

Андрей Евгеньевич ЖЕЛТКОВИЧ,
ассистент кафедры
"Сопротивление материалов
и теоретическая механика"
Брестского государственного
технического университета

Виктор Владимирович ТУР,
доктор технических наук,
профессор,
заведующий кафедрой
"Технология бетонов"
Брестского государственного
технического университета

РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ОТ УСАДКИ В МОНОЛИТНЫХ БЕТОННЫХ ПЛИТАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОСНОВАНИЕМ

CALCULATION OF FORCED DISPLACEMENTS AND SHRINKAGE STRESS IN MONOLITHIC CONCRETE SLABS INTERACTING WITH THE BASE

В статье рассмотрена проблема расчета монолитных плит на основании, представлена модель, описывающая развитие напряженно-деформированного состояния в плите, определены параметры этой модели. Выполнено исследование опытных образцов плит, получены аналитические зависимости развития перемещений при сдвиге в зависимости от типов оснований, рассмотрено предложение при сдвиге "бетона — по бетону" кривую сдвига аппроксимировать трехлинейной диаграммой.

This article deals with the issues of calculation of monolithic slabs on the bases. The model describing the development of the stress-strain state in the slab has been given and model parameters have been determined. The slab specimen were tested, the analytical dependences of the development of shear displacements depending on the type of the base were obtained. In case of concrete-on-concrete shear, a suggestion to approximate a displacement curve by the three-linear diagram was considered.

ВВЕДЕНИЕ

В силу значительно возросшего применения монолитного бетона в строительстве, главным образом при изготовлении плит различного назначения (плит перекрытий зданий, перекрытий пролетов мостов, эстакад, монолитных полов промышленных, общественных зданий и сооружений), встает вопрос поиска адекватных методов расчета таких конструкций. В настоящее время базовым нормативным документом, регламентирующим проектирование полов производственных, жилых, общественных, административных и бытовых зданий, является СНиП 2.03.13 [1]. При проектировании устанавливаются только два основных параметра бетонных слоев полов — толщину плиты и класс бетона по прочности на сжатие. Методика расчета напряжений в таких конструкциях, учитывающая процессы температурных воздействий, усадки, расширения, протекающих в бетоне в период твердения при взаимодействии проектируемого слоя с основанием, в нормах отсутствует. В плитах, устраиваемых на основании, для исключения ограничивающего влияния основания на напряженно-деформированное состояние применяют скользящий слой, а для борьбы с усадочными явлениями используют арматурные сетки, которые располагают по середине высоты слоя (с коэффициентом армирования 0,15 %–0,20 %). При отказе от применения скользящего слоя монолитную плиту выполняют толщиной от 150 до 200 мм.

Конструкции такого типа (например, дорожные, аэродромные покрытия) находятся при постоянном воздействии агрессивных сред и интенсивных нагрузок, атмосферной влаги, перепадов температур. Покрытия претерпевают значительные физико-механические изменения в условиях ограничения деформаций (перемещений) со стороны основания. Усадка, развивающаяся

при твердении традиционных бетонов на портландцементе в сочетании с их низкой прочностью на растяжение, приводит к риску возникновения растягивающих напряжений и появлению усадочных трещин, как правило, еще в доэксплуатационный период. Усадочные трещины повышают деформативность плит, существенно снижают их проектный срок эксплуатации.

Исследование напряженно-деформированного состояния бетонных конструкций, подверженных вынужденным деформациям, продолжается уже не одно десятилетие. Этому вопросу посвящен целый ряд работ [2–10]. В некоторых случаях расчетные модели, используемые для вычисления напряжений от усадки (расширения) в конструкциях, строятся на основе применения аналогии температурного воздействия, так как механизм деформаций, возникающих в конструкциях от названных воздействий, во многом схож.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ввиду того, что устранить усадку в монолитных бетонных плитах, изготовленных из бетонов на традиционных цементах, очень сложно и нельзя избежать колебаний температуры на площадках, в плитах устраиваются деформационные швы. Методика расчета частоты устроительства швов *в нормах* [1] *отсутствует* (частота расположения швов назначается конструктивно).

Исследования бесшовных плит покрытия различного назначения показали, что неразрезные конструкции имеют лучшие эксплуатационные характеристики по сравнению с традиционными разрезными плитами [2]. Вместе с тем, производство такого покрытия по ряду параметров имеет завышенные показатели расхода материалов, что связано с *отсутствием* при их проектировании адекватных *расчетных методик*. Таким образом, приоритетная задача настоящего исследования была

направлена на разработку соответствующей методики, позволяющей прогнозировать места устройства деформационных швов в бетоне плиты, опираясь на расчет ее напряженно-деформированного состояния.

2 СУЩЕСТВУЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДИКИ

Широкие исследования по изучению влияния усадочных и температурных воздействий на монолитную плиту на основании представлены в работе [5], где имеются решения, использующие предпосылки об упругом деформировании конструкции. Усилие, действующее в плите, определяли как произведение коэффициента трения по основанию на нормальную составляющую нагрузки от веса плиты. Силу трения плиты по грунту находили из выражения (1), а напряжение — из (2):

$$F_t = \mu_{\max} \cdot F_N, \quad (1)$$

$$\sigma = (\sigma_{F1} + \sigma_{F2}) + \sigma_R, \quad (2)$$

где $\sigma_{F1} = \pm \frac{F_t}{H}$;

$$\sigma_{F2} = \pm \frac{M_F}{R} = \pm \frac{F_t \cdot \left(\frac{H}{2}\right)}{\frac{H^3}{12}}$$

$$\sigma_R = \pm \frac{M_R}{W} = \pm \frac{M_R}{\frac{H^2}{6}}$$

F_N — нормальная сила, Н;

μ_{\max} — максимальный коэффициент трения плиты по основанию;

M_F — момент, обусловленный эксцентриситетом приложения силы трения;

M_R — момент от перераспределения нормальных усилий от грунта.

Коэффициент трения μ_{\max} предложено рассчитывать по аналитической зависимости, полученной в [11] и представленной на рис. 1:

$$\mu_{\max} = 0,59 + 0,09 \cdot \ln\left(\frac{d_{50}}{d_v}\right) + 0,0372 \cdot \ln(R_R) + 0,561D - 0,108 \cdot \frac{p}{p_a}, \quad (3)$$

где d_{50} — средний размер частичек грунта основания, мм;

d_v — базовое эталонное значение, 1 мм;

R_R — относительная шероховатость поверхности (0,1 — гладкая; 1,0 — шероховатая);

D — коэффициент уплотнения грунтового основания, $D = 0,3-0,7$;

p — реактивное давление от грунта, кПа;

p_a — базовое эталонное значение, принятое равным 100 кПа.

