

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

**Учебное пособие по одноименному курсу
для студентов специальности 29.03**

Брест 1991

УДК 539.3:624.04

Автор: О.А. Гочняк

Теория упругости. Учебное пособие по одноименному курсу для студентов специальности 29.03.

Рецензенты: профессор Р.И. Берген (Московский гидромелиоративный институт); ст. научн. сотр., канд. техн. наук Ю.Г. Плотников (ЦНИИПромзданий)

Учебное пособие предназначено для студентов строительных специальностей дневной, вечерней и заочной форм обучения при индивидуальной работе по курсу "Теория упругости". Изложены основные понятия, формулы, уравнения напряженно-деформированного состояния в точке тела, основы классических задач теории упругости и методы их решения; достаточно подробно рассмотрены решения плоской задачи и изгиба тонких пластин. Включены задачи для самостоятельного решения.

ISBN 5-7830-0151-1.

© Брестский политехнический институт 1991

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА.....	5
1.1. Понятия, формулы, уравнения.....	5
1.2. Задачи и их решения.....	3
1.3. Задачи для самостоятельного решения.....	14
2. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ.....	16
2.1. Основные уравнения теории упругости.....	16
2.2. Решение задач теории упругости в перемещениях..	17
2.3. Решение задач теории упругости в напряжениях...	19
2.4. Решение задач теории упругости смешанным методом.....	20
2.5. Прямая, обратная и полуобратная задачи.....	20
2.6. Плоская задача теории упругости.....	21
2.6.1. Решение плоской задачи в напряжениях; функция напряжений..	22
2.6.2. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах.....	24
2.6.3. Задачи и их решения; задачи для самостоятельного решения.....	25
2.6.4. Осесимметричные задачи. Решение в напряжениях.....	30
2.7. Изгиб тонких пластин.....	33
2.7.1. Перемещение и деформации в пластинке....	33
2.7.2. Напряжения в пластинке.....	34
2.7.3. Усилия в пластинке.....	34
2.7.4. Дифференциальное уравнение изогнутой средней поверхности пластинки.....	35
2.7.5. Прямоугольная пластинка; решение Навье..	36
2.7.6. Прямоугольная пластинка; решение М.Леви.	37
2.7.7. Основное уравнение изгиба круглой пластинки.....	39
2.7.7.1. Осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки.....	40
2.7.8. О сущности вариационных методов решения задач по теории изгиба пластинок.....	45
2.7.9. Задачи для самостоятельного решения.....	45
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	56

В строительной практике все более широкое применение находят конструктивные элементы сложной формы, при их расчете часто возникает необходимость учета разнообразных воздействий (силовых, температурных и т.д.), а также специфических физических свойств материалов. Методы сопротивления материалов, как правило, в этих случаях не применимы. Однако существуют иные пути решения задач, основанных на уравнениях, описывающих деформации упругой среды. Эти уравнения и методы их решения изучаются в курсе теории упругости. И если недавно методы теории упругости из-за их сложности не были непосредственно рабочим аппаратом инженера и служили в большинстве случаев для решения научных вопросов, то в настоящее время они составляют основу практических методов расчета деформируемых тел.

Общая постановка задачи теории упругости может быть сформулирована следующим образом. Имеется тело заданной формы, известны механические свойства материала. На тело действуют заданные нагрузки и наложены связи. Требуется определить напряжения, деформации и перемещения в теле.

При решении задач вводят следующие допущения.

- Материал тела представляет собой сплошную среду.
- Материал тела считается однородным, т.е. его механические свойства во всех точках одинаковы.

Принятие гипотез сплошности и однородности создает основу для математического описания поведения материалов и означает, что напряжения, деформации, перемещения могут рассматриваться как кусочно-непрерывные функции координат.

- Материал тела считается изотропным, т.е. механические свойства в каждой точке одинаковы по всем направлениям. Если свойства материала зависят от направления, материал считается анизотропным.

- Деформации в точках тела (относительные удлинения-укорочения ϵ и углы сдвига γ) считаются малыми, следовательно, под действием нагрузок размеры тела существенно не меняются.

1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

1.1. Понятия, формулы, уравнения

Тензор напряжений T_{ij}

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{\sigma}_x & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\sigma}_y & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\sigma}_z \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Напряжения на наклонной площадке с нормалью $\vec{\nu}$ и направляющими косинусами $l = \cos(\nu, x)$; $m = \cos(\nu, y)$; $n = \cos(\nu, z)$

$$\begin{aligned} X_{\nu} &= \tilde{\sigma}_x l + \tilde{\tau}_{xy} m + \tilde{\tau}_{xz} n \\ Y_{\nu} &= \tilde{\tau}_{yx} l + \tilde{\sigma}_y m + \tilde{\tau}_{yz} n \\ Z_{\nu} &= \tilde{\tau}_{zx} l + \tilde{\tau}_{zy} m + \tilde{\sigma}_z n \end{aligned} \quad (1.2)$$

Полное напряжение

$$\rho_{\nu} = \sqrt{X_{\nu}^2 + Y_{\nu}^2 + Z_{\nu}^2} \quad (1.3)$$

Нормальное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu} &= X_{\nu} l + Y_{\nu} m + Z_{\nu} n = \\ &= \tilde{\sigma}_x l^2 + \tilde{\sigma}_y m^2 + \tilde{\sigma}_z n^2 + 2\tilde{\tau}_{xy} lm + 2\tilde{\tau}_{yz} mn + 2\tilde{\tau}_{zx} nl \end{aligned} \quad (1.4)$$

Касательное напряжение

$$\tilde{\tau}_{\nu} = \sqrt{\rho_{\nu}^2 - \sigma_{\nu}^2} \quad (1.5)$$

Главные напряжения σ на площадке с нормалью $\vec{\nu}$ и направляющими косинусами l, m, n

$$X_{\nu} = \sigma l, \quad Y_{\nu} = \sigma m, \quad Z_{\nu} = \sigma n \quad (1.6)$$

Используя (1.2),

$$\begin{aligned} \sigma l &= \tilde{\sigma}_x l + \tilde{\tau}_{xy} m + \tilde{\tau}_{xz} n \\ \sigma m &= \tilde{\tau}_{yx} l + \tilde{\sigma}_y m + \tilde{\tau}_{yz} n \\ \sigma n &= \tilde{\tau}_{zx} l + \tilde{\tau}_{zy} m + \tilde{\sigma}_z n \end{aligned} \quad (1.7)$$

или

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}_x - \sigma)l + \tilde{\tau}_{xy} m + \tilde{\tau}_{xz} n &= 0 \\ \tilde{\tau}_{yx} l + (\tilde{\sigma}_y - \sigma)m + \tilde{\tau}_{yz} n &= 0 \\ \tilde{\tau}_{zx} l + \tilde{\tau}_{zy} m + (\tilde{\sigma}_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных l, m, n (1.8) является однородной, следовательно,

