}97, & \text{если} \quad 3<x\le 4,\\ 0{,}98, & \text{если} \quad 4<x\le 5,\\ 1{,}00, & \text{если} \quad 5<x.\end{cases}$$




Вычислим выборочные оценки параметров распределения по формулам:

выборочную среднюю $\bar{x}_в=\dfrac{\sum x_i n_i}{n}$,

выборочную дисперсию $\sigma_в^2=\dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n}-\left(\bar{x}_в\right)^2$,

выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma_в=\sqrt{\sigma_в^2}$.

Для этого заполним графы 5 и 6. Получим:

$$\bar{x}_в=\frac{123}{100}=1{,}23;\ \sigma_в^2=\frac{277}{100}-1{,}23^2=1{,}2571;\ \sigma_в=\sqrt{1{,}2571}=1{,}12.$$

По виду полигона, а также из того, что $\bar{x}_в$ и $\sigma_в^2$ почти совпадают, что является признаком распределения Пуассона, выдвигаем гипотезу о том, что рассматриваемый признак $X$ распределен по закону Пуассона

$$P_i=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!},\ (i=0,1,2,3,4,5)$$

где $\lambda$ — математическое ожидание и дисперсия распределения. В нашем случае примем $\lambda=1{,}23$. Тогда $P_i=\dfrac{1{,}23^i\, e^{-1{,}23}}{i!}$.

Вычислим теоретические вероятности $P_i$:

$$P_0 = \frac{1{,}23^0\ e^{-1{,}23}}{0!} = 0{,}2923; \qquad P_1 = \frac{1{,}23^1 \cdot 0{,}2923}{1!} = 0{,}3595;$$

$$P_2 = \frac{1{,}23^2 \cdot 0{,}2923}{2!} = 0{,}2211; \quad P_3 = \frac{1{,}23^3 \cdot 0{,}2923}{3!} = 0{,}0906;$$

$$P_4 = \frac{1{,}23^4 \cdot 0{,}2923}{4!} = 0{,}0279; \; P_5 = \frac{1{,}23^5 \cdot 0{,}2923}{5!} = 0{,}0069 \text{ (столбец 8).}$$

*Вопрос: почему сумма $P_i$ отличается от единицы?*

Сравнивая данные в графах 4 и 8, еще раз убеждаемся, что распределение близко к пуассоновскому.

Согласно критерию согласия Пирсона вычислим статистику

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'},$$

где $n_i' = nP_i$ – теоретические (выравнивающие) частоты. Для их вычисления элементы графы 8 умножим $n = 100$ (графа 9). В графу 11 внесем величины $\dfrac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$. При этом учтем, что значения вариант, частоты которых меньше 5, надо объединить с соседними вариантами так, чтобы их общая сумма оказалась не меньше пяти. В нашем случае объединяем последние три варианты, считая при этом, что эмпирическая сумма вариант равна $n_i = 13$ (графа 10), а $n_i' = \left(0{,}0906 + 0{,}0279 + 0{,}0068\right) \cdot 100 = 12{,}53$. Соответственно, в графе 11 вычислим общее для них значение $\dfrac{\left(13 - 12{,}53\right)^2}{12{,}53} = 0{,}0176$. Тогда $\chi^2_{набл} = 0{,}1058$.

Найдем $\chi^2_{крит}$. Для этого вычислим число степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где $k = 4$ – число групп (учитывая объединение), $r = 1$ – число параметров распределения (один расчетный параметр $\lambda = 1{,}23$). Получаем $\nu = 4 - 1 - 1 = 2$.

По таблице «Критические точки распределения $\chi^2$» (приложение 4) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\chi^2_{крит} = \chi^2\left(2;\, 0{,}05\right) = 5{,}991$. Как видим, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$. Следовательно, критерий Пирсона позволяет не отвергать гипотезу о распределении Пуассона с параметром $\lambda = 1{,}23$ для рассматриваемой статистической совокупности.

*Замечание.* Если наблюдаемое значение статистики окажется больше критического, следует усомниться в правильности выдвинутой гипотезы.

***Задание 2.*** В результате эксперимента получена выборка из 100 чисел

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24,8 | 26,2 | 25,6 | 24,0 | 26,4 | 25,2 | 26,7 | 25,4 | 25,3 | 26,1 |
| 24,3 | 25,3 | 25,6 | 26,7 | 24,5 | 26,0 | 25,7 | 25,0 | 26,4 | 25,9 |
| 24,4 | 25,4 | 26,1 | 23,4 | 26,5 | 25,9 | 23,9 | 25,7 | 27,1 | 24,9 |
| 23,8 | 25,6 | 25,2 | 26,4 | 24,2 | 26,5 | 25,7 | 24,7 | 26,0 | 25,8 |
| 24,3 | 25,5 | 26,7 | 24,9 | 26,2 | 26,7 | 24,6 | 26,0 | 25,4 | 25,0 |
| 25,4 | 25,3 | 24,1 | 26,6 | 24,8 | 25,6 | 23,7 | 26,8 | 25,2 | 26,1 |
| 24,5 | 25,4 | 25,1 | 26,2 | 24,2 | 26,4 | 25,7 | 23,9 | 27,2 | 25,0 |
| 23,9 | 25,6 | 24,9 | 24,5 | 26,2 | 26,7 | 24,3 | 26,1 | 27,7 | 25,8 |
| 25,6 | 25,2 | 24,2 | 26,0 | 24,7 | 26,5 | 23,5 | 25,4 | 27,1 | 24,0 |
| 26,2 | 24,2 | 25,5 | 26,0 | 25,7 | 26,4 | 24,6 | 27,0 | 25,2 | 26,9 |

1. Запишем числовые значения (варианты) в порядке неубывания, получим вариационный ряд

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23,4 | 23,5 | 23,7 | 23,8 | 23,9 | 23,9 | 23,9 | 24,0 | 24,0 | 24,1 |
| 24,2 | 24,2 | 24,2 | 24,3 | 24,3 | 24,3 | 24,4 | 24,5 | 24,5 | 24,5 |
| 24,6 | 24,6 | 24,7 | 24,7 | 24,8 | 24,8 | 24,8 | 24,9 | 24,9 | 24,9 |
| 25,0 | 25,0 | 25,1 | 25,2 | 25,2 | 25,2 | 25,2 | 25,2 | 25,3 | 25,3 |
| 25,3 | 25,4 | 25,4 | 25,4 | 25,4 | 25,4 | 25,4 | 25,5 | 25,5 | 25,6 |
| 25,6 | 25,6 | 25,6 | 25,6 | 25,7 | 25,7 | 25,7 | 25,7 | 25,7 | 25,7 |
| 25,8 | 25,8 | 25,9 | 25,9 | 26,0 | 26,0 | 26,0 | 26,0 | 26,0 | 26,0 |
| 26,1 | 26,1 | 26,1 | 26,1 | 26,2 | 26,2 | 26,2 | 26,2 | 26,2 | 26,4 |
| 26,4 | 26,4 | 26,4 | 26,4 | 26,5 | 26,5 | 26,5 | 26,6 | 26,7 | 26,7 |
| 26,7 | 26,7 | 26,7 | 26,8 | 26,9 | 27,0 | 27,1 | 27,1 | 27,2 | 27,7 |

2. Найдем размах вариации

$$x_{\max} - x_{\min} = 27{,}7 - 23{,}4 = 4{,}3;$$

оптимальное число интервалов найдем по формуле Стерджеса

$$k = 1 + 3{,}322 \lg n = 1 + 3{,}322 \lg 100 = 7{,}644 \approx 8$$

и длину частичного интервала

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{8} = \frac{4{,}3}{8} = 0{,}54.$$

Выпишем границы интервалов[2]:

$$a_1 = 23{,}4; \quad a_2 = 23{,}94; \quad a_3 = 24{,}48; \quad a_4 = 25{,}02; \quad a_5 = 25{,}56;$$

$$a_6 = 26{,}1; \quad a_7 = 26{,}64; \quad a_8 = 27{,}18; \quad a_9 = 27{,}72.$$

Подсчитаем число вариант, попавших в каждый интервал, т.е. найдем частоты $n_i$, и запишем интервальное распределение частот выборки:

