

УДК 624.04:624.011.1

doi: 10.33622/0869-7019.2022.06.19-24

Устойчивость деревянного бруса, связанного с упругим основанием

Константин Константинович ГЛУШКО, кандидат технических наук, konstantin.glushko@bk.ru

Анатолий Яковлевич НАЙЧУК, доктор технических наук, профессор, atnya@yandex.ru

Сергей Михайлович СЕМЕНИУК, кандидат технических наук, доцент, siarhei.semianiuk@gmail.com

Брестский государственный технический университет, Республика Беларусь, 224017 г. Брест, ул. Московская, 267

Аннотация. Определение величин критических сил, вызывающих потерю устойчивости центрально-сжатых деревянных брусков в составе строительных конструкций является необходимым требованием при проверке их несущей способности. По этой причине требуется разработка научно обоснованной расчетной модели определения коэффициентов расчетных длин центрально-сжатых деревянных элементов, связанных с часто установленными упругими опорами или с упругим основанием. В статье приводится решение задачи их устойчивости при различных способах опирания концов бруса (шарнирно закрепленные концы; один из концов защемлен, второй — закреплен шарнирно; оба конца защемлены; один из концов свободен, второй — защемлен). Результаты изложенного в статье решения могут быть использованы для определения коэффициентов продольного изгиба сжатых деревянных брусков, связанных с упругим основанием.

Ключевые слова: деревянные конструкции, сжатие, упругое основание, устойчивость, критическая сила, расчетная длина, жесткость

Для цитирования: Глушко К. К., Найчук А. Я., Семенюк С. М. Устойчивость деревянного бруса, связанного с упругим основанием // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 6. С. 19–24.

doi: 10.33622/0869-7019.2022.06.19-24

STABILITY OF A WOODEN BEAM CONNECTED WITH AN ELASTIC BASE

Konstantin K. HLUSHKO, konstantin.glushko@bk.ru

Anatoli Y. NAICHUK, atnya@yandex.ru

Siarhei M. SEMIANIUK, siarhei.semianiuk@gmail.com

Brest State Technical University, ul. Moskovskaya, 267, Brest 224017, Republic of Belarus

Abstract. Determination of the values of the critical forces causing the loss of stability of centrally compressed wooden beams in the composition of building structures is a necessary requirement when checking their bearing capacity. For this reason, it is necessary to develop a scientifically grounded design model for determining the coefficients of the design lengths of centrally compressed wooden elements associated with often installed elastic supports or with an elastic foundation. The article provides a solution to the problem of their stability with various methods of supporting the ends of the beam (pivotally fixed ends; one of the ends is pinched, the second is fixed pivotally; both ends are pinched; one of the ends is free, the second is pinched). The results obtained in the form of graphs of changes in the coefficients of the calculated lengths of compressed wooden beams associated with an elastic base are recommended to use for assessing their stability under central compression. The results of the solution presented in the article can be used to determine the buckling coefficients of compressed wooden beams associated with an elastic foundation.

Keywords: wooden structures, compression, elastic base, stability, critical force, design length, stiffness

For citation: Hlushko K. K., Naichuk A. Y., Semianiuk S. M. Stability of a Wooden Beam Connected With an Elastic Base. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2022, no. 6, pp. 19–24. (In Russ.)

doi: 10.33622/0869-7019.2022.06.19-24

Введение

Задача потери устойчивости центрально-сжатого стержня, связанного с упругим основанием, была впервые представлена в работе, автором которой являлся F. Engesser [1]. Полученное им решение было развито другими исследователями (M. Piazza, R. Tomasi, R. Modena [2]), рассмотревшими иное закрепление концов, отличное от шарнирно-неподвижного в поперечном направлении по отношению к продольной оси стержня. Результаты полученных

решений легли в основу проверочных расчетов по оценке устойчивости сжатых стержней, связанных с упругим основанием, в частности сжатых винтов в массиве древесины [3–8]. При этом следует отметить, что в полученных решениях материал стержня принимался изотропным, а сам стержень являлся телом сплошного поперечного сечения. Названные предпосылки позволяли не производить учет влияния поперечной силы в стержне на форму его изогнутой оси при продольном изгибе.