В [6] приведена расчетная модель, описывающая поведение плиты, претерпевающей усадочные деформации в условиях ограничения усадки со стороны основания. В соответствии с диаграммой, принятой при описании модели (рис. 2), связь между касательными напряжениями, действующими по контакту плиты с

основанием, и перемещениями в тангенциальном направлении выражается следующими зависимостями:

$$\begin{cases} \tau = \frac{\tau_1}{u_1} \cdot |u|, & \text{для } 0 \leq |u| \leq u_1 \\ \tau = \tau_1, & \text{для } |u| \geq u_1, \end{cases} \quad (4)$$

где u — текущее перемещение плиты относительно основания в произвольной точке;

τ_1 — максимальное касательное напряжение в контакте между плитой и основанием;

u_1 — перемещение, соответствующее касательному напряжению τ_1 .

Характеристики τ_1 и u_1 , полученные при сдвиге бетона для семи различных типов оснований, определены экспериментальными исследованиями сдвига образцов плит по различным типам оснований [7–10]. В общем случае перемещение u может быть представлено в виде суммы:

$$u(x) = u_f(x) + u_c(x), \quad (5)$$

где $u_f(x)$ — перемещение, вызванное усадкой бетона;

$u_c(x)$ — перемещение, являющееся результатом приложения внешней осевой нагрузки.

Общее дифференциальное уравнение, описывающее перемещение плиты от усадки при решении задачи в упругой постановке, может быть записано в традиционном виде:

$$\frac{d^2 \cdot u}{dx^2} - \frac{\tau(u)}{E_c \cdot h} = 0, \quad (6)$$

где E_c — модуль упругости бетона;

h — толщина плиты.

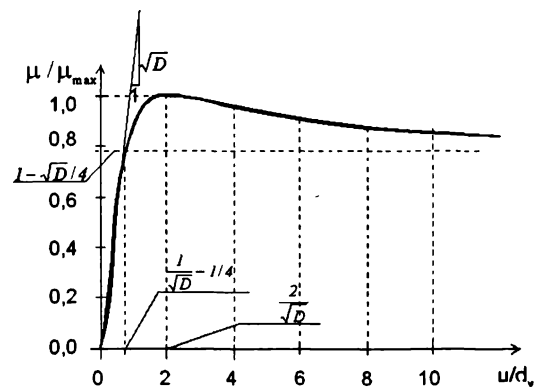


Рис. 1. Графическая интерпретация формулы (3)

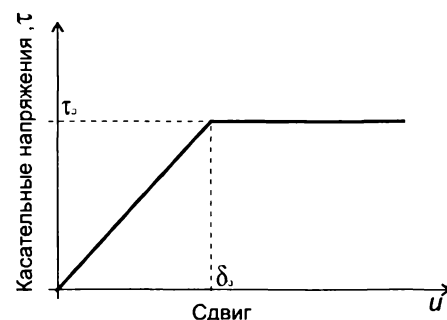


Рис. 2. Зависимость "τ - u" [6]

Решение уравнения (6) относительно перемещений u имеет вид:

$$u = -\frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{\sigma_{co}}{E_{c,t}} + \epsilon_{sh,t} \right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2}\right)}, \quad (7)$$

а для соответствующих напряжений:

$$\sigma_c = -E_{c,t} \cdot \epsilon_{ch,t} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\beta\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\sinh\beta\left(\frac{L}{2}\right)} \right] + \sigma_{co} \cdot \frac{\cosh\beta\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\sinh\beta\left(\frac{L}{2}\right)}, \quad (8)$$

где $\sigma_{co}/E_{c,t}$ — упругая составляющая относительных деформаций бетона;
 $\epsilon_{ch,t}$ — деформация свободной усадки в бетоне в произвольный момент времени;
 σ_{co} — внутреннее осевое напряжение, являющееся результатом действия дополнительной внешней нагрузки;
 $\beta = \sqrt{\tau_t / (E_{c,t} \cdot H \cdot u_t)}$ — коэффициент, зависящий от характеристик контакта бетона плиты с основанием, модуля упругости бетона, геометрии плиты.

В [12] напряжения в бетоне плиты предлагается оценивать по перемещениям ограничивающих связей (арматуры, сборной части сборно-монолитной конструкции), жесткости которых или деформативные характеристики связей считаются известными. Подход основан на подсчете упругой относительной деформации ограничивающей связи с учетом количества и положения (распределения) ее в бетоне. Если в качестве ограничивающей связи рассматривается сборный элемент, соединенный с монолитной частью посредством стыкового соединения, то расчет перемещений и напряжений в конструкции может быть получен на основе известного решения, представленного в [6]. Параметры $\tau_{Rd,j}$ и δ_t для стыкового соединения, использованные в расчетных моделях [13, 14], были установлены в условиях сдвига армированных контактов сборно-монолитных образцов и применены главным образом для стыкового соединения, пронизанного арматурой.

Существующие методики не лишены недостатков. Так, в деформационных моделях, представленных в [5, 6], в качестве обобщенных характеристик, описывающих взаимодействие плиты с основанием, выступают либо так называемые усредненные характеристики сдвига бетона по основанию τ , и u , аппроксимированные двухлинейной диаграммой Прандтля "τ — u" (см. рис. 2), либо аналитическая зависимость, описывающая поверхностные характеристики основания при сдвиге бетона (зависимость Колба [11], см. рис. 1).