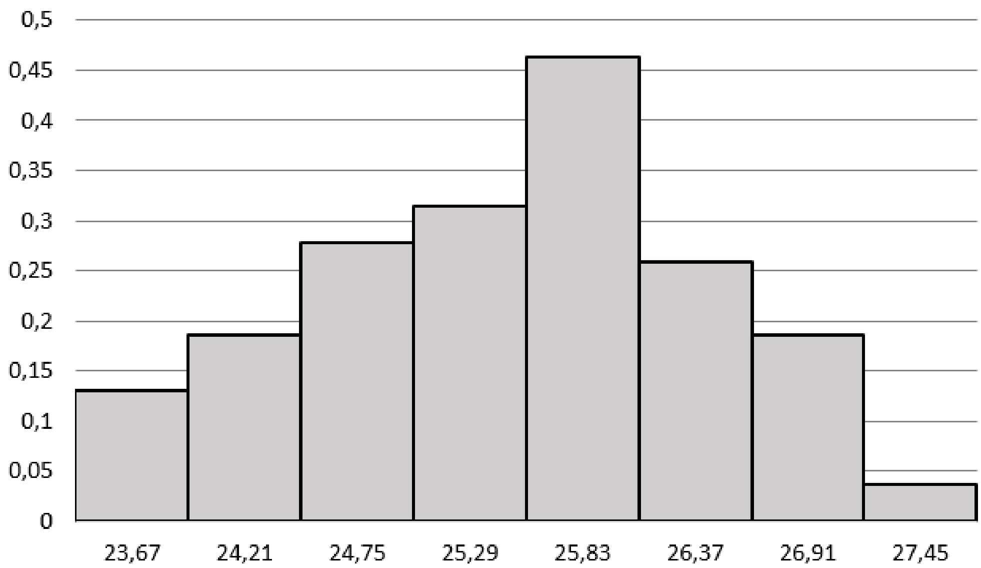
[2] Отметим другой способ построения интервалов: $a_1 = x_{\min} - \frac{h}{2}$, $a_2 = a_1 + h$, $a_3 = a_2 + h$, и т.д. При этом последний интервал «накроет» $x_{\max}$.

| Интервалы | 23.40-23.94 | 23.94-24.48 | 24.48-25.02 | 25.02-25.56 | 25.56-26.10 | 26.10-26.64 | 26.64-27.18 | 27.18-27.72 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 10 | 15 | 17 | 25 | 14 | 10 | 2 |

3. Найдем относительные частоты $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ и их плотности $\dfrac{w_i}{h}$, $n = 100$, $h = 0{,}54$.

| Интервалы | $n_i$ | $w_i$ | $\dfrac{w_i}{h}$ |
|---|---|---|---|
| 23,40-23,94 | 7 | 0,07 | 0,13 |
| 23,94-24,48 | 10 | 0,10 | 0,19 |
| 24,48-25,02 | 15 | 0,15 | 0,28 |
| 25,02-25,56 | 17 | 0,17 | 0,31 |
| 25,56-26,10 | 25 | 0,25 | 0,46 |
| 26,10-26,64 | 14 | 0,14 | 0,26 |
| 26,64-27,18 | 10 | 0,10 | 0,19 |
| 27,18-27,72 | 2 | 0,02 | 0,04 |
| $\sum$ | 100 | 1 | |

Построим гистограмму относительных частот (масштаб на осях разный).




Найдем значения эмпирической функции $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где $n_x$ – накопленная частота.

В качестве аргумента функции будем рассматривать концы интервалов:

$F^*\left(23,4\right) = \dfrac{0}{100} = 0$;     $F^*\left(23,94\right) = \dfrac{7}{100} = 0,07$;

$$F^*(24,48)=\frac{7+10}{100}=0,17;\qquad F^*(25,02)=\frac{17+15}{100}=0,32;$$

$$F^*(25,56)=\frac{32+17}{100}=0,49;\qquad F^*(26,10)=\frac{49+25}{100}=0,74;$$

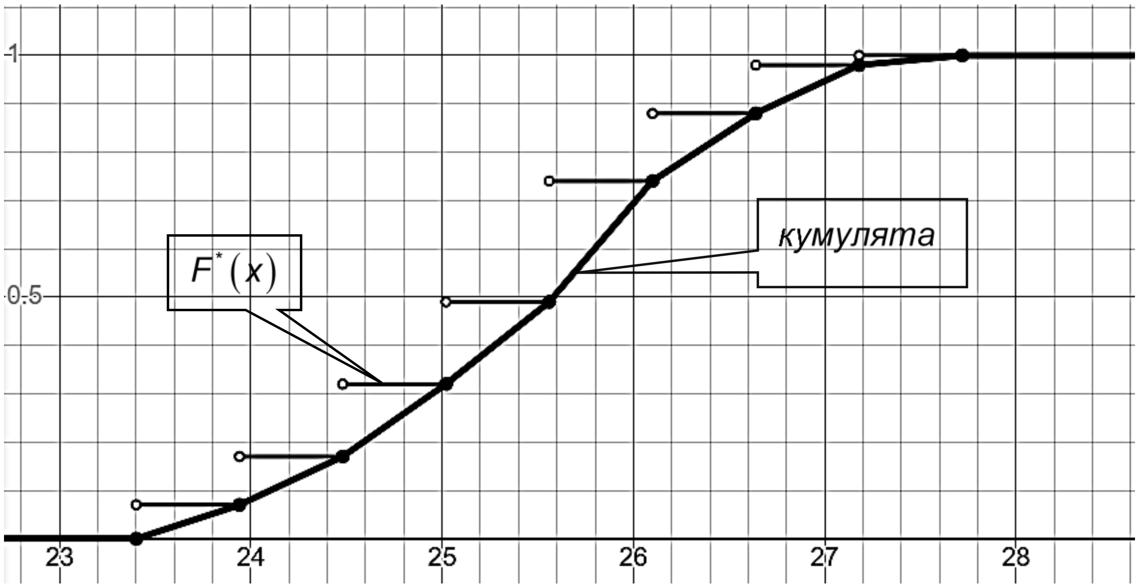
$$F^*(26,64)=\frac{74+14}{100}=0,88;\qquad F^*(27,18)=\frac{88+10}{100}=0,98;$$

$$F^*(27,72)=\frac{98+2}{100}=1,00.$$

Таким образом, получаем

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 23,4;\\ 0,07 & \text{при} \quad 23,4<x\le 23,94;\\ 0,17 & \text{при} \quad 23,94<x\le 24,48;\\ 0,32 & \text{при} \quad 24,48<x\le 25,02;\\ 0,49 & \text{при} \quad 25,02<x\le 25,56;\\ 0,74 & \text{при} \quad 25,56<x\le 26,1;\\ 0,88 & \text{при} \quad 26,1<x\le 26,64;\\ 0,98 & \text{при} \quad 26,64<x\le 27,18;\\ 1,00 & \text{при} \quad 27,18<x\le 27,72;\\ 1,00 & \text{при} \quad x>27,72.\end{cases}$$

Строим график эмпирической функции $F^*(x)$ или кумулятивной кривой выборки. Плавную кривую (или ломаную), «окаймляющую» снизу график $F^*(x)$, называют *кумулятой*.



4. Вычислим основные числовые оценки признака $X$. Найдем

выборочное среднее $\bar{x}_в = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$,

среднее по квадратам $\overline{x^2} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n}$,

выборочную дисперсию $D_в = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_в\right)^2$,

среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$,

исправленную выборочную дисперсию $s^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_в$,

исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2}$.

Обозначим $x_i$ середины интервалов $\left(a_i;\ a_{i+1}\right)$, $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$

Составим расчетную таблицу.

| $a_i - a_{i+1}$ | $x_i$ | $n_i$ | $x_i n_i$ | $x_i^2 n_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 23,40-23,94 | 23,67 | 7 | 165,69 | 3921,8823 |
| 23,94-24,48 | 24,21 | 10 | 242,10 | 5861,2410 |
| 24,48-25,02 | 24,75 | 15 | 371,25 | 9188,4375 |
| 25,02-25,56 | 25,29 | 17 | 429,93 | 10872,9297 |
| 25,56-26,10 | 25,83 | 25 | 645,75 | 16679,7225 |
| 26,10-26,64 | 26,37 | 14 | 369,18 | 9735,2766 |
| 26,64-27,18 | 26,91 | 10 | 269,10 | 7241,481 |
| 27,18-27.72 | 27,45 | 2 | 54,90 | 1507,005 |
| $\sum$ | | 100 | 2547,9 | 65007,9756 |

$\bar{x}_в = \dfrac{2547,9}{100} = 25,479 = 25,48$; $\overline{x^2} = 650,079756 = 650,0798$;

$D_в = 650,0798 - 25,48^2 = 650,0798 - 649,2304 = 0,8494$;

$\sigma_в = \sqrt{0,8494} = 0,9216 = 0,92$; $s^2 = \dfrac{100}{99} \cdot 0,8494 = 0,858 = 0,86$

$s = 0,93$.

5. В пользу того, что признак $X$ имеет нормальное распределение, говорят следующие факты:

1) полигон относительных частот напоминает кривую Гаусса;

2) оценивая теоретическое математическое ожидание $a$ величиной $\bar{x}_в = 25,48$, а теоретическое среднеквадратическое отклонение $\sigma$ величиной $s = 0,93$, получим

$$\left(a-3\sigma;\ a+3\sigma\right)\cong(\bar{x}_в-3s;\ \bar{x}_в+3s)=$$
$$=\left(25,48-3\cdot 0,93;\ 25,48-3\cdot 0,93\right)=\left(22,69;\ 28,27\right).$$

Как видим, исходные данные попадают в этот интервал, что согласуется с «правилом $3\sigma$».

