

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Черняк А. А. Высшая математика на базе MathCAD/ А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. А. Доманова. – СПб. : БХВ–Петербург, 2004. – 608 с.
2. Гапак О. В. Використання інформаційних технологій при вивченні дисциплін математичного циклу студентами інженерних спеціальностей / О. В. Гапак // Науковий вісник Ужгородського університету. – 2015. – Вип. 1 (26). – С. 35–40.
3. Казнадій С. П. Використання комп'ютерних технологій в навчальному процесі / С. П. Казнадій, В. П. Мурашківська, Л. А. Руновська // Педагогічні науки : теорія, історія, інформаційні технології. – 2016. – № 2 (56). – С. 263–269.
4. Сінько Ю. І. Системи комп'ютерної математики та їх роль у математичній освіті / Ю. І. Сінько // Інформаційні технології в освіті : [зб. наук. праць]. – 2009. – Вип. 3. – С. 271–278.
5. Кирьянов Д. В. Самоучитель MathCad 13 / Д. В. Кирьянов. – СПб. : БХВ–Петербург, 2006. – 528 с.
6. Захарикова Е. Б. Имитационное моделирование систем и сетей массового обслуживания средствами приложения к пакету MathCAD / Е. Б. Захарикова, П. П. Макарычев // Технические науки. Информатика, вычислительная техника. – 2012. – № 3 (23). – С. 25–35.
7. Самойленко М. І. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування) : навч. посібник / М. І. Самойленко, Б. Г. Скоков. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 176 с.
8. Гавриленко В. В. Комп'ютерні технології в розв'язанні задач теорії масового обслуговування на транспорті : навч. посібник з грифом МОН України / В. В. Гавриленко, І. М. Цуканов, Л. М. Парохненко. – К. : НТУ, 2006. – 219 с.
9. Березовський В. Є. Дослідження операцій. Практичний курс : навч. посібник / В. Є. Березовський, М. М. Гузій, В. М. Дякон, Л. Є. Ковальов, М. О. Медведєва; за заг. ред. М. М. Гузія. – Умань : Видавництво «Сочінський», 2011. – 238 с.
10. Черненко В. П. Методичні вказівки щодо лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Теорія масового обслуговування» для студентів денної форми навчання зі спеціальності 113 – «Прикладна математика» освітнього ступеня «Магістр» / В. П. Черненко. – Кременчук : Вид-во КрНУ, 2018. – 49 с.

**УДК 519.688:004.021**

**Чичурин Александр Вячеславович**

доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерного моделирования  
КУЛ, г. Люблин, Польша,  
ВУУ им. Леси Украинки, г. Луцк, Украина  
[achichurin@gmail.com](mailto:achichurin@gmail.com)

**Швычкина Елена Николаевна**

кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики  
Брестский государственный технический университет, г. Брест, Беларусь  
[shvychkina@yandex.ru](mailto:shvychkina@yandex.ru)

### **О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ТОЧНЫМИ И ПРИБЛИЖЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВА СУБСТРАТА И ОДИН МИКРООРГАНИЗМ**

**Чичурин А. В., Швычкина Е. Н. О соотношениях между точными и приближенными решениями модели хемостата, содержащей два субстрата и один микроорганизм.** Для модели хемостата с одним микроорганизмом, двумя питательными субстратами и двумя различными механизмами их взаимодействия приводится обзор результатов, полученных авторами. Приведена связь между точными аналитическими решениями и решениями, найденными с применением асимптотических методов.

**Ключевые слова:** модель хемостата, микроорганизм с двумя субстратами, дифференциальное уравнение, точное решение, приближенное решение.

**Chichurin Alexander, Shvychkina Alena. On the relations between the exact and approximate solutions of the model of chemostat, that contains two nutrients and one microorganism.** For a chemostat model with one microorganism, two nutrient substrates and two different mechanisms of their interaction, a survey of the results obtained by the authors is given. A connection is made between the exact analytic solutions and solutions found using asymptotic methods.