Числовые значения характеристик, применяемых для описания диаграммы сдвига, представленные в работе [6], являются общими для ряда оснований. Но для каждого типа основания, например гравийного, щебеночного, значения могут изменяться. Более того, при использовании бетонного основания, щебня, стабилизированного цементом, использование двухлинейной аппроксимации диаграммы сдвига не вполне корректно, что вносит погрешность в результаты расчетов. Необходимо отметить, что какая-либо ме-

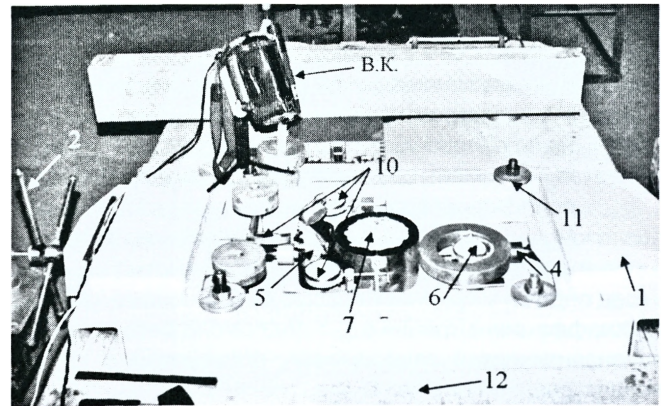
тодика получения диаграмм сдвига в вышеуказанных работах отсутствует.

Названные обстоятельства потребовали проведения дополнительных исследований с целью получения полных диаграмм сдвига бетонных плит по различным основаниям, наиболее часто используемым в практике строительства (гравийному, щебеночному, бетонному основаниям и основанию с так называемым скользящим слоем), а также более точного описания кривой сдвига "τ — u".

3 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОЛУЧЕНИЕ ДИАГРАММ "ПЕРЕМЕЩЕНИЕ — НАПРЯЖЕНИЕ" ПРИ СДВИГЕ БЕТОННЫХ ПЛИТ ПО ОСНОВАНИЮ

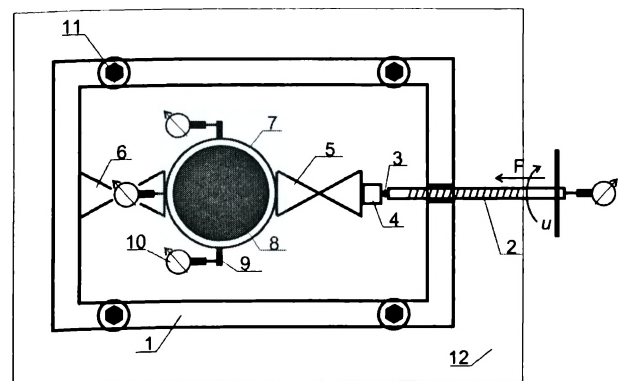
С целью получения диаграмм, связывающих касательные (сдвиговые) напряжения и перемещения, авторами были выполнены исследования сдвига бетонных образцов по различным типам оснований на специально разработанных сдвиговых установках. Следует отметить, что получение полных диаграмм деформирования "τ — u" возможно лишь в условиях так называемого "жесткого" режима нагружения.

Для реализации поставленной цели были разработаны сдвиговой прибор [15] и его усовершенствованная модификация [16], обеспечившая в процессе испытаний так называемый "жесткий" режим нагружения при контролируемой деформации. Общий вид сдвиговой



1 — жесткая силовая рама; 2 — силовой винт; 3 — центрирующий шарик; 4 — плавающий подшипник; 5 — нагрузочный динамометр; 6 — демпфирующий динамометр; 7 — металлический штамп для бетона; 8 — образец бетона; 9 — упорное ухо для индикатора; 10 — индикаторы часового типа; 11 — болты-шпильки; 12 — основание; "В.К." — видеокamera

Рис. 3. Общий вид сдвиговой установки



1-10 — то же, что на рис. 3

Рис. 4. Принципиальная схема сдвиговой установки [16]

установки [16] и ее принципиальная схема работы приведены на рис. 3, 4.

Испытания на сдвиг предваряет подготовка установки и бетонирование образца 8. Параллельно бетонировали образцы-кубы для определения прочности бетона к моменту сдвига. Через заданное время с помощью силового винта 2 ступенями по 0,005 мм передавали перемещение на нагрузочный динамометр 5. Величина приложенного усилия определялась по динамометрам 5 и 6. Благодаря демпфирующему кольцевому динамометру 6 обеспечивалась возможность плавного сдвига и плавного разрушения контакта после прохождения пиковой точки диаграммы, соответствующей максимальным напряжениям на контакте.

По полученным опытным данным строили зависимости касательных напряжений от перемещений и прочности бетона образца. Для обеспечения высокой точности измерений показания по индикаторам фиксировались при помощи видеокамеры "В.К." (см. рис. 3) и проговаривались в микрофон. Затем анализировали полученные данные. Напряжения рассчитывались путем вычитания показаний, зафиксированных на нагрузочном и демпфирующем динамометрах, отнесенных к номинальной площади контакта (площади бетонного образца).

Графики зависимости значений максимальных (пиковых) напряжений диаграммы сдвига от прочности бетона для условий контакта "бетон — по бетону", полученных в опытах, представлены на рис. 5, 6. При сдвиге "бетон — по бетону" аппроксимирующая кривая для значений пиковых диаграмм в зависимости от прочности бетона плиты имеет вид: $\tau_{1,R(t)} = a \cdot \ln(f_{c,cube}^m + b) + c$, где $f_{c,cube}^m$ — средняя прочность бетона на сжатие; $a = 0,4$; $b = 4,0$; $c = (-0,6)$ (для условий выполненного испытания).

В ряде случаев, согласно рис. 6, целесообразно представить зависимость напряжений в контакте от прочности бетона на растяжение: $\tau_{1,R(t)} = f(f_{ctm})$. Прочность бетона на растяжение получена из известного уравнения, приведенного в [17]:

$$f_{ctm} = 0,21 \cdot (f_{c,cube}^m)^{2/3}.$$

Зависимость значений перемещений, соответствующих пиковой точке диаграммы сдвига, от прочности бетона показана на рис. 7, а зависимость значений перемещений, соответствующих минимальному напряжению в контакте (после разрушения контакта), от прочности бетона — на рис. 8.

При анализе кривых сдвига бетона по основаниям из гравия, щебня и основанию с так называемым скользящим слоем (выполненным из двух слоев полиэтиленовой пленки) полученные значения напряжений и перемещений (ввиду незначительной разницы в виде диаграммы "до" и "после" достижения точки, соответствующей максимальному напряжению на контакте τ_1 и перемещению u_1) предложено аппроксимировать двухлинейной диаграммой Прандтля " $\tau - u$ " ([18], рис. 3-5, с. 123). Параметрические значения этой диаграммы получены путем усреднения максимальных значений напряжений на контакте и значений перемещений. Параметрические точки аппроксимации кривых сдвига бетонного штампа по различным типам оснований, полученные на сдвиговой установке [15], представлены в таблице 1.

