

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/369052289>

# THE RESTRAINED EXPANSION STRAINS OF SELF-STRESSED CONCRETE WITH DISPERSE REINFORCEMENT PART 1. MODELING

Article in NEWS OF HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTIONS CONSTRUCTION · September 2022

DOI: 10.32683/0936-1052-2022-765-9-9-17

CITATION

1

READS

50

2 authors:



Inessa P. Pavlova

Brest State Technical University

9 PUBLICATIONS 4 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Irina Lizahub

Yanka Kupala State University of Grodno

10 PUBLICATIONS 3 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

---

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ,  
ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ.  
ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ**

**BUILDING CONSTRUCTIONS,  
BUILDINGS AND STRUCTURES.  
BASES AND FOUNDATIONS**

Известия вузов. Строительство. 2022. № 9. С. 5–17.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (9): 5–17.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 693.554–486

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-765-9-5-17

**СОБСТВЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НАПРЯГАЮЩЕГО БЕТОНА  
С ДИСПЕРСНЫМ АРМИРОВАНИЕМ**

**Часть 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**Инесса Павловна Павлова, Ирина Владимировна Белкина**

Брестский государственный технический университет, Брест, Республика Беларусь

**Аннотация.** Во введении рассматривается применение напрягающего бетона в железобетонных конструкциях. Объектом исследования является напрягающий фибробетон. Выполнен анализ имеющегося опыта его использования в конструкциях с различными армирующими элементами. Отмечены положительные эффекты при добавлении фиброволокон в напрягающий бетон. Обоснована актуальность исследуемой темы. В качестве направления, позволяющего перейти к прогнозированию свойств и минимизации возможных экспериментальных исследований, рассматривается аналитическое и математическое моделирование как альтернатива эмпирическому подходу к оцениванию собственных деформаций, который не является универсальным. Проанализированы существующие модели, основанные на деформационном подходе. Приведены отличительные особенности моделей для каждого случая ограничения. Сформулированы предпосылки и допущения модифицированной деформационной модели для случая трехосного ограничения. Предложена модифицированная модель для определения собственных напряжений и деформаций напрягающего фибробетона на стадии расширения.

**Ключевые слова:** напрягающий фибробетон, собственные деформации, самонапряжение, объемное ограничение, модифицированная деформационная модель

**Для цитирования:** Павлова И.П., Белкина И.В. Собственные деформации напрягающего бетона с дисперсным армированием. Часть 1. Моделирование // Известия вузов. Строительство. 2022. № 9. С. 5–17. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-765-9-5-17.

Original article

## THE RESTRAINED EXPANSION STRAINS OF SELF-STRESSED CONCRETE WITH DISPERSE REINFORCEMENT

### Part 1. MODELING

**Inessa P. Pavlova, Irina V. Belkina**

Brest State Technical University, Brest, Republic of Belarus

**Abstract.** The introduction discusses the use of self-stressing concrete in reinforced concrete structures. The object of study is fiber reinforced self-stressing concrete. The analysis of the existing experience of using it in structures with various reinforcing elements is carried out. Positive effects have been noted when fibers are added to self-stressing concrete. The relevance of the topic under study is substantiated. It is noted that the empirical approach to estimating restrained expansion strains is not universal, therefore, the main direction that allows one to proceed to predicting properties and minimizing possible experimental studies is analytical and mathematical modeling. The existing models based on the deformation approach are analyzed. The distinctive features of the models for each case of limitation are given. The preconditions and assumptions of the modified strains development model for the case of a triaxial (volumetric) constraint are formulated. A modified model is proposed for determining the restrained expansion stresses and strains of self-stressing fiber-reinforced concrete at the expansion stage. The proposed analytical model can be used in design, educational and research institutions.

**Keywords:** fiber reinforced self-stressing concrete, restrained expansion strains, self-stressing, volumetric constraint, modified strains development model

**For citation:** Pavlova I.P., Belkina I.V. The restrained expansion strains of self-stressed concrete with disperse reinforcement. Part 1. Modeling. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2022; (9): 5–17. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-765-9-5-17.

**Введение.** Вопросы применения напрягающего бетона (ECFST) в железобетонных конструкциях широко изучаются на протяжении нескольких десятилетий. Интерес к ним обусловлен не только возможностью компенсировать усадочные деформации, но и способностью создания предварительного напряжения конструкции. Фундамент исследований, заложенный профессором В.В. Михайловым и его последователями, позволил развивать данное направление, пользуясь уже сформированными положениями [1].

Так, использование напрягающего бетона в конструкциях с различными армирующими элементами (плиты на основании, преднапряженные балки, трубобетон, напрягающий фибробетон (FRSSC) и др.) нашло свое применение при строительстве большепролетных зданий, специальных сооружений, дорог, а также в мостостроении. Одним из перспективных материалов является напрягающий фибробетон. На основании анализа литературы по данной тематике [2–12] имеющийся опыт можно условно разделить на исследования, изучающие прочностные и деформационные характеристики [2–9]; совместное использование с арматурными элементами, образующими конструкции балок, плит, опор [10]; применение FRSSC для ремонтных работ и усиления существующих конструкций [11].