**Keywords:** chemostat model, microorganism with two nutrients, exact solution, approximate solution, differential equation, equilibrium position.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим ресурсную модель, которая описывает процесс роста микроорганизма в хемостате [1]. Хемостат – это лабораторный аппарат, используемый для производства и физиологического изучения микроорганизмов. Такие модели имеют место как в экологии (например, условия роста планктона в озерах), так и в биотехнологических задачах. Экспериментальные исследования взаимосвязи между теорией и экспериментом можно найти, например, в [2–6]. Базовая модель роста популяций в хемостате, которая основывается на кинетике Моно, описывается безразмерной системой

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t) \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - x_2(t) \frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ \dot{x}_i(t) = \left( \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} - D \right) x_i(t), \quad (i = 1, 2), \end{cases} \quad (1)$$

где параметр  $D$  называется потоком и он численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер; функция  $s(t)$  обозначает плотность питательного субстрата; функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – плотности микроорганизмов в момент времени  $t$ ;  $s_0$  – концентрация субстрата в питательном растворе на входе (начальная концентрация); параметры  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) – константы Михаэлиса-Ментен; величины  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ) обозначают максимальные скорости роста  $i$ -го микроорганизма.

Системы вида (1) изучались в многочисленных работах (например, [1–6]), где для них были проведены исследования с помощью асимптотических и топологических методов, а также с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений.

В работах [7–10] было показано, что в случае, когда коэффициенты Михаэлиса-Ментен удовлетворяют условию  $a_1 = a_2$  интегрирование дифференциальной системы третьего порядка (1) удается свести к интегрированию одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. В работах [7–9, 11] были найдены коэффициентные соотношения, при выполнении которых удается построить двухпараметрические семейства решений в аналитической форме и привести визуализацию этих решений. В этих же работах были приведены области допустимых значений параметров системы (1), которые гарантируют существование аналитических решений.

В работах [12–16] было показано, что модели с несколькими субстратами в ряде задач являются более адекватными для описания процессов взаимодействия. Так модели, связанные с наличием двух или более субстратов, важны для изучения, поскольку при наличии этих субстратов и их взаимодействии изменяется эффективность роста микроорганизма (микроорганизмов). Этот процесс реализуется в случае, когда два субстрата удовлетворяют различным потребностям микроорганизма. Пример двух таких субстратов: аммиак предоставляет азот, в то время как глюкоза дает углерод [15] (образующие блоки белка). Такие субстраты дополняют друг друга. Аналогичным образом два питательных вещества являются взаимозаменяемыми, если они отвечают тем же потребностям организма. Например, глюкоза, галактоза, фруктоза обеспечивают микроорганизм энергией (сахар) [13].

В данной работе мы рассмотрим модификацию хемостат-модели (1), в которой присутствуют два питательных субстрата и только один микроорганизм.

Выделяют три основных механизма взаимодействия субстратов [12]:

- *взаимодополняющие*, когда происходит взаимодействие между субстратами. Например, было установлено [13, 14], что кишечная палочка *E. Coli* при культивировании использует как субстрат сахара глюкозу, галактозу и др. Но клетки *E. Coli*, выращенные в хемостате, способны заменить глюкозу в качестве источника углерода и энергии некоторыми другими сахарами без лаг-периода [2];

- *взаимодополняющие*, когда не происходит взаимодействие между субстратами. Например, при строительстве молекул белка аммиак (первый субстрат) выделяет азот (второй субстрат) не взаимодействуя с ним, тоже самое можно сказать о глюкозе (первый субстрат) и углероде (второй субстрат) [15]. Два питательных вещества (субстрата) дополняют друг друга, если они удовлетворяют разным потребностям микроорганизма;

- *взаимозаменяемые*. Оба субстрата при этом удовлетворяют одинаковым потребностям микроорганизма. Например, два из следующих шести веществ: глюкоза, галактоза, мальтоза, рибоза, арабиноза и фруктоза, могут быть выбраны в качестве двух субстратов, которые участвуют в процессе обеспечения энергией микроорганизма [13].