В силу этого при уровне значимости $\alpha=0,05$ выдвинем и проверим гипотезу о том, что рассматриваемый признак $X$ имеет нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{0,93\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-25,48)^2}{1,73}}.$$

По критерию Пирсона надо сравнивать эмпирические и теоретические частоты вариант. Эмпирические частоты $n_i$ даны. Теоретические частоты $n_i'$ найдем по формуле

$$n_i'=n\cdot P_i=100\cdot P\left(a_i<X<a_{i+1}\right)=100\left(\Phi\left(\frac{a_{i+1}-\bar{x}_в}{s}\right)-\Phi\left(\frac{a_i-\bar{x}_в}{s}\right)\right),$$

$a_i$ – концы интервалов, значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ найдем по таблице приложение 2.

Составим вспомогательную таблицу:

| $a_i$ | $u_i=\frac{a_i-\bar{x}}{s}$ | $\Phi(u_i)$ | $\Phi(u_{i+1})-\Phi(u_i)=P_i$ |
|---|---|---|---|
| 23,40 | -2,24 | -0,4875 | $P_1$=0,0360 |
| 23,94 | -1,66 | -0,4515 | $P_2$=0,0917 |
| 24,48 | -1,08 | -0,3598 | $P_3$=0,1719 |
| 25,02 | -0,49 | -0,1879 | $P_4$=0,2238 |
| 25,56 | 0,09 | 0,0359 | $P_5$=0,2129 |
| 26,10 | 0,67 | 0,2488 | $P_6$=0,1456 |
| 26,64 | 1,25 | 0,3944 | $P_7$=0,072 |
| 27,18 | 1,83 | 0,4664 | $P_8$=0,0256 |
| 27,72 | 2,41 | 0,4920 | $\sum$ =0,9795 |

Статистика $\chi^2=\sum_i\frac{\left(n_i-n_i'\right)^2}{n_i'}$ имеет распределение «хи-квадрат» лишь при $n\to\infty$, поэтому необходимо, чтобы в каждом интервале было не менее 5 значений. Если $n_i<5$, то имеет смысл объединить соседние интервалы.

В данном случае объединим седьмой и восьмой интервалы, тогда число интервалов $k=7$.

| №№ | $n_i$ | $100P_i = n'_i$ | $n_i - n'_i$ | $(n_i - n'_i)^2$ | $\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 3,60 | 3,40 | 11,56 | 3,211 |
| 2 | 10 | 9,17 | 0,83 | 0,6889 | 0,075 |
| 3 | 15 | 17,19 | –2,19 | 4,7961 | 0,279 |
| 4 | 17 | 22,38 | –5,38 | 28,9444 | 1,293 |
| 5 | 25 | 21,29 | 3,71 | 13,7641 | 0,647 |
| 6 | 14 | 14,56 | –0,56 | 0,3136 | 0,022 |
| 7 | $\left.\begin{matrix}10\\2\end{matrix}\right\}12$ | $\left.\begin{matrix}7,20\\2,56\end{matrix}\right\}9,76$ | $\left.\begin{matrix}2,80\\-0,56\end{matrix}\right\}2,24$ | 5,0176 | 0,514 |
| $\sum$ | 100 | 97,95 | | | $\chi^2_{набл} = 6,041$ |

Определим число степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где $k = 7$ – число интервалов с учетом их объединения, $r = 2$ – число параметров нормального распределения, вычисленных по выборке ($a$ и $\sigma^2$). По таблице «*Критические точки распределения* $\chi^2$» (приложение 4) найдем

$$\chi^2_{крит}(\alpha,\ \nu = k - 3) = \chi^2_{крит}(0,05;\ 7 - 3) = \chi^2_{крит}(0,05;4) = 9,488.$$

Так как $\chi^2_{набл} = 6,041 < \chi^2_{крит}$, то с вероятностью 95% можно утверждать, что признак $X$ распределен нормально и его функция плотности имеет вид $f(x) = \frac{1}{0,93\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-25,48)^2}{1,73}}$.

По *критерию Колмогорова* надо сравнить

$$\lambda_{опыт} = \sqrt{n} \cdot \max_i \left| F^*(x_i) - F(x_i) \right| \text{ и } \lambda_{крит}(0,05) = 1,358,$$

где $F(x)$ – теоретическая функция распределения.

Для нормального распределения $F(x_i) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_в}{s}\right)$, в качестве $x_i$ возьмем $a_i$, $i = \overline{1,9}$.

| $a_i$ | $F^*(a_i)$ | $0,5 + \Phi(u_i)$ | $F(a_i)$ | $\left\lvert F^*(a_i) - F(a_i) \right\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 23,40 | 0 | 0,5-0,4875 | 0,0125 | 0,0125 |
| 23,94 | 0,07 | 0,5-0,4515 | 0,0485 | 0,0215 |
| 24,48 | 0,17 | 0,5-0,3598 | 0,1402 | 0,0298 |
| 25,02 | 0,32 | 0,5-0,1879 | 0,3121 | 0,0079 |
| 25,56 | 0,49 | 0,5+0,0359 | 0,5359 | 0,0459* |
| 26,10 | 0,74 | 0,5+0,2488 | 0,7488 | 0,0088 |
| 26,64 | 0,88 | 0,5+0,3944 | 0,8944 | 0,0144 |
| 27,18 | 0,98 | 0,5+0,4664 | 0,9664 | 0,0136 |
| 27,72 | 1,00 | 0,5+0,4920 | 0,9920 | 0,0080 |

$$\max\left|F^*(a_i)-F(a_i)\right|=0{,}0459.$$

$$\lambda_{опыт}=\sqrt{100}\cdot 0{,}0459=0{,}459<\lambda_{крит}=1{,}358.$$

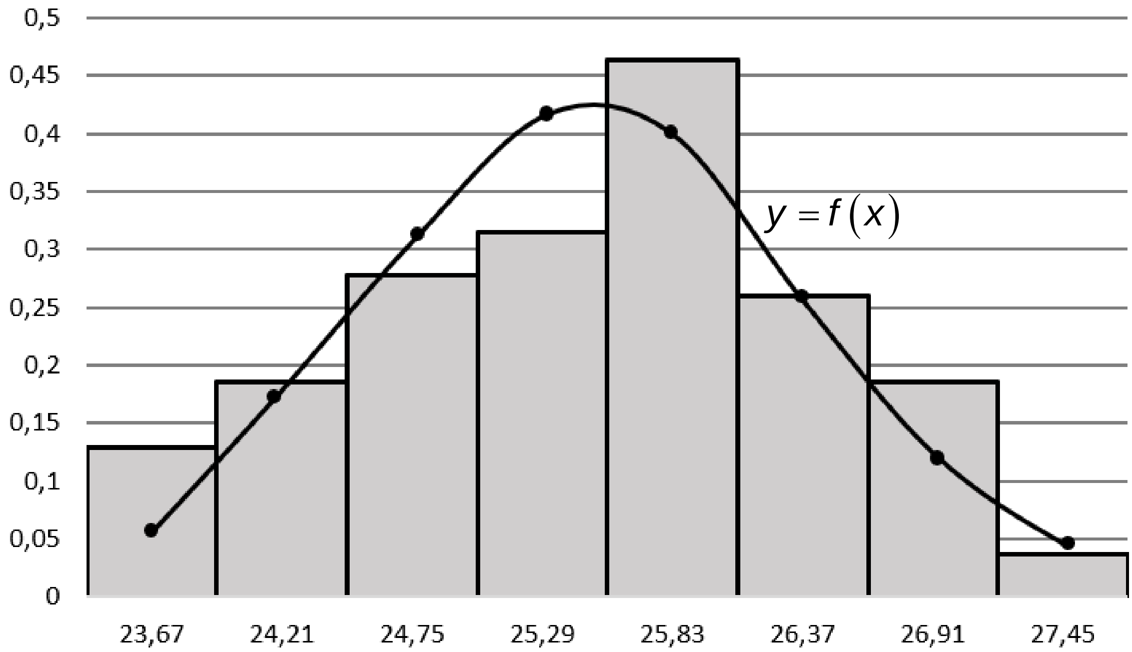
Т.е. гипотеза $H_0$ о нормальном распределении признака $X$ не отвергается.

6. Плотность нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{0{,}93\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-25{,}48)^2}{2\cdot 0{,}93^2}}=0{,}43\exp\left(-0{,}58\cdot(x-25{,}48)^2\right).$$

| $x_i$ | 23,67 | 24,21 | 24,75 | 25,29 | 25,83 | 26,37 | 26,91 | 27,45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0,064 | 0,169 | 0,324 | 0,421 | 0,401 | 0,272 | 0,131 | 0,045 |

Построим график функции $f(x)$ на гистограмме относительных частот.




**7.** Если СВ $X$ генеральной совокупности распределена нормально, то с надежностью $\gamma=0{,}95$ можно утверждать, что математическое ожидание $a$ СВ $X$ покрывается доверительным интервалом

$$(\bar{x}_в-\delta;\ \bar{x}_в+\delta)$$

где $\delta=\frac{s}{\sqrt{n}}t_\gamma$ – точность оценки.