составленный из коэффициентов системы, равен нулю

$$\begin{vmatrix} \partial_x - \partial & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \partial_y - \partial & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \partial_z - \partial \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

Раскрывая определитель (1.9), получено характеристическое уравнение

$$\partial^3 - \mathcal{J}_1 \partial^2 - \mathcal{J}_2 \partial - \mathcal{J}_3 = 0 \quad (1.10)$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \partial_x + \partial_y + \partial_z$$

$$\mathcal{J}_2 = \partial_x \partial_y + \partial_y \partial_z + \partial_z \partial_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$\mathcal{J}_3 = \partial_x \partial_y \partial_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \partial_x \tau_{yz}^2 - \partial_y \tau_{zx}^2 - \partial_z \tau_{xy}^2$$

Кубическое уравнение (1.10) имеет три корня. Нумерация главных напряжений осуществляется в порядке убывания $\partial_1 \geq \partial_2 \geq \partial_3$.

Коэффициенты \mathcal{J}_1 , \mathcal{J}_2 и \mathcal{J}_3 не меняют своего значения при изменении системы координат; они являются соответственно первым (\mathcal{J}_1), вторым (\mathcal{J}_2) и третьим (\mathcal{J}_3) инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей.

Инвариа́нты через главные напряжения равны

$$\mathcal{J}_1 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3; \quad \mathcal{J}_2 = \partial_1 \partial_2 + \partial_2 \partial_3 + \partial_3 \partial_1; \quad \mathcal{J}_3 = \partial_1 \partial_2 \partial_3 \quad (1.11)$$

Тензор напряжений в главных осях

$$T_{\partial} = \begin{vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

Наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{12} = \frac{1}{2} |\partial_1 - \partial_2|; \quad \tau_{23} = \frac{1}{2} |\partial_2 - \partial_3|; \quad \tau_{31} = \frac{1}{2} |\partial_3 - \partial_1| \quad (1.13)$$

Октаэдрические сдвиги, равнонаклонные к направлениям трех главных напряжений, и действующие на них октаэдрические напряжения

$$l = m = n = 1/\sqrt{3}$$

Полное напряжение

$$\rho_{окт}^2 = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) / 3 \quad (1.14)$$

Нормальная составляющая

$$\sigma_{окт} = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) / 3 \quad (1.15)$$

Касательная составляющая

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \quad (1.16)$$

Разложение тензора напряжений T_{δ} на шаровой тензор T_{δ}^0 и тензор-девиатор D_{δ} .

$$T_{\delta} = T_{\delta}^0 + D_{\delta} \quad (1.17)$$

$$\begin{vmatrix} \delta_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \delta_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \delta_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_1 - \delta_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \delta_2 - \delta_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \delta_3 - \delta_0 \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

или

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_1 - \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 - \delta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 - \delta_0 \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

где $\delta_0 = (\delta_x + \delta_y + \delta_z)/3$ или $\delta_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$.

Деформации:

относительные линейные $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$; (1.20)

объемная $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ (1.21)

угловые (дефор. или сдвига) $\gamma_{xy}^m, \gamma_{yz}^m, \gamma_{zx}^m$ (1.22)

Тен. др. деформации:

$$T_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy}^m & \frac{1}{2} \gamma_{xz}^m \\ -\frac{1}{2} \gamma_{yx}^m & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz}^m \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}^m & \frac{1}{2} \gamma_{zy}^m & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

Главные деформации $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ находятс из кубического уравнения $\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0$ (1.24)

Инварианты тензора деформаций J_1, J_2, J_3 определяются выражениями

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$J_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^m{}^2 + \gamma_{yz}^m{}^2 + \gamma_{zx}^m{}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \quad (1.25)$$

$$J_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^m \gamma_{yz}^m \gamma_{zx}^m - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^m{}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^m{}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^m{}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Главные сдвиги

$$\gamma_{12}^m = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \quad \gamma_{23}^m = \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3); \quad \gamma_{31}^m = \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \quad (1.26)$$

Октаэдрическая деформация ($\epsilon_{окт}$) и октаэдрический сдвиг $\gamma_{окт}$.

$$\epsilon_{окт} = \epsilon_{ср} = \frac{\sigma_1}{3} \quad (I.27)$$

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{2}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad (I.28)$$

Тензор деформаций T_ϵ и его составляющие - шаровой тензор T_ϵ^0 и дивизор D_ϵ деформаций

$$T_\epsilon = T_\epsilon^0 + D_\epsilon \quad (I.29)$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{vmatrix} \quad (I.30)$$

или в главных деформациях

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 - \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 - \epsilon_0 \end{vmatrix} \quad (I.31)$$

где $\epsilon_0 = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) / 3$ или $\epsilon_0 = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) / 3$.

1.2. Задачи и их решения

Задача № 1. Два углубленных тела, выполненные из одинакового материала, находятся в однородном напряженном состоянии (компоненты тензора напряжений в любой точке тела одни и те же). Относительное изменение объема одинаковое для обоих тел. Тензор напряжений для первого тела (все числовые данные в МПа)

$$T_1 = \begin{vmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Составить тензор T_2 для второго тела, если для него тензор дивизора задан в виде

$$D_2 = \begin{vmatrix} 13 & 18 & -7 \\ 11 & 12 & 17 \\ 4 & 16 & -21 \end{vmatrix}$$

Решение. Если относительное изменение объема тел одно и то же, то шаровые тензоры для них одинаковы.

Из T_1 следует, что

$$\delta_0 = (45 + 20 - 5)/3 = 20$$

Тогда шаровые тензоры

$$T_1^0 = T_2^0 = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

Тензор напряжений для второго тела

$$T_2 = T_2^0 + D_2 = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 18 & 7 \\ 11 & 12 & 17 \\ -14 & 16 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & 18 & 7 \\ 11 & 32 & 17 \\ -14 & 16 & -1 \end{vmatrix}$$

Задача 2. В некоторой точке упругого тела напряженное состояние определяется следующим тензором напряжений (МПа)

$$T_3 = \begin{vmatrix} 40 & 50 & 70 \\ 40 & 10 & -20 \\ 60 & -25 & -15 \end{vmatrix}$$

Найти в этой точке полное напряжение, его нормальную и касательную составляющие, действующие по площадке, определяемой направлениями косинусами $l = 1/2$; $m = 1/2$; $n = 1/2$.

Решение.