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим модель хемостата, в которой происходит рост одного микроорганизма, питающегося двумя субстратами. Такая модель описывается системой дифференциальных уравнений [15, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dt} &= (s_{10} - s_1)D - \frac{x}{y_1} f(s_1, s_2), \\ \frac{ds_2}{dt} &= (s_{20} - s_2)D - \frac{x}{y_2} f(s_1, s_2), \\ \frac{dx}{dt} &= (f(s_1, s_2) - D)x \end{aligned} \quad (2)$$

с заданными начальными условиями

$$s_1(0) = s_{10} \geq 0, \quad s_2(0) = s_{20} \geq 0, \quad x(0) = x_0 \geq 0, \quad (3)$$

где  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) – коэффициенты экономичности использования субстрата, показывающие какая доля  $i$ -го субстрата идет на увеличение биомассы микроорганизма на единицу потребляемого ресурса.

*Замечание 1.* Система (2) записана в безразмерной форме. Функция  $f(s_1, s_2)$  выбирается исходя из имеющего способа взаимодействия субстратов.

В случае если субстраты взаимозаменяемы, то

$$f(s_1, s_2) = \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} + \frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)}; \quad (4)$$

если субстраты взаимодействуют между собой, то

$$f(s_1, s_2) = \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} \cdot \frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)}; \quad (5)$$

если субстраты не взаимодействуют между собой и одно питательное вещество ограничивает другое, то функция  $f(s_1, s_2)$  в системе (2) принимает вид [16]

$$f(s_1, s_2) = \min \left( \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)}, \frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)} \right). \quad (6)$$

Величины  $D, m_1, m_2$  и  $a_1, a_2$  в соотношениях (4)–(6) являются биологическими параметрами и принимают действительными положительными значения.

В работе [17] было показано, что система (2), (3) может быть переписана в виде

$$\frac{d\Sigma_1}{dt} = -D\Sigma_1, \quad \frac{d\Sigma_2}{dt} = -D\Sigma_2, \quad \frac{dx}{dt} = \left( f \left( s_{10} - \frac{1}{y_1}x - \Sigma_1, s_{20} - \frac{1}{y_2}x - \Sigma_2 \right) - D \right) x, \quad (7)$$

где  $\Sigma_1 = s_{10} - s_1 - \frac{1}{y_1}x$ ,  $\Sigma_2 = s_{20} - s_2 - \frac{1}{y_2}x$ .

Решение первых двух уравнений системы (7) имеет вид

$$\Sigma_1 = C_1 e^{-Dt}, \Sigma_2 = C_2 e^{-Dt}, \quad (8)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Подставив соотношения (8) в третье уравнение системы (7), получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \left( f \left( s_{10} - \frac{1}{y_1} x - C_1 e^{-Dt}, s_{20} - \frac{1}{y_2} x - C_2 e^{-Dt} \right) - D \right) x. \quad (9)$$

В работах [17, 18] система (7) исследовалась для случая, когда  $t \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\Sigma_1 \rightarrow 0, \Sigma_2 \rightarrow 0, \quad (10)$$

и третье уравнение системы (7) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \left( f \left( s_{10} - \frac{1}{y_1} x, s_{20} - \frac{1}{y_2} x \right) - D \right) x. \quad (11)$$

В работе [17] было проведено численное исследование уравнения (11) для различных механизмов воздействия субстратов на микроорганизм, т.е. рассматривалась функция  $f(s_1, s_2)$  вида (4), (5) или (6). Там же была приведена визуализация поведения таких систем, после чего был сделан вывод о том, что наиболее высокая плотность микроорганизма будет возникать в случае взаимодополняющих субстратов. Были также показаны и проиллюстрированы различия в поведении систем, моделирующих невзаимодействующие взаимодополняющие субстраты и взаимодействующие взаимодополняющие субстраты. Компьютерные симуляции показали, что взаимодополняющие субстраты, которые взаимодействуют между собой, приводят к более высокой плотности микроорганизма, чем невзаимодействующие, при которых микроорганизмы вымирают. Это согласуется с экспериментальными результатами [20] о том, что дополнительные питательные вещества (глюкоза и пептон) значительно увеличивают производство водорода анаэробными водород образующими бактериями.