В нашей задаче $n=100$, $s=0{,}93$, $t_\gamma=t(\gamma,n)=t(0{,}95;\ 100)=1{,}984$. (приложение 5)

Тогда $\delta=\frac{0{,}93}{10}\cdot 1{,}984=0{,}1845=0{,}18$. Следовательно

$$\bar{x}_в-\delta=25{,}48-0{,}18=25{,}30;$$
$$\bar{x}_в+\delta=25{,}48+0{,}18=25{,}66.$$

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания

$$a \in (25{,}30;\ 25{,}66).$$

Причем $P(25{,}30 < a < 25{,}66) = 0{,}95.$

Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение $\sigma$ с надежностью $\gamma = 0.95$ найдем по формуле

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

где $q = q(\gamma; n) = q(0{,}95; 100) = 0{,}143$ (приложение 6).

Точность оценки

$$\delta = s \cdot q = 0{,}93 \cdot 0{,}143 = 0{,}13.$$

Следовательно

$$s - \delta = 0{,}93 - 0{,}13 = 0{,}80;$$
$$s + \delta = 0{,}93 + 0{,}13 = 1{,}06,$$

Таким образом, доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

$$\sigma \in (0{,}80;\ 1{,}06)$$

Причем, $P(0{,}80 < \sigma < 1{,}06) = 0{,}95.$

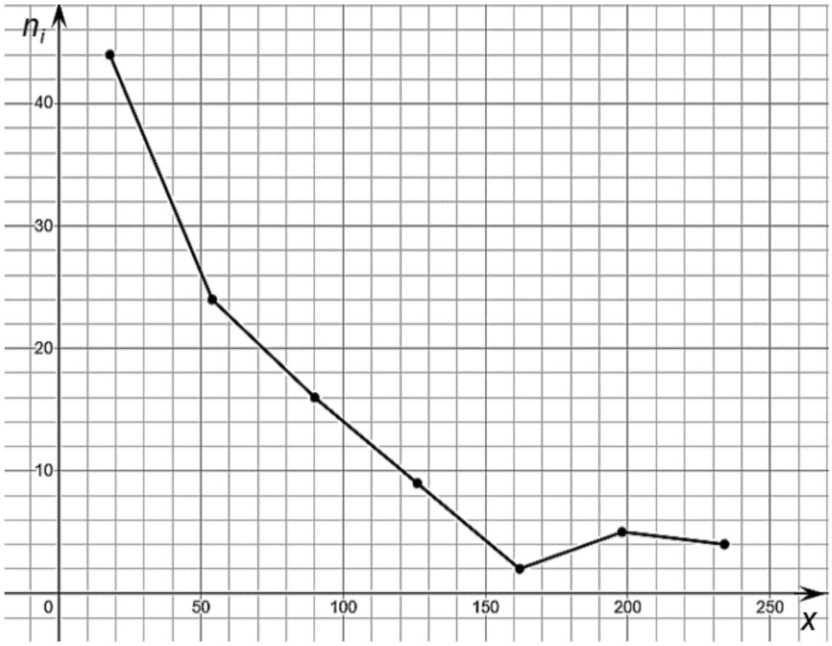
***Задание 3.*** Дано интервальное распределение частот некоторой совокупности относительно признака $X$:

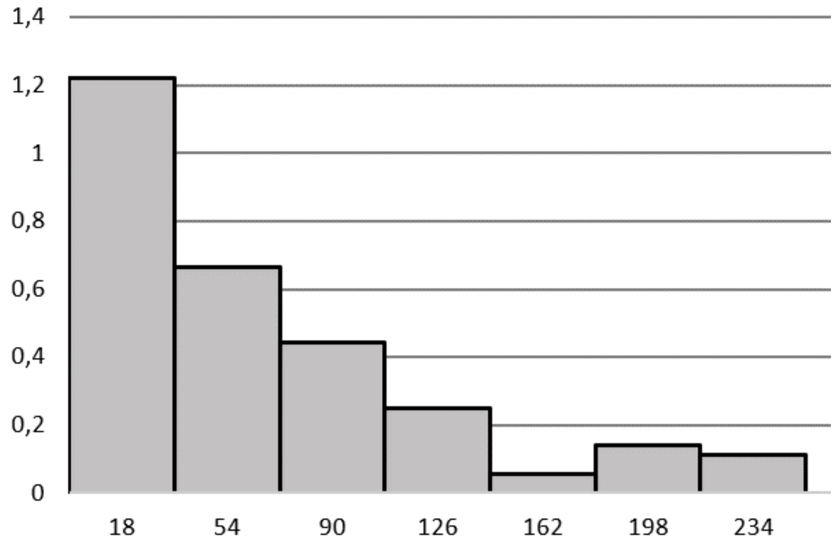
| *Интервалы* | 0-36 | 36-72 | 72-108 | 108-144 | 144-180 | 180-216 | 216-252 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 44 | 24 | 16 | 9 | 2 | 5 | 4 |

Составим таблицу, в которой найдем плотность частоты $\frac{n_i}{h}$, середины интервалов $x_i$, произведения $x_i n_i$, $x_i^2 n_i$ для построения полигона и гистограммы частот и нахождения числовых характеристик выборки. Длина каждого интервала $h = 36$.

| $a_i - a_{i+1}$ | $x_i$ | $n_i$ | $\frac{n_i}{h}$ | $x_i n_i$ | $x_i^2 n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-36 | 18 | 44 | 1,22 | 792 | 14256 |
| 36-72 | 54 | 24 | 0,67 | 1296 | 69984 |
| 72-108 | 90 | 16 | 0,44 | 1440 | 129600 |
| 108-144 | 126 | 9 | 0,25 | 1134 | 142884 |
| 144-180 | 162 | 2 | 0,06 | 324 | 52488 |
| 180-216 | 198 | 5 | 0,14 | 990 | 196020 |
| 216-252 | 234 | 4 | 0,11 | 936 | 219024 |
| $\sum$ | | $n = 104$ | | 6912 | 824256 |

Постоим полигон и гистограмму частот.




Найдем значения эмпирической функции $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где $n_x$ – накопленная частота. В качестве аргумента функции будем рассматривать концы интервалов:

$$F^*(0) = \frac{0}{100} = 0; \qquad F^*(36) = \frac{44}{104} = 0,42;$$

$$F^*(72) = \frac{44+24}{104} = 0,65; \qquad F^*(108) = \frac{68+16}{100} = 0,81;$$

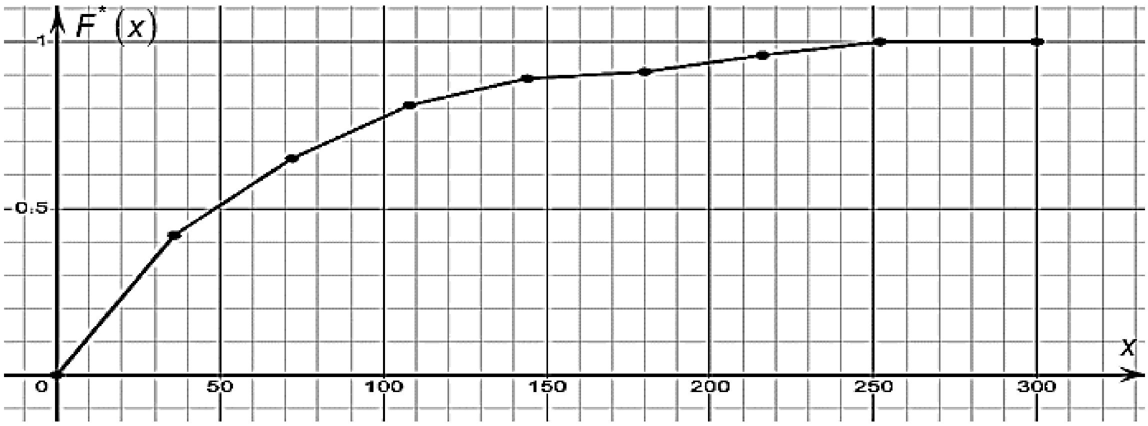
$$F^*(144) = \frac{84+9}{104} = 0,89; \qquad F^*(180) = \frac{93+2}{104} = 0,91;$$

$$F^*(216) = \frac{95+5}{104} = 0,96; \qquad F^*(252) = \frac{100+4}{104} = 1,00.$$

Таким образом, получаем

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0; \\ 0{,}42 & при \quad 0 < x \le 36; \\ 0{,}65 & при \quad 36 < x \le 72; \\ 0{,}81 & при \quad 72 < x \le 108; \\ 0{,}89 & при \quad 108 < x \le 144; \\ 0{,}91 & при \quad 144 < x \le 180; \\ 0{,}96 & при \quad 180 < x \le 216; \\ 1{,}00 & при \quad 216 < x \le 252; \\ 1{,}00 & при \quad x > 252. \end{cases}$$

Построим график эмпирической функции $F^*(x)$.