Древесина как конструкционный материал обладает анизотропией свойств: в данном случае следует учитывать влияние поперечной силы на ординаты функции изогнутой оси стержня при его продольном изгибе. В частности, между модулем упругости и модулем сдвига названного материала имеется существенная разница (на порядок).

Решение этой задачи актуально для оценки местной устойчивости отдельных элементов в дощато-гвоздевых конструкциях, а также для оценки устойчивости верхнего неразрезного пояса деревянных ферм, сжатых поясов рам, узлы которых не могут быть приняты неподвижными в вертикальной плоскости [9, 10]. При достаточно коротком размере панели и частом расположении узлов сжатые пояса названных конструкций могут быть рассмотрены как деревянные балки, связанные с упругим основанием.

Основная часть

В основу предлагаемого решения рассматриваемой задачи положено дифференциальное уравнение центрально-сжатого стержня, связанного с упругим основанием:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{c}{EI} v = 0, \quad (1)$$

где EI — изгибная жесткость стержня, $\text{Н}\cdot\text{м}^2$; v — поперечные перемещения оси стержня только от действия изгибающего момента, м ; x — текущая координата в продольном направлении, м ; P — усилие сжатия в стержне, Н ; c — коэффициент постели винклеровского основания, $\text{Н}/\text{м}^3$.

Сжатые пояса ферм или рам располагаются на подвижных опорах, поэтому для оценки их устойчивости при помощи полученного ниже решения следует разделить жесткость упругих опор (величину сжимающих усилий в стержнях решетки) на длину панели (шаг узлов) [11].

Применяя закон Гука для сдвига, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q}{GA}, \quad (2)$$

где G — модуль сдвига, Па ; u — поперечные перемещения оси стержня только от действия поперечной силы; m , Q — продольная сила в стержне, Н .

Дифференцируя уравнение (2) трижды и учитывая, что функция изменения поперечной силы в стержне — первая производная от изгибающего момента, величина которого $M = Pw$, где M — обобщенный изгибающий момент, $\text{Н}\cdot\text{м}$, возникающий в произвольном сечении по длине стержня от суммы ординат перемещений этого сечения $w = v + u$, м , от исходного прямолинейного поло-

жения, а также суммируя уравнения (1) и (2), можно получить следующую запись:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{P}{GA} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{c}{EI} w = 0. \quad (3)$$

Для удобства решения уравнения (3) его запись можно представить в несколько иной форме:

$$\Delta^4 y + \frac{R}{n^4} y = u^2 \left(\Delta^4 y \frac{J}{\lambda_0^2} - \frac{1}{n^2} \Delta^2 y \right), \quad (4)$$

где Δ — оператор конечной разности; $y = w/w_{\max}$ — функция безразмерных ординат эпюры перемещений стержня в момент потери устойчивости, отношение функции изогнутой оси к максимальной ординате; $R = cL^4/EI$ — безразмерный параметр жесткости упругого основания; L — длина стержня, м ; n — число участков разбиения стержня по длине; $u = L\sqrt{P/EI}$ — безразмерный параметр критической силы; $J = E/G$ — отношение модуля упругости и модуля сдвига; $\lambda_0 = L/i$ — параметр гибкости стержня, отношение его геометрической длины к радиусу инерции поперечного сечения в плоскости продольного изгиба; i — радиус инерции поперечного сечения.

При решении уравнения (4) необходимо разделить правую и левую части равенства, вводя функцию-формулу Φ , которая при решении будет уточнена методом последовательных приближений. Этот подход был сформулирован исследователями устойчивости стержня переменной жесткости Н. М. Newmark [12] и М. G. Salvadori [13]. В основе данного подхода лежит задание формы искривленной оси стержня, которая многократно уточняется при численном решении дифференциального уравнения до тех пор, пока разница между искомыми величинами не достигнет допустимого уровня погрешности. Для решения уравнения (4) при помощи описанного подхода его следует переписать в следующем виде:

$$\Delta^4 y + \frac{R}{n^4} y \approx u^2 \left(\Delta^4 \Phi \frac{J}{\lambda_0^2} - \frac{1}{n^2} \Delta^2 \Phi \right). \quad (5)$$