В работе [18] дифференциальное уравнение (11) было проинтегрировано для трех различных видов функции  $f(s_1, s_2)$ . Приведенные там точные частные решения дифференциальных уравнений описывают зависимости  $x(t)$  в моделях хемостата (2)-(4) и (2), (5), (6). Были приведены примеры, в которых для конкретных значений параметров указывался точный вид решений и осуществлялась визуализация этих решений, а также демонстрировалось совпадение графиков интегральных кривых с графиком потока соответствующего векторного поля на достаточно больших временных промежутках.

В работе [19] было рассмотрено дифференциальное уравнение (9) для случая (4) и были найдены коэффициентные условия на параметры системы (2), при выполнении которых его удастся проинтегрировать. Для функции  $f(s_1, s_2)$  вида (5) был проведен численный анализ решения уравнения (9), записанного в виде интерполяционной функции. Эта функция аппроксимирует на заданном временном интервале точное аналитическое решение, которое найдено с применением асимптотических методов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В зависимости от характера взаимодействия субстратов рассмотрим два случая.

1. Пусть функция  $f(s_1, s_2)$  имеет вид (5). Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{m_1 m_2 \left( s_{10} - \frac{x}{y_1} - C_1 e^{-Dt} \right) \left( s_{20} - \frac{x}{y_2} - C_2 e^{-Dt} \right)}{\left( a_1 + s_{10} - \frac{x}{y_1} - C_1 e^{-Dt} \right) \left( a_2 + s_{20} - \frac{x}{y_2} - C_2 e^{-Dt} \right)} - D \right) x. \quad (12)$$

Для уравнения (12) будем искать коэффициентные соотношения, при выполнении которых это уравнение удастся проинтегрировать способом, аналогичным представленному в работе [19].

Введем замену

$$t = -\frac{\ln \tau}{D}. \quad (13)$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$D\tau \frac{dx}{d\tau} = \left( D - \frac{m_1 m_2 \left( (C_1 \tau - s_{10}) y_1 + x \right) \left( (C_2 \tau - s_{20}) y_2 + x \right)}{\left( (C_1 \tau - s_{10} - a_1) y_1 + x \right) \left( (C_2 \tau - s_{20} - a_2) y_2 + x \right)} \right) x. \quad (14)$$

Введем замену

$$\tau = \tau(x). \quad (15)$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{D\tau(x-y_1(a_1-C_1\tau+s_{10}))(x-y_2(a_2-C_2\tau+s_{20}))}{x(D(x-y_1(a_1-C_1\tau+s_{10}))(x-y_2(a_2-C_2\tau+s_{20}))-m_1m_2(y_1(C_1\tau-s_{10})+x)(y_2(C_2\tau-s_{20})+x))}. \quad (16)$$

Пусть коэффициенты уравнения (16) связаны соотношениями

$$D = m_1m_2, s_{20} = \frac{a_2s_{10}}{a_1}, y_2 = \frac{a_1y_1}{a_2}, C_1 = -\frac{a_1}{a_2}C_2. \quad (17)$$

Учитывая соотношения (17), уравнение (16) сводится к уравнению

$$D\tau \frac{d\tau}{dx} = \left( D - \frac{m_1m_2((C_1\tau-s_{10})y_1+x)((C_2\tau-s_{20})y_2+x)}{((C_1\tau-s_{10}-a_1)y_1+x)((C_2\tau-s_{20}-a_2)y_2+x)} \right) x, \quad (18)$$

которое после замены

$$\tau^2 = w \quad (19)$$

сводится к уравнению Бернулли

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2(x-(a_1+s_{10})y_1)^2}{xa_1y_1(2x-(a_1+2s_{10})y_1)}z - \frac{2c_2^2a_1y_1}{xa_2^2(2x-(a_1+2s_{10})y_1)}z^2. \quad (20)$$

Таким образом, проинтегрировав уравнение (20) и воспользовавшись заменами, обратными заменам (19), (15), (13), найдем общее решение уравнения (12), (17).