Вычислим основные числовые характеристики выборки.

$$\bar{x}_в = \frac{6912}{104} = 66{,}46; \qquad \overline{x^2} = \frac{824256}{104} = 7925{,}54;$$

$$D_в = 7925{,}54 - 66{,}46^2 = 7925{,}54 - 4417{,}14 = 3508{,}40;$$

$$\sigma_в = 59{,}23.$$

По виду полигона частот, гистограммы, $F^*(x)$ выдвигаем гипотезу о показательном распределении признака $X$ в генеральной совокупности. Признаком этого распределения является совпадение:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

В данном случае можно считать, что $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$ достаточно близки и $\lambda = \dfrac{1}{\bar{x}_в} = 0{,}015$. Тогда плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & если \quad x < 0, \\ 0{,}015e^{-0{,}015x}, & если \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Теоретическая функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & если \quad x<0,\\ 1-e^{-0,015x}, & если \quad x\ge 0.\end{cases}$$

Подтвердим или опровергнем гипотезу $H_0$ – генеральная совокупность признака $X$ подчинена показательному закону распределения.

а) *Критерий Пирсона.* Найдем теоретические (выравнивающие) частоты

$$n_i'=nP_i=n\cdot P\left(a_i<X<a_{i+1}\right)=n\cdot\left(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda a_{i+1}}\right).$$

Сравним

$$\chi^2_{набл}=\sum\frac{\left(n_i-n_i'\right)^2}{n_i'} \text{ и}$$

$$\chi^2_{крит}\left(\alpha,\ \nu=k-2\right)=\chi^2_{крит}\left(0{,}05;\ 5-2\right)=\chi^2_{крит}\left(0{,}05;\ 3\right)=7{,}815.$$

| *Интер-валы* | $P_i=e^{-0,015a_i}-e^{-0,015a_{i+1}}$ | $n_i'=104\cdot P_i$ | $n_i$ | $\lvert n_i-n_i'\rvert$ | $\frac{\left(n_i-n_i'\right)^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-36 | 1-0,5827 = 0,4173 | 43,40 | 44 | 0,60 | 0,008 |
| 36-72 | 0,5827 – 0,3396 = 0,2431 | 25,28 | 24 | 1,28 | 0,065 |
| 72-108 | 0,3396 – 0,1979 = 0,1417 | 14,74 | 16 | 1,26 | 0,108 |
| 108-144 | 0,1979 – 0,1153 = 0,0826 | $\left.\begin{matrix}8{,}59\\5{,}00\end{matrix}\right\}13{,}59$ | $\left.\begin{matrix}9\\2\end{matrix}\right\}11$ | 2,59 | 0,494 |
| 144-180 | 0,1153 – 0,0672 = 0,0481 | | | | |
| 180-216 | 0,0672 – 0,0392 = 0,028 | $\left.\begin{matrix}2{,}91\\1{,}71\end{matrix}\right\}4{,}62$ | $\left.\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right\}9$ | 4,38 | 4,152 |
| 216-252 | 0,0392 – 0,0228 = 0,0164 | | | | |
| $\sum$ | 0,9772 | | 104 | | $\chi^2_{набл}=4{,}827$ |

Т.к. $\chi^2_{набл}<\chi^2_{крит}$, то гипотеза $H_0$ не отвергается.

б) *Критерий Колмогорова*

Сравним

$$\lambda_{опыт}=\sqrt{n}\cdot\max\left|F^*\left(a_i\right)-F\left(a_i\right)\right| \text{ с } \lambda_{крит}\left(\alpha\right)=\lambda_{крит}\left(0{,}05\right)=1{,}358.$$

$n=104,\ F\left(a_i\right)=1-e^{-0,015a_i},\ i=\overline{0;8}$. Составим таблицу:

| $a_i$ | $F^*(a_i)$ | $F(a_i)$ | $\lvert F^*(a_i)-F(a_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 36 | 0,423 | 0,417 | 0,006 |
| 72 | 0,654 | 0,660 | 0,006 |
| 108 | 0,808 | 0,802 | 0,006 |
| 144 | 0,894 | 0,885 | 0,009 |
| 180 | 0,913 | 0,933 | 0,020 |
| 216 | 0,962 | 0,961 | 0,001 |
| 252 | 1,000 | 0,977 | 0,023 |

$\max\limits_i \lvert F^*(a_i)-F(a_i)\rvert = 0{,}023, \quad \lambda_{опыт} = \sqrt{104}\cdot 0{,}023 = 0{,}235, \quad \lambda_{опыт} < \lambda_{крит}$, следовательно, гипотеза $H_0$ не отвергается.

***Задание 4.*** Значения признаков $X$ и $Y$ заданы корреляционной таблицей объема $n = 65$.

| X \ Y | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | $m_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 120-140 | | | | | 3 | 4 | 7 |
| 140-160 | | | | 2 | 5 | 2 | 9 |
| 160-180 | | | 3 | 6 | 3 | | 12 |
| 180-200 | | 5 | 9 | 8 | | | 22 |
| 200-220 | 1 | 4 | 2 | | | | 7 |
| 220-240 | 3 | 2 | | | | | 5 |
| 240-260 | 3 | | | | | | 3 |
| $m_y$ | 7 | 11 | 14 | 16 | 11 | 6 | 65 |

Уравнение прямой регрессии $Y$ на $X$ имеет вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}).$$

Уравнение прямой регрессии $X$ на $Y$ имеет вид:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_в \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}).$$

Найдем числовые характеристики составляющих признаков $X$ и $Y$. В качестве $x_i$ и $y_i$ будем рассматривать середины соответствующих интервалов. Предварительные вычисления внесем в таблицу.

| Y / X | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | $m_x$ | $xm_x$ | $x^2m_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 130 | | | | | 3 | 4 | 7 | 910 | 118300 |
| 150 | | | | 2 | 5 | 2 | 9 | 1350 | 202500 |
| 170 | | | 3 | 6 | 3 | | 12 | 2040 | 346800 |
| 190 | | 5 | 9 | 8 | | | 22 | 4180 | 794200 |
| 210 | 1 | 4 | 2 | | | | 7 | 1470 | 308700 |
| 230 | 3 | 2 | | | | | 5 | 1150 | 264500 |
| 250 | 3 | | | | | | 3 | 750 | 187500 |
| $m_y$ | 7 | 11 | 14 | 16 | 11 | 6 | 65 | 11850 | 2222500 |
| $xm_x$ | 105 | 275 | 490 | 720 | 605 | 390 | 2585 | | |
| $x^2m_x$ | 1575 | 6875 | 17150 | 32400 | 33275 | 25350 | 116625 | | |

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,,\ \bar{x} = \frac{11850}{65} = 182{,}31;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,,\ \bar{y} = \frac{2585}{65} = 39{,}77;$$

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2,\ D_x = \frac{2222500}{65} - 182{,}31^2 = 955{,}37;$$

$$\sigma_x = \sqrt{955{,}37} = 30{,}91;$$

$$D_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\bar{y}\right)^2,\ D_y = \frac{116625}{65} - 39{,}77^2 = 212{,}58;\ \sigma_y = \sqrt{212{,}58} = 14{,}58;$$

$$\overline{xy} = 130\cdot\left(55\cdot 3 + 65\cdot 4\right) + 150\cdot\left(45\cdot 2 + 55\cdot 5 + 65\cdot 2\right) +$$

$$+170\cdot\left(35\cdot 3 + 45\cdot 6 + 55\cdot 3\right) + 190\cdot\left(25\cdot 5 + 35\cdot 9 + 45\cdot 8\right) +$$

$$+210\cdot\left(15\cdot 1 + 25\cdot 4 + 35\cdot 2\right) + 230\cdot\left(15\cdot 3 + 25\cdot 2\right) + 250\cdot 3 = 445250.$$

$$r_в = r_{xy} = \frac{\overline{xy} - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y},\ r_{xy} = \frac{445250 - 65\cdot 182{,}31\cdot 39{,}77}{65\cdot 30{,}91\cdot 14{,}58} = -0{,}88.$$

Близость $|r_в| = 0{,}88$ к 1 говорит о достаточно тесной линейной зависимости между СВ *X* и *Y*; т.к. с возрастанием значений одной случайной величины значения другой СВ убывают, то $r_в < 0$. Оценим значимость выборочного коэффициента корреляции $r_в = -0{,}88$ для генеральной совокупности $(X;Y)$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Выдвигаем нулевую и альтернативную гипотезы:

*H₀*: $r_{ген} = 0$ (в генеральной совокупности нет линейной зависимости).

$H_1$: $r_{ген} \neq 0$ (в генеральной совокупности есть линейная зависимость между СВ $X$ и $Y$).

Для проверки гипотезы на уровне значимости $\alpha$, равном 0,05 вычислим статистику $t_{набл} = \dfrac{|r_в|}{\sigma_r}$, где среднеквадратическую ошибку коэффициента корреляции находят по формуле

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,88^2}{65-2}} = 0,060.$$

Отсюда $t_{набл} = \dfrac{0,88}{0,060} = 14,71$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $\nu = n-2 = 65-2 = 63$ по таблице распределения Стьюдента находим $t_{крит} = 2$. Так как $t_{набл} > t_{крит}$, то гипотезу $H_0$ отвергаем и принимаем гипотезу $H_1$. Следовательно $r_в = -0,88$ – значимый коэффициент и с вероятностью 95% можно говорить о существенно тесной связи между признаками $X$ и $Y$.

