

ВЕРИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТРАНСПОРТА РАДИОНУКЛИДОВ В БИОЛОГИЧЕСКИХ  
СИСТЕМАХ

C. SAMMET, FACHHOCHSCHULE RAVENSBURG-WEINGARTEN (ФРГ)

Все математические модели транспорта радионуклидов в биологических системах носят полуфеноменологический характер, поэтому их верификация предполагает, во-первых, статистическую проверку на адекватность соответствующих функциональных зависимостей, даваемых моделями, и, во-вторых, определение феноменологических констант моделей. Рассмотрим в качестве примера процедуру верификации моделей транспорта, основанных на дифференциальных уравнениях 1-го порядка. Будем предполагать, что масса мышечной ткани  $m$  биологической особи в течение времени наблюдения постоянна. Пусть  $m_1(t)$  - масса радионуклида в мышечной ткани особи. В духе традиционных представлений о процессе транспорта можно предположить, что скорость вывода радионуклида из мышечной ткани в момент  $t$  пропорциональна его массе в ткани в момент времени  $(t-\tau)$ , где  $\tau$  - некоторое характерное время запаздывания биологических процессов:  $\left(\frac{dm_1}{dt}\right)_- = -\lambda m_1(t-\tau)$  где  $\lambda$  - величина, постоянная  $\lambda$  приближении малых концентраций радионуклида в организме. Скорость поступления радионуклида в организм пропорциональна массе потребляемой  $p$  единицу времени пищи  $m_p$  и ее удельной активности  $A_0$ :

$$\left(\frac{dm_1}{dt}\right)_+ = \beta m_p A_0 / A_1$$

где  $\beta$  определяет усвояемость радионуклидов,  $A_1$  - удельная активность радионуклида. Простейший вид зависимости  $m_1(t)$  получается в предположении, что до некоторого момента времени  $t_0$  биологическая особь получала пищу с удельной активностью  $A_0$ , причем промежуток времени  $t < t_0$  достаточно велик для того, чтобы можно было считать  $m_1(t) = m_{1p}$  где  $m_{1p}$  - равновесная концентрация радионуклида в мышечной ткани; начиная с момента  $t_0$ , до момента  $t_0 + T$  часть пищи имеет другую, например, более высокую активность  $A_0^*$ , а при  $t > t_0 + T$  вся получаемая пища опять имеет удельную активность  $A_0$ . Тогда при  $t < t_0$  имеем

$$\frac{dm_{1p}}{dt} = -\lambda m_{1p} + \beta m_{op} \frac{A_0}{A_1} = 0,$$

где  $m_{op}$  - масса пищи, потребляемой в единицу времени в равновесном

режиме. Переходя к измеряемой удельной активности тканей  $A_p = \frac{m_p}{M} A_1$  получим  $-\lambda + \beta \frac{m_0}{m_p} \frac{A_0}{A_p} = 0$ , откуда

$$\beta = \lambda \frac{m_p}{m_0} \frac{A_p}{A_0} \quad (1)$$

Условие постоянства массы особи при  $t \in (t_0, t_0 + T)$  может быть записано в виде  $C_0 m_{op} = C_0' m_0' + C_0'' m_0''$ , где  $m_0'$  - масса пищи с удельной активностью  $A_0'$ , потребляемая в единицу времени в указанном временном интервале,  $m_0''$  - аналогичная величина для пищи с удельной активностью  $A_0''$ ;  $C_0, C_0', C_0''$  - соответствующие энергетические эквиваленты этих видов пищи. Учет времени  $\tau$  можно произвести различными способами: использовать сдвинутые по времени условия сшивки решений дифференциальных уравнений, определяющих зависимость  $A(t)$  для различных временных интервалов или использовать дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Рассмотрим вначале первый вариант с учетом того, что  $\tau \ll T$ . Игнорируя возможное различие  $\beta$  при  $t < t_0$  и при  $t \in (t_0, t_0 + T)$ , связанное, например, с тем, что коэффициент усвоимости радионуклида может зависеть от наличия других, родственных в химическом отношении, элементов в пище, получим для  $t \in (t_0 + \tau, t_0 + T + \tau)$  следующее дифференциальное уравнение, определяющее зависимость  $A$  от  $t$ :