В представленной работе применен метод экстраполяции Рунге—Ромберга, использованный не с целью уточнения значений численных производных для применения их при решении, а с целью поиска такого числа разбиения n стержня по длине, при котором величина экстраполированного приращения производной была бы сопоставима с погрешностью ее округления. Расчет стержней на устойчивость производился с числом участков $n = 6, 12, 24, 48$ разбиений стержня по длине. При этом погрешность вычисления производных второго порядка точности уменьшалась в 4, 16 и 64 раза соответственно. Оценка погрешности первой численной производной функции изогнутой оси по методу Рунге—Ромберга

[14] выполнена с использованием следующей формулы

$$O = \frac{y_{h/2} - y_h}{3}, \quad (6)$$

где $y_{h/2}$ — численная производная функции изогнутой оси, определенная с использованием дробного (уменьшенного вдвое) шага; y_h — то же, с использованием принятого шага.

Оценка погрешности старших численных производных осуществлялась путем последовательного дифференцирования первой производной.

При разбиении стержня на n участков следует вычислить конечные разности, входящие в уравнение (5), для $n + 1$ точки, в то время как конечные разности четвертого порядка могут быть вычислены для $n - 3$ точек. Остальные четыре уравнения следует составлять из граничных условий. Чтобы применять конечные разности в начальной и конечной точках на оси стержня одного порядка точности при формулировании граничных условий, следует использовать интерполяционный полином Лагранжа для вычисления значений функции изогнутой оси в безразмерных ординатах по шести точкам и записать его производные в этих точках:

$$L(x) = w_{\max} \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad (7)$$

где

$$l(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_i - x_{j+1}} \cdot \frac{x - x_{j+2}}{x_i - x_{j+2}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}, \quad (8)$$

и конечные разности интерполяционного полинома Лагранжа различных порядков в начальной и конечной точках:

$$\Delta y_0 = -\frac{137}{60} y_0 + 5y_1 - 5y_2 + \frac{10}{3} y_3 - \frac{5}{4} y_4 + \frac{1}{5} y_5; \quad (9)$$

$$\Delta^2 y_0 = \frac{1}{12} (45y_0 - 154y_1 + 214y_2 - 156y_3 + 61y_4 - 10y_5); \quad (10)$$

$$\Delta^3 y_0 = \frac{1}{4} (-17y_0 + 71y_1 - 118y_2 + 98y_3 - 41y_4 + 7y_5); \quad (11)$$

$$\Delta^4 y_0 = 3y_0 - 14y_1 + 26y_2 - 24y_3 + 11y_4 - 2y_5; \quad (12)$$

$$\Delta y_n = \frac{137}{60} y_n - 5y_{n-1} + 5y_{n-2} - \frac{10}{3} y_{n-3} + \frac{5}{4} y_{n-4} - \frac{1}{5} y_{n-5}; \quad (13)$$

$$\Delta^2 y_n = \frac{1}{12} (45y_n - 154y_{n-1} + 214y_{n-2} - 156y_{n-3} + 61y_{n-4} - 10y_{n-5}); \quad (14)$$

$$\Delta^3 y_n = \frac{1}{4} (17y_n - 71y_{n-1} + 118y_{n-2} - 98y_{n-3} + 41y_{n-4} - 7y_{n-5}). \quad (15)$$

Представляя функцию изогнутой оси стержня в общем случае неизвестной, можно произвести аппроксимацию ее конечной разности для средних точек, принимая второй порядок точности [15, 16]:

$$\Delta^4 y_i = y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}. \quad (16)$$