Проекция полного напряжения ρ_{σ} в точке на оси координат

$$\begin{aligned} X_{\sigma} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 40 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot \frac{1}{2} + 70 \cdot \frac{1}{2} = 95 \\ Y_{\sigma} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 40 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} + (-20) \cdot \frac{1}{2} = 10,71 \\ Z_{\sigma} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = 60 \cdot \frac{1}{2} + (-25) \cdot \frac{1}{2} + (-15) \cdot \frac{1}{2} = 6,79 \end{aligned}$$

Полное напряжение

$$\rho_{\sigma} = \sqrt{X_{\sigma}^2 + Y_{\sigma}^2 + Z_{\sigma}^2} = \sqrt{95^2 + 10,71^2 + 6,79^2} = 95,84$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_n = X_{\sigma} l + Y_{\sigma} m + Z_{\sigma} n = 95 \cdot \frac{1}{2} + 10,71 \cdot \frac{1}{2} + 6,79 \cdot \frac{1}{2} = 57,71$$

Касательное напряжение

$$\tau_r = \sqrt{\rho\sigma^2 - \delta\sigma^2} = 95,84^2 - 57,71^2 = 76,52 \text{ МПа.}$$

Задача 2 Напряженное состояние в точке задано девятью компонентами: $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$.
Требуется:

- определить главные напряжения и проверить правильность их нахождения;
- определить положение главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к этим площадкам).

Решение. Главные напряжения находят, решая кубическое уравнение

$$\delta^3 - J_1 \delta^2 - J_2 \delta - J_3 = 0 \quad (I)$$

где коэффициенты являются инвариантами преобразования координат:

$$\begin{aligned} J_1 &= \partial_x + \partial_y + \partial_z = \text{const} \\ J_2 &= \partial_x \partial_y + \partial_y \partial_z + \partial_z \partial_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const} \\ J_3 &= \partial_x \partial_y \partial_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \partial_x \tau_{yz}^2 - \partial_y \tau_{zx}^2 - \partial_z \tau_{xy}^2 = \text{const} \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (I) подстановкой $\delta = y - \frac{J_1}{3}$ приводится к виду

$$y^2 + py + q = 0 \quad (3)$$

где новые коэффициенты соответственно равны:

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3}; \quad q = -\frac{2}{27} J_1^3 + \frac{1}{3} J_1 J_2 - J_3 \quad (4)$$

Корни уравнения (3) выражают через вспомогательный угол φ , определяемый из равенств $\cos \varphi = \frac{q}{2z}$, где $z = \pm 0,5774 \sqrt{|p|}$ (знак z должен совпадать со знаком q , следовательно, $\cos \varphi > 0$).

Корни уравнения (3) определяются из равенств

$$\begin{aligned} y_1 &= -2z \cos \frac{\varphi}{3}; \quad y_2 = 2z \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) \\ y_3 &= 2z \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Проверка: $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. (6)

Главные напряжения равны:

$$\delta^I = y_1 + \frac{J_1}{3}; \quad \delta^{II} = y_2 + \frac{J_1}{3}; \quad \delta^{III} = y_3 + \frac{J_1}{3} \quad (7)$$

Этим трем главным напряжениям в дальнейшем присваиваем обозначения $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, где $\partial_1 \geq \partial_2 \geq \partial_3$.

Для контроля правильности решения кубического уравнения (I) используем инвариантность коэффициентов J_1, J_2, J_3 :

$$\begin{aligned} J_1 &= \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 \\ J_2 &= \partial_1 \partial_2 + \partial_2 \partial_3 + \partial_3 \partial_1 \\ J_3 &= \partial_1 \partial_2 \partial_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения положения главных площадок, т.е. для вычисления направляющих косинусов нормалей к главным площадкам l , m , n удобо представить соответствующую систему однородных уравнений в виде

$$\begin{aligned} (\delta_x - \delta) \frac{l}{n} + \tau_y \frac{m}{n} &= -\tau_{xz} \\ \tau_{yx} \frac{l}{n} + (\delta_y - \delta) \frac{m}{n} &= -\tau_{yz} \\ \tau_{zx} \frac{l}{n} + \tau_{zy} \frac{m}{n} + (\delta_z - \delta) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

а соотношение между квадратами направляющих косинусов - в виде

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{r^2} \quad (10)$$

Так как из трех уравнений системы (9) только два уравнения независимы, то, определив $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$ из решения двух уравнений, третье уравнение используют для контроля найденных отношений $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$. После этого из соотношений (10) определяется n , а затем l и m . Установив n из (10), находят два значения, т.е. $\pm n$; соответствующие знаки l и m определяются из соотношений $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$.

Таким образом, для каждого значения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ находятся свои l, m, n , т.е. направления соответствующих нормалей к главной площадке. Можно рассматривать l, m, n как координаты некоторой точки A , лежащей на нормали ν к соответствующей главной площадке.

Если направляющие косинусы нормали ν_1 к площадке главного напряжения δ_1 обозначить через l_1, m_1, n_1 , а нормалей ν_2, ν_3 - соответственно через l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3 , то из условия взаимной перпендикулярности нормалей к главным площадкам используются три контрольные равенства

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Задача 4. (Численный пример). Напряженное состояние в точке упругого тела задано следующим тензором напряжений (МПа)

$$T_0 = \begin{vmatrix} 140 & 100 & 40 \\ 100 & 50 & 5 \\ 40 & 50 & 100 \end{vmatrix}$$

Определить главные напряжения и проверить правильность их на-

хождения. Определить положение главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к этим площадкам).

Решение.

Коэффициенты кубического уравнения (1)

$$\mathcal{J}_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 140 + 60 + 100 = 300 \text{ МПа.}$$

$$\mathcal{J}_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$

$$= 140 \cdot 60 + 60 \cdot 100 + 100 \cdot 140 - 100^2 - 50^2 - 40^2 = 14300;$$

$$\mathcal{J}_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= 140 \cdot 60 \cdot 100 + 2 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 40 - 140 \cdot 50^2 - 60 \cdot 40^2 - 100 \cdot 100^2 = -206000.$$

Коэффициенты уравнения (3) соответственно равны

$$p = \mathcal{J}_2 - \frac{\mathcal{J}_1^2}{3} = 14300 - \frac{300^2}{3} = -15700$$

$$q = -\frac{2}{27} \mathcal{J}_1^3 + \frac{1}{3} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3 = -\frac{2}{27} 300^3 + \frac{1}{3} 300 \cdot 14300 + 206000 =$$

$$= -364000.$$

Уравнение (3) примет вид

$$y^3 - 15700y - 364000 = 0.$$

Определение вспомогательного угла φ .

$$\varphi = \pm 0,5774 \sqrt{|p|} = -0,5774 \sqrt{|15700|} = -72,348;$$

$$\cos \varphi = \frac{-364000}{72,348^3} = 0,4806; \quad \cos \varphi = 61^\circ 16'.$$