Следует отметить, что довольно редко встречаются работы по проектированию составов и прогнозированию свойств напрягающих фибробетонов с использованием аналитических моделей [12]. В связи с этим на данный

момент изучения структуры и свойств напрягающих фибробетонов остается актуальным.

Особенностью FRSSC является сочетание высоких прочностных и деформационных свойств дисперсно-армированного бетона и способности создавать преднапряжение. Расширение такого бетона происходит в условиях обжатия дисперсными армирующими волокнами, в результате чего создается предварительное напряжение, которое почти полностью сохраняется и после стабилизации процесса [2–5]. Собственные деформации и напряжения в данном случае напрямую зависят от содержания и жесткости армирующих волокон [3, 4] и стержней (при их наличии) [2]. С увеличением доли ограничивающих элементов собственные деформации уменьшаются [2, 3]. Модуль упругости возрастает с увеличением количества фиброволокна [3, 6]. Прочность на сжатие и на растяжение при изгибе выше в сравнении с неармированным напрягающим бетоном [3–6]. Отмечается увеличение прочности на осевое растяжение напрягающего сталефибробетона в 2–3 раза по сравнению с традиционным бетоном [2]. Добавление стальных волокон в самоуплотняющийся бетон также способствует повышению прочностных характеристик [7, 8]. Авторами [9] установлено повышение значения ударной прочности при использовании комбинированного армирования стальными и полимерными волокнами в самоуплотняющемся бетоне.

Таким образом, обзор исследований подтверждает, что добавление волокон в расширяющийся бетон оказывает положительный эффект на его характеристики. Тем не менее недостаточно изученными остаются вопросы воздействия волокон на структурообразование, геометрию явлений, стабилизацию и прочие процессы, протекающие как в момент расширения, так и позже, а также проблемы постоянства характеристик после 28 сут. Отсутствует единая методика назначения количества дисперсного армирования.

На сегодняшний день большинство подходов к прогнозированию свойств напрягающих бетонов базируется на лабораторном подборе составов с последующей экспериментальной апробацией. То же касается и FRSSC. В ряде случаев собственные напряжения оцениваются путем имитации 1 % армирования в кондукторах, либо с использованием стержней [2]. Такой способ предусматривает создание ограничения вдоль одной оси. Следует отметить, что дисперсное армирование, будучи хаотично распределенным в пространстве тела бетона, создает ограничение в трех направлениях. Следовательно, измерение самонапряжения трехосно-ограниченного элемента (фибробетона) в условиях одноосного ограничения является некорректным и способно отражать неверные показания (данная особенность будет учтена при моделировании).

В целом эмпирический подход к оцениванию собственных деформаций и напряжений требует больших временных и материальных затрат, не являясь универсальным, поэтому важное направление, позволяющее перейти к прогнозированию свойств и минимизации возможных экспериментальных исследований, – аналитическое и математическое моделирование.

*Цель работы* – моделирование собственных деформаций напрягающего бетона с пространственным ограничением дисперсными армирующими элементами.

**Модифицированная деформационная модель для различных типов ограничения напрягающего бетона.** Существует множество подходов к определению собственных деформаций и напряжений в напрягающем бетоне. Подробный обзор исследований по данной тематике изложен в [13]. В последнее время широкое внимание уделяется моделям, основанным на деформационном подходе [13–19]. Базовые положения деформационной модели расширяющейся композитной системы для различных уровней моделирования рассмотрены в [14].

В 2004 г. Ито и др. [15] была предложена модель определения самонапряжения одноосно-армированных преднапряженных балок, основанная на методе конечных элементов, с учетом линейной зависимости напряжений от деформаций и принципа суперпозиции, которая оценивала напряжения и деформации бетона в условиях ограничения, используя модели модуля Юнга, коэффициента ползучести, изменения аутогенной усадки и температуры. Предложенный метод с высокой точностью моделировал поведение балок из напрягающего бетона. При этом модель не учитывала влияние реакции, возникающей в упругом ограничении на очередных этапах прироста деформаций.

Впоследствии авторами [13,16] была предложена деформационная модель расчета связанных деформаций (самонапряжений) в элементах из напрягающего бетона, основанная на гипотезе о совместности деформаций, условиях равновесия и физических законах, описывающих поведение напрягающего бетона в раннем возрасте, в которой, в отличие от [15], учитывается влияние в ограничивающей связи ( $\Delta F$ ) (рис. 1).