*Замечание 2.* Первые три условия (17) удовлетворяют ограничениям на параметры для модели хемостата, а именно, являются положительными величинами. Последнее условие (17) говорит о том, что величины  $C_1$  и  $C_2$  имеют противоположные знаки, что противоречит условиям

$$C_1 = -\frac{x_0}{y_1}, C_2 = -\frac{x_0}{y_2},$$

которые были получены в работе [19].

2. Пусть функция  $f(s_1, s_2)$  имеет вид (4). Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = x \left( \frac{m_1(C_1(-e^{-Dt})+s_{10}-\frac{x}{y_1})}{a_1-C_1e^{-Dt}+s_{10}-\frac{x}{y_1}} + \frac{m_2(C_2(-e^{-Dt})+s_{20}-\frac{x}{y_2})}{a_2-C_2e^{-Dt}+s_{20}-\frac{x}{y_2}} - D \right). \quad (21)$$

В случае выполнения условия (10), дифференциальное уравнение (21) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = x \left( \frac{m_1(s_{10}-\frac{x}{y_1})}{a_1+s_{10}-\frac{x}{y_1}} + \frac{m_2(s_{20}-\frac{x}{y_2})}{a_2+s_{20}-\frac{x}{y_2}} - D \right). \quad (22)$$

Общий интеграл уравнения (22) записывается с помощью специальных функций [18].

В работе [19] были найдены коэффициентные условия вида

$$y_2(a_2 + s_{20}) = y_1(a_1 + s_{10}), D = m_1 + m_2, C_2y_2 = C_1y_1, \quad (23)$$

при выполнении которых уравнение (21) интегрируется в специальных функциях.

Для решений дифференциально уравнения (21), коэффициенты которого связаны соотношениями (23), выясним связь с решением дифференциального уравнения (22) с теми же коэффициентными соотношениями.

Рассмотрим, например, набор значений параметров

$$s_{10} = 1, m_1 = 3, a_1 = 1/2, y_2 = 2, m_2 = 2, a_2 = 1/3, y_1 = 1 \quad (24)$$

и начальное условие

$$x(0) = 4. \quad (25)$$

Подставляя значения (24) в уравнения (21) и (22), получим соответственно уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{12e^{3t}x}{e^{3t}(2x-5)-8} \quad (26)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{12x}{2x-5}. \quad (27)$$

Решением задачи Коши (26), (25) является функция вида

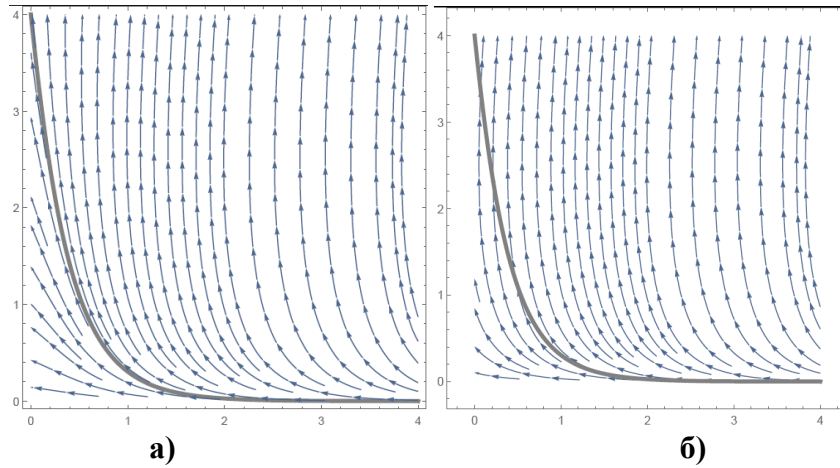
$$e^{3t-\frac{x}{2}}x^{5/4} + 2^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}, 2\right) = 4e^{-x/2}x^{1/4} + 2^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{x}{2}\right), \quad (28)$$

где  $\Gamma(\alpha, x)$  – неполная гамма-функция [21]. Общий интеграл уравнения (27) имеет вид

$$\frac{x}{6} - \frac{5\ln(x)}{12} - t = C_1, \quad (29)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная.