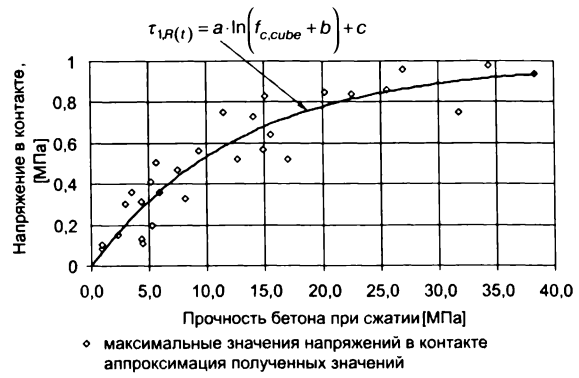


Рис. 5. График зависимости максимальных напряжений $\tau_{1,R(t)}$, полученных на контакте, от прочности бетона образца на сжатие при сдвиге "бетон — по бетону"



Рис. 6. График зависимости максимальных напряжений $\tau_{1,R(t)}$, полученных на контакте, от прочности бетона образца на растяжение при сдвиге "бетон — по бетону"



Рис. 7. График зависимости перемещений $u_{1,R(t)}$, соответствующих напряжениям $\tau_{1,R(t)}$, от прочности бетона образца на сжатие при сдвиге "бетон — по бетону"

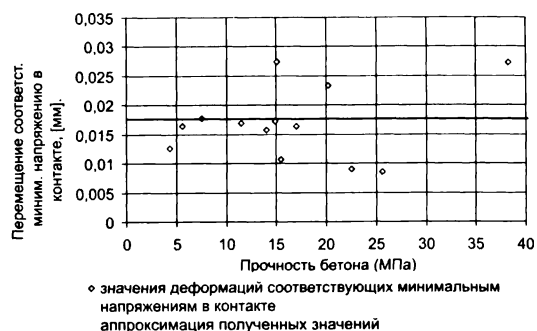


Рис. 8. График зависимости перемещений u_2 , соответствующих минимальному напряжению τ_2 в контакте, от прочности бетона образца на сжатие при сдвиге "бетон — по бетону"

Таблица 1. Параметрические точки диаграмм сдвига бетонного штампа по различным типам оснований, полученные по результатам опытов

Вид основания	Напряжение τ_1 , МПа	Перемещение u_1 , мм
Щебень	0,0090	0,14
Песок гравелистый	0,0066	0,71
Полиэтиленовое покрытие	0,0006	0,80

При проведении экспериментов по сдвигу бетонных образцов по бетонному "жесткому" основанию получены диаграммы, связывающие касательные (сдвиговые) напряжения и перемещения с прочностью бетона. Кривые сдвига "бетон — по бетону" предложено аппроксимировать трехлинейной диаграммой сдвига, представленной на рис. 9.

4 РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

4.1 Определение перемещений

Расчет монолитной бетонной плиты, опирающейся на основание, выполнялся в два этапа. Определение перемещений — на основе полученного дифференциального уравнения (6) (расчет перемещений) и расчет напряжений — в соответствии с принципом, изложенным в [4], с возможностью учета упругопластических свойств бетона (расчет напряжений). Для записи расчетных уравнений модели, учитывающей трехлинейную аппроксимацию кривых сдвига (рис. 10), рассмотрим элемент плиты длиной dx (рис. 11).

При построении расчетной модели были приняты следующие допущения:

- 1) усадочные относительные деформации равномерно распределены по высоте сечения плиты;
- 2) вертикальные перемещения плиты не рассматриваются.

Для трансформированной диаграммы (см. рис. 10) связь между касательными напряжениями, действующими по контакту плиты с основанием, и перемещениями в тангенциальном направлении может быть представлена в виде формул:

$$\tau(u) = \frac{\tau_1}{u_1} \cdot |u| \quad \text{для } 0 \leq |u| \leq u_1, \quad (9)$$

$$\tau(u) = k \cdot u + b \quad \text{для } u_1 \leq |u| \leq u_2, \quad (10)$$

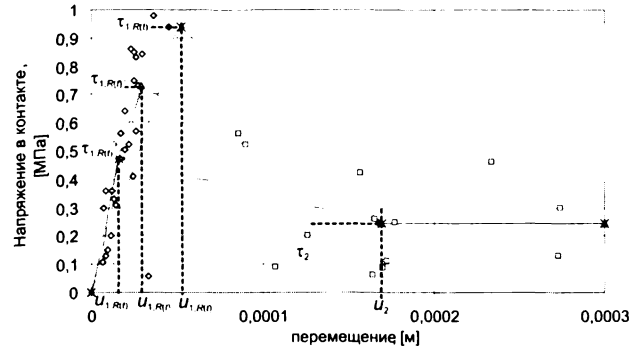
$$\tau(u) = \tau_2 \quad \text{для } |u| \geq u_2, \quad (11)$$

где $k = \frac{\tau_2 - \tau_1}{u_2 - u_1}$;

$$b = \tau_1 - \frac{u_1}{u_2 - u_1}.$$

С учетом принятых допущений и в соответствии со схемой, показанной на рис. 11, а также принимая, что $\sigma_c(x) = E_c \cdot \varepsilon_{\text{упр}}$, а $|\varepsilon_{\text{упр}}| = \varepsilon_{\text{sh,t}} - du/dx$, общее дифференциальное уравнение, описывающее перемещения плиты, будет иметь вид (6) ($\varepsilon_{\text{упр}}$ — относительная упругая деформация бетона).