Следующим этапом развития деформационной модели стал переход от конструкций с одноосно-ограниченным напрягающим бетоном к случаю двухосного ограничения. Авторами [17] была разработана расчетная модель (2D MSDM) для оценки параметров напряжения и деформации, двухосно-ограниченных растянутых бетонных элементов в раннем возрасте, которая позволяет определить связанные деформации и соответствующие самонапряжения при произвольных условиях ограничения в ортогональных направлениях с учетом упругопластического поведения бетона на стадии расширения

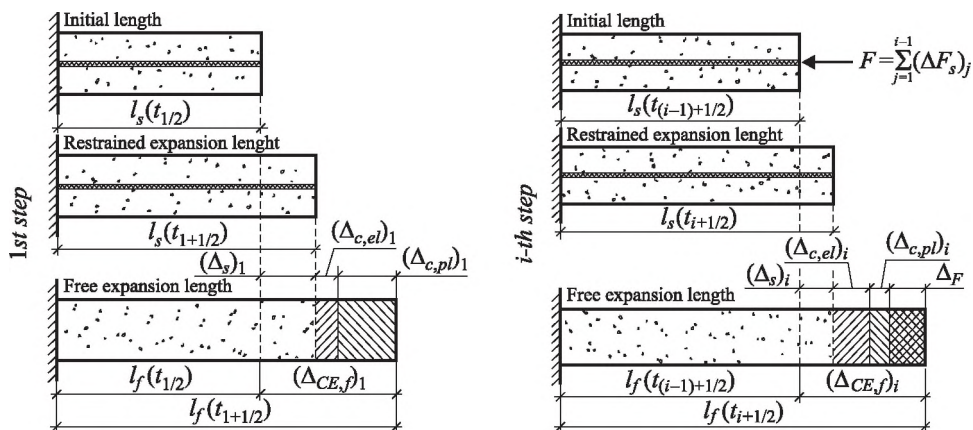


Рис. 1. Схема развития расширения в условиях одноосного симметричного ограничения конечной жесткости [16]

Fig. 1. Scheme of expansion development under uniaxial symmetrical finite stiffness restraint conditions [16]

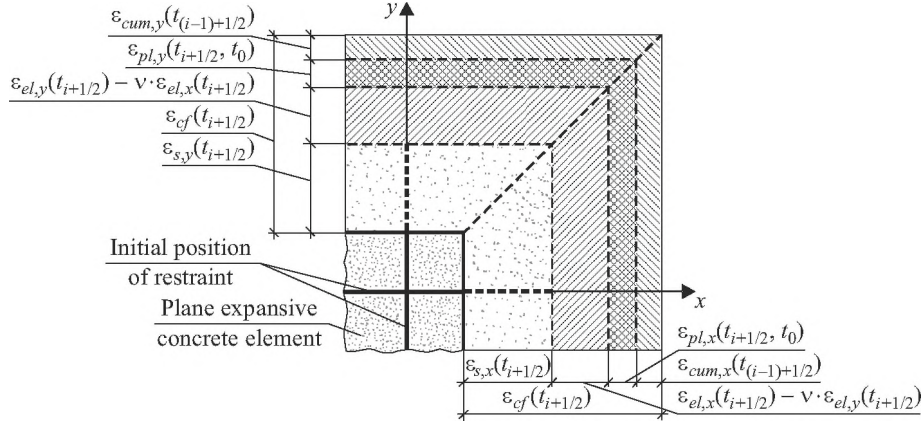


Рис. 2. Развитие деформаций в плоскости расширяющегося бетонного элемента [17]

Fig. 2. Development of strains in the plane expansive concrete element [17]

(рис. 2). Отличительной чертой предложенной аналитической модели является учет взаимного влияния ограничивающих связей путем введения коэффициента Пуассона для бетона в раннем возрасте к выделенной упругой относительной деформации бетона.

Заключительный возможный вариант ограничения напрягающего бетона в конструкции – трехосное (объемное) ограничение. Одним из примеров такого ограничения является конструкция стальной трубы, заполненная напрягающим бетоном. Разработанная [18] модель учла все предыдущие модификации. Однако важно отметить, что радиальное напряжение в стальной трубе не учитывается и материал трубы находится в двухосном напряженном состоянии (рис. 3).

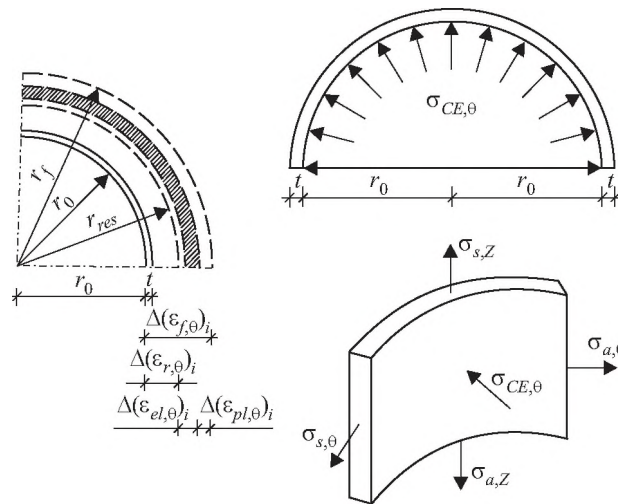


Рис. 3. Схема инкрементного подхода в предлагаемой модифицированной деформационной модели для расширяющейся стальной трубы, заполненной бетоном [18]