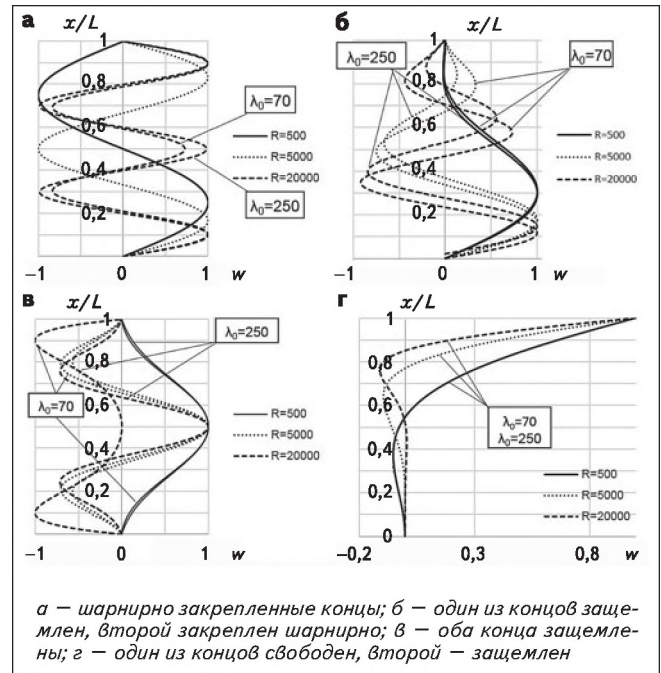


Рис. 1. Изогнутые формы деревянных брусьев, связанных с упругим основанием при различных значениях параметра гибкости λ_0

Формулировка возможных граничных условий выполнена следующим образом:

• а) шарнирно-неподвижное закрепление обоих концов в поперечном направлении к оси стержня:

$$w_{\max} \frac{EI}{h^2} \Delta^2 y_0 = 0; \quad w_{\max} \frac{EI}{h^2} \Delta^2 y_n = 0, \quad (17)$$

$$y_0 = 0, \quad y_n = 0, \quad (18)$$

из чего следует, что конечные разности второго порядка на концах стержня равны нулю, поскольку изгибная жесткость EI и шаг разбиения h ненулевые;

• б) один из концов зашпелен и неподвижен в поперечном направлении, второй оперт шарнирно-неподвижно; в данном случае определение граничных условий при зашпелении одного из концов следует формулировать полагая, что вблизи жесткой заделки концевое сечение стержня имеет ненулевой угол отклонения от исходного положения, поскольку его значение обусловлено сдвигом:

$$w'_0 = \frac{Q}{GA} = \frac{1}{GA} M'_0 = \frac{EI}{GA} w''_0 = Ji^2 w''_0. \quad (19)$$

Переходя к конечным разностям, умножив уравнение на куб шага разбиения стержня, можно переписать уравнение (19):

$$\Delta y_0 - J \frac{n^2}{\lambda_0^2} \Delta^3 y_0 = 0, \quad (20)$$

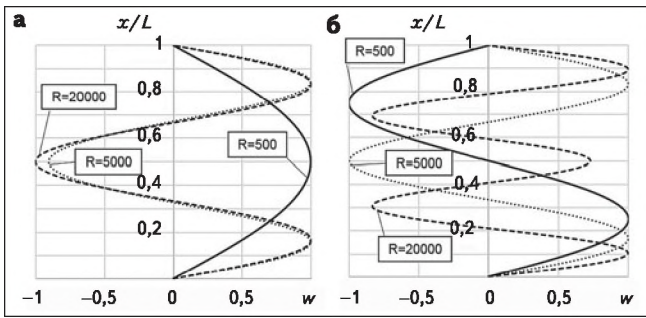


Рис. 2. Изогнутые формы деревянных брусьев, связанных с упругим основанием, без учета поперечной силы (а) и с ее учетом (б)

а условие неподвижности концов будет аналогично записи (18);

• в) оба конца защемлены и неподвижны, условие защемления правого конца:

$$\Delta y_n - J \frac{n^2}{\lambda_0^2} \Delta^3 y_n = 0. \quad (21)$$

Остальные граничные условия аналогичны (15) и (17);

• г) один из концов защемлен, второй – свободен:

$$\Delta y_n - J \frac{n^2}{\lambda_0^2} \Delta^3 y_n = 0, \quad y_n = 0; \quad (22)$$

$$\Delta^2 y_0 = 0. \quad (23)$$

Решение дифференциального уравнения (3) с учетом последующих преобразований и применения соответствующих граничных условий сводится к решению системы $n + 1$ линейных неоднородных уравнений матричным методом. Далее проиллюстрировано построение матрицы коэффициентов при неизвестных D и вектора свободных членов F .