Корни уравнения (3) равны

$$y_1 = -2z \cdot \cos \frac{\varphi}{3} = -2(-72,348) \cos 20^\circ 25' = 144,696 \cdot 0,93706 =$$

$$= 135,5997;$$

$$y_2 = 2z \cos(60^\circ - \frac{\varphi}{3}) = 2(-72,348) \cos 39^\circ 35' = -144,696 \cdot 0,7707 =$$

$$= -111,411;$$

$$y_3 = 2z \cos(60^\circ + \frac{\varphi}{3}) = 2(-72,348) \cos 80^\circ 25' = -144,696 \cdot 0,1671 =$$

$$= -24,1787.$$

$$\text{Проверка: } y_1 + y_2 + y_3 = 135,5997 - 111,411 - 24,1787 = 0.$$

Главные напряжения равны:

$$\sigma^I = y_1 + \frac{\mathcal{J}_1}{3} = 135,5997 + \frac{300}{3} = 235,5997;$$

$$\sigma^{II} = y_2 + \frac{\mathcal{J}_1}{3} = -111,411 + \frac{300}{3} = -11,411;$$

$$\sigma^{III} = y_3 + \frac{\mathcal{J}_1}{3} = -24,1787 + 100 = 75,8213.$$

Этим трем напряжениям присваиваем обозначения $\sigma_1 = 235,5997$;
 $\sigma_2 = 75,8213$; $\sigma_3 = -11,411$, где $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Выполняем контроль правильности решения кубического уравнения (I).

$$\mathcal{J}_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 235,5897 + 75,8213 - 11,411 = 300;$$

$$\mathcal{J}_2 = \delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_3 \delta_1 = 235,5897 \cdot 75,8213 - 75,8213(-11,411) + (-11,411)235,5897 = 14300;$$

$$\mathcal{J}_3 = \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 235,5897 \cdot 75,8213 (-11,411) = -206000.$$

Определяем положение главных площадок (на примере определения положения площадки, где действует $\delta_1 = 235,5897$).

Решаем систему однородных уравнений (9)

$$(140 - 235,5897) \frac{\ell_1}{n_1} + \frac{m_1}{n_1} = -40$$

$$100 \frac{\ell_1}{n_1} + (60 - 235,5897) \frac{m_1}{n_1} = -50.$$

Отсюда: $\frac{\ell_1}{n_1} = 1,772$; $\frac{m_1}{n_1} = 1,294$.

Третье уравнение (9) используем для контроля найденных отношений.

$$50 \cdot 1,772 + 50 \cdot 1,294 + (-135,5897) = 0.$$

Из соотношения между квадратами направляющих косинусов (10) определяем ℓ_1 ; m_1 ; n_1 .

$$(1,772)^2 + (1,294)^2 = \frac{1}{n_1^2}$$

$$\ell_1 = \pm 0,7349; \quad m_1 = \pm 0,5366; \quad n_1 = \pm 0,4147.$$

Аналогично устанавливается положение двух других главных площадок с направляющими косинусами направляющих ℓ_2 ; m_2 ; n_2 и ℓ_3 ; m_3 ; n_3 .

Задача 5. Доказать, что тензор-девиатор деформаций не вызывает изменений объема.

Решение. Девиатор деформаций имеет вид

$$D_E = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy}^m & \frac{1}{2} \gamma_{xz}^m \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx}^m & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz}^m \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}^m & \frac{1}{2} \gamma_{zy}^m & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix}$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

Относительное изменение объема $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$ равно сумме трех относительных линейных деформаций по направлениям координат, и для девиатора $\frac{\Delta V}{V} = (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0$

Так как $\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3$, то $\frac{\Delta V}{V} = 0$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В некоторой точке стального образца (известны E и ν), находящегося в упругом состоянии, задан тензор напряжений T_{ij} (МПа). Вычислить тензор деформаций T_{ij}^e и относительную объемную деформацию Θ в данной точке.

Вариант "А"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 120 & 0 & 60 \\ 0 & -60 & 40 \\ 60 & 40 & -80 \end{vmatrix} \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа, } \nu = 0,3$$

Вариант "Б"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 110 & 70 & 15 \\ 70 & -10 & 25 \\ 15 & 25 & 30 \end{vmatrix} \quad E = 1,75 \cdot 10^5 \text{ МПа; } \nu = 0,25$$

Вариант "В"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 17 & 28 & 14 \\ 28 & -15 & -20 \\ 14 & -20 & 20 \end{vmatrix} \quad E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ МПа; } \nu = 0,3$$

Вариант "Г"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 105 & 20 & 30 \\ 20 & 60 & -18 \\ 30 & -18 & -40 \end{vmatrix} \quad E = 1,9 \cdot 10^5 \text{ МПа; } \nu = 0,35$$

Вариант "Д"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 17 & 40 & -35 \\ 40 & 20 & 50 \\ -35 & 50 & -40 \end{vmatrix} \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа; } \nu = 0,3$$

Задача 2. Разложить тензор напряжений T_{ij} (МПа) на сферический тензор (T_{ij}^0) и девiator (D_{ij}).

Вариант "А"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 30 & 10 & 15 \\ 1 & -50 & -20 \\ 15 & -20 & -60 \end{vmatrix}$$

Вариант "Б"

$$\text{Дано: } T_{ij} = \begin{vmatrix} 40 & 60 & 70 \\ 60 & 30 & -20 \\ 70 & -20 & -50 \end{vmatrix}$$

Вариант "В"
 Дано: $T_{\sigma} = \begin{vmatrix} 70 & -10 & -25 \\ -10 & 15 & 18 \\ -25 & 18 & -90 \end{vmatrix}$

Вариант "Г"
 Дано: $T_{\sigma} = \begin{vmatrix} 17 & 15 & 29 \\ 15 & 10 & -30 \\ 29 & -30 & -20 \end{vmatrix}$

Вариант "Д"
 Дано: $T_{\sigma} = \begin{vmatrix} -40 & 17 & 29 \\ 17 & -30 & 35 \\ 29 & 35 & 60 \end{vmatrix}$

Задача 3. Определить нормальную и касательную составляющие (σ_n и τ_n) полного напряжения, действующего на наклонной площадке, заданной направляющими косинусами ее нормали l, m, n . Тензор напряжений T_{σ} взять из условия задачи 2.

Вариант "А"
 Дано: $l = 1/3; m = 1/3; n = 2/3$. - по варианту "А" задачи 2.

Вариант "Б"
 Дано: $l = 1/3; m = 2/3; n = 1/3$. - по варианту "Б" задачи 2.

Вариант "В"
 Дано: $l = 1/4; m = 1/3; n = 2/3$. - по варианту "В" задачи 2.

Вариант "Г"
 Дано: $l = 3/5; m = 2/3; n = 1/5$. - по варианту "Г" задачи 2.