Построим графики потоков векторных полей [22] уравнений (26) и (27). На рисунке 1а изображен график функции (28) совмещенный с векторным полем дифференциального уравнения (26), решением которого она является.



**Рис. 1. График функции (28) совмещенный с векторными полями дифференциальных уравнений (26) и (27)**

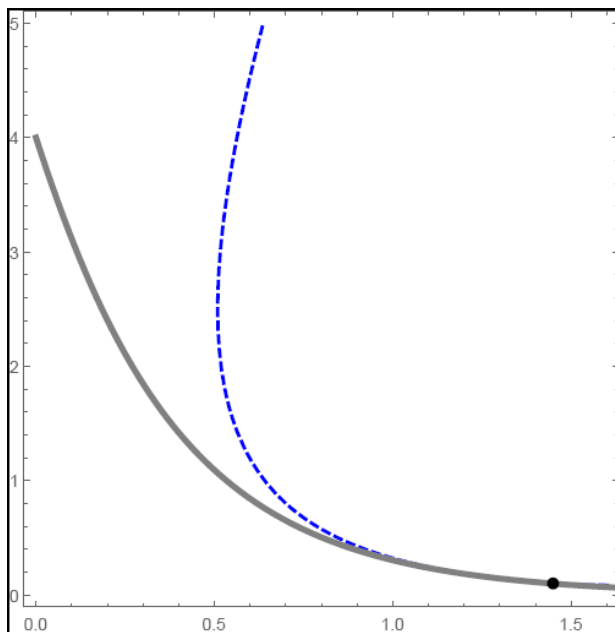
На рисунке 1б этот же график совмещен с векторным полем уравнения (27). Из рисунка 1б можно сделать вывод о том, что поведение графика функции (28) в окрестности точки  $t = 0$  отличается от направления векторного потока. Однако, с увеличением значений  $t$  кривая функции (28) приближается к линиям потока векторного поля дифференциального уравнения (27) (на рисунке 1б это можно заметить уже при  $t > 1$ ). Это связано с тем, что нелинейный член  $e^{-Dt}$  уравнения (21) с увеличением переменной  $t$  становится практически равным нулю и решение дифференциального уравнения (26) приближается к асимптотическому решению уравнения (27).

Определим значение  $C_1$  из общего интеграла (29), при котором он будет совпадать с частным решением (28). Подставим в уравнение (28) значение  $x = 0.1$ . Отсюда получим приближенное равенство

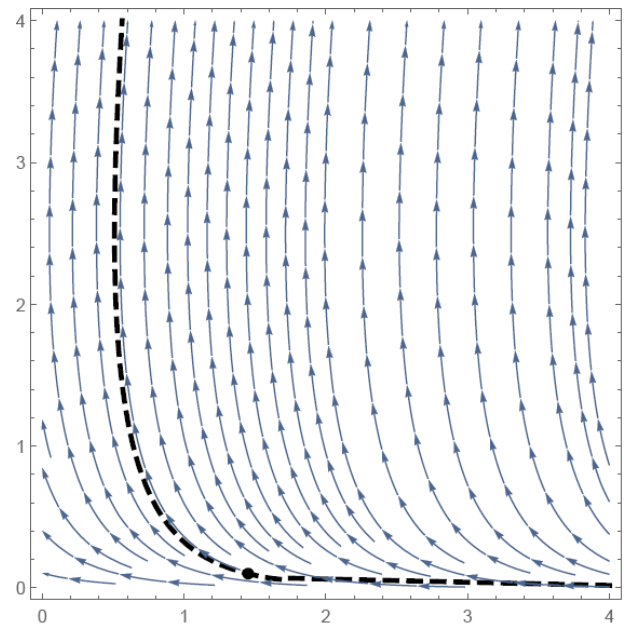
$$e^{3t} = 77.57 \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{3} \ln(77.57) \approx 1.45.$$

Подставляя значения  $x = 0.1$  и  $t = 1.45$  в соотношение (29), находим значение произвольной постоянной  $C_1 \approx -0.47$ .

