Формулы Винера — Хопфа дают удобный способ вычисления ФР на стенке при $x = 0$ (см. рис. 1), а также значения плотности на стенке: $n(0) \approx 0.577350272\ldots$ Само же решение уравнения (8) легче получить методом конечных элементов, зная асимптотику (10) (см. рис. 2–4).

Рис. 1. Функция распределения частиц на стенке по косинусу угла наклона скорости к нормали.

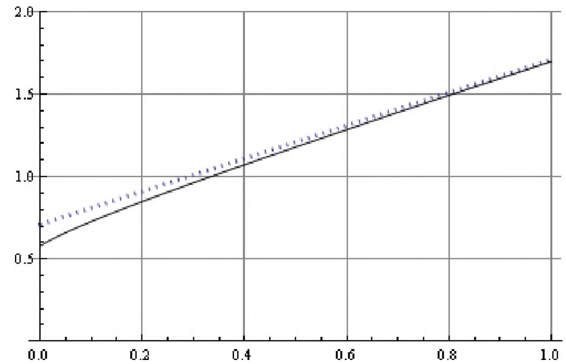

Рис. 2. Вычисления графика плотности частиц в пакете «Математика 9.0» методом конечных элементов (метод Галеркина [4]), $\chi_{\max} = 5$. Число узлов сетки равно 1001.

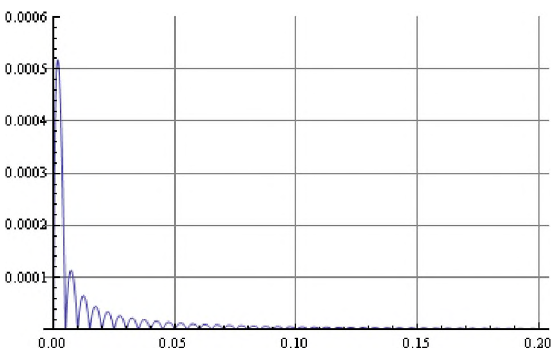

Рис. 3. Невязка решения уравнения (8) как функция χ в методе Галеркина при числе узлов 1001.

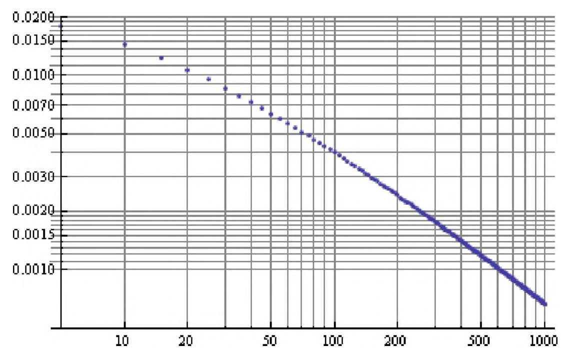

Рис. 4. Максимум невязки вычислений решения уравнения (8) в зависимости от числа узлов N в методе конечных элементов. $\chi_{\max} = \ln N$.

Как это ни удивительно, простой набор формулы Винера — Хопфа (9), например, в пакете «Математика 9.0» к построению графика, подобного рис. 2, не приводит. По всей вероятности, нужны специальные методы численного интегрирования этого выражения.

Литература

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики.* Т. 1, М.: ИЛ, 1958.
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексной переменной.* М., 2016.
3. Райзер Ю.П. *Физика газового разряда.* Долгопрудный: «Интеллект», 2009.
4. Флетчер К. *Численные методы на основе метода Галеркина.* М.: «Мир», 1988.

О ПРИБЛИЖЕНИИ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Жук, Н.А. Липская

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ — некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \ldots, x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$ — функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L^j(t+s) \times$ $\times\, \rho_n(s)\, ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \geqslant 0$, $\operatorname{supp} \rho \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)\, ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, \ldots, x_p) = n^{p+1} \widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, \ldots, nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geqslant 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_p)\, dx_0 dx_1 \ldots dx_p = 1$, $\operatorname{supp} \widetilde{\rho} \subset [0,1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t f^{ij}(s, x(s))\, dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leqslant t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где $L^{jc}(t)$ — непрерывная, а $L^{jd}(t)$ — разрывная составляющая функции $L^j(t)$, μ_r^j, $r = 1, 2, \ldots,$ — точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r +) - L^{jd}(\mu_r -)$ — величина скачка, $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))\, ds, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,q},$$

$\mu \in T$, $x \in R^p$, $u \in R^q$.

Теорема. *Пусть функции* f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, *удовлетворяют условию Липшица и ограничены;* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, *— непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $nh_n \to 0$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши* (2) *сходится к решению системы уравнений* (3) *в пространстве* $L^p(T)$, *если* $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ *в пространстве* $L^p(T)$.

Аналогичная теорема в случае поточечной сходимости была получена в работе [1].

Литература

1. Жук А.И., Яблонский О.Л. *Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57. № 6. С. 20–23.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ТИПА НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б.Б. Жураев, Н.Н. Панжиева

В докладе обсуждается однозначная разрешимость кревой задачи с неклассическими граничными условиями для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [1–4].