Вариант "Д"
 Дано: $l = 3/7; m = 1/7; n = 1/5$. - по варианту "Д" задачи 2.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

2.1. Основные уравнения теории упругости

Статические уравнения равновесия (в декартовой системе координат)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Геометрические уравнения (уравнения Коши)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения совместности деформаций (они — "уравнения сплошности", "уравнения неразрывности", зависимости Сен-Венана)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Физические уравнения (формулы закона Гука)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (2.4)$$

или (обратная форма закона Гука)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_x; & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_y; & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_z; & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $M = \frac{E}{2(1+\nu)}$
 упругие постоянные (коэффициенты Ламе).

Имея эти зависимости, можно приступить непосредственно к решению задач теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних сил. В общем случае задача сводится к нахождению 15 неизвестных функций (шесть напряжений + шесть деформаций + три перемещения), удовлетворяющих 15 уравнениям, т.е. задача достаточно определена. Для отыскания величин произвольных постоянных, которые появятся в результате интегрирования, используются граничные условия (условия на контуре)

$$\begin{aligned} X\sigma &= \partial_x \ell + \partial_{xy} m + \partial_x n \\ Y\sigma &= \partial_{yx} \ell + \partial_y m + \partial_{yz} n \\ Z\sigma &= \partial_{zx} \ell + \partial_{zy} m + \partial_z n \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные

- решение в перемещениях, когда за основные неизвестные приняты три составляющие перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$;
- решение в напряжениях, когда за основные неизвестные приняты шесть составляющих напряжений $\partial_x(x, y, z)$, $\partial_y(x, y, z)$, $\partial_z(x, y, z)$, $\partial_{xy}(x, y, z)$, $\partial_{yz}(x, y, z)$, $\partial_{zx}(x, y, z)$;
- решение в смешанной форме, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

2.2. Решение задач теории упругости в перемещениях

Для отыскания трех неизвестных составляющих перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ необходимо иметь три уравнения, которые можно получить из дифференциальных уравнений равновесия (2.1), выразив в них напряжения через перемещения.

В первое уравнение равновесия (2.1) поставим выражение для напряжений из формул закона Гука (2.5)

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2M \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + M \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} + X = 0 \quad (2.7)$$

Далее в полученное уравнение, используя формулу Коши, подставим выражения для деформаций; после группировки находим:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + M \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0$$

Выражение в первых скобках можно обозначить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \quad (2.8)$$

Выражение в вторых скобках можно представить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.9)$$

Тогда уравнение (2.7)

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0$$

Аналогично преобразуются и два других уравнения равновесия (2.1). Таким образом, получена группа уравнений (уравнений Ляме) для решения задач теории упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) содержат условия равновесия каждого элемента тела, геометрические характеристики деформации u , v , w , θ и физические характеристики материала λ и μ .

Аналогично преобразуются условия на поверхности (2.6), заменив в них напряжения через перемещения.

В результате имеем три условия на поверхности, выраженные через перемещения

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda \theta \ell + \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) \\ y_0 &= \lambda \theta \ell + \mu \frac{\partial v}{\partial \nu} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \ell + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) \\ z_0 &= \lambda \theta \ell + \mu \frac{\partial w}{\partial \nu} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \ell + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Общий план решения задачи теории упругости в перемещениях следующий.

Для определения трех составляющих перемещений u , v , w необходимо проинтегрировать три уравнения Ляме (2.10) удовлетворить условиям на поверхности (2.11). По найденным перемещениям, используя формулы Коши (2.2), отыскивают составляющие деформации, а затем их формул закона Гука (2.4) – составляющие напряжений.

2.3. гашение задач теории упругости в напряжениях

Круг рассматриваемых задач ограничен случаем, когда объемные силы постоянны по всему объему тела или равны нулю; при этом значительное упрощаются некоторые уравнения, так как производные от составляющих объемных сил по координатам X , Y , Z обращаются в нуль.

При постоянстве объемных сил объемная деформация есть функция гармоническая $\nabla^2 \Theta = 0$; первый инвариант напряженного состояния также есть функция гармоническая.

Для отыскания шести составляющих напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) трех уравнений равновесия (2.1) недостаточно и к ним следует использовать еще шесть уравнений сплошности (2.3).

Так как в (2.3) входят составляющие деформаций, то их необходимо предварительно выразить через напряжения, подставляя в первое уравнение сплошности (2.3) деформации из формул закона Гука (2.4), получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \right) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Для практического применения уравнение (2.12) следует преобразовать, исключив из него касательные напряжения; с этой целью первое уравнение равновесия (2.1) продифференцируем по X , второе - по Y , третье - по Z . Сложим почленно два первых из полученных уравнений и вычтем третье, находим

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \quad (2.13)$$

Подставим соотношение (2.13) в уравнение (2.12)

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \nu \nabla^2 \sigma_z = 0$$

В этом уравнении приравняем и вычтем $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \nu \nabla^2 \sigma_z$ и с помощью соотношения $\nabla^2 \sigma_z = 0$ получим

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0$$

Аналогично преобразуя остальные уравнения сплошности, получены

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 0, \quad (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (1+\nu) \nabla^2 \zeta_y + \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu) \nabla^2 \zeta_{yz} + \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial y \partial z} &= 0 \\
 (1+\nu) \nabla^2 \delta_z + \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu) \nabla^2 \zeta_{zx} + \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial z \partial x} &= 0
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) называют уравнениями Бертранди-Литла.

Для решения задачи теории упругости в напряженных необходимо проинтегрировать девять уравнений (2.1) и (2.14). Полученные шесть составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ должны удовлетворять условиям на поверхности (2.6). Затем по формулам закона Гука (2.4) легко найти составляющие деформации и сдвиги $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, а по формулам Коши (2.2) – составляющие перемещений u, v, w .

2.4. Решение задач теории упругости смешанным методом

За основные неизвестные принимают и перемещения и напряжения, выбирая для решения задачи те из них, которые определяются наиболее просто. В зависимости от того, насколько удачно сделан этот выбор, будет изменяться и число уравнений, подлежащих интегрированию. Единой общей схемы решения не существует.

2.5. Прямая, обратная и полуобратная задачи

Решение задачи теории упругости единственно, и, в принципе, безразлично, каким методом решена задача.

Существует три основных метода математического решения задачи.

Прямой метод; он заключается в непосредственном интегрировании уравнений теории упругости совместно с заданными условиями на поверхности.

Обратный метод; в том случае задаются функциями перемещений или напряжений, удовлетворяющими уравнениям, и устанавливают, какому нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений.

Полуобратный метод; разновидность обратного метода, когда делают допущения о виде некоторых из функций напряжений или перемещений при этом дифференциальные уравнения существенно упрощаются и решение их не представляет трудностей.

2.6. Плоская задача теории упругости

Решение задач теории упругости значительно упрощается, если задача удается свести к отысканию функций только двух переменных (для определенности X и Y), т.е. к решению так называемой плоской задачи.

