Вучоныя запіскі • Прыродазнаўчыя навукі • Матэматыка
2005 • Т. 1 • Ч. 2

УДК 519.61

Л. Гадомский, Е.А. Гребеников, А.В. Чичурин

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ЗАДАЧИ ДВАДЦАТИ ТЕЛ

Для кольцеобразной плоской ньютоновой проблемы 20-ти тел с числом шестиугольников, равным трем, в вершинах которых имеются гравитирующие массы, рассматривается проблема существования стационарных точек дифференциальных уравнений. Приведены две теоремы, которые представляют собой условия существования ограниченной кольцеобразной задачи двадцати тел. Дана геометрическая интерпретация полученных результатов.

Рассматривается проблема существования стационарных точек дифференциальных уравнений кольцеобразной плоской ньютоновой проблемы 19-ти тел [1], где число шестиугольников, в вершинах которых имеются гравитирующие массы, равно 3. Необходимые условия существования точных гомографических решений в задаче 19-ти тел в смысле А.Винтнера [2], состоят в непротиворечивости условий теоремы Банка-Эльмабсута [3], которые выражаются в виде равенств:

$$\omega_l^2 x_{l,k} = \frac{M_0 x_{l,k}}{\left(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2\right)^{3/2}} + \sum_{\substack{l\le r\le 3\\ r\ne l}} m_r \sum_{j=1}^{4} \frac{x_{l,k} - x_{r,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{r,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{r,j}\right)^2\right]^{3/2}} +$$

$$+ m_l \sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{4} \frac{x_{l,k} - x_{r,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{r,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{l,j}\right)^2\right]^{3/2}},\ l = 1,2,3,\ k = 1,2,3,4,5,6, \tag{1}$$

$$\omega_l^2 y_{l,k} = \frac{M_0 y_{l,k}}{\left(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2\right)^{3/2}} + \sum_{\substack{l\le r\le 3\\ r\ne l}} m_r \sum_{j=1}^{4} \frac{y_{l,k} - y_{r,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{r,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{r,j}\right)^2\right]^{3/2}} +$$

$$+ m_l \sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{4} \frac{y_{l,k} - y_{r,j}}{\left[\left(x_{l,k} - x_{r,j}\right)^2 + \left(y_{l,k} - y_{l,j}\right)^2\right]^{3/2}},\ l = 1,2,3,\ k = 1,2,3,4,5,6, \tag{2}$$

где $x_{l,k}$, $y_{l,k}$ – координаты тел масс m_l, находящихся в вершинах l-го шестиугольника, а индекс k указывает на номер вершины в рассматриваемом шестиугольнике, m_0 – центральная масса конфигурации, ω_l – угловая скорость вращения l-го шестиугольника относительно центра конфигурации m_0. Гомографическое решение задачи 19-ти тел в виде трех концентрических шестиугольников во вращающейся системе координат P_0xy с линейным масштабом $P_0P_1 = 1$ имеет вид, изображенный на рис. 1.

Относительная ориентация правильных шестиугольников друг относительно друга определяется формулами Банка-Эльмабсута [3].
Координаты шестиугольника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ даются таблицей:

$P_1: x_{11} = 1, y_{11} = 0$; $P_2: x_{12} = \cos 60° = \frac{1}{2}, y_{12} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$P_3: x_{13} = \cos 120° = -\frac{1}{2}, y_{13} = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $P_4: x_{14} = \cos \pi = -1, y_{14} = 0$;

$P_5: x_{15} = \cos 240° = -\frac{1}{2}, y_{15} = \sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $P_6: x_{16} = \cos(-60°) = \frac{1}{2}, y_{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

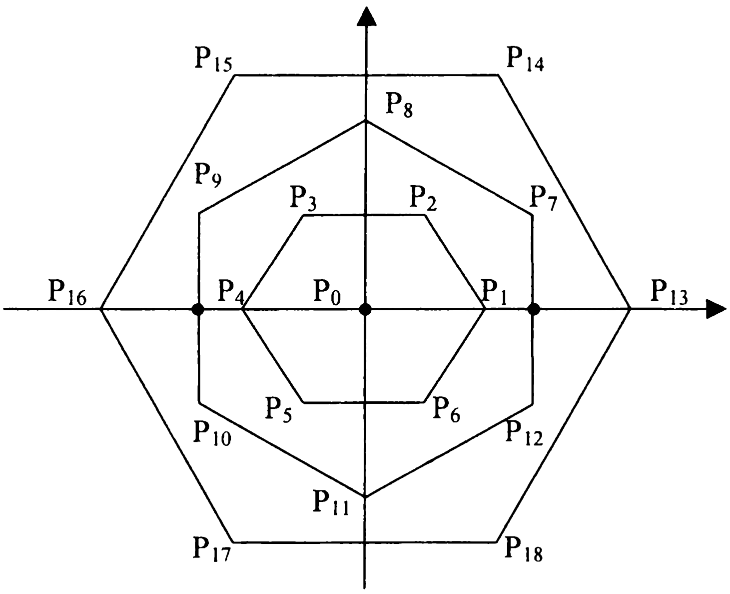

Рис. 1

Координаты шестиугольника $P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12}$ даются таблицей:

$P_7: x_{21} = \alpha \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_{21} = \alpha \sin 30° = \frac{1}{2}\alpha$; $P_8: x_{22} = 0, y_{22} = \alpha$;

$P_9: x_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{23} = \frac{\alpha}{2}$; $P_{10}: x_{24} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{24} = -\frac{\alpha}{2}$;

$P_{11}: x_{25} = 0, y_{25} = -\alpha$; $P_{12}: x_{26} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{26} = -\frac{\alpha}{2}$.

Координаты шестиугольника $P_{13} P_{14} P_{15} P_{16} P_{17} P_{18}$ даются таблицей:

$P_{13}: x_{31} = \beta \cos 0° = \beta, y_{31} = \beta \sin 0° = 0$; $P_{14}: x_{32} = \frac{\beta}{2}, y_{32} = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$;

$P_{15}: x_{33} = -\frac{\beta}{2}, y_{33} = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$; $P_{16}: x_{34} = -\beta, y_{34} = 0$;

$P_{17}: x_{35} = -\frac{\beta}{2}, y_{35} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\beta$; $P_{18}: x_{36} = \frac{\beta}{2}, y_{36} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\beta$.

Тогда таблица всех взаимных расстояний между 19 телами имеет вид:

$P_0P_1 = P_0P_2 = P_0P_3 = P_0P_4 = P_0P_5 = P_0P_6 = 1$; $P_0P_7 = P_0P_8 = P_0P_9 = P_0P_{10} = P_0P_{11} = P_0P_{12} = \alpha$;

$$
\begin{aligned}
&P_0P_{13} = P_0P_{14} = P_0P_{15} = P_0P_{16} = P_0P_{17} = P_0P_{18} = \beta\,;\ P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5 = P_5P_6 = P_6P_1 = 1\,;\\
&P_1P_3 = P_1P_5 = P_2P_4 = P_4P_6 = P_3P_5 = P_2P_6 = \sqrt{3}\,;\\
&P_1P_7 = P_1P_{12} = P_2P_7 = P_2P_8 = P_3P_8 = P_3P_9 = P_4P_9 = P_4P_{10} = \sqrt{1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2}\,;\\
&P_5P_9 = \sqrt{1+\alpha^2} = P_5P_{12} = P_6P_7 = P_6P_{10}\,;\\
&P_5P_7 = \sqrt{1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2} = P_5P_8 = P_6P_8 = P_6P_9\,;\\
&P_5P_{10} = \sqrt{1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2} = P_5P_{11} = P_6P_{12}\,;\\
&P_1P_8 = P_1P_{11} = P_2P_9 = P_2P_{12} = P_3P_7 = P_3P_{10} = P_4P_8 = P_4P_{11} = \sqrt{1+\alpha^2}\,;\\
&P_1P_9 = P_1P_{10} = P_2P_{10} = P_2P_{11} = P_3P_{11} = P_3P_{12} = P_4P_7 = P_4P_{12} = \sqrt{1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2}\,;\\
&P_6P_{16} = P_6P_{14} = P_5P_{15} = P_5P_{13} = P_1P_{15} = P_1P_{17} = P_2P_{16} = P_2P_{18} = P_3P_{17} =\\
&= P_3P_{15} = P_4P_{14} = P_4P_{18} = \sqrt{1+\beta+\beta^2}\,;\\
&P_1P_{16} = P_2P_{17} = P_3P_{18} = P_4P_{13} = P_5P_{14} = P_6P_{15} = \beta+1\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Непротиворечивость условий теоремы Банка-Эльмабсута состоит в том, что выражения (1), (2) для $l=1,2,3$ и $k=1,2,3,4,5,6$ должны в конечном счете дать одно и то же значение угловых скоростей ω_l. Для ω_l мы имеем 36 аналитических выражений, из которых на первом этапе исследования различными являются 6 выражений. Но сначала по формулам (1), (2) вычисляем ω_1^2, ω_2^2 и ω_3^2 для $l=1$, $k=1$; $l=1, k=2$; $l=2$, $k=1$; $l=2$, $k=2$; $l=3$, $k=1$ и $l=3$, $k=3$. В результате этого получим