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A + \beta \left( m_0' \frac{A_0'}{A_1} + m_0'' \frac{A_0''}{A_1} \right)$$

Переходя к измеряемой удельной активности тканей  $A$  и учитывая (1), получим

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda (A - A_p) + \frac{\lambda A_p m_0''}{m_{op} A_0''} \left( A_0' - \frac{C_0''}{C_0'} A_0 \right) \quad (2)$$

Решение уравнения (2) с учетом того, что при  $t = t_0 + \tau$ ,  $A = A_p$ , имеет вид

$$A = A_p \left\{ \left( 1 + \frac{m_0'' A_0'}{m_{op} A_0''} - \frac{m_0'' C_0''}{m_{op} C_0'} \right) + \left( \frac{m_0'' C_0''}{m_{op} C_0'} - \frac{m_0'' A_0'}{m_{op} A_0''} \right) \exp[-\lambda(t - t_0 - \tau)] \right\} \quad (3)$$

Аналогично, при  $t > t_0 + T$  имеем уравнение

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda (A - A_p), \quad (4)$$

решение которого с учетом сшивки значений  $A$  при  $t = t_0 + T + \tau$  имеет вид

$$A = A_p \left[ 1 + \left( \frac{m_0'' A_0'}{m_{op} A_0''} - \frac{m_0'' C_0''}{m_{op} C_0'} \right) (e^{-\lambda T} - 1) e^{-\lambda(t_0 + \tau)} e^{-\lambda t} \right] \quad (5)$$

При втором способе учета времени  $\tau$  можно в линейном приближении

предположить:  $m_1(t-\tau) = m_1(t) - \tau \frac{dm_1}{dt}$  Тогда, например, вместо уравнения (2) имеем уравнение

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{d}{1+d\tau} (A - A_p) + \frac{d}{1+d\tau} \frac{A_p m_o^*}{m_{op} A_o} \left( A_o^* - \frac{C_o^*}{C_o} A_o \right) \quad (6)$$

и условие сшивки:  $A=A_p$  при  $t=t_o$ . Аналогично видоизменяется уравнение (4) и сшивка его решения с решением уравнения (5) должна производиться при  $t=t_o+T$ . Соответствующие выражения для  $A(t)$  выписывать не будем. Процедура верификации модели может осуществляться либо на основе экспериментальных зависимостей  $A(t)$  для отдельных особей с последующей статистической обработкой результатов и в этом случае она достаточно проста, но требует детальных лабораторных исследований, либо на основе анализа временных сечений динамического ряда, описывающего эволюцию статистического ансамбля биологических особей в естественных условиях. Рассмотрим более подробно последний вариант с использованием обширного экспериментального материала по сезонным вариациям удельной активности тканей козуль (Rehwild) в лесах Обершвабии [1-6], связанным с появлением в сентябре - октябре грибов (Maronegrohrlingen), являющихся существенным компонентом пищи козуль в этот период и имеющих значительно больший коэффициент усвоения радионуклидов из почвы по сравнению с пищей, потребляемой козулями в остальное время. Существенной особенностью процесса верификации в этом случае является то, что ареал обитания особи составляет  $\sim 0,5 \text{ км}^2$  и в его пределах загрязненность почвы и коэффициенты переноса радионуклидов из почвы в растение сильно изменяются. Эти особенности могут быть учтены на первом этапе процесса верификации - проверке адекватности зависимости (1), если учесть, что коэффициент полезного действия биологической особи как тепловой машины достаточно мал ( $\sim 0,1$ ). Тогда из элементарных энергетических соображений вытекает соотношение  $C_o m_{op} \sim m^{2/3}$  и верификации на первом этапе подлежит соотношение  $\beta \sim d m^{4/3} A_p / A_o$ . Несмотря на то, что действительная причинно-следственная связь между  $A_p$  и  $A$  имеет вид  $A_p = f(A_o)$ , при статистическом анализе верифицируемой зависимости удобно представлять в виде  $A_o \sim A_p m^{4/3}$ , поскольку погрешности определения величин  $A_o$  существенно больше, чем в определении величин  $A_p$  и  $m$ . Используя стандартные процедуры сглаживания экспериментальных данных, основанные,