$$[D_1] = \begin{bmatrix} \text{Область граничных условий (2 строки)} \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \text{Область граничных условий (2 строки)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}; \quad (25)$$

$$[D] = [D_1] + [D_2];$$

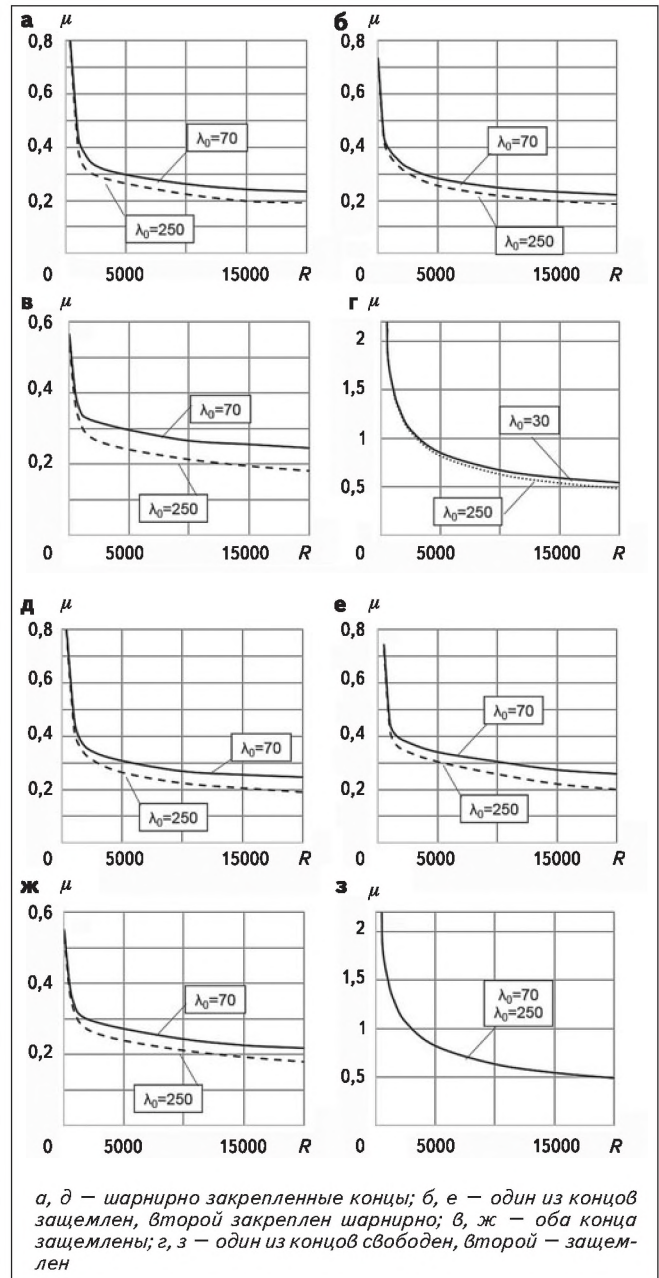


Рис. 3. Графики изменения коэффициента расчетной длины деревянного стержня, связанного с упругим основанием, при $J = 13$ (а–г) и при $J = 22$ (д–з)

$$[\Phi_{IV}] = \begin{bmatrix} \dots \\ \Phi_{i-2} - 4\Phi_{i-1} + 6\Phi_i - 4\Phi_{i+1} + \Phi_{i+2}; \\ \dots \end{bmatrix}; \quad (26)$$

$$[\Phi_{II}] = \begin{bmatrix} \dots \\ \Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}; \\ \dots \end{bmatrix},$$

где

$$[\Phi] = [\Phi_0 \dots \Phi_i \dots \Phi_n]^T; \quad (27)$$

$$[F] = [\Phi_{IV}] \frac{J}{\lambda_0^2} - \frac{1}{n^2} [\Phi_{II}]. \quad (28)$$

Структура вектора значений из свободных коэффициентов правой части выражения (27) аналогична структуре матрицы левой части (24) — две первые и две последние строки занимают формулировки граничных условий а—г. Следует отметить, что и в исходном уравнении (4), и в его матричных преобразованиях отсутствует такой параметр, как длина стержня. Поэтому значения ординат функции-формы, входящие в состав вектора F следует получать, полагая длину стержня равной единице или отношению текущей координаты x к длине стержня L . Определение вектора безразмерных ординат функции изогнутой оси стержня $[y]$ осуществляется при решении системы линейных уравнений в матричном виде:

$$[y] = u^2 [D]^{-1} [F]. \quad (29)$$

Удобно в этом случае принять значение u за единицу. Решением уравнения (29) является вектор значений $[y]$, нормализовав который и подставив полученные результаты вместо значений вектора $[F]$, расчет повторяем. Квадрат параметра u здесь является коэффициентом пропорциональности между правой и левой частями уравнения (29). Значение коэффициента расчетной длины стержня в этом случае может быть определено из следующего выражения:

$$\mu = \pi \sqrt{y_{\max}}, \quad (30)$$

где y_{\max} — максимальное значение элемента ненормализованного вектора безразмерных ординат $[y]$.