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 = m_0 &+ \left(\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)m_1 + 2\left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha}{(1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{2+\sqrt{3}\alpha}{2(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right)m_2 +\\
&+\left(\frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{(\beta-1)^2} + \frac{2-\beta}{(1-\beta+\beta^2)^{3/2}} + \frac{2+\beta}{(1+\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_3,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega_1^2}{2} = \frac{m_0}{2} &+ \left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)m_1 + \left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right)m_2 +\\
&+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\left(\frac{1}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right)m_2 +\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{(\beta-1)^2} + \frac{2-\beta}{(1-\beta+\beta^2)^{3/2}} + \frac{2+\beta}{(1+\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_3,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha\omega_2^2}{2} &= \frac{m_0}{2\alpha^2} + (\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right) +\\
&+\alpha\left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right))m_1 + \frac{15+4\sqrt{3}}{24\alpha^2}m_2 +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta\left(\frac{1}{(\alpha^2+\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}-\frac{1}{(\alpha^2-\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_3+$$

$$+\alpha\left(\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{1}{(\alpha^2-\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}+\frac{1}{(\alpha^2+\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_3, \tag{6}$$

$$\alpha\omega_2^2=\frac{m_0}{\alpha^2}+2\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}}+\frac{\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}-\frac{\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right)m_1+$$

$$+\frac{15+4\sqrt{3}}{12\alpha^2}m_2+2\left(\frac{\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}{(\alpha^2-\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}+\frac{\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}{(\alpha^2+\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_3, \tag{7}$$

$$\beta\omega_3^2=\frac{m_0}{\beta^2}+\left(\frac{1}{(\beta-1)^2}+\frac{1}{(\beta+1)^2}+\frac{2\beta-1}{(1-\beta+\beta^2)^{3/2}}+\frac{2\beta+1}{(1+\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_1+$$

$$+2\left(\frac{\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}+\frac{\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha}{(\alpha^2-\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}+\frac{\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha}{(\alpha^2+\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_2+\frac{15+4\sqrt{3}}{12\beta^2}m_3, \tag{8}$$

$$-\beta\omega_3^2=-\frac{m_0}{\beta^2}-\left(\frac{2(1+\beta^2)}{(\beta-1)^2}+\frac{2\beta-1}{(1-\beta+\beta^2)^{3/2}}+\frac{2\beta+1}{(1+\beta+\beta^2)^{3/2}}\right)m_1+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}\alpha-2\beta}{(\alpha^2-\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}-\frac{\sqrt{3}\alpha+2\beta}{(\alpha^2+\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}}-\frac{\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}\right)m_2-\frac{15+4\sqrt{3}}{12\beta^2}m_3. \tag{9}$$

Аналитические выражения (4)–(9) по форме различны. Для существования в задаче 19-ти тел гомографического решения, изображенного тремя шестиугольниками, вращающимися с одинаковой угловой скоростью вокруг центра P_0, необходимо, чтобы

$$\omega^2=\omega_1^2=\omega_2^2=\omega_3^2. \tag{10}$$

Равенства (10) при условиях $m_1\neq m_2$, $m_1\neq m_3$, $m_2\neq m_3$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$ выражают зависимости между массами m_1,m_2,m_3,m_0 и расстояниями α и β, при которых существует гомографическое решение плоской ньютоновой проблемы 19-ти тел с неполной симметрией [4]. Исследуем систему (4)–(10) и найдем зависимости между пятью параметрами m_1,m_2,m_3, α и β. Без ограничения общности положим $m_0=1$.

Предварительно введем обозначения

$$a_1\equiv\frac{1}{(1-\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}},\quad a_2\equiv\frac{1}{(1+\sqrt{3}\alpha+\alpha^2)^{3/2}},\quad a_3\equiv\frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}},\quad b_1\equiv\frac{1}{(1-\beta+\beta^2)^{3/2}},$$

$$b_2\equiv\frac{1}{(1+\beta+\beta^2)^{3/2}},\quad b_3\equiv\frac{1}{(\alpha^2-\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}},\quad b_4\equiv\frac{1}{(\alpha^2+\sqrt{3}\alpha\beta+\beta^2)^{3/2}},$$

$$k_1 \equiv (2-\sqrt{3}\alpha)a_1 + (2+\sqrt{3}\alpha)a_2 + 2a_3,\ \ k_2 \equiv (2-\beta)b_1 + (2+\beta)b_2 - \frac{4\beta}{(\beta^2-1)^2}, \qquad (11)$$

$$k_3 \equiv \alpha(a_4+b_3+b_4) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b_4-b_3)\beta,\ \ k_4 \equiv \sqrt{3}(a_1-a_2) + \left(\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\alpha - 2\alpha(a_1+a_2+a_3),$$

$$k_5 \equiv (2\beta-1)(\beta^2-1)^2 b_1 + (2\beta+1)(\beta^2-1)^2 b_2 + 2(\beta^2+1).$$