Найдем уравнения прямых регрессии $Y$ на $X$ и $X$ на $Y$.

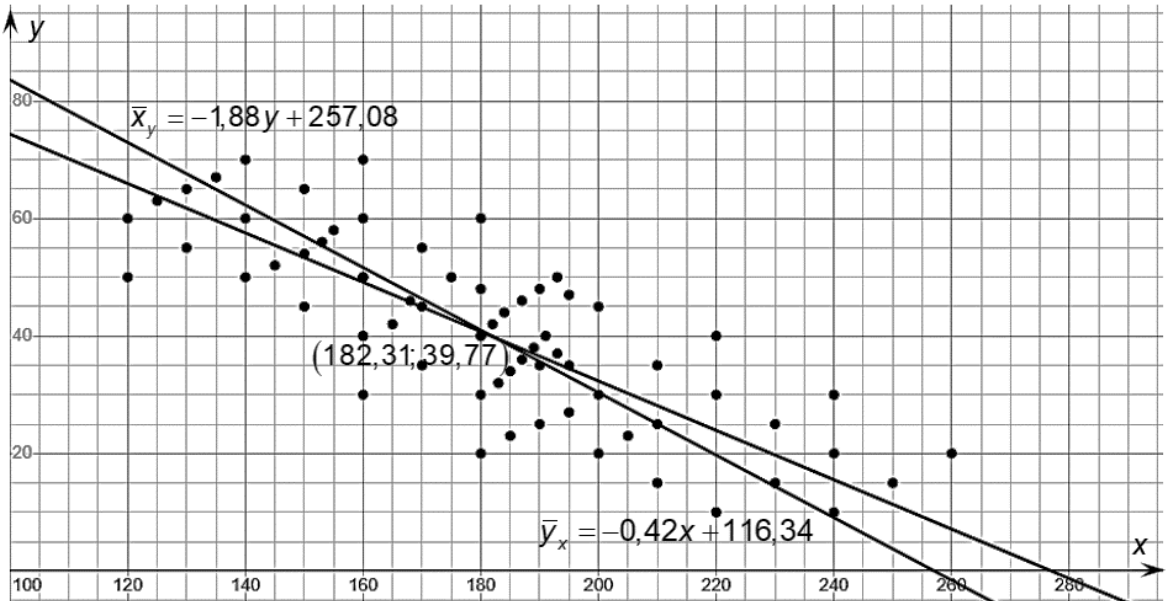
$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x})$$

$$\bar{y}_x - 39,77 = -0,88 \cdot \frac{14,58}{30,91} \cdot (x - 182,31) \Rightarrow \bar{y}_x = -0,42\,x + 116,34.$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_в \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - \bar{y}),$$

$$\bar{x}_y - 182,31 = -0,88 \cdot \frac{30,91}{14,58} \cdot (y - 39,77) \Rightarrow \bar{x}_y = -1,88y + 257,08.$$

На плоскости $xOy$ построим графики полученных прямых и значения $(X;Y)$ из корреляционной таблицы.



## *Статистические таблицы*

**_Приложение 1._** Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

| x | С о т ы е   д о л и | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2331 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 | 0001 |

При $x \geq 4$ функция принимает значения $\varphi(x)=0$.

***Приложение 2.*** Таблица значений функции Лапласа $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,45 | 0,1736 | 0,90 | 0,3159 | 1,35 | 0,4115 | 1,80 | 0,4641 | 2,50 | 0,4938 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,46 | 0,1772 | 0,91 | 0,3186 | 1,36 | 0,4131 | 1,81 | 0,4649 | 2,52 | 0,4941 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,47 | 0,1808 | 0,92 | 0,3212 | 1,37 | 0,4147 | 1,82 | 0,4656 | 2,54 | 0,4945 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,48 | 0,1844 | 0,93 | 0,3238 | 1,38 | 0,4162 | 1,83 | 0,4664 | 2,56 | 0,4948 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,49 | 0,1879 | 0,94 | 0,3264 | 1,39 | 0,4177 | 1,84 | 0,4671 | 2,58 | 0,4951 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,50 | 0,1915 | 0,95 | 0,3289 | 1,40 | 0,4192 | 1,85 | 0,4678 | 2,60 | 0,4953 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,51 | 0,1950 | 0,96 | 0,3315 | 1,41 | 0,4207 | 1,86 | 0,4686 | 2,62 | 0,4956 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,52 | 0,1985 | 0,97 | 0,3340 | 1,42 | 0,4222 | 1,87 | 0,4693 | 2,64 | 0,4959 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,53 | 0,2019 | 0,98 | 0,3365 | 1,43 | 0,4236 | 1,88 | 0,4699 | 2,66 | 0,4961 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,54 | 0,2054 | 0,99 | 0,3389 | 1,44 | 0,4251 | 1,89 | 0,4706 | 2,68 | 0,4963 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,55 | 0,2088 | 1,00 | 0,3413 | 1,45 | 0,4265 | 1,90 | 0,4713 | 2,70 | 0,4965 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,56 | 0,2123 | 1,01 | 0,3438 | 1,46 | 0,4279 | 1,91 | 0,4719 | 2,72 | 0,4967 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,57 | 0,2157 | 1,02 | 0,3461 | 1,47 | 0,4292 | 1,92 | 0,4726 | 2,74 | 0,4969 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,58 | 0,2190 | 1,03 | 0,3485 | 1,48 | 0,4306 | 1,93 | 0,4732 | 2,76 | 0,4971 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,59 | 0,2224 | 1,04 | 0,3508 | 1,49 | 0,4319 | 1,94 | 0,4738 | 2,78 | 0,4973 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,60 | 0,2257 | 1,05 | 0,3531 | 1,50 | 0,4332 | 1,95 | 0,4744 | 2,80 | 0,4974 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,61 | 0,2291 | 1,06 | 0,3554 | 1,51 | 0,4345 | 1,96 | 0,4750 | 2,82 | 0,4976 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,62 | 0,2324 | 1,07 | 0,3577 | 1,52 | 0,4357 | 1,97 | 0,4756 | 2,84 | 0,4977 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,63 | 0,2357 | 1,08 | 0,3599 | 1,53 | 0,4370 | 1,98 | 0,4761 | 2,86 | 0,4979 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,64 | 0,2389 | 1,09 | 0,3621 | 1,54 | 0,4382 | 1,99 | 0,4767 | 2,88 | 0,4980 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,65 | 0,2422 | 1,10 | 0,3643 | 1,55 | 0,4394 | 2,00 | 0,4772 | 2,90 | 0,4981 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,66 | 0,2454 | 1,11 | 0,3665 | 1,56 | 0,4406 | 2,02 | 0,4783 | 2,92 | 0,4982 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,67 | 0,2486 | 1,12 | 0,3686 | 1,57 | 0,4418 | 2,04 | 0,4793 | 2,94 | 0,4984 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,68 | 0,2517 | 1,13 | 0,3708 | 1,58 | 0,4429 | 2,06 | 0,4803 | 2,96 | 0,4985 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,69 | 0,2549 | 1,14 | 0,3729 | 1,59 | 0,4441 | 2,08 | 0,4812 | 2,98 | 0,4986 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,70 | 0,2580 | 1,15 | 0,3749 | 1,60 | 0,4452 | 2,10 | 0,4821 | 3,00 | 0,4987 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,71 | 0,2611 | 1,16 | 0,3770 | 1,61 | 0,4463 | 2,12 | 0,4830 | 3,20 | 0,4993 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,72 | 0,2642 | 1,17 | 0,3790 | 1,62 | 0,4474 | 2,14 | 0,4838 | | 0,4997 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,73 | 0,2673 | 1,18 | 0,3810 | 1,63 | 0,4484 | 2,16 | 0,4846 | 3,40 | 0,4998 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,74 | 0,2703 | 1,19 | 0,3830 | 1,64 | 0,4495 | 2,18 | 0,4854 | 3,60 | 0,4999 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,75 | 0,2734 | 1,20 | 0,3849 | 1,65 | 0,4515 | 2,20 | 0,4861 | 3,80 | 0,4999 |
| 0,31 | 0,1217 | 0,76 | 0,2764 | 1,21 | 0,3869 | 1,66 | 0,4505 | 2,22 | 0,4868 | 4,00 | 0,5000 |
| 0,32 | 0,1255 | 0,77 | 0,2794 | 1,22 | 0,3883 | 1,67 | 0,4525 | 2,24 | 0,4875 | 4,50 | 0,5000 |
| 0,33 | 0,1293 | 0,78 | 0,2823 | 1,23 | 0,3907 | 1,68 | 0,4535 | 2,26 | 0,4881 | 5,00 | |
| 0,34 | 0,1331 | 0,79 | 0,2852 | 1,24 | 0,3925 | 1,69 | 0,4545 | 2,28 | 0,4887 | | ↓ |
| 0,35 | 0,1368 | 0,80 | 0,2881 | 1,25 | 0,3944 | 1,70 | 0,4554 | 2,30 | 0,4893 | ↓ | 0,5 |
| 0,36 | 0,1406 | 0,81 | 0,2910 | 1,26 | 0,3962 | 1,71 | 0,4564 | 2,32 | 0,4898 | $+\infty$ | |
| 0,37 | 0,1443 | 0,82 | 0,2939 | 1,27 | 0,3980 | 1,72 | 0,4573 | 2,34 | 0,4904 | | |
| 0,38 | 0,1480 | 0,83 | 0,2967 | 1,28 | 0,3997 | 1,73 | 0,4582 | 2,36 | 0,4909 | | |
| 0,39 | 0,1517 | 0,84 | 0,2995 | 1,29 | 0,4015 | 1,74 | 0,4591 | 2,38 | 0,4913 | | |
| 0,40 | 0,1554 | 0,85 | 0,3023 | 1,30 | 0,4032 | 1,75 | 0,4599 | 2,40 | 0,4918 | | |
| 0,41 | 0,1591 | 0,86 | 0,3051 | 1,31 | 0,4049 | 1,76 | 0,4608 | 2,42 | 0,4922 | | |
| 0,42 | 0,1628 | 0,87 | 0,3078 | 1,32 | 0,4066 | 1,77 | 0,4616 | 2,44 | 0,4927 | | |
| 0,43 | 0,1654 | 0,88 | 0,3106 | 1,33 | 0,4082 | 1,78 | 0,4625 | 2,46 | 0,4931 | | |
| 0,44 | 0,1700 | 0,89 | 0,3133 | 1,34 | 0,4099 | 1,79 | 0,4633 | 2,48 | 0,4934 | | |

