ФРАКТАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ТРАНСПОРТА РАДИОНУКЛИДОВ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

ЧОПТЕЦ Н.И.
Брестский политехнический институт
САТИКОВ И.А.
Белорусская политехническая академия

Феноменологический подход к изучению транспорта радионуклидов в биологических системах предполагает построение математических моделей транспорта и их последующую верификацию с определением феноменологических констант. В моделях, основанных на дифференциальных уравнениях I-го порядка, обычно предполагается, что скорость вывода из организма радионуклида в приближении малых его концентраций, пропорциональна массе радионуклида в организме. Возможным физическим обоснованием этого может служить анализ процессов транспорта в духе традиционных перколяционных представлений, согласно которым локальная скорость транспорта в элементарном кластере пропорциональна локальной массовой концентрации радионуклида, а число элементарных кластеров $\sim L^3$, где L - характерный линейный размер объекта. Поскольку локальная массовая концентрация $\sim L^{-3}$, предположение оказывается обоснованным. Ряд соображений, однако, указывает на возможную фрактальную размерность системы транспорта, проявляющуюся, в частности, в том, что число элементарных кластеров $\sim L^{3+\delta}$, где $\delta \neq 0$. Простейшей моделью, описывающей зависимость удельной активности мышечной ткани от времени, является модель, основанная на предположении, что при $t<to$ организм получает пищу с удельной активностью Ao, при $t \in (to, to+T)$ часть получаемой пищи имеет другую удельную активность A_0^*, а при $t>to+T$ вся получаемая пища опять имеет удельную активность Ao. Считая промежуток $t<to$ много большим характерного времени транспорта радионуклида, имеем следующие уравнения для определения зависимости удельной активности ткани от времени в предположении постоянства массы особи:

При $t \in (to, to+T)$:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha m^{\varepsilon}}{A_1^{\varepsilon}}\left(A^{1+\varepsilon} - A_p^{1+\varepsilon}\right) + \frac{\alpha m^{\varepsilon} m_o^{*} A_p^{1+\varepsilon}}{m_o A_o A_1^{\varepsilon}}\left(A_o^{*} - \frac{C_o^{*}}{C_o} A_o\right) \qquad (1)$$

При $t > t_o + T$:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha m^{\varepsilon}}{A_1^{\varepsilon}}\left(A^{1+\varepsilon} - A_p^{1+\varepsilon}\right) \qquad (2)$$

где A_p - равновесная удельная активность мышечной ткани при $t<t_o$, α - феноменологическая константа вывода радионуклидов из организма, m_o - масса пищи с удельной активностью A_o, потребляемая в единицу времени при $t<t_o$, m_o^* -масса пищи с удельной активностью A_o^*, потребляемая в единицу времени при $t \in (t_o, t_o+T)$, A_1 - удельная активность радионуклида, C_o, C_o^* - удельные энергетические эквиваленты указанных видов пищи, $\varepsilon = \delta/3$. Верификация вышеизложенной модели как на основе экспериментальных зависимостей $A(t)$ для отдельной особи, так и на основе анализа временных сечений динамических рядов, описывающих эволюцию ансамбля особей в предположении, аналогичному известному условию эргодичности, проводимая на основе вариационных принципов, достаточно сложна вследствие нелинейности уравнений. Возможен, однако, упрощенный вариант верификации на основе стандартных методик сглаживания экспериментальных данных, в котором используется линейная по $\varepsilon(\varepsilon_{\sim}0,1)$ аппроксимация решений уравнений (I) и (2). Аналогичные предположения о фрактальном механизме вывода радионуклидов из организма могут быть использованы при построении моделей, основанных на дифференциальных уравнениях второго порядка (моделей второго порядка). В этих моделях используется представление о двухступенчатом механизме транспорта: сначала радионуклиды поступают в желудочно-кишечный тракт (ступень I), а затем из него в мышечную ткань (ступень II). Соответствующие системы уравнений первого порядка, редуцируемые к уравнениям второго порядка, в предположении фрактальности механизма обмена радионуклидами лишь

между ступенями I и 2 имеют для тех же временных интервалов вид

$$\begin{cases} \dfrac{dm_{1I}}{dt} = \beta\left(\dfrac{m_0' A_0}{A_1} + \dfrac{m_0^* A_0^*}{A_{11}}\right) - m_{12} & \text{при } t \in (t_0, t_0+T) \\ \dfrac{dm_{1II}}{dt} = -\alpha m_{1II}^{1+\varepsilon} + m_{12}\,; \quad m_{12} = \gamma_1 m_{1I} - \gamma_2 m_{1II} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dm_{1I}}{dt} = \beta \dfrac{m_0'' A_0}{A_1} - m_{12} & \text{при } t > t_0+T \\ \dfrac{dm_{1II}}{dt} = -\alpha m_{1II}^{1+\varepsilon} + m_{12}\,; \quad m_{12} = \gamma_1 m_{1I} - \gamma_2 m_{1II} & \end{cases}$$

где, как и ранее, масса особи предполагается постоянной, m_{1I}, m_{1II} – массы радионуклида в ступенях, $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ – феноменологические константы, определяемые в процессах верификации. Все сказанное выше относительно верификации моделей первого порядка справедливо mutatis mutandum и для моделей второго порядка. Заметим также, что модели допускают обобщение на случай переменной массы особи, а в случае моделей второго порядка и на фрактальную размерность внешних трактов обмена организма с окружающей средой.

ZUSAMMENFASSUNG

MAN BETRACHTET DIE MODELLE DES RADIONUKLIEDTRANSPORTS,IN WELCHEN DIE FRAKTALDIMENSION DES TRANSPORTSYSTEMS VORAUSGESETZT WIRD.MAN BESPICHT DIE AN DEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER 1 UND 2 ORDNUNG BEGRUNDET WIRD.