Выразим из уравнения (4) величину ω^2

$$\omega^2 = 1 + \left(\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)m_1 + k_1 m_2 + k_2 m_3 \qquad (12)$$

и подставим в уравнения (5), (6). В результате уравнение (5) обратится в тождество, а из уравнения (6) выразим m_1

$$m_1 = \frac{12\alpha^{-2} - 12\alpha + (15+4\sqrt{3})\alpha^{-2}m_2 - 12\alpha k_1 m_2 - 12\alpha k_2 m_3 + 24 k_3 m_3}{12k_4}. \qquad (13)$$

Подставим соотношения (12) и (13) в уравнения (7) и (8). В результате уравнение (7) обратится в тождество, а из уравнения (8) найдем m_2:

$$m_2 = \{((15+4\sqrt{3})\beta(\beta^2-1)^2 - 12k_5)(\alpha^3 - 1 + \alpha^2(\alpha k_2 - 2k_3)m_3)\alpha^{-2}(\beta^2-1)^{-2}k_4^{-1} -$$

$$-12(\beta^3-1)(12\beta^3 k_2 - 4\sqrt{3} - 15)\beta^{-2}m_3\} \times \qquad (14)$$

$$\times \{12(\sqrt{3}\alpha(b_3-b_4) - 2(a_4+b_3+b_4)\beta + \beta k_1 + \frac{91+40\sqrt{3}}{48\alpha^2 k_4}\beta - \left(\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\alpha\beta k_1 k_4^{-1} -$$

$$-\frac{(15+4\sqrt{3})k_5}{12\alpha^2(\beta^2-1)^2 k_4} + \frac{\alpha k_1 k_5}{(\beta^2-1)^2 k_4}\}^{-1}.$$

Подставим соотношения (12)–(14) в уравнение (9). В результате получим тождество.

Таким образом, решением системы (4)–(10) являются три соотношения (12), (13), (14) с обозначениями (11).

Запишем дифференциальные уравнения движения бесконечно малой массы в ограниченной пространственной ньютоновой задаче 20-ти тел в невращающейся системе координат P_0xyz [5]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{fm_0x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{fm_0y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad (15)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{fm_0z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z},$$

где возмущающая функция R есть

$$R=f(m_1\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{1}{\Delta_j}-\frac{xx_j+yy_j}{r_j^3}\right)+m_2\sum_{j=7}^{12}\left(\frac{1}{\Delta_j}-\frac{xx_j+yy_j}{r_j^3}\right)+m_3\sum_{j=13}^{18}\left(\frac{1}{\Delta_j}-\frac{xx_j+yy_j}{r_j^3}\right)),$$

$$\Delta_j{}^2=(x_j-x)^2+(y_j-y)^2+z^2, \tag{16}$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\quad r_j{}^2=x_j{}^2+y_j{}^2,$$

$$x_j=\cos\frac{\pi(j-1)}{3},\quad y_j=\sin\frac{\pi(j-1)}{3}\ (j=\overline{1,6}),$$

$$x_j=\alpha\cos\frac{\pi(2j-1)}{6},\quad y_j=\alpha\sin\frac{\pi(2j-1)}{6}\ (j=\overline{7,12}),$$

$$x_j=\beta\cos\frac{\pi(j-1)}{3},\quad y_j=\beta\sin\frac{\pi(j-1)}{3}\ (j=\overline{13,18}),$$

f – постоянная гравитации, x_j,y_j – координаты вершин шестиугольников.

Поскольку система (15) является неавтономной (координаты вершин шестиугольников x_j,y_j являются функциями времени), для определения ее равновесных решений необходимо сначала исключить из правых частей уравнений (15) время t путем перехода к вращающейся системе координат по формулам

$$x=X\cos(\omega t)-Y\sin(\omega t),$$

$$y=X\sin(\omega t)+Y\cos(\omega t), \tag{17}$$

$$z=Z,$$

где величина ω определяется равенством (10). В результате получим следующую автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\omega^2X+2\omega\frac{dY}{dt}+\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial X},$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\omega^2Y-2\omega\frac{dX}{dt}+\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial Y}, \tag{18}$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2}=\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial Z},$$