В теории рассматриваются два типа плоской задачи.

Плоская деформация (ПД) характеризуется отсутствием деформации в направлении, перпендикулярном к плоскости действия внешних сил ($\epsilon_z = 0$). Перемещения будут происходить только параллельно плоскости XOY : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$

Из формул Коши (2.2) следует

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x(x, y), \quad \epsilon_y = \epsilon_y(x, y), \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y), \\ \epsilon_z &= 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для ПД, согласно физическим уравнениям (2.4), при отсутствии деформации ϵ_z можно записать

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

откуда
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.16)$$

Подставляя это соотношение в две первые формулы закона Гука (2.4), получим

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из анализа формул (2.15), (2.16) и (2.17) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Близким к случаю ПД являются задачи о длинной подпорной стенке, тоннеле метрополитена, длинном цилиндрическом катке и др.

Плоское напряженное состояние (ПНС) характеризуется отсутствием напряжений в плоскостях, перпендикулярных к направлению Z , т.е. в такой задаче $\sigma_z = \epsilon_{yz} = \tau_{yz} = 0$,

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

В отношении напряжений ПНС отличается от ПД лишь условием $\sigma_z = 0$.

При ПНС в плоскости XOY деформации в направлении Z существуют. Формулы закона Гука для ПНС примут следующий вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma - \nu \sigma_y), \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.18)$$

Эти формулы отличает от формул закона Гука для Пд ($\sigma = E\varepsilon$) то, что значениями у других постоянных.

Примером ПНС может служить напрл. деформированное состояние тонкой пластины, находящейся в плоскости XOY , и нагруженной по кон. уру силами, лежащими в той же плоскости.

Оба типа задач Пд и ПНС можно объединить и установить единый путь решения плоской задачи.

Так как в обоих типах задач $\tilde{\varepsilon}_{zx} = \tilde{\varepsilon}_{yz} = 0$ и все функции не зависят от координаты Z , то дифференциальные уравнения равновесия принимают вид (третье уравнение обращается в тождество)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Так как на боковых поверхностях направляющий косинус $\mu = 0$ то из условий на поверхности (2.6) остаются только два

$$X_0 = \sigma_x \nu + \tau_{xy} \mu \quad (2.20)$$

$$Y_0 = \tau_{xy} \nu + \sigma_y \mu$$

Формулы Котца (2.2) сведутся к трем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.21)$$

Из шести уравнений сплошности (2.3) остается только одно (остальные обращаются в тождество.)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.22)$$

Формулы закона Гука для Пд и ПНС приведены выше (2.17) и (2.18).

2.6.1. Решение плоской задачи в напряжениях; функция напряжений

Решение плоской задачи в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$. Для их отыскания используются два дифференциальных уравнения равновесия (2.19) и уравнения сплошности (2.22), с заменой в нем деформации на напряжения. В уравнении сплошности (2.22) подставляются деформации из формул

закона Гука для ПНС (2.18). После упрощения получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.23)$$

Далее, из уравнения (2.23) исключаются касательные напряжения. Для этого первое уравнение равновесия (2.19) дифференцируем по x , второе — по y и складываем почленно. Считая, что объемные силы постоянны по всему объему, получим

$$-2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Подставим (2.24) в уравнение (2.23)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

или $\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.25)$

Уравнение (2.25) называется уравнением Мориса Леви, оно не содержит упругих постоянных, поэтому справедливо для ПД и ПНС.

Из (2.25) следует, что сумма нормальных напряжений в плоской задаче есть функция гармоническая.

Решение плоской задачи при постоянстве объемных сил сведено к интегрированию трех уравнений: двух уравнений равновесия (2.19) и уравнения сплошности (2.25) при обязательном удовлетворении условий на поверхности (2.2).

Решение плоской задачи можно упростить, сведя ее к отысканию одной функции φ — функции Эри. Ее выбирают таким образом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия (2.19) обращались в тождества. Этим условиям можно удовлетворить, если напряжения выразить через функцию $\varphi(x, y)$ следующим образом

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \epsilon_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \chi y - \psi x \quad (2.26)$$

Подставляя формулы (2.26) в физические уравнения, выразим через функцию Эри также и деформации

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right); \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right);$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.27)$$

которые должны удовлетворять первому условию сплошности (2.22), остальные соотношения для плоской задачи удовлетворяются тождественно.

Подставляя напряжения (2.26) в уравнение сплошности (2.25), находим

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.28)$$

Уравнение (2.28) с помощью оператора Лапласа может быть представлено $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ или $\nabla^4 \varphi = 0$ (2.29)

В развернутом виде уравнение (2.29) может быть записано

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0$$

Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.30)$$

Следует отметить, чтобы функция Эри удовлетворяла граничным условиям в форме (2.20) после подстановки в (2.20) значений напряжений по формулам (2.26)

$$\begin{aligned} X_\sigma &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m \\ Y_\sigma &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m \end{aligned} \quad (2.31)$$

Таким образом, решение плоской задачи сводится к определению функции напряжений $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению (2.30), и тогда все уравнения теории упругости удовлетворяются.

2.6.2. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

Задачи, где деформируемые тела обладают осевой симметрией, удобно решаться не в декартовой, а в полярных координатах (r, θ) .

Основные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Уравнение сплошности

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (2.33)$$

в развернутом виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (2.34)$$

формулы Коши

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Формулы закона Гука

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \sigma_r); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_z); \quad \gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\theta z} \quad (2.36)$$

Напряжения через функцию Эри в цилиндрических координатах выражаются

$$\sigma_z = \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{E z^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (2.37)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{E z} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{E} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

а также бигармоническое уравнение типа (2.34)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{E z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{E z^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.38)$$

которому должна удовлетворять функция напряжений φ .

2.6.3. Задачи и их решения; задачи с самостоятельным решением

Задача I. Дана прямоугольная полоса-балка (рис. 2.1) длиной $l = 6$ м, высотой $h = 2$ м и толщиной, равной 1. Начало координат 0 принято в середине торцевого сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz ; продольная ось Ox проходит по середине полосы-балки. Функция напряжений задана в виде полинома

$$\varphi = x^2 y^2 - \frac{x^4}{3} + y^2$$

Объемные силы не учитываем.