Fig. 3. Scheme of incremental approach in proposed MSDM for expansive concrete-filled steel tube [18]



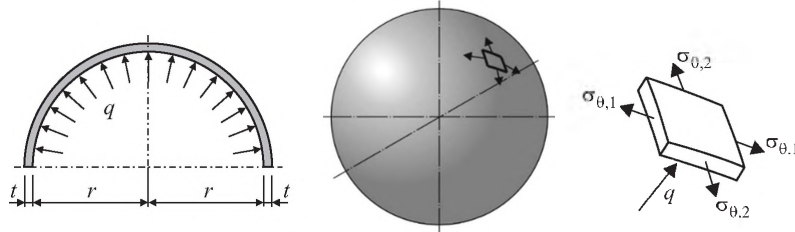


Рис. 4. Схема сферической оболочки из фибры с возникающими в ней напряжениями  $\sigma_t$  и  $\sigma_m$  от действия радиальной равномерно распределенной нагрузки  $q$

Fig. 4. Scheme of a spherical shell made of fiber with stresses  $\sigma_t$  and  $\sigma_m$  arising in it from the action of a radial uniformly distributed load  $q$

**Предпосылки и допущения модифицированной деформационной модели для случая трехосного ограничения.** Как было указано выше, FRSSC обычно рассматривают как модифицированный композит, для которого напряжения и деформации определяются с учетом стержневого армирования. Такой подход является некорректным, поскольку напрягающий фибробетон представляет условную «конструкцию», в которой фибра выступает в роли армирования и воспринимает напряжения от расширения. Предлагаемая в данной работе гипотеза (с учетом положений [14–19]) состоит в следующем:

1. Расчетная модель основана на предпосылке о том, что напрягающий фибробетон может быть представлен в виде шара из расширяющегося бетонного ядра и покрывающей его однородной оболочки постоянной толщины, состоящей из материала фибры (рис. 4).

2. Отношение толщины оболочки к радиусу шара пропорционально расходу фибры на единицу объема бетона.

3. Оболочка связана с ядром и не проскальзывает по поверхности бетона при деформациях шара.

4. Внутренние усилия, возникающие в расширяющемся бетонном ядре, и внутренние усилия, возникающие в ограничивающей его оболочке, взаимно уравновешены.

5. При расширении шара из напрягающего бетона радиусом  $r$  оболочка воспринимает радиальную равномерно распределенную нагрузку  $q$ , в результате в плоскости оболочки толщиной  $t$  возникают окружные и меридиональные напряжения, которые в силу шаровой симметрии равны  $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$ :

$$\sigma = \frac{qr}{2t}. \quad (1)$$

Относительная окружная  $\varepsilon_t$  и равная ей относительная меридиональная  $\varepsilon_m$  деформации определяются в соответствии с законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{E_s}(\sigma_t - \sigma_m \mu_s); \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{E_s}(\sigma_m - \sigma_t \mu_s). \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом равенства  $\varepsilon_t = \varepsilon_m = \varepsilon_r$  получается

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{E_s}(1 - \mu_s), \quad (3)$$

где  $\mu_s$  и  $E_s$  – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала оболочки соответственно.

6. Расширение напрягающего бетонного ядра происходит равномерно во всех направлениях.

7. При определении упругих деформаций напрягающего бетона объемное расширение учитывается введением коэффициента Пуассона для бетона в раннем возрасте, принимаемого  $\mu = 0,2$ .

8. Связанные относительные деформации  $\varepsilon_r$  для каждого ортогонального направления ( $X, Y, Z$ ) определяются путем вычитания из относительных деформаций свободного расширения  $\varepsilon_{cf}$  упругих и неупругих относительных деформаций от ползучести бетона ( $\varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{ac,pl}$ ), а также упругих относительных деформаций в результате действия дополнительной реакции упругого ограничения  $\varepsilon_{acc}$ .

Для определения напряжений от действия радиальной равномерно распределенной нагрузки  $q$  воспользуемся решением задачи тонкостенной сферической оболочки (см. рис. 4), нагруженной внутренним равномерным давлением [20].

Из уравнения Лапласа получим напряжения, возникающие в оболочке:

$$\begin{aligned} q = \sigma_{cf} = \frac{2t}{r} \sigma_m; \quad \sigma_m &= \frac{E_s}{1 - \mu_s} \varepsilon_m; \\ q = \sigma_{cf} = \frac{2t}{r} \sigma_t; \quad \sigma_t &= \frac{E_s}{1 - \mu_s} \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что  $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$ ,  $\varepsilon_m = \varepsilon_t = \varepsilon$  и принимая  $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ , получим

$$(\Delta \sigma_{cf})_i = \frac{2t}{r} \cdot \frac{E}{1 - \mu_s} (\Delta \varepsilon_r)_i. \quad (5)$$