где новая возмущающая функция $\widetilde{R}$ определяется равенством

$$\widetilde{R}=f(\frac{m_0}{r}+\sum_{j=1}^{6}\frac{m_1}{\Delta_j}+\sum_{j=7}^{12}\frac{m_2}{\Delta_j}+\sum_{j=13}^{18}\frac{m_3}{\Delta_j}),$$

$$\Delta_j{}^2=(X_j-X)^2+(Y_j-Y)^2+Z^2,\quad r^2=X^2+Y^2+Z^2, \tag{19}$$

$$X_j = \cos\frac{\pi(j-1)}{3},\ \ Y_j = \sin\frac{\pi(j-1)}{3}\ \ (j = \overline{1,6}),$$

$$X_j = \alpha\cos\frac{\pi(2j-1)}{6},\ \ Y_j = \alpha\sin\frac{\pi(2j-1)}{6}\ \ (j = \overline{7,12}),$$

$$X_j = \beta\cos\frac{\pi(j-1)}{3},\ \ Y_j = \beta\sin\frac{\pi(j-1)}{3}\ \ (j = \overline{13,18}),$$

$$Z_j = 0\ \ (j = \overline{1,18}).$$

Введем фазовые переменные x, y, z, u, v, w по формулам

$$\begin{cases} x = X,\ y = Y,\ z = Z, \\ \dfrac{dx}{dt} = u,\ \dfrac{dy}{dt} = v,\ \dfrac{dz}{dt} = w, \end{cases}$$

чтобы записать систему (18), (19) в нормальной форме [6]. В новых переменных система (18), (19) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = u,\ \frac{dy}{dt} = v,\ \frac{dz}{dt} = w,$$

$$\frac{du}{dt} = \omega^2 x + 2\omega v + \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial X}, \tag{20}$$

$$\frac{dv}{dt} = \omega^2 y - 2\omega u + \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial y},\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial z}.$$

Согласно определению стационарных решений дифференциальных уравнений [7] положения равновесия системы (20) являются решениями (если таковые существуют) системы функциональных уравнений

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,$$

$$\omega^2 x + \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial x} = 0,\ \omega^2 y + \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial z} = 0,$$

или в развернутом виде

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,$$

$$\omega^2 x - \frac{fm_0 x}{r^{3/2}} - fm_1\sum_{j=1}^{6}\frac{x - x_j}{\Delta_j^{3/2}} - fm_2\sum_{j=7}^{12}\frac{x - x_j}{\Delta_j^{3/2}} - fm_3\sum_{j=13}^{18}\frac{x - x_j}{\Delta_j^{3/2}} = 0,$$

$$\omega^2 y - \frac{fm_0 y}{r^{3/2}} - fm_1\sum_{j=1}^{6}\frac{y - y_j}{\Delta_j^{3/2}} - fm_2\sum_{j=7}^{12}\frac{y - y_j}{\Delta_j^{3/2}} - fm_3\sum_{j=13}^{18}\frac{y - y_j}{\Delta_j^{3/2}} = 0, \tag{21}$$

$$fz\left(\frac{m_0}{r^{3/2}}+m_1\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{\Delta_j^{\ 3/2}}+m_2\sum_{j=7}^{12}\frac{1}{\Delta_j^{\ 3/2}}+m_3\sum_{j=13}^{18}\frac{1}{\Delta_j^{\ 3/2}}\right)=0,$$

где Δ_j и r определяются согласно формулам (16). Не ограничивая общности, положим

$$f=1,\ m_0=1.$$

Очевидно, что три первых и последнее уравнения системы (21) удовлетворяются при $z=u=v=w=0$, поэтому решение системы (21) сводится к решению двух нелинейных функциональных уравнений с неизвестными x,y следующего вида:

$$\omega^2x-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}-m_1\Bigg(\frac{x+\frac12}{\left((x+\frac12)^2+(y+\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+\frac{x-\frac12}{\left((x-\frac12)^2+(y+\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{x+\frac12}{\left((x+\frac12)^2+(y-\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+\frac{x-\frac12}{\left((x-\frac12)^2+(y-\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+\frac{x+1}{\left((x+1)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{x-1}{\left((x-1)^2+y^2\right)^{3/2}}\Bigg)-$$

$$-m_2\Bigg(\frac{x}{\left(x^2+(y+\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{x}{\left(x^2+(y-\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{x+\frac{\sqrt3}{2}\alpha}{\left((x+\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y+\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{x+\frac{\sqrt3}{2}\alpha}{\left((x+\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y-\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{x-\frac{\sqrt3}{2}\alpha}{\left((x-\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y+\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{x-\frac{\sqrt3}{2}\alpha}{\left((x-\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y-\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}\Bigg)-$$

$$-m_3\Bigg(\frac{x+\beta}{\left((x+\beta)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{x-\beta}{\left((x-\beta)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{x+\frac12\beta}{\left((x+\frac12\beta)^2+(y+\frac{\sqrt3}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{x-\frac12\beta}{\left((x-\frac12\beta)^2+(y+\frac{\sqrt3}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}+\frac{x+\frac12\beta}{\left((x+\frac12\beta)^2+(y-\frac{\sqrt3}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}+\frac{x-\frac12\beta}{\left((x-\frac12\beta)^2+(y-\frac{\sqrt3}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}\Bigg)=0,$$