При помощи рассмотренного подхода была решена задача потери устойчивости сжатого деревянного бруса, связанного с упругим основанием. Вычисление ординат формы потери устойчивости и коэффициента расчетной длины выполнено при его разбиении по длине на $n = 48$ равных частей. На *рис. 1–3* показаны наиболее характерные случаи изменения формы изогнутых осей при различных способах закрепления концов деревянного бруса.

Анализируя потерю устойчивости сжатых деревянных брусев, связанных с упругим основанием, следует отметить, что на величины ординат функций изогнутых осей и характер форм их изогнутых осей наиболее существенное влияние оказывает безразмерный параметр жесткости упругого основания R , а параметр гибкости λ_0 вызывает, главным образом, различие ординат функции изогнутой оси стержня. Соотношение модуля Юнга к модулю сдвига $J = E/G$, как правило, вызывает изменение только значений коэффициентов расчетных длин, но качественно на форму потери устойчивости практически не влияет.

При сравнительно небольшом различии ординат функций изогнутых осей стержней центрально-сжатых деревянных брусев, связанных с упругим основанием, коэффициенты их расчетных длин различаются незначительно. В тех же случаях, когда эта разница значительна либо вообще отсутствует качественно иная форма деформирования (разное число полуволн изогнутой оси стержня), наблюдается существенное изменение коэффициентов расчетных длин. Как и было упомянуто ранее, учет влияния поперечной силы при продольном изгибе стержня важен, поскольку это явление значительно сказывается на величине коэффициента расчетной длины и схеме деформирования стержня. На *рис. 2* показан пример изменения качественных форм деформирования шарнирно закрепленных по концам сжатых брусев без учета и с учетом сдвига.

Для безразмерных параметров жесткости упругого основания $R = 500; 5000$ и 20000 без учета поперечной силы в поперечных сечениях деревянных брусев коэффициенты расчетных длин μ равны соответственно $0,404; 0,261$ и $0,177$. При учете действующих поперечных сил для принятых значений безразмерной жесткости основания минимальные значения коэффициентов расчетных длин равны соответственно $0,732; 0,308$ и $0,247$. Для рассмотренного примера критические нагрузки, полученные без учета сдвига, будут завышены от двух до трех раз.

Графики изменения коэффициентов расчетных длин деревянных брусев, полученные при различном закреплении их концов, различном параметре гибкости λ_0 и соотношении модуля Юнга к модулю сдвига $J = 13$ и $J = 22$, показаны на *рис. 3*. Промежуточные значения коэффициентов расчетных длин между смежными графиками могут быть найдены при помощи линейной интерполяции.

Проверку устойчивости деревянного бруса, связанного с упругим основанием или с часто расположенными упругими опорами по длине, следует проводить используя формулу Эйлера для критической силы.

Выводы

1. Разработанное решение позволяет учесть следующие факторы:

- различное закрепление концов деревянного бруса, связанного с упругим основанием;
- влияние поперечной силы на форму потери устойчивости рассмотренного деревянного бруса: учет сдвига качественно изменяет его форму потери устойчивости, позволяет определить коэффициенты расчетных длин, которые при учете рассмот-

ренного явления заметно возрастают по сравнению с решением подобной задачи с использованием изотропного материала.

2. Полученные результаты в виде графиков из-

менения коэффициентов расчетных длин сжатых деревянных брусьев, связанных с упругим основанием, рекомендуется использовать для оценки их устойчивости при центральном сжатии.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