## *Приложение 3. Распределение Стьюдента*

(двусторонняя критическая область)

*$\alpha$ – уровень значимости, $\gamma = 1 - \alpha$ – доверительная вероятность,*

*$\nu$ –число степеней свободы, $n = \nu + 1$ – объем выборки.*

| $\alpha$<br>$\gamma$<br>$\nu \downarrow$ | 0,10<br>0,90 | 0,05<br>0,95 | 0,02<br>0,98 | 0,01<br>0,99 | 0,002<br>0,998 | 0,001<br>0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,314 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,3 | 636,6 |
| 2 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,33 | 31,60 |
| 3 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,22 | 12,94 |
| 4 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 |
| 5 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 5,032 | 5,893 | 6,859 |
| 6 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 |
| 7 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,405 |
| 8 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 |
| 9 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 |
| 10 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 |
| 11 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 | 4,437 |
| 12 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 | 4,318 |
| 13 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 | 4,221 |
| 14 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 | 4,140 |
| 15 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 | 4,073 |
| 16 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 | 4,015 |
| 17 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 | 3,965 |
| 18 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,611 | 3,922 |
| 19 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 | 3,883 |
| 20 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,562 | 3,850 |
| 21 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 | 3,819 |
| 22 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 | 3,792 |
| 23 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 | 3,767 |
| 24 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 | 3,745 |
| 25 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 | 3,725 |
| 26 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 | 3,707 |
| 27 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 | 3,690 |
| 28 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 | 3,674 |
| 29 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 | 3,659 |
| 30 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 | 3,646 |
| 40 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 | 3,551 |
| 50 | 1,676 | 2,009 | 2,403 | 2,678 | 3,262 | 3,495 |
| 60 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 | 3,460 |
| 80 | 1,664 | 1,990 | 2,374 | 2,639 | 3,195 | 3,415 |
| 100 | 1,660 | 1,984 | 2,365 | 2,626 | 3,174 | 3,389 |
| 200 | 1,653 | 1,972 | 2,345 | 2,601 | 3,131 | 3,339 |
| 300 | 1,648 | 1,965 | 2,334 | 2,586 | 3,106 | 3,310 |
| $\infty$ | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 | 3,291 |

***Приложение 4.*** Критические точки распределения $\chi^2$.
$\nu$ *- число степеней свободы,* $\alpha$ *- уровень значимости.*

| $\nu$ \ $\alpha$ | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,412 | 6,635 | 10,827 |
| 2 | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,824 | 9,210 | 13`,815 |
| 3 | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,837 | 11,345 | 16,266 |
| 4 | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,668 | 13,237 | 18,467 |
| 5 | 7,289 | 9,236 | 11,070 | 13,388 | 15,086 | 20,515 |
| 6 | 8,558 | 10,645 | 12,592 | 15,033 | 16,812 | 22,457 |
| 7 | 9,803 | 12,017 | 14,067 | 16,622 | 18,475 | 24,322 |
| 8 | 11,030 | 13,362 | 15,507 | 18,168 | 20,090 | 26,125 |
| 9 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19,679 | 21,666 | 27,877 |
| 10 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 21,161 | 23,209 | 29,588 |
| 11 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 22,618 | 24,795 | 31,264 |
| 12 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 24,054 | 24,217 | 32,909 |
| 13 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 25,472 | 27,688 | 34,528 |
| 14 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,783 | 29,141 | 36,123 |
| 15 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 28,259 | 30,578 | 37,697 |
| 16 | 20,465 | 23,542 | 26,296 | 29,633 | 32,000 | 39,252 |
| 17 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,995 | 32,409 | 40,790 |
| 18 | 22,760 | 25,989 | 28,869 | 32,346 | 34,805 | 42,312 |
| 19 | 23,900 | 27,204 | 30,144 | 33,678 | 36,191 | 43,820 |
| 20 | 25,038 | 28,412 | 31,410 | 35,020 | 37,566 | 45,315 |
| 21 | 26,171 | 29,615 | 32,671 | 36,343 | 38,932 | 46,797 |
| 22 | 27,301 | 30,813 | 33,924 | 37,659 | 40,289 | 48,268 |
| 23 | 28,429 | 32,007 | 35,172 | 38,968 | 41,638 | 49,728 |
| 24 | 29,553 | 33,196 | 36,415 | 40,270 | 42,980 | 51,179 |
| 25 | 30,675 | 34,382 | 37,652 | 41,566 | 42,314 | 52,620 |
| 26 | 31,795 | 35,563 | 38,885 | 42,856 | 45,642 | 54,052 |
| 27 | 32,912 | 36,741 | 40,113 | 44,140 | 46,963 | 55,476 |
| 28 | 34,027 | 37,916 | 41,337 | 45,419 | 48,278 | 56,893 |
| 29 | 35,139 | 39,087 | 42,557 | 46,693 | 49,588 | 58,302 |
| 30 | 36,250 | 40,256 | 43,773 | 47,962 | 50,892 | 59,703 |

## ***Приложение 5.*** Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma; n)$.

| $\gamma$ / $n$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 | $\gamma$ / $n$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2,78 | 4,60 | 8,61 | 20 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 6 | 2,57 | 4,03 | 6,86 | 25 | 2,064 | 2,797 | 3,745 |
| 7 | 2,45 | 3,71 | 5,96 | 30 | 2,045 | 2,756 | 3,659 |
| 8 | 2,37 | 3,50 | 5,41 | 35 | 2,032 | 2,720 | 3,600 |
| 9 | 2,31 | 3,36 | 5,04 | 40 | 2,023 | 2,708 | 3,558 |
| 10 | 2,26 | 3,25 | 4,78 | 45 | 2,016 | 2,692 | 3,527 |
| 11 | 2,23 | 3,17 | 4,59 | 50 | 2,009 | 2,679 | 3,502 |
| 12 | 2,20 | 3,11 | 4,44 | 60 | 2,001 | 2,662 | 3,464 |
| 13 | 2,18 | 3,06 | 4,32 | 70 | 1,996 | 2,649 | 3,439 |
| 14 | 2,16 | 3,01 | 4,22 | 80 | 1,991 | 2,640 | 3,418 |
| 15 | 2,15 | 2,98 | 4,14 | 90 | 1,987 | 2,633 | 3,403 |
| 16 | 2,13 | 2,95 | 4,07 | 100 | 1,984 | 2,627 | 3,392 |
| 17 | 2,12 | 2,92 | 4,02 | 120 | 1,980 | 2,617 | 3,374 |
| 18 | 2,11 | 2,90 | 3,97 | $\infty$ | 1,960 | 2,576 | 3,291 |
| 19 | 2,10 | 2,88 | 3,92 | | | | |