(22)

$$\omega^2y-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}-m_1\Bigg(\frac{y-\frac{\sqrt3}{2}}{\left((x+\frac12)^2+(y-\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+\frac{y-\frac{\sqrt3}{2}}{\left((x-\frac12)^2+(y-\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{y+\frac{\sqrt3}{2}}{\left((x+\frac12)^2+(y+\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+\frac{y+\frac{\sqrt3}{2}}{\left((x-\frac12)^2+(y+\frac{\sqrt3}{2})^2\right)^{3/2}}+\frac{y}{\left((x+1)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^{3/2}}\Bigg)-$$

$$-m_2\Bigg(\frac{y+\alpha}{\left(x^2+(y+\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{y-\alpha}{\left(x^2+(y-\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{y+\frac12\alpha}{\left((x+\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y+\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{y-\frac12\alpha}{\left((x+\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y-\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{y+\frac12\alpha}{\left((x-\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y+\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}+\frac{y-\frac12\alpha}{\left((x-\frac{\sqrt3}{2}\alpha)^2+(y-\frac12\alpha)^2\right)^{3/2}}\Bigg)-$$

$$-m_3\left(\frac{y}{\left((x+\beta)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{y}{\left((x-\beta)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{y+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}{\left((x+\frac{1}{2}\beta)^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{y+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}{\left((x-\frac{1}{2}\beta)^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}+\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}{\left((x+\frac{1}{2}\beta)^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}+\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta}{\left((x-\frac{1}{2}\beta)^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta)^2\right)^{3/2}}\right)=0.$$

Условие $z=0$ говорит о том, что все стационарные решения системы (20) всегда находятся в координатной плоскости P_0xy.

Отсюда вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. *Все стационарные решения системы дифференциальных уравнений (20), если таковые существуют, всегда находятся в координатной плоскости P_0xy, в которой движутся притягивающие точки $P_1, P_2, ..., P_{18}$.*

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием существования стационарных решений ограниченной кольцеобразной задачи двадцати тел является разрешимость системы (22) относительно неизвестных x, y в пространстве R_2.*

Перейдем к исследованию условий разрешимости системы алгебраических уравнений (22). Эти уравнения содержат нелинейные, иррациональные выражения относительно искомых величин x, y. В связи с этим для их решения использовались графические и итерационные методы, реализованные в системе компьютерной алгебры *Mathematica* [8]. С помощью графического пакета СКА *Mathematica* были построены графики двух кривых, описанных уравнениями системы (22), для различных значений параметров m_3, α и β. При этом величины ω, m_1 и m_2 определялись из соотношений (12)–(14).

Например, для $\alpha=3/2$, $\beta=2$, $m_3=1$ величины ω, m_1 и m_2 равны соответственно 0.698, 0.099 и 0.043 и графики этих кривых изображены на рисунке 2. На этом рисунке ось абсцисс – это прямая P_0x, ось ординат – прямая P_0y. Сплошная линия изображает график первого уравнения системы (22), а пунктирная – график второго уравнения. Решения системы (22) изображаются точками пересечения двух указанных кривых. Это точки N_1, N_2, ... , N_{30}, S_1, S_2, ... , S_{12}, которые изображают решения системы (22) во вращающейся системе координат P_0xy. Согласно [1, 9] точки N_1, N_2, ... , N_{30}, лежащие на прямых, проходящих через центр конфигурации и любую вершину шестиугольника, называются *радиальными* положениями равновесия, а точки S_1, S_2, ... , S_{12} называются *биссекториальными* положениями равновесия.

На рисунках 3 и 4 представлены две кривые, заданные аналитическими уравнениями системы (22) для некоторых значений α, β и m_3.