На рисунке 2 совмещены графики функций (28) (сплошная линия) и (29) (пунктирная линия). Показано, что обе кривые проходят через точку  $(1.45, 0.1)$ . На рисунке 3 изображена кривая (29) и векторное поле дифференциального уравнения (27).



**Рис. 2. Интегральные кривые уравнений (26) и (27), проходящие через точку (1.45, 0.1)**



**Рис. 3. Интегральная кривая (29) уравнения (27), совмещенная с графиком потока векторного поля этого уравнения**

Видно, что с увеличением времени  $t$  для описания численности микроорганизма  $x(t)$  можно вместо равенства (28) использовать равенство (29) с определенным значением  $C_1$ , вид которого, очевидно, намного проще. Предложенный выше способ оценки двух решений, позволяет выбрать приближительное значение переменной  $t$ , при котором можно осуществить переход от решения, определяемым равенством (28) к решению, определяемым равенством (29) с определенным значением  $C_1$ . Здесь следует руководствоваться требованиями к допустимым погрешностям в решении конкретной прикладной задачи.

#### **ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ.**

Приведен анализ результатов исследований для точных и приближенных решений модели хемостата, содержащей два субстрата и один микроорганизм, которые были получены ранее авторами. Отмечена целесообразность рассмотрения ненулевых отрицательных произвольных постоянных в первых интегралах системы дифференциальных уравнений, описывающей модель хемостата.

Рассмотрены примеры, в которых для конкретных значений параметров приведена оценка точных и приближенных решений модели хемостата. Указан способ выбора временного промежутка, в котором предпочтительней с точки зрения простоты вычислений использовать приближенные решения вместо точных решений, заданных в неявной форме и содержащих специальные функции. Вычисления и визуализация функций были проделаны с использованием системы *Mathematica*.

Публикация автора Швычкиной Е. Н. была выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-124).

#### **СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Smith, H. L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
2. Hansen, S. R. Single-nutrient microbial competition: qualitative agreement between experimental and theoretically forecast outcomes / S. R. Hansen, S. P. Hubbell // Science. – 1980. – Vol. 207 (4438). – P. 1491–1493.
3. Перт, Д. С. Основы культивирования микроорганизмов и клеток / Д. С. Перт; под ред. проф. И. Л. Работновой. – М. : Мир, 1978. – 331 с.
4. Butler, G.J. A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate / G. J. Butler, S. B. Hsu, P. Waltman // SIAM J. Appl. Math. – 1985. – Vol. 45, № 3. – P. 435 – 449.
5. De Leenheer, P. Feedback Control for Chemostat Models/ P. De Leenheer, H. Smith // J. Math. Biol. – 2003. – № 46. – P. 48 – 70.
6. Waltman, P. Coexistence in chemostat-like models / P. Waltman // Rocky Mountain Journal of mathematics. – 1990. – Vol. 20, № 4. – P. 777 – 808.
7. Chichurin, A. Numerical research of the chemostat model for the single-nutrient competition / A. Chichurin, H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 7th International Workshop CASTR'2013, Siedlce, Poland, 22–25 Sep. 2013 / University of Podlasie ; Eds.: M. Jakubiak [and others]. – Siedlce, 2013. – Vol. IV, № 1. – P. 130 – 136.
8. Чичурин, А. В. Компьютерное моделирование двух моделей хемостата для одного питательного ресурса / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вестник БрГТУ : Физика, математика, информатика. – 2013. – Т. 83, № 5. – С. 9 – 14.
9. Чичурин, А. В. Численное исследование решений двух динамических моделей хемостата с равными константами Михаэлиса-Ментен методами компьютерного моделирования / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела : сб. материалов докл. всерос. конф., Чебоксары, 16–21 июня 2014 г. : в 2 ч. / Чуваш. гос. пед. ун-т им. И.Я. Яковлева ; под ред. Н.Ф. Морозова, Б.Г. Миронова, А.В. Манжирова. – Чебоксары : ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2014. – Ч. 2. – С. 250 – 259.