например, на методе наименьших квадратов, можно установить значимость регрессии, найти доверительные интервалы для ее коэффициентов и дисперсии, а также произвести статистическую проверку на адекватность. Проведение первого этапа верификации позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения регионы, для которых вследствие упомянутых выше флуктуаций загрязненности почвы и коэффициентов переноса радионуклидов из почвы в растение, статистические данные следует считать нерепрезентативными. На втором этапе верификации производится сглаживание экспериментальных данных в соответствии с формулами (3), (5) или их аналогами при втором способе учета времени  $\tau$  и определение величин  $\beta$ . При этом в соответствии с аналогом стандартной гипотезы эргодичности при  $t > t_0$  используются лишь результаты измерений для тех регионов, для которых они репрезентативны в указанном выше смысле. Следует отметить, что отсутствие достаточных данных о разбросе  $A_c$  для ареалов обитания каждой отдельной особи вынуждает пользоваться верхними оценками этого разброса, поэтому доверительные интервалы для  $\beta$  получаются достаточно большими. Попытка их существенного уменьшения путем рассмотрения зависимости  $A(t)$  для выборок с ограничением амплитуды её колебаний не приводит к заметным успехам вследствие малого объема соответствующих выборок при  $t > t_0$ . Поэтому фактически единственным критерием физико-биологической адекватности модели может служить равенство в статистическом смысле значений при  $t \in (t_0, t_0 + T)$  и  $t > t_0 + T$ , а также для различных лет мониторинга. Аналогичные проблемы возникают и при верификации моделей, основанных на дифференциальных уравнениях первого порядка, в которых используются предположения о фрактальной размерности системы транспорта. Верифицируемая система уравнений при первом способе учета  $\tau$  имеет следующий вид:

$$\beta = \frac{d(m A_p)^{1+\xi}}{m_0 A_0 A_1^{\xi}}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{d m^{\xi}}{A_1^{\xi}} (A^{1+\xi} - A_p^{1+\xi}) + \frac{d m m_0 A_p^{1+\xi}}{m_0 A_0 A_1^{\xi}} (A_0 - \frac{C_0}{C_0} A_0), t \in (t_0 + \tau, t_0 + T + \tau)$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{d m^{\xi}}{A_1^{\xi}} (A^{1+\xi} - A_p^{1+\xi}), t > t_0 + T + \tau$$

где  $\xi$  - показатель фрактальности системы транспорта. Математические проблемы сглаживания, возникающие вследствие того, что решения уравнений можно получить лишь с использованием численных методов, можно преодолеть, используя линейное по  $\xi$  прибли-

левыми аналитическое решение этих уравнений, поскольку из биологической литературы известно, что ожидаемое значение  $\xi$  имеет порядок 0,1.

- [1] Enable - Datenbank "reh 90.dbf"
- [2] Enable - Datenbank "bewuchs.dbf"
- [3] Grissner, J.: Radiocesium - Transfer im okosystem Wald in Oberschwaben, Diplomarbeit, Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, 1991
- [4] Erb, W.: Untersuchung der regionalen Variation der Transferfaktoren für Radiocesium in den Wäldern Oberschwabens, Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, 1990.
- [5] Hund, M.: Radiocesium in Waldokosystemen Oberschwabens: Transportmechanismen, Diplomarbeit, Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, 1991.
- [6] Niebuhr, J., Zibold, G.: Untersuchungen über die Strahlenbelastung von Wild in Abhängigkeit von verschiedenen Vegetationsformen vornehmlich in den Landkreisen Ravensburg und Biberach, Abschlußbericht, Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, 1988.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Man betrachtet die Fragen, die mit der Verifikation von mathematischen Modellen des Radionuklidtransports in biologischen Systemen verbunden sind. Bei dieser Untersuchung gibt es als Grundlage jedoch keine Experimentaldaten, die zeitliche Abhängigkeit der Fleischkontamination von einzelnen Lebewesen beschreiben. Aber es liegen Daten über die Fleischkontamination vor, welche eine zeitliche Auswahl aus der Menge der dynamischen Abhängigkeiten des statistischen Ensembles von biologischen Objekten darstellen. Deshalb muß man bei der Verifikation die ergodische Hypothese benutzen, und die Verifikation in zwei Etappen durchführen, um in der ersten Etappe nichtrepräsentative Werte auszuschließen.