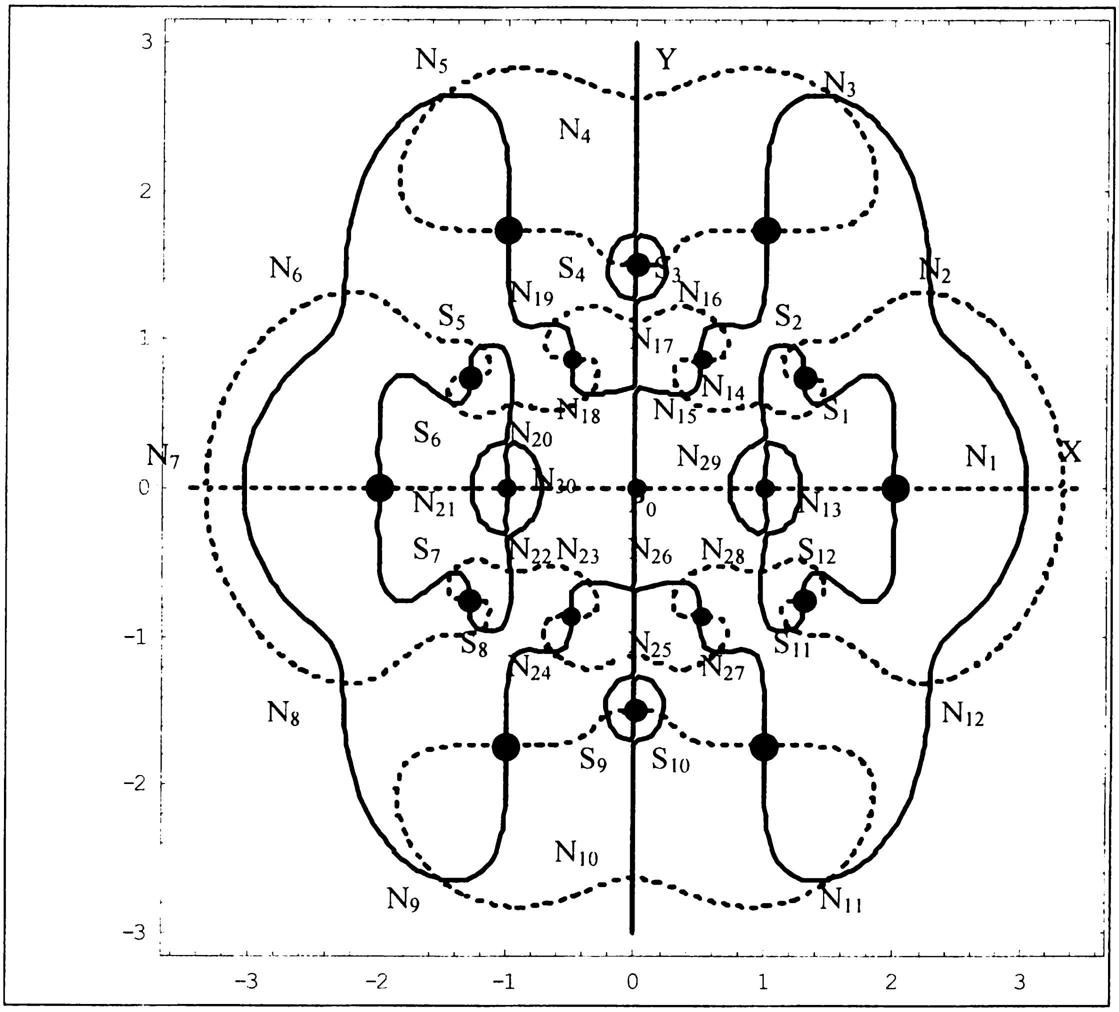
N5
Y
N3
N4
N6
S4
S3
N2
N19
N16
S5
S2
N17
N14
N18
N15
S1
S6
N20
N7
N29
N1
X
N30
N21
P0
N13
S7
N22
N23
N26
N28
S12
S8
N25
S11
N24
N27
N8
N12
S9
S10
N10
N9
N11
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Рис. 2