В общем случае приращение связанной относительной деформации  $(\Delta \varepsilon_r)_i$  на произвольном  $i$ -м временном интервале может быть представлено в следующем виде (рис. 5):

$$\begin{aligned} (\Delta \varepsilon_r)_i &= (\Delta \varepsilon_f)_i - (\Delta \varepsilon_{el})_i - \\ &- (\Delta \varepsilon_{pl})_i - (\Delta \varepsilon_{acc})_i, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $(\Delta \varepsilon_f)_i$  – приращение свободной относительной деформации на произвольном  $i$ -м временном интервале;

$(\Delta \varepsilon_{el})_i$  – приращение упругой относительной деформации на произвольном  $i$ -м временном интервале;

$(\Delta \varepsilon_{pl})_i$  – приращение пластической относительной деформации на произвольном  $i$ -м временном интервале;

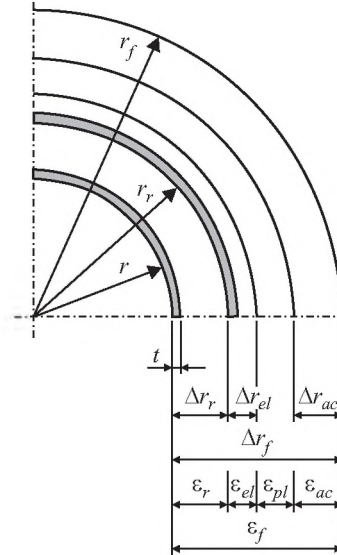


Рис. 5. Схема развития во времени деформаций расширения

Fig. 5. Scheme of development of expansion strains in time



$(\Delta\varepsilon_{acc})_i$  – приращение упругой относительной деформации в результате действия реакции упругого ограничения на произвольном  $i$ -м временном интервале.

Сумму приращений упругой  $(\Delta\varepsilon_{el})_i$  и пластической  $(\Delta\varepsilon_{pl})_i$  относительных деформаций на произвольном  $i$ -м временном интервале можно представить в виде

$$(\Delta\varepsilon_{el})_i + (\Delta\varepsilon_{pl})_i = (\Delta\sigma_{cf})_i \cdot J(t_{i+1/2}, t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (\Delta\sigma_{cf})_j \cdot \frac{\Delta\phi(t_i, t_j)}{E_{cm,28}} \right], \quad (7)$$

где  $J(t_{i+1/2}, t_j)$  – функция ползучести бетона:

$$J(t_{i+1/2}, t_j) = \frac{1}{E_c(t_j)} + \frac{\phi(t_{i+1/2}, t_j)}{E_{cm,28}}, \quad (8)$$

где  $E_c(t)$  – модуль упругости бетона в модифицированном возрасте, соответствующем реальному возрасту бетона  $t_j$ ;

$E_{cm,28}$  – модуль упругости бетона, соответствующий 28 сут реального возраста бетона;

$\Delta\phi(t_i, t_j)$  – приращение коэффициента ползучести бетона на произвольном  $i$ -м временном интервале

$$\Delta\phi(t_i, t_j) = \phi(t_{i+1/2}, t_j) - \phi(t_{(i-1)+1/2}, t_j). \quad (9)$$

Модифицированный возраст бетона  $t_i$ , соответствующий  $t$  суткам реального возраста бетона, учитывающий влияние температурного режима на стадии твердения и расширения бетона:

$$t_i = \sum_{j=1}^n \Delta t_j e^{13,65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_j)/T_0}}, \quad (10)$$

где  $\Delta t_j$  – количество суток (дней) с температурой  $T$  (°C);  $T_0 = 1$  °C.

Модуль упругости бетона в модифицированном возрасте, соответствующем реальному возрасту бетона  $t_j$ , может быть получен из

$$E_c(t) = E_{cm,28} \cdot \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{t_{m,28} - a}{t_i - a} \right)^{0,5} \right] \right\}, \quad (11)$$

где  $s$  – эмпирический коэффициент, учитывающий тип вяжущего;

$a$  – эмпирический коэффициент, учитывающий влияние времени начала схватывания.

Коэффициент ползучести бетона  $\phi(t, t_0)$  рассчитывают по следующей формуле:

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \cdot \beta_c(t, t_0), \quad (12)$$

где  $\phi_0$  – базовый коэффициент ползучести;

$$\phi_0 = 5,31 \left[ \frac{E_c(t_0)}{E_{cm,28}} - 1,0 \right]^2 + 1,11, \quad (13)$$

где  $\beta_c(t, t_0)$  – коэффициент, описывающий развитие ползучести во времени после нагружения.

$$\beta_c(t, t_0) = \frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)}, \quad (14)$$

$\beta_H$  – коэффициент, учитывающий влияние возраста бетона:

$$\beta_H \leftarrow \begin{cases} 0 \leq E_c(t)/E_{cm,28} < 0,346; \\ \beta_H = 0,000001; \\ 0,346 \leq E_c(t)/E_{cm,28} < 1; \\ \beta_H = 40,5[E_c(t)/E_{cm,28} - 0,346] + 0,485. \end{cases} \quad (15)$$