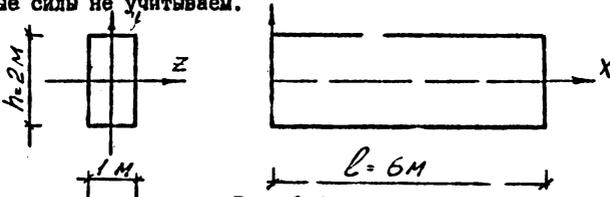


Рис. 2.1

Требуется:

1. Проверить, можно ли предложенную функцию напряжений принять для решения плоской задачи теории упругости. Для этого использовать бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

2. Найти выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , пользуясь следующими формулами для напряжений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

3. Построить пары напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ для сечения, перпендикулярного оси Ox ($X = 2$ м).
4. Определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосу-балки, и привести к эпюры. В этих целях использовать условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия)

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{xy} \cos(y, \nu) \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_y \cos(y, \nu) \end{aligned} \quad (в)$$

где $p_{x\nu}, p_{y\nu}$ - проекции на оси Ox и Oy внешних сил, действующих на гранях полосу-балки; ν - нормаль к грани; $\ell = \cos(x, \nu)$ $m = \cos(y, \nu)$ - направляющие косинусы.

Решение

1. Проверим пригодность $\varphi(x, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2xy^2 - \frac{4}{3}x^3; & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 2x^2y + 2y; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= 4xy; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 2y^2 - 4x^2; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 2x^2 + 2; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y} &= 4y; \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= -8x; & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 8. & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} &= 0. & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 0. & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= 4. \end{aligned}$$

Подставим найденные производные в бигармоническое уравнение (а): $-8 + 8 + 0 = 0$. Следовательно, заданное $\varphi(x, y)$ тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения.

2. Выражения для напряжений (6)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2x^2 + 2; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2y^2 - 4x^2; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -4xy.$$

Проверим выполнение уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, & 4x - 4x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, & -4y + 4y &= 0 \end{aligned}$$

Выражения для напряжений определены правильно, ибо они тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия.

3. Построение эпюр напряжений в сечении $X = 2$ м.

Для этого сечения $\sigma_x = 2x^2 + 2 = 10;$

$$\sigma_y = 2y^2 - 4x^2 = 2y^2 - 16; \quad \tau_{xy} = -4xy = -8y$$

Вычисления выполняем в табличной форме

Величины напряжений	Координаты точки		
	$y = \frac{h}{2} = 1 \text{ м}$	$y = 0$	$y = -\frac{h}{2} = -1 \text{ м}$
σ_x	10,0	10,0	10,0
σ_y	-14,0	-16,0	-14,0
τ_{xy}	-8,0	0	-8,0

По полученным данным строим эпюры напряжений в сечениях

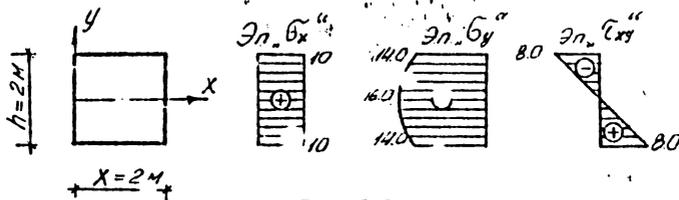


Рис. 2.2

4. Определение внешних сил (8)

Левая грань: $x=0 \text{ м}; l=1; m=0; \sigma_x=2x^2+2=+2;$
 $\sigma_y=2y^2-4x^2=2y^2-4\cdot 0^2=2y^2; \tau_{xy}=4xy=4\cdot 0\cdot y=0;$
 $r_{x0}=\sigma_x(-1)+\tau_{xy}\cdot 0=-2\sigma_x=-2;$
 $r_{y0}=\tau_{xy}(-1)+\sigma_y\cdot 0=0$

Для сил, нормальных r_{x0} и касательных r_{y0} к этой грани строим их эпюры.

Правая грань: $x=l=6 \text{ м}; l=1; m=0; \sigma_x=2x^2+2=2\cdot 6^2+2=74;$
 $\sigma_y=2y^2-4x^2=2y^2-4\cdot 6^2=2y^2-144; \tau_{xy}=-4xy=-4\cdot 6\cdot y=24y.$
 $r_{x0}=\sigma_x+1+\tau_{xy}\cdot 0=\sigma_x=74;$
 $r_{y0}=\tau_{xy}\cdot 1+\sigma_y\cdot 0=\tau_{xy}=24y$

Для сил, нормальных r_{x0} и касательных r_{y0} к этой грани, строим их эпюры, изменяя y от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$.

Верхняя грань: $y=\frac{h}{2}=1 \text{ м}; l=0; m=1; \sigma_x=2x^2+2;$
 $\sigma_y=2y^2-4x^2=2\cdot 1^2-4x^2=-4x^2; \tau_{xy}=-4xy=-4\cdot 1\cdot x=-4x;$
 $r_{x0}=\sigma_x\cdot 0+\tau_{xy}\cdot 1=\tau_{xy}=-4x;$
 $r_{y0}=\tau_{xy}\cdot 0+\sigma_y\cdot 1=\sigma_y=2-4x^2.$

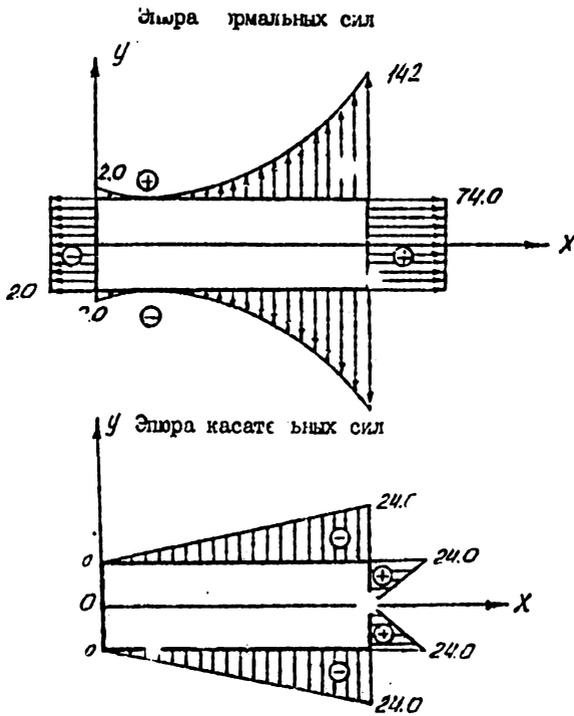


Рис. 2.3

Для сил, нормальных P_{y0} и касательных P_{x0} к этой грани, строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 6$ м.

Нижняя грань: $y = -1/2 = -1$ м; $l = 0$; $m = -1$; $\varepsilon = 2x^2 + 2$;
 $\partial_y = 2y - 4x^2 = 2(-1) - 4x^2 = 2 - 4x^2$; $\partial_{xy} = -4xy = (-4)x(-1) = 4x$
 $P_{xi} = \partial_x 0 + \partial_{xy} (-1) = -\partial_{xy} = -4x$
 $P_{y0} = \partial_{xy} 0 + \partial_y (-1) = (2 - 4x^2)(-1) = -2 + 4x^2$

Для сил, нормальных P_{y0} и касательных P_{x0} к этой грани, строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 6$ м

Эпюры сил, действующих на грани полосы-балки, приведены на рис. 2.3.