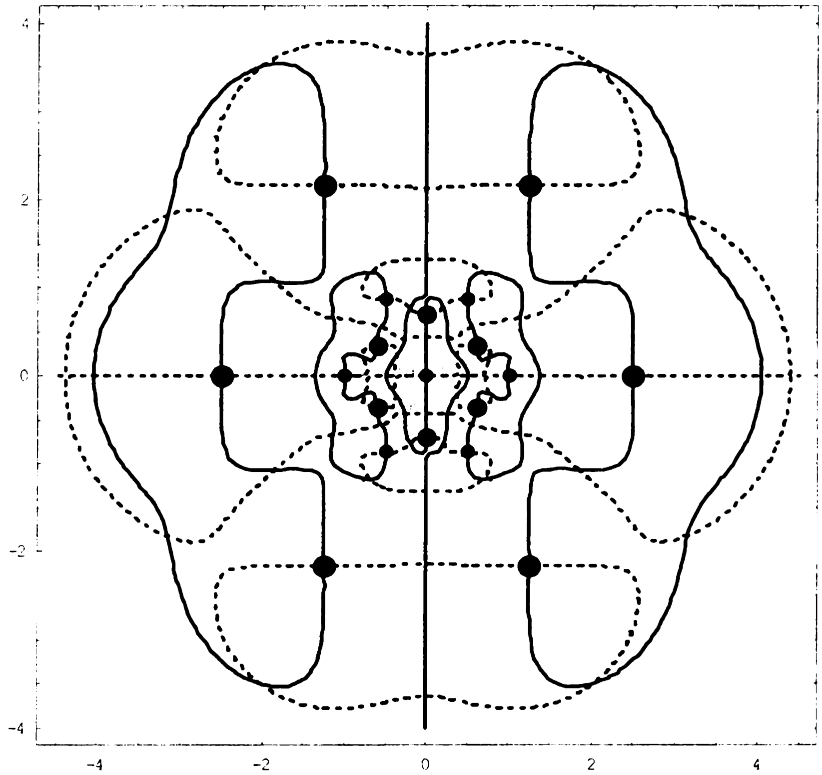

Рис. 3 ($\alpha = 0.7$, $\beta = 2.5$, $m_3 = 10$).

Величины ω, m_1 и m_2 соответственно равны 1.28, 0.66 и 0.29.

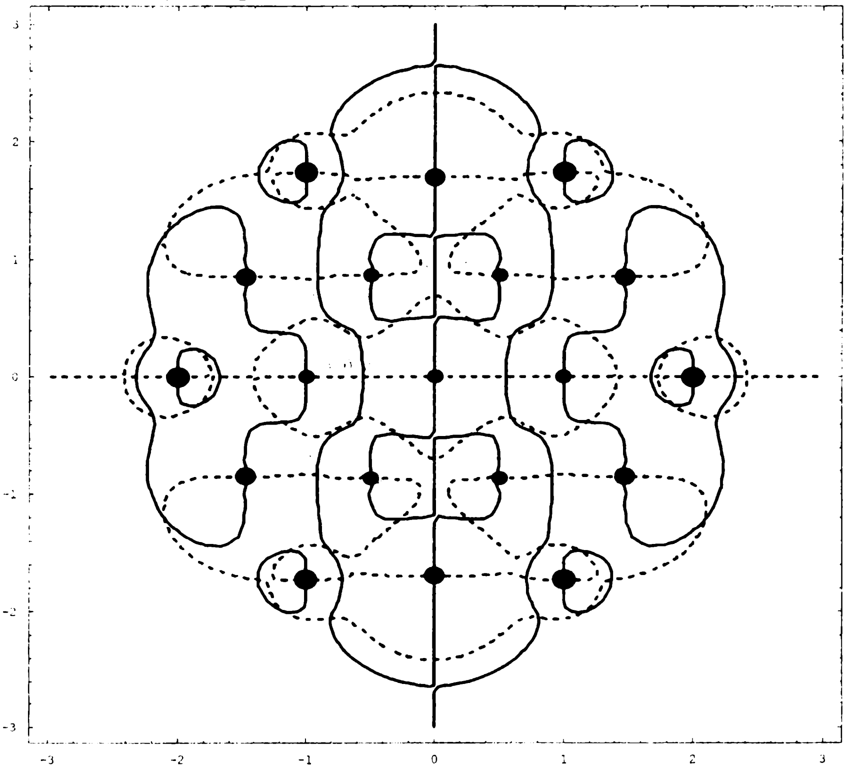

Рис. 4 ($\alpha = 1.7, \beta = 2.0$, $m_3 = 0.1$).

Величины ω, m_1 и m_2 соответственно равны 1.19, 0.55 и 1.04.

Графические методы дают приближенные значения координат положений равновесия N_i, S_i, а для их точного определения можно воспользоваться быстросходящимся методом итераций Ньютона [10] и выполнить необходимые вычисления, подобные тем, которые реализовал Е.В. Ихсанов [1] в ограниченной задаче 10-ти тел «с неполной симметрией».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Ихсанов Е.В. Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики. – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 132 с.
2 Винтнер А. Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
3 Bank D., Elmabsout A. Configurations polygonales en equilibre relatif. – Paris: C.R. Acad. Sci., T. 329, Serie Iib, 2001. – P. 243 – 248.
4 Гребеников Е.А., Прокопеня А.Н. О существовании нового класса точных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел. – М.: ВЦ РАН // Вопросы моделирования и анализа в задачах принятия решений, 2004. – С. 39 – 56.
5 Абалкин В.К., Аксенов В.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под. ред. Г.Н. Дубошина. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
6 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.– СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 832 с.
7 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1968. – 468 с.
8 Wolfram S. The *Mathematica* book, 4th ed. – Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
9 Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.
10 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959.

L.Gadomski, E.A. Grebenikov, A.V. Chichurin. **Existence Conditions of Equilibrium Solutions of Restricted Twenty Body Problem**

Newton's restricted problem of twenty bodies is investigated. It has been shown that there are equilibrium solutions of the equations of motion. All necessary numeral transformations and visualization are realized with the help of the System of Symbolical Calculations *Mathematica*.