Приращения упругой относительной деформации  $(\Delta\varepsilon_{acc})_i$  в результате действия реакции упругого ограничения на произвольном  $i$ -м временном интервале можно представить в виде

$$(\Delta\varepsilon_{acc})_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{(\Delta\sigma_{cf})_j}{E_{cm}(t_j)} \right] \cdot \frac{E_{cm,aw}(t_{i+1/2})}{E_{cm}(t_{i+1/2})}, \quad (16)$$

где  $E_{cm,aw}(t_{i+1/2})$  – средневзвешенный модуль упругости напрягающего бетона к концу  $i$ -го элементарного временного интервала:

$$E_{cm,aw}(t_{i+1/2}) = \frac{\sum_{j=1}^i (\Delta\sigma_{cf})_j E_{cm}(t_j)}{\sum_{j=1}^n (\Delta\sigma_{cf})_j}, \quad (17)$$

где  $(\Delta\sigma_{cf})_j$  – приращение величины самонапряжения на  $j$ -м элементарном временном интервале;

$E_{cm}(t_j)$  – модуль упругости напрягающего бетона в модифицированном возрасте, соответствующем реальному возрасту  $t_j$ ;

$E_{cm}(t_{i+1/2})$  – модуль упругости напрягающего бетона в модифицированном возрасте, соответствующем реальному возрасту напрягающего бетона  $t_{i+1/2}$ , который идентичен концу рассматриваемого  $i$ -го элементарного временного интервала.

Решая совместно (5) и (6) для каждого ортогонального направления ( $X, Y, Z$ ), получим приращения собственных связанных деформаций на каждом  $i$ -м временном интервале:

$$\begin{cases} (\Delta\sigma_{cf,x})_i = \frac{2t}{r} \cdot \frac{E_s}{1-\mu_s} (\Delta\varepsilon_{r,x})_i; \\ (\Delta\sigma_{cf,y})_i = \frac{2t}{r} \cdot \frac{E_s}{1-\mu_s} (\Delta\varepsilon_{r,y})_i; \\ (\Delta\sigma_{cf,z})_i = \frac{2t}{r} \cdot \frac{E_s}{1-\mu_s} (\Delta\varepsilon_{r,z})_i. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases}
 (\Delta\varepsilon_{r,x})_i = (\Delta\varepsilon_{f,x})_i - [(\Delta\sigma_{cf,x})_i - \mu_c(\Delta\sigma_{cf,y})_i - \mu_c(\Delta\sigma_{cf,z})_i]J(t_{i+1/2}, t_i) - \\
 - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (\Delta\sigma_{cf,x})_j \cdot \frac{\Delta\phi(t_i, t_j)}{E_{cm,28}} \right] - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{(\Delta\sigma_{cf,x})_j}{E_{cm}(t_j)} \right] \frac{E_{cm,aw}(t_{(i-1)+1/2})}{E_{cm}(t_{(i-1)+1/2})}; \\
 (\Delta\varepsilon_{r,y})_i = (\Delta\varepsilon_{f,y})_i - [(\Delta\sigma_{cf,y})_i - \mu_c(\Delta\sigma_{cf,x})_i - \mu_c(\Delta\sigma_{cf,z})_i]J(t_{i+1/2}, t_i) - \\
 - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (\Delta\sigma_{cf,y})_j \cdot \frac{\Delta\phi(t_i, t_j)}{E_{cm,28}} \right] - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{(\Delta\sigma_{cf,y})_j}{E_{cm}(t_j)} \right] \frac{E_{cm,aw}(t_{(i-1)+1/2})}{E_{cm}(t_{(i-1)+1/2})}; \\
 (\Delta\varepsilon_{r,z})_i = (\Delta\varepsilon_{f,z})_i - [(\Delta\sigma_{cf,z})_i - \mu_c(\Delta\sigma_{cf,x})_i - \mu_c(\Delta\sigma_{cf,y})_i]J(t_{i+1/2}, t_i) - \\
 - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (\Delta\sigma_{cf,z})_j \cdot \frac{\Delta\phi(t_i, t_j)}{E_{cm,28}} \right] - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{(\Delta\sigma_{cf,z})_j}{E_{cm}(t_j)} \right] \frac{E_{cm,aw}(t_{(i-1)+1/2})}{E_{cm}(t_{(i-1)+1/2})}.
 \end{cases} \quad (19)$$

В силу шаровой симметрии системы уравнений (18) и (19) для каждого ортогонального направления ( $X, Y, Z$ ) могут быть представлены в виде двух уравнений:

$$(\Delta\sigma_{cf})_i = \frac{2t}{r} \cdot \frac{E_s}{1-\mu_s} \cdot (\Delta\varepsilon_r)_i; \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta\varepsilon_r)_i &= (\Delta\varepsilon_f)_i - (\Delta\sigma_{cf})_i \cdot (1-2\mu_c) \cdot J(t_{i+1/2}, t_i) - \\
 &- \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (\Delta\sigma_{cf})_j \cdot \frac{\Delta\phi(t_i, t_j)}{E_{cm,28}} \right] - \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{(\Delta\sigma_{cf})_j}{E_{cm}(t_j)} \right] \cdot \frac{E_{cm,aw}(t_{(i-1)+1/2})}{E_{cm}(t_{(i-1)+1/2})}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