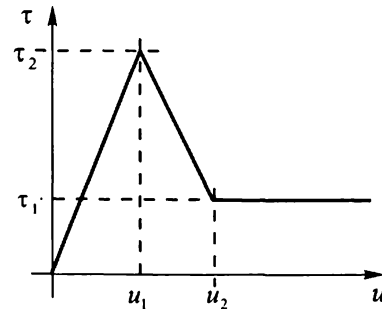
С учетом зависимостей (9)–(11) дифференциальное уравнение (6), описывающее перемещения плиты, примет вид:



- максимальные значения напряжений на контакте и соответств им деформаций (эксперимент)
- минимальные значения напряжна контакте и соответств им деформации (эксперимент)
- × аппроксимация трёхлинейной диаграммой кривой сдвига полученной на образце имевшем прочность на сжатие 4 МПа
- × аппроксимация трёхлинейной диаграммой кривой сдвига полученной на образце имевшем прочность на сжатие 7,5 МПа
- × аппроксимация трёхлинейной диаграммой кривой сдвига полученной на образце имевшем прочность на сжатие 8 МПа
- × аппроксимация экспериментальных точек максимальных напряжений на контакте и деформаций соответствует им лагориформической зависимости

$u_{1,R(t)}$ — значения перемещений, соответствующих напряжениям $\tau_{1,R(t)}$; u_2 — значения перемещений, соответствующих минимальному напряжению τ_2

Рис. 9. График зависимости "τ — u" при прочности бетона на сжатие от 0,9 до 38,0 МПа



τ_1 — максимальные касательные напряжения; u_1 — перемещение, соответствующее касательному напряжению τ_1 ; τ_2 — минимальные касательные напряжения на контакте; u_2 — перемещение, соответствующее минимальному уровню напряжений

Рис. 10. График зависимости "τ — u"

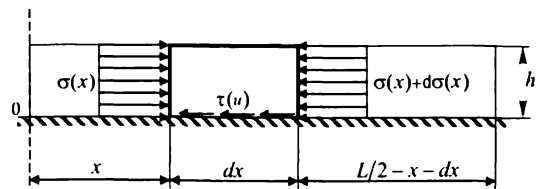


Рис. 11. Схема сил, действующих на участок плиты длиной dx

— для участка $u \leq u_1$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\tau_1}{u_1 \cdot E_c \cdot h} \cdot u(x) = 0, \quad (12)$$

— для участка $u_1 \leq u \leq u_2$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{k \cdot u(x) + b}{E_c \cdot h} = 0, \quad (13)$$

— для участка $u \geq u_2$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\tau_2}{E_c \cdot h} = 0. \quad (14)$$

Для условия $u \leq u_1$ решение уравнения (12) получено в виде:

$$u(x) = C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x) + C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x), \quad (15)$$

$$u'(x) = \beta \cdot C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x) - \beta \cdot C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x). \quad (16)$$

Для $u_1 \leq u \leq u_2$ представим уравнение (13) как линейное неоднородное:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{k}{E_c \cdot h} \cdot u(x) = \frac{b}{E_c \cdot h}. \quad (17)$$

Тогда решением уравнения (17) будут являться функции:

— для участка $u_1 \leq u \leq u_2$:

$$u(x) = C_1^2 \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{k}{E_c \cdot h}} \cdot x\right) + C_2^2 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{E_c \cdot h}} \cdot x\right) - \frac{b}{k}, \quad (18)$$

$$u'(x) = \lambda \cdot C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x) + \lambda \cdot C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x), \quad (19)$$

— для $u \geq u_2$:

$$u(x) = \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^3 \cdot x + C_2^3, \quad (20)$$

$$u'(x) = \alpha \cdot x + C_1^3, \quad (21)$$

где $\beta = \pm \sqrt{\frac{\tau_1}{u_1 \cdot E_c \cdot h}}$;

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{E_c \cdot h}};$$

$$\alpha = \frac{\tau_2}{E_c \cdot h}.$$

В уравнениях (15), (16), (18)–(21) постоянные интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$ определяются из начальных условий $u(0) = 0$ и $u'(L/2) = \epsilon_{sh}$ (ϵ_{sh} — деформация свободной усадки в бетоне).

Случай 1. Значение функции $u(L/2) \leq u_1$ — плита деформируется, не достигая в любом сечении точки с максимальным напряжением τ_1 (см. рис. 10, участок $[0; u_1]$). То есть функция $u(x)$ имеет только вид (15).

Получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(L/2) = \epsilon_{sh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1^1 + C_2^1 = 0 \\ \beta \cdot C_1^1 \cdot \exp\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right) - \beta \cdot C_2^1 \cdot \exp\left(-\beta \cdot \frac{L}{2}\right) = \epsilon_{sh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2^1 = -\frac{\epsilon_{sh}}{2\beta \cdot \cosh\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right)} \\ C_1^1 = \frac{\epsilon_{sh}}{2\beta \cdot \cosh\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right)} \end{cases}. \quad (22)$$

Случай 2. Этот случай справедлив, если значение функции $u_1 \leq u \leq u_2$. Здесь функция $u(x)$ имеет вид (15) до некоторой точки x_1 , в которой достигается значение $u(x_1) = u_1$; а далее функция $u(x)$ описывается уравнением (18).

В этом случае справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(L/2) = \epsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{до достиж. точки } u_1 \\ \text{после прохожд. точки } u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1^1 = -C_2^1 \\ C_1^2 = C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot L) + \epsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{E_c \cdot h}{k}} \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \frac{L}{2}\right) \end{cases}. \quad (23)$$

Так как функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема, изменение как $u(x)$, так и $du(x)/dx$ происходит плавно, т. е. без скачков. В этом случае необходимо ввести условие, что для точки x_1 , в которой происходит "склейка" (т. е. $\lim_{x \rightarrow x_1-0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} u(x) = u_1$, а функции $u(x)$ справа и слева от точки x_1 определены по формулам (15) и (18) соответственно), выполняется условие $\lim_{x \rightarrow x_1-0} u'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} u'(x)$. Это соответствует тому, что при системе условий:

$$\begin{cases} C_1^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x_1) + C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x_1) = C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x_1) + C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_1) - \frac{b}{k} = u_1 \\ \beta \cdot (C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x_1) - C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x_1)) = \lambda \cdot (C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x_1) - C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_1)) \end{cases} \quad (24)$$

выполняется следующее равенство:

$$C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot (x_1 - L)) + \epsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{E_c \cdot h}{k}} \cdot \exp\left(\lambda \cdot \left(x_1 - \frac{L}{2}\right)\right) + C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_1) = u_1 + \frac{b}{k}. \quad (25)$$