## ***Приложение 6.*** Таблица значений $q_\gamma = q(\gamma; n)$.

$(1-q)s < \sigma < (1+q)s$, если $q < 1$, $0 < \sigma < (1+q)s$, если $q > 1$

$$\left( s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \right)$$

| $\gamma$ / $n$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 | $\gamma$ / $n$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1,37 | 2,67 | 5,64 | 20 | 0,37 | 0,58 | 0,88 |
| 6 | 1,09 | 2,01 | 3,88 | 25 | 0,32 | 0,49 | 0,73 |
| 7 | 0,92 | 1,62 | 2,98 | 30 | 0,28 | 0,43 | 0,63 |
| 8 | 0,80 | 1,38 | 2,42 | 35 | 0,26 | 0,38 | 0,56 |
| 9 | 0,71 | 1,20 | 2,06 | 40 | 0,24 | 0,35 | 0,50 |
| 10 | 0,65 | 1,08 | 1,80 | 45 | 0,22 | 0,32 | 0,46 |
| 11 | 0,59 | 0,98 | 1,60 | 50 | 0,21 | 0,30 | 0,43 |
| 12 | 0,55 | 0,90 | 1,45 | 60 | 0,188 | 0,269 | 0,38 |
| 13 | 0,52 | 0,83 | 1,33 | 70 | 0,174 | 0,245 | 0,34 |
| 14 | 0,48 | 0,78 | 1,23 | 80 | 0,161 | 0,226 | 0,31 |
| 15 | 0,46 | 0,73 | 1,15 | 90 | 0,151 | 0,211 | 0,29 |
| 16 | 0,44 | 0,70 | 1,07 | 100 | 0,143 | 0,198 | 0,27 |
| 17 | 0,42 | 0,66 | 1,01 | 1500 | 0,115 | 0,160 | 0,211 |
| 18 | 0,40 | 0,63 | 0,96 | 200 | 0,099 | 0,136 | 0,185 |
| 19 | 0,39 | 0,60 | 0,92 | 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |

**_Приложение 7._** Значения $P_k = \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$ (Распределение Пуассона).

| k \ a | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 |
| 1 | 0,0905 | 0,1638 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 | 0,1217 | 0,1438 | 0,1647 |
| 3 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 |
| 4 | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 |
| 5 | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 |
| 6 | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 |

| $k$ \ $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,3679 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0000 |
| 1 | 0,3679 | 0,2707 | 0,1494 | 0,0733 | 0,0337 | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 | 0,0005 |
| 2 | 0,1839 | 0,2707 | 0,2240 | 0,1465 | 0,0842 | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0050 | 0,0023 |
| 3 | 0,0613 | 0,1804 | 0,2240 | 0,1954 | 0,1404 | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 | 0,0076 |
| 4 | 0,0153 | 0,0902 | 0,1680 | 0,1954 | 0,1755 | 0,1339 | 0,0912 | 0,0572 | 0,0337 | 0,0189 |
| 5 | 0,0031 | 0,0361 | 0,1008 | 0,1563 | 0,1755 | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 | 0,0378 |
| 6 | 0,0005 | 0,0120 | 0,0504 | 0,1042 | 0,1462 | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 | 0,0631 |
| 7 | 0,0001 | 0,0037 | 0,0216 | 0,0595 | 0,1044 | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1171 | 0,0901 |
| 8 | | 0,0009 | 0,0081 | 0,0298 | 0,0653 | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 | 0,1126 |
| 9 | | 0,0002 | 0,0027 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0688 | 0,1014 | 0,1241 | 0,1318 | 0,1251 |
| 10 | | | 0,0008 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1186 | 0,1251 |
| 11 | | | 0,0002 | 0,0019 | 0,0082 | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 | 0,1137 |
| 12 | | | 0,0001 | 0,0006 | 0,0034 | 0,0126 | 0,0263 | 0,0481 | 0,0728 | 0,0948 |
| 13 | | | | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 | 0,0729 |
| 14 | | | | 0,0001 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 | 0,0521 |
| 15 | | | | | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 | 0,0347 |
| 16 | | | | | | 0,0003 | 0,0014 | 0,0045 | 0,0109 | 0,0217 |
| 17 | | | | | | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 | 0,0128 |
| 18 | | | | | | | 0,0002 | 0,0009 | 0,0029 | 0,0071 |
| 19 | | | | | | | 0,0001 | 0,0004 | 0,0014 | 0,0037 |
| 20 | | | | | | | | 0,0002 | 0,0006 | 0,0019 |
| 21 | | | | | | | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 |
| 22 | | | | | | | | | 0,0001 | 0,0004 |
| 23 | | | | | | | | | | 0,0002 |
| 24 | | | | | | | | | | 0,0001 |

## *Ответы*

**1.1.** г) $x_в = 1,88$; $\sigma_в = 0,95$. **1.2.** г) $x_в = 46,4$; $\sigma_в = 13,14$. **1.3.** $\bar{x}_{ген} \approx 1274,5$; $D_{ген} \approx 168,88$. **1.4.** $\bar{x}_в = 100$, $D_в = 34$, $s^2 = 42,5$. **1.5.** $\bar{x}_в = 3,2$; $D_в = 2,96$; $\sigma_в = 1,72$. **1.6.** $\bar{x}_в = 114,6$; $D_в = 184,56$; $\sigma_в = 13,58$; $s^2 = 186,42$; $s = 13,65$. **1.7.** $x_в = 6,8$; $\sigma_в = 3,16$. **1.8.** $x_в = 0,52$; $\sigma_в = 4,05$. **1.9.** $\bar{x}_в = 8$; $s^2 = 3,33$.

**2.1.** $7,64 < a < 12,76$. **2.2.** 179. **2.3.** $-0,04 < a < 0,88$; $0,32 < \sigma < 1,04$. **2.4.** а) (0; 14,28); б) (7,98; 20,02).

**3.1.** $H_0$ принимается. **3.2.** $\bar{x}_в = 25,45$; $s = 6,18$; $\chi^2_{набл.} = 3,7$. **3.3.** $\bar{x}_в = 10,4$; $s = 13,67$; $\chi^2_{набл.} = 4,82$; $\lambda_{опыт} = 0,497$.

**3.4.** $\lambda = 0,0057$; $\chi^2_{набл.} = 0,94$; $\lambda_{опыт.} = 1,135$.

**4.1.** $r_в = 0,916$; $\bar{y}_x = 0,62x - 0,03$. **4.2.** $r_в = 0,90$; $\bar{y}_x = 0,17x - 4,3$; $\bar{x}_y = 4,8y + 29,4$. **4.3.** $r_в = -0,675$; $\bar{y}_x = -1,27x + 214$; $\bar{y}_x(46) = 155,6$. **4.4.** $\bar{y}_x = 0,88x - 3,51$. **4.8.** 0,65. **4.9.** $r_{XY} = -0,421$ – слабая отрицательная корреляция.

## *Литература*


1. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Практикум : учебное пособие / И. В. Белько, Е. А. Криштапович, И. М. Морозова. – Минск : РИВШ, 2022. – 199, [1] с. – Библиогр.: с. 195 (10 назв.). – Гриф Министерства образования Республики Беларусь. – 300 экз.
2. Гладкий, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2008. – 67 с.
3. Гладкий, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 51 с.
4. Гладкий, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика : задачи и упражнения / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист, Т. А. Тузик. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 46 с.
5. Годунов, Б. А. Математическая статистика : задания, методические указания, статистические таблицы / Б. А. Годунов, В. С. Рубанов, Т. А. Тузик. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2002. – 58 с.
6. Каримова, Т. И. Задачи и упражнения. Теория вероятностей / Т. И. Каримова, И. И. Гладкий, Е. А. Крагель, Л. П. Махнист, Е. В. Кузьмина – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2023. – 73 с.
7. Махнист, Л. П. Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» / Л. П. Махнист, С. Ф. Лебедь, Т.И. Каримова. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2019.
8. Пархимович, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Пархимович, Р. А. Гоголинская, Е. М. Остапчук. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 43 с.
9. Тузик, Т. А. Теория вероятностей. Математическая статистика / Т. А. Тузик, И. И. Гладкий. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2002. – 52 с.
10. Тузик, Т. А. Задачи и упражнения по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» / Т. А. Тузик, А. И. Тузик, М. Г. Журавель – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2005. – 78 с.
11. Швычкина, Е. Н. Практикум по высшей математике для студентов технических специальностей. Ч. 7. Теория вероятностей и математическая статистика / Е. Н. Швычкина, Л. Т. Мороз, С. Н. Наумовец. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2015. – 80 с.
12. Probability theory. Elements of mathematical statistics : учеб.-метод. разработка на английском языке / Брест. гос. техн. ун-т ; сост. И. И. Гладкий [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2014. – 60 с.

Учебное издание

***Составители:***
*Каримова Татьяна Ивановна*
*Жук Анастасия Игоревна*
*Защук Елена Николаевна*
*Мельникова Инна Николаевна*

# *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА*

## Задания, методические указания

***Текст печатается в авторской редакции,***
***орфографии и пунктуации***

Ответственный за выпуск: Каримова Т. И.
Редактор: Винник Н. С.
Компьютерная вёрстка: Каримова Т. И.

---

Подписано в печать 09.12.2024 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial ». Усл. печ. л. 4,19. Уч. изд. л. 4,50. Заказ № 1180. Тираж 30 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1569 от 16.10.2017 г.