**Заключение.** Разработана модифицированная расчетная модель для определения собственных напряжений и связанных деформаций на стадии расширения напрягающего бетона в условиях пространственного ограничения свободных деформаций дисперсными армирующими элементами произвольной жесткости, отличающаяся от существующих моделей тем, что учитывает в расчетах взаимное влияние ограничивающих элементов в трех направлениях путем введения коэффициента Пуассона для бетона к выделенной упругой относительной деформации бетона, что позволяет определять напряжения в бетоне и деформации в ограничивающем элементе, представленном дисперсным армированием, в произвольный временной интервал до момента стабилизации свободного расширения. Предложенная модель способна по заданным значениям связанных деформаций определять необходимое количество дисперсного армирования. Разработанная аналитическая модель применима для любых составов напрягающего бетона, а также при различных комбинациях дисперсного армирования. Верификация модели будет опубликована в следующей статье.

#### Список источников

1. Михайлов В.В., Лутвер С.Л. Расширяющиеся и напрягающиеся цементы и самонапряженные конструкции. М.: Стройиздат, 1974. 389 с.
2. He H., Wang B., Lin J. Performance on steel fiber reinforced self-stressing concrete // Key Engineering Materials. 2009. Vol. 400–402. P. 427–433.

3. Павлова И.П., Белкина И.В. Многоуровневое дисперсное армирование напрягающего бетона // Вестн. Гроднен. гос. ун-та им. Янки Купалы. Сер. 6. Техника. 2022. Т. 12, № 2. С. 103–118.
4. Павлова И.П., Беломесова К.Ю. Влияние на прочность бетона способа введения базальтового фиброволокна в цементную систему // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2019. № 1. С. 34–38.
5. Benaicha M., Jalbaud O., Hafidi A., Burtshell Y. Rheological and mechanical characterization of fiber-reinforced self-compacting concrete // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). 2013. Vol. 2. Issue 7. P. 2277–3754.
6. Suta M., Lukasenoks A., Cepuritis R. Determination of material design values for steel fibre reinforced self-stressing concrete (SFRSSC) structures // Engineering for Rural Development. 2020. P. 631–637. <https://doi.org/10.22616/ERDev.2020.19.TF142>.
7. Sugathan A. Self compacting high performance concrete with steel fibres // International Journal of Scientific Engineering and Research (IJSER). 2016. Vol. 4. Issue 6. P. 35–40.
8. Paralada S. Steel fiber reinforced self compacting concrete // International Journal for Research in Engineering Application & Management. 2019. Vol. 4. Issue 10. P. 501–506.
9. Abid S.R., Ali S.H., Goaziz H.A., Al-Gasham T.S., Kadhim A.L. Impact resistance of steel fiber-reinforced selfcompacting concrete // Magazine of Civil Engineering. 2021. Vol. 105, no. 5.
10. Wang B., Fang R., Wang Q. Flexural behavior of fiber-reinforced self-stressing concrete T-shaped composite beams // Advances in Civil Engineering. 2020. P. 1–17. <https://doi.org/10.1155/2020/8810440>.
11. Wang B., Huang C., He H. Study on application of steel fibre reinforced self-stressing concrete in transforming old simply supported bridges into continuous system // IABSE Congress Report. 2008. Vol. 17, no. 11. P. 324–325.
12. Павлова И.П. Применение теории эффективной среды для прогнозирования самоупругения напрягающего базальто-фибробетона // Проблемы современного бетона и железобетона. 2018. № 10. С. 200–213.
13. Тур В.В., Семенов О.С. Модели, применяемые для расчета связанных деформаций и самоупругений в элементах из напрягающего бетона // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2016. № 1. С. 53–69.
14. Тур В.В., Семенов О.С. К оценке величины самоупругения в конструкциях из напрягающего бетона // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2014. № 1. С. 16–24.
15. Ito H., Maruyama I., Tanimura M., Sato R. Early age deformation and resultant induced stress in expansive high strength concrete // Journal of Advanced Concrete Technology. 2004. No. 2. P. 155–174.
16. Semianiuk V., Tur V., Herrador M.F. Early age strains and self-stresses of Expansive concrete members under uniaxial restraint conditions // Construction and Building Materials. 2017. Vol. 131. P. 39–49.
17. Sannikava V., Tur V. The modified early age strains development model for the case of two-way restraint conditions // MATEC Web of Conferences. 2021. Vol. 350. <https://doi.org/10.1051/mateconf/202135000010>
18. Tur V.V., Duda R., Khmaruk D., Basav V. Analytical model for restraint strains and self-stressed in expansive concrete filled steel tubes (ecfst) estimation // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2020. № 1. P. 93–98.
19. Chang X., Huang C., Zhang P. Expansive behaviors of self-stressing concrete under different restraining conditions // Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed. 2011. Vol. 26, no. 4. P. 780–785.
20. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1969. 402 с.