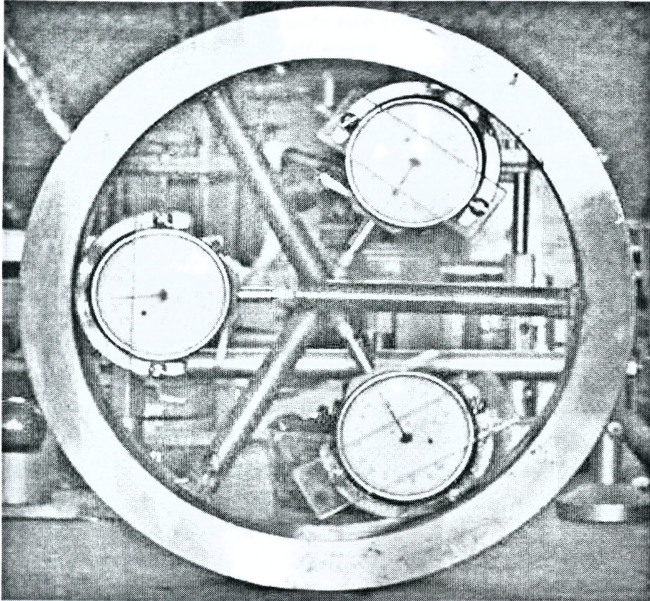


Рис. 12. Общий вид устройства [20]

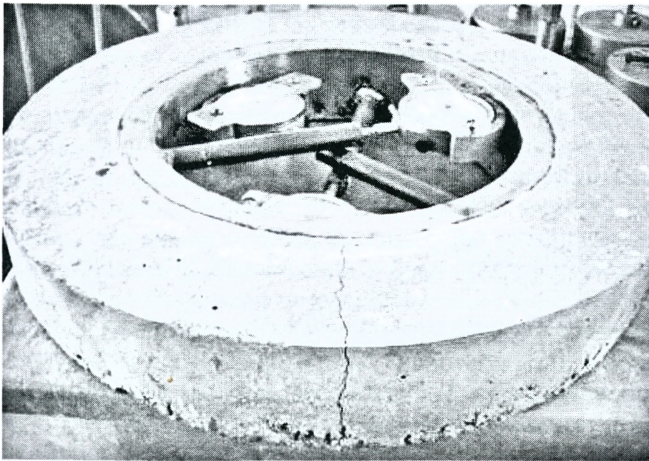


Рис. 13. Разрушение бетонного кольца

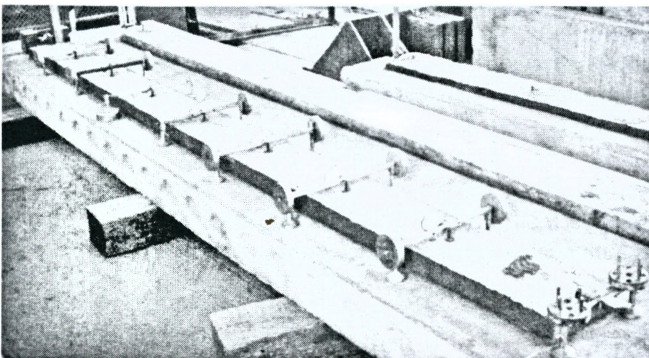


Рис. 14. Общий вид монолитной плиты П-п-Х

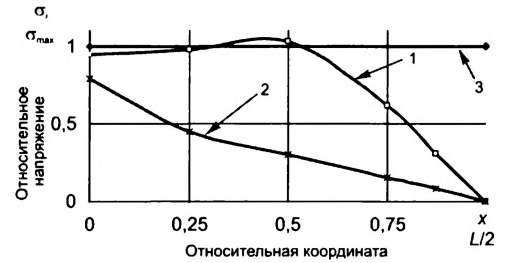


Рис. 15. Распределение относительных перемещений в плите



- 1 - модель - упругий расчёт
- × 2 - модель - упругопластич расчёт по трёхлиней диагр. сдвига
- 3 - модель - упругопластич расчёт по двухлиней диагр. сдвига
- ♦ 4 - предельно допустимый уровень напряжений

Рис. 16. Распределение относительных напряжений в плите



- 1 - модель - упругопластич. расчёт по двухлиней. диагр. сдвига
- × 2 - модель - упругопластич. расчёт по трёхлиней. диагр. сдвига
- ♦ 3 - предельно допустимый уровень напряжений

Рис. 17. Распределение относительных напряжений в имитируемой плите

Подставим уравнения (23) и (25) в систему (24). Таким образом, находим точку "склейки" x_1 для двух уравнений (15) и (18). После нахождения значения x_1 определяем все постоянные интегрирования C_1^1, C_1^2, C_2^1 и C_2^2 .

Из представленных равенств получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_2^1 = -\frac{u_1}{2 \sinh(\beta \cdot x_1)} \\ C_1^1 = \frac{u_1}{2 \sinh(\beta \cdot x_1)} \\ C_2^2 = \frac{u_1 + \frac{b}{k} - \varepsilon_0 \cdot \lambda \cdot \exp\left(\lambda \cdot \left(x_1 - \frac{L}{2}\right)\right)}{\exp(-\lambda \cdot (x_1 - L)) + \exp(-\lambda \cdot x_1)} \\ C_1^2 = C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot L) + \varepsilon_0 \cdot \lambda \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \frac{L}{2}\right) \end{cases} \quad (26)$$

Тогда решение для $u_1 \leq u \leq u_2$ примет вид:

$$u(x) = \begin{cases} C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x) + C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x), & \text{если } 0 \leq x \leq x_1 \\ C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x) + C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x) - \frac{b}{k}, & \text{если } x \geq x_1 \end{cases} \quad (27)$$

Случай 3. Данный случай справедлив, если значение функции $u(L/2) \geq u_2$. Здесь функция $u(x)$ имеет вид (13) до некоторой точки x_2 , в которой достигается значение $u(x_2) = u_2$; а далее функция $u(x)$ описывается уравнением (6).