10. Чичурин, А. В. О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – №1. – С. 69 – 76.
11. Chichurin, A. V. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource / A. V. Chichurin, H. N. Shvychkina // *Mathematical Biosciences*. – 2016. – № 278. – P. 30–36.
12. Leon, J. A. Competition between two species for two complementary or two substitutable resources / J. A. Leon, D. B. Tumpson // *J. Theoret. Biol.* – 1975. – Vol. 50. – P. 185–201.
13. Lendenmann, U. Kinetic Models for the Growth of Escherichia Coli with Mixtures of Sugars Under Carbon-Limited Conditions / U. Lendenmann and T. Egli // *Biotechnology and Bioengineering*. – 1998.– Vol. 59, No. 1. – P. 99–107.
14. Lendenmann, U. Is Escherichia coli growing in glucose-limited chemostat culture able to utilize other sugars without lag? / U. Lendenmann and T. Egli // *Microbiology*. – 1995. – Vol. 141. – P. 71– 78.
15. Grady, C. P. L. *Biological Wastewater Treatment* / C. P. L. Grady, Jr., G. T. Daigger and H. C. Lim. – 2nd ed. – New York, 1999. – 1076 p.
16. Hsu, S. B. Exploitive Competition for Two Complementary Nutrients in Continuous Cultures / S. B. Hsu, K. S. Cheng, S. P. Hubbell // *SIAM J. Appl. Math.* – 1981. – Vol. 41, № 3. – P. 442 – 444.
17. Braselton J P. Comparing the Effects of Interactive and Noninteractive Complementary Nutrients on Growth in a Chemostat / P. B. James, L. A. Martha, M. B. Lorraine // *Open Journal of Applied Sciences*. – 2013. – Vol. 3. – P. 323 – 331.
18. Чичурин, А. В. О точных частных решениях в модели хемостата, содержащих два субстрата и один микроорганизм / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина / *Математика. Інформаційні технології. Освіта. : сб. статей по материалам V міжд. науч.-практ. конф., Луцк-Свитязь V міжд. науч.-практ. конф., Луцк-Свитязь, 5–7 июня 2017 г. / Волин. нац. ун-т. ім. Леси Українки. – Луцк-Свитязь, 2017. – №4. – С. 119–126.*
19. Chichurin, A. On the solutions of the chemostat model, that contains one microorganism and two complimentary or supplementary nutrients / A. Chichurin, A. Shvychkina // *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*. – Siedlce, 2017. – Vol. VI. – P. 232–238.
20. Whang, L. M. A Dual-Substrate Steady-State Model for Biological Hydrogen Production in an Anaerobic Hydrogen Fermentation Process / L.-M. Whang, C.-J. Hsiao and S.-S. Cheng // *Biotechnology and Bioengineering*. – 2006. – Vol. 95, № 3. – P. 492–500.
21. <http://reference.wolfram.com/language/ref/Gamma.html>.
22. <http://reference.wolfram.com/language/ref/StreamPlot.html>.

**УДК 378.14**

**Якунін Анатолій Вікторович**

кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики

Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, м. Харків

*yava1957pens@gmail.com*

## **МАТЕМАТИЗАЦІЯ ТА ЇЇ РОЛЬ В ЕЛЕКТРОННОМУ НАВЧАННІ**

**Якунін А. В. Математизація та її роль в електронному навчанні.** Розглянуто сучасний стан математизації як основної компоненти фундаменталізації випереджаючої освіти для сталого розвитку. Виділено глобальні тенденції, що служать передумовою математизації. Сформульовано ключові проблеми, вирішенню яких сприяє математизація освітнього простору. Висвітлено місце математизації в різних предметних областях та її вплив на зміст і структуру дидактичних систем. Указано шляхи і способи впровадження математизації в електронне навчання. Підкреслено перспективність електронних навчальних систем як технологічної бази випереджаючої неперервної освіти. Намічено основні задачі з розробки технологічного та психолого-педагогічного супроводу математизації для підвищення ефективності випереджаючої освіти.