### References

1. Mikhaylov V.V., Litver S.L. Expansive and self-stressing cements and self-stressed reinforced structures. Moscow: Stroyizdat, 1974. 389 p. (In Russ.).
2. He H., Wang B., Lin J. Performance on steel fiber reinforced self-stressing concrete. *Key Engineering Materials*. 2009; 400–402: 427–433.
3. Pavlova I.P., Belkina I.V. Multilevel dispersive reinforcement of self-stressed concrete. *Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Ianki Kupaly. Seriya 6. Tekhnika = Vestnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 6. Engineering Science*. 2022; 12(2): 103–118. (In Russ.).
4. Pavlova I.P., Belomesova K.Yu. Influence of the way of introduction of basalt fibrovlokn to tse-mentnuyu the system on concrete durability. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura = Vestnik of Brest State Technical University. Civil Engineering and Architecture*. 2019; (1): 34–38. (In Russ.).
5. Benaicha M., Jalbaud O., Hafidi A., Burtschell Y. Rheological and mechanical characterization of fiber-reinforced self-compacting concrete. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*. 2013; 2(7): 2277–3754.
6. Suta M., Lukasenoks A., Cepuritis R. Determination of material design values for Steel Fibre Reinforced Self-Stressing Concrete (SFRSSC) structures. *Engineering for Rural Development*. 2020: 631–637. <https://doi.org/10.22616/ERDev.2020.19.TF142>
7. Sugathan A. Self compacting high performance concrete with steel fibres. *International Journal of Scientific Engineering and Research*. 2016; 4 (6): 35–40.
8. Paralada S. Steel fiber reinforced self compacting concrete. *International Journal for Research in Engineering Application & Management*. 2019; 4 (10): 501–506.
9. Abid S.R., Ali S.H., Goaiz H.A., Al-Gasham T.S., Kadhim A.L. Impact resistance of steel fiber-reinforced selfcompacting concrete. *Magazine of Civil Engineering*. 2021; 105(5).
10. Wang B., Fang R., Wang Q. Flexural behavior of fiber-reinforced self-stressing concrete T-shaped composite beams. *Advances in Civil Engineering*. 2020; 1–17. <https://doi.org/10.1155/2020/8810440>
11. Wang B., Huang C., He H. Study on application of steel fibre reinforced self-stressing concrete in transforming old simply supported bridges into continuous system. *IABSE Congress Report*. 2008; 17(11): 324–325.
12. Pavlova I.P. Application of the effective environment theory for predicting the self-stress of stressed basalt-fibre-reinforced concrete. *Problemy sovremennogo betona i zhelezobetona = Problems of modern concrete and reinforced concrete*. 2018; (10): 200–213. (In Russ.).
13. Tur V.V., Semenyuk O.S. Models for restrained strains and self-stressing stresses in the members made of expansive concrete calculation. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura = Vestnik of Brest State Technical University. Civil Engineering and Architecture*. 2016; (1): 53–69. (In Russ.).
14. Tur V.V., Semenyuk O.S. To the estimating of the resultant induced stresses in the self-stressed structures. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura = Vestnik of Brest State Technical University. Civil Engineering and Architecture*. 2014; (1): 16–24. (In Russ.).
15. Ito H., Maruyama I., Tanimura M., Sato R. Early age deformation and resultant induced stress in expansive high strength concrete. *Journal of Advanced Concrete Technology*. 2004; (2): 155–174.
16. Semenyuk V., Tur V., Herrador M.F. Early age strains and self-stresses of Expansive concrete members under uniaxial restraint conditions. *Construction and Building Materials*. 2017; (131): 39–49.

17. Sannikava V., Tur V. The modified early age strains development model for the case of two-way restraint conditions. *MATEC Web of Conferences*. 2021; 350. <https://doi.org/10.1051/mateconf/202135000010>
18. Tur V.V., Duda R., Khmaruk D., Basav V. Analytical model for restraint strains and self-stressed in expansive concrete filled steel tubes (ecfst) estimation. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura = Vestnik of Brest State Technical University. Civil Engineering and Architecture*. 2020; (1): 93–98.
19. Chang X., Huang C., Zhang P. Expansive behaviors of self-stressing concrete under different restraining conditions. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.* 2011; 26(4): 780–785.
20. Avdonin A.S. Applied methods for calculating shells and thin-walled structures. Moscow, 1969. 402 p. (In Russ.).

#### Информация об авторах

**И.П. Павлова** – кандидат технических наук, доцент, pavlinna@tut.by  
**И.В. Белкина** – магистр, аспирант, lutaja-95@mail.ru

#### Information about the authors

**I.P. Pavlova** – PhD, Ass. Professor, pavlinna@tut.by  
**I.V. Belkina** – MSc, Post-graduate Student, lutaja-95@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 20.07.2022  
Одобрена после рецензирования 21.08.2022  
Принята к публикации 28.08.2022

The article was submitted 20.07.2022  
Approved after reviewing 21.08.2022  
Accepted for publication 28.08.2022