Введем условие, что для точки x_2 , в которой происходит "склейка" (т. е. $\lim_{x \rightarrow x_2-0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_2+0} u(x) = u_2$, а функция $u(x)$ справа и слева от точки x_2 определена по формулам (15) и (18) соответственно), выполняется условие $\lim_{x \rightarrow x_2-0} u'(x) = \lim_{x \rightarrow x_2+0} u'(x)$. В таком случае запишем сле-

дующую систему условий:

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ u'\left(\frac{L}{2}\right)=\varepsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{до достижения точки } u_1 \\ \text{после прохождения точки } u_2 \end{cases} \Leftrightarrow, \quad (28)$$

которую можно переписать:

$$\begin{cases} C_2^1 = -\frac{u_1}{2\sinh(\beta \cdot x_1)} \\ C_1^1 = \frac{u_1}{2\sinh(\beta \cdot x_1)} \\ C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x_1) + C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_1) - \frac{b}{k} = u_1 \\ \beta \cdot (C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x_1) - C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x_1)) = \lambda \cdot (C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x_1) - C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_1)) \\ C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x_2) + C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_2) - \frac{b}{k} = u_2 \\ \lambda \cdot (C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x_2) - C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x_2)) = \frac{\tau_2}{E_c \cdot h} \cdot x_2 + C_1^3 \\ \frac{\tau_2}{E_c \cdot h} \cdot \frac{L}{2} + C_1^3 = \varepsilon_0 \\ \frac{\tau_2}{E_c \cdot h} \cdot \frac{x_2^2}{2} + C_1^3 \cdot x_2 + C_2^3 = u_2, \end{cases} \quad (29)$$

где, численно решая, находим: $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3, x_1$ и x_2 .

Тогда решение для $u \geq u_2$ примет вид:

$$\begin{cases} u(x) = C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x) + C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x), & \text{если } 0 \leq x \leq x_1 \\ u(x) = C_1^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x) + C_2^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot x) - \frac{b}{k}, & \text{если } x_1 \leq x \leq x_2 \\ u(x) = \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^3 \cdot x + C_2^3, & \text{если } x_2 \leq x \leq \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, используя зависимость "τ — u" для различных значений ε_{sh} , системы уравнений (27) и (30) описывают закон изменения функции $u(x)$.

4.2 Расчет напряжений

Известно, что бетон является упругопластическим материалом. Особенно это свойство может проявляться на начальных стадиях твердения бетона, когда жесткость ограничивающей связи, сдерживающей собственные деформации, весьма значительна. Если деформации бетона развиваются быстро, в начальный период твердения при достаточно большой жесткости ограничивающей связи упругий расчет, как в [5, 6, 12], будет давать погрешность из-за неучтенной релаксации напряжений, являющейся следствием проявления пластических деформаций. Следует отметить, что это свойство проявляется как в бетоне, претерпевающем усадку, так и в расширяющемся бетоне. Причем в последнем случае — в более значительной мере.

Механизм учета упругопластических деформаций подробно рассмотрен в [19]. Принцип расчета напряжений основан на том предположении, что возможен расчет напряжений в теле бетона, основываясь исключительно на знании величины деформации, которая не реализовалась вследствие ограничения со стороны наложенной связи. В соответствии с [4] напряжение в бетоне можно записать в следующем виде:

$$\sigma_c(t) = (\varepsilon_{свобод} - \varepsilon_{связн}) \cdot \frac{E_c(t)}{1 + \varphi(t)}, \quad (31)$$

где $\varphi(t)$ — коэффициент упругопластических деформаций, определяемый согласно [19];

$\varepsilon_{свобод}$ — свободная усадочная деформация бетона;

$\varepsilon_{связн}$ — связанная деформация бетона плиты.

5 СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА С ДАННЫМИ ОПЫТОВ

При выполнении расчетов по представленной в разделе 4 модели были приняты следующие исходные данные, соответствующие опытам, выполненным в лабораторных условиях:

— характеристики сдвига: $\tau_{1,R(t)} = 1,03$ МПа; $\tau_2 = 0,24$ МПа; $u_{1,R(t)} = 0,000039$ м; $u_2 = 0,000169$ м;

— деформации свободной усадки ϵ_{sh} , полученные на образцах-призмах размерами 7x7x20 см, выполненные из того же бетона и хранившиеся в тех же условиях, что и опытная плита ($\epsilon_{sh} = 0,000340$);

— деформации связанной усадки и напряжения, установленные по методике, представленной в [20]: большое кольцо: $\epsilon_{б.кольцо} = 0,000027$; $\sigma_{б.кольцо} = 5,86$ МПа; малые кольца: $\epsilon_{м.кольцо} = 0,000119$; $\sigma_{м.кольцо} = 5,80$ МПа. Большое кольцо представлено на рис. 12, 13;

— модуль упругости, полученный на бетонных призмах размерами 10x10x40 см: $E_c = 33\,550$ МПа;

— разрушающая нагрузка при растяжении: $f_{ctm} = 5,89$ МПа.

Плита П-п-Х (рис. 14) была выполнена в лаборатории испытательного центра Брестского государственного технического университета (БрГТУ) непосредственно на бетонном основании. Ее геометрические размеры — 4000x250x60 мм. Измерения перемещений плиты производились индикаторами часового типа с ценой деления 0,001 м в течение 28 суток.

В лабораторном эксперименте для бетона использовали портландцемент марки ПЦ-500Д0. В качестве заполнителей для бетона в образцах использовали песок Заславльского карьера с модулем крупности $M_k = 2,2-2,4$, гранитный щебень Микашевичского карьера фракции 5–20 мм. Щебень перед использованием промывали в проточной воде. Водоцементное отношение В/Ц было назначено равным 0,46.

Графики результатов, полученных в экспериментальных исследованиях, и графики расчетов перемещений плиты П-п-Х, а также теоретически определенных напряжений представлены на рис. 15, 16.

Сравнивая графики распределения относительных перемещений плиты, полученные при анализе экспериментальных данных и рассчитанных с использованием построенной модели, следует отметить их достаточно хорошее совпадение. Отклонение экспериментальных и теоретических значений относительных перемещений (см. рис. 15, крайняя точка плиты П-п-Х с относительной координатой $x/(L/2) = 1$,) полученных при моделировании по трехлинейной аппроксимации кривой сдвига, составляет 16,2 %. Как видно из рис. 16, относительные напряжения в экспериментальной плите приближаются к критическому уровню уже на четверти расстояния от

правого края плиты (точка с относительной координатой $x/(L/2) = 0,75$). Очевидно, что необходимо заложить большую толщину плиты или уменьшить длину неразрезной части с целью предотвращения трещин. Если, как рекомендует СНиП 2.03.13 [1], заложить толщину плиты, равную 0,2 м, при устройстве бетонного покрытия на бетонном основании, и при этом увеличить длину неразрезной части до 6,0 м, распределение относительных напряжений в плите на 28 суток (изготовленной из такого же бетона, что и экспериментальная плита П-п-Х) будет выглядеть, как показано на рис. 17.