- Engesser F. Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken [Закрепление открытых мостов от потери устойчивости]. *Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1884, N. 40, S. 415–417.
- Piazza M., Tomasi R., Modena R. Strutture in legno – materiale, calcolo e progetto secondo le nuovenormative Europee [Материалы, расчет и проектирование в соответствии с новыми европейскими нормами]. Milano, Hoepli Publ., 2005. 723 p.
- Formolo S., Granström R. *Compression perpendicular to the grain and reinforcement of a pre-stressed timber deck* [Сжатие перпендикулярно волокнам и усиление деревянных покрытий]. Department of civil and environmental engineering division of structural engineering steel and timber structures, Chalmers University of Technology. Göteborg, 2007. 158 p.
- Nilsson K. *Skrivarmering som förstärkning i trä vid belastning vinkelrätt fiberriktningen : en försöksstudie, Examensarbete* [Использование винтов для усиления нагруженных деревянных конструкций перпендикулярно направлению волокон : экспериментальное исследование]. Lund, 2002. Rapport TVBK-5112. 35 p.
- Reichegger M. *Compressione ortogonale alle fibre negli elementi strutturali lignei secondo le nuove proposte di normative. Analisi e sperimentazione su differenti sistemi di rinforzo : tesi di laurea* [Сжатие поперек волокон элементов деревянных конструкций согласно новым положениям норм. Расчеты и эксперименты при различных системах усиления]. L'Università degli Studi di Trento. Trento, 2004. 57 p.
- Bejtka I., Blass H. J. *Self-tapping screws as reinforcement in beam supports* [Винты в качестве усиления опорных частей балок]. Karlsruhe, 2011. 25 p.
- Глушко К. К., Маркечко Е. В. Численный анализ устойчивости центрально-сжатых стальных винтов в деревянных конструкциях // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сб. статей Междунар. науч.-техн. конф. (Брест, 27 марта 2020 г.). Брест : БрГТУ, 2020. С. 31–38. (In Russ.).
- Hlushko K. K., Markechko E. V. Numerical analysis of the stability of centrally compressed steel screws in wooden structures. *Teoriya i praktika issledovaniy i proektirovaniya v stroitel'stve s primeneniem sistem avtomatizirovannogo proektirovaniya (SAPR)* [Research and engineering in construction using computed aided design: theory and practice (CAD) systems. Coll. sci. proc. (Brest, March 27, 2020)]. Brest, BSTU Publ., 2020, pp. 31–38. (In Russ.).
- Найчук А. Я., Глушко К. К., Маркечко Е. В. Устойчивость стальных центрально-сжатых винтов в массиве древесины // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 7. С. 4–9. doi: 10.33622/0869-7019.2020.07.4-9
- Naychuk A. Ya., Hlushko K. K., Markechko E. V. Stability of steel centrally compressed screws in solid wood. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2020, no. 7, pp. 4–9. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2020.07.4-9
- Лейтес С. Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. М. : Госстройиздат, 1954. 312 с.
- Leites S. D. *Ustoychivost' szhatyh stal'nykh stержней* [Stability of compressed steel rods]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1954. 312 p. (In Russ.).
- Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций / пер. с англ. М. : Физматгиз, 1959. 544 с.
- Bleich F. *Ustoychivost' metallicheskih konstrukciy* [Stability of metal structures]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 544 p. (In Russ.).
- EN 1995-1-1 (2004). *Eurocode 5. Design of timber structures. Part 1-1. General – Common rules and rules for buildings* [Еврокод 5. Проектирование деревянных конструкций. Часть 1-1 – общая. Общие правила и правила для зданий]. Available at: <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1995.1.1.2004.pdf>. (accessed 27.02.2020).
- Newmark N. M. Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads [Численная процедура для вычисления прогибов, моментов и деформирующих нагрузок]. *ASCE Transactions*, 1943, no. 2202, vol. 108, pp. 1161–1234.
- Salvadori M. G. Numerical computation of buckling loads by finite differences [Численный расчет изгибающих моментов с помощью конечных разностей]. *ASCE Transactions*, 1951, vol. 116, pp. 590–624.
- Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978, 512 с.
- Kalitkin N. N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 512 p. (In Russ.).
- Гончаров В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции // Успехи математических наук. 1937. № 3. С. 113–143.
- Goncharov V. L. Interpolation processes and entire functions. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1937, no. 3, pp. 113–143. (In Russ.).
- Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. О построении и исследовании однородных разностных схем // Математический сборник. 1982. Т. 117(159), № 4. С. 469–480.
- Lazarov R. D., Makarov V. L., Samarsky A. A. On the construction and study of homogeneous difference schemes. *Matematicheskiy sbornik*, 1982, vol. 117(159), no. 4, pp. 469–480. (In Russ.). ■