Нижний график на рис. 17 — распределение напряжений по длине плиты при трехлинейной аппроксимации кривой сдвига, верхний — то же, при двухлинейной аппроксимации [6]. Очевидно, что при использовании в расчетах двухлинейной диаграммы сдвига, напряжения приближаются к предельным уже на середине правой части плиты (см. рис. 17, точка с относительной координатой $x/(L/2) = 0,55$), в то время как при трехлинейной диаграмме напряжения нигде не достигают предельного уровня.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 1 Согласно проведенным экспериментальным исследованиям, авторы считают вполне приемлемым использование в модели, описывающей развитие напряженно-деформированного состояния в плите, двухлинейной диаграммы сдвига в случае применения сыпучих оснований (песка, гравия, щебня) или основания с так называемым скользящим слоем. В этом случае погрешность расчета перемещений в плите будет незначительной, так как в подобных ситуациях не происходит выраженного падения напряжения при достижении максимального уровня напряжения в контакте.
- 2 При использовании в качестве основания бетона или, как в [6], стабилизированного основания применение двухлинейной аппроксимации вносит значительную погрешность в расчет напряжений. Таким образом, использование в модели трехлинейной диаграммы сдвига позволяет более точно прогнозировать поведение плиты, устроенной на бетонном основании (и подверженной вынужденным деформациям усадки), что даст возможность значительно экономить материал и точнее прогнозировать место устройства деформационного шва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Строительные нормы и правила. Полы: СНиП 2.03.13-88. — М: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. — 16 с.
2. Михайлов, В. В. Расширяющие и напрягающие цементы и самоупрочненные конструкции / В. В. Михайлов, С. Л. Литвер. — М.: Стройиздат, 1974. — 389 с.
3. Улицкий, И. И. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов / И. И. Улицкий. — Киев: Будівельник, 1967. — 346 с.
4. Улицкий, И. И. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов / И. И. Улицкий, Чжан Чжун-яо, А. Б. Голышев. — Киев: Госстройиздат УССР, 1960. — 495 с.
5. Pettersson, Dan. Stresses in concrete structures from ground restraint / Licentiate thesis, 1998. — Part I — 58 с., Part II — 59 с.
6. Zhang, J. Influence of supporting base characteristics on shrinkage-induced stresses in concrete pavements / J. Zhang, Li. Victor // Journal of Transportation Engineering. — 2001. — № 6. — Vol. 127.
7. Stott, J. Test on materials for use in sliding layers under concrete road slabs / J. Stott // Civ. Ingrg. — 1961. — P. 655–663.
8. Wesevich, J. Stabilized subbase friction study for concrete pavements / J. Wesevich, B. Mc-Cullough, N. Burns // University of Texas at Austin, Austin, Tex. — 1987. — P. 495.
9. Wimsatt, A. Methods of analyzing and friction influencing frictional effects of study for subbase. / A. Wimsatt, B. Mc-Cullough, N. Burns // University of Texas at Austin, Austin, Tex. — 1987.

10. Rozycki, D. Assessment of slab-base interaction in PCC airfield pavements / D. Rozycki, R. Rasmussen // Innovations for The Next Century, ASCE, New York. — 1998. — P. 403–422.
11. Kolb, H. Ermittlung der sohlreibung von grundkorrrpen untler horiyontalem kinematischen zwang / H. Kolb // Doctoral thesis, 1988. — Metteilung 28.
12. Тур, В. В. Экспериментально-теоретические основы предварительного напряжения конструкции при применении напрягающего бетона / В. В. Тур. — Брест: Издание БПИ, 1998. — 246 с.
13. Тур, В. В. Прочностные и деформативные параметры контактных соединений сборно-монолитных конструкций / В. В. Тур, Т. П. Шалобыта, Н. Н. Шалобыта // Вестник Брестского политехнического института. — 2000. — № 1. — С. 60–64.
14. К построению аналитической модели работы стыкового соединения железобетонных сборно-монолитных конструкций. Проблемы и перспективы современных строительных конструкций и технологий: сб. тр. / В. В. Тур, Т. П. Шалобыта, Н. Н. Шалобыта; под ред. В. И. Драгана. — Брест: БПИ, 1998. — С. 74–78.
15. Устройство для получения диаграмм сдвига бетона по сыпучим и скользящим основаниям: пат. 4080 Респ. Беларусь, МПК7 G 01 B5/03, G 01 L 1/04, G 01 N 3/02, 3/24 / А. Е. Желткович, В. В. Тур; заявитель Брестский гос. тех. ун-т. — № u 20070304; заявл. 04.24.2007; опубл. 30.12.2007 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. — 2007. — № 6(59). — С. 213.
16. Устройство для получения диаграмм сдвига бетона по бетонным, цементным основаниям: пат. 5847 Респ. Беларусь, МПК7 G 01 B5/30, G 01 L1/00 / А. Е. Желткович, Р. О. Калета, А. А. Краевский; заявитель Брестский гос. тех. ун-т. — № u 20090425; заявл. 25.05.2009; опубл. 30.12.09 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. — 2009. — № 6(71): — С. 210.
17. Тур, В. В. Прочность и деформации бетона в расчетах конструкций / В. В. Тур, Н. А. Рак. Монография. — Брест: Издательство БГТУ, 2003. — 252 с.
18. Желткович, А. Е. О назначении параметров расчетной модели собственных деформаций плит при взаимодействии с основанием / А. Е. Желткович // Вестник Брестского государственного технического университета. Строительство и архитектура. — 2009. — № 1(55). — С. 120–125.
19. К вопросу об учете упругопластических свойств при расчете напряжений в бетонных монолитных плитах покрытий, находящихся во взаимодействии с основанием: перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовка инженерных кадров Республики Беларусь: сб. тр. XVI Междунар. науч.-метод. семинара / А. Е. Желткович; под общ. ред. П. С. Пойты, В. В. Тура. — Брест: БрГТУ, 2009. — Ч. I. — 300 с.
20. Устройство для определения усадочных напряжений и характеристик ползучести бетона: пат. 5680 Респ. Беларусь, МПК7 G 01 B5/30, G 01 L1/00 / А. Желткович, Т. Ивенкова; заявитель Брестский гос. тех ун-т. — № u 20090091; заявл. 09.02.2009; опубл. 30.10.09 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. — 2009. — № 5(70). — С. 194.

Статья поступила в редакцию 02.12.2010.