Задача № 1 (для самостоятельного решения)

Геометрические параметры полосы-балки p брать по рис. 2.1. Выражение для функции напряжений φ выбрать из таблицы 2.1, а численные данные - из таблицы 22. Объемными силами пренебречь.

Требуется: 1) проверить, можно ли заданную функцию $\varphi(x, y)$ принять для решения задачи; 2) найти выражения для напряжений ∂_x , ∂_y , ∂_{xy} ; 3) построить эпюры напряжений для одного сечения; 4) определить нормальные и касательные внешние силы, приложенные ко всем четырем граням, и привести их эпюры.

Таблица 1

Выражения для функций напряжений

Сумма трех последних цифр шифра (номер варианта задачи)	Функция напряжений $\varphi(x, y)$	Сумма трех последних цифр шифра (номер варианта задачи)	Функция напряжений $\varphi(x, y)$
0	$\varphi = ax^2y + bx^2 + xy^3 + by^3$	7	$\varphi = a(x^2y^2 - 1/3y^4) + bx^2$
1	$\varphi = ax^3 + bx^2y + bxy^2 + y^3$	8	$\varphi = a(x^2 - y^4) + bxy^3$
2	$\varphi = (x^2y^3 - y^5/5)a$	9	$\varphi = a(x^2 - y^4) + bxy^2$
3	$\varphi = ax^3y + bxy^3 + ax^2 + by^2$	10	$\varphi = axy^3 - bxy + bx^2 + y^3$
4	$\varphi = b(x^3y^2 - x^5/5)$	11	$\varphi = a(x^2y^2 - 1/3x^4) + by^2$
5	$\varphi = axy^2 + x^2y + bx^3 + by^2$	12	$\varphi = a(x^2 - y^4) + bxy^3 + ay^2$
6	$\varphi = ax^3 + bx^2y + bxy^3 + ay^3$	13	$\varphi = ax^3y + b(x^2y^2 - 1/3y^4)$
		14	$\varphi = a(x^2y^2 - 1/3x^4) - bxy$

Таблица 2

Числовые значения

Последняя цифра шифра	ρ	ν	ℓ	h	x	y
0	2	2	6	1	2	0,25
1	1	2	5	1	2	0,25
2	1	2	6	2	1	0,5
3	1	2	6	2	2	0,5
4	1	2	6	2	+1	0,5
5	2	1	5	1	2	0,25
6	1	1	6	2	2	0,5
7	2	1	6	2	1	0,5
8	1	2	4	2	1	0,5
9	1	2	6	1	2	0,25

2.6.1. Осесимметричные задачи. Решение в напряжениях

При наличии осевой симметрии у напряженно-деформированного тела и схемы его нагружения нормальные напряжения в полярной системе координат (ρ, θ) не зависят от угловой координаты θ и являются функцией только радиуса-вектора ρ , а касательные напряжения $\tau_{\rho\theta} = 0$.

В этом случае основные уравнения теории упругости могут быть записаны в следующем виде.

Из уравнений равновесия остается одно

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0 \quad (2.39)$$

(при отсутствии объемных сил).

Формулы Коши

$$\epsilon_{\rho\rho} = \frac{u}{\rho}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \gamma_{\rho\theta} = 0 \quad (2.40)$$

(составляющая перемещения u в силу симметрии равна нулю).

Формулы закона Гука

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_{\rho\rho} - \nu \sigma_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{\rho\rho}) \quad (2.41)$$

Выражения для напряжений через функцию φ

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (2.42)$$

Условие совместности (2.39), которому должна удовлетворять функция Эри, также приобретает сокращенную форму

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0$$

или после раскрытия скобок

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + \frac{2}{z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{z^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (2.43)$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, общий интеграл которого $\psi = A \ln^2 z + B z^2 + C$, при подстановке этой функции в исходное дифференциальное уравнение последнее тождественно удовлетворяется (студентам рекомендуется выполнить эту контрольную операцию в порядке самостоятельности по упражнению).

Подставляя функцию $\psi = A \ln^2 z + B z^2 + C$ в формулы (2.42) для вычисления нормальных напряжений, будем иметь

$$\sigma_z = \frac{A}{z^2} + 2B; \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{z^2} + 2B \quad (2.44)$$

где константы A и $2B$ определяются из граничных условий каждой конкретной задачи. Проиллюстрируем полученное решение на примере.

Задача. В длинной толстостенной трубе с внутренним радиусом a и наружным радиусом b определить напряжения τ внутренне-го равномерно распределенного давления p_a . Наружное давление отсутствует.

Решение. Имеются два статических граничных условия $\sigma_z(z=a) = -p_a$; $\sigma_z(z=b) = 0$. Подставляя эти граничные условия в формулу для вычисления σ_z (2.44), получим

$$-p_a = \frac{A}{a^2} + 2B; \quad 0 = \frac{A}{b^2} + 2B;$$

откуда

$$A = -p_a \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}; \quad 2B = p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

Подставляя найденные значения констант в формулы (2.44), найдем

$$\sigma_z = -p_a \frac{\left(\frac{b}{z}\right)^2 - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}; \quad \sigma_\theta = p_a \frac{\left(\frac{b}{z}\right)^2 + 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}$$

Напряжение σ_z сжимающее, а σ_θ растягивающее.

Решение в перемещениях. Основная система уравнений состоит из уравнения равновесия (2.39), формул Коши (2.40) и формул закона Гука (2.41)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{z} = 0; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \epsilon_\theta = \frac{w}{z}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_\theta); \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_z)$$

Решая два последних уравнения равновесия относительно δz и $\delta \theta$ и подставив в них вместо \mathcal{E}_z и \mathcal{E}_θ их выражения через перемещения, получим

$$\delta z = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \nu w \right); \quad \delta \theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{z} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (a)$$

Эти выражения подставим в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \delta z}{\partial z} + \frac{\delta z + \delta \theta}{z} = \frac{E}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \frac{\partial w}{\partial z} - \nu \frac{w}{z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\nu}{z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{z^2} + \nu \frac{w}{z^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{z^2} = 0 \quad (б)$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, общий интеграл которого

$$w = Az + \frac{B}{z}$$

где A и B константы, определяемые из граничных условий конкретной задачи.

Задача Ляме.

Задача о напряженном состоянии толстостенной трубы, решение которой приведено выше, — это упрощенный вариант классической задачи Ляме, "определить напряжения в толстостенной круглой трубе, находящейся под действием внутреннего p_a и внешнего p_b равномерных давлений; внутренний радиус трубы равен a , внешний b

Решение. Общий вид решения для всего класса осесимметричных плоских задач

$$\left. \begin{matrix} \delta z \\ \delta \theta \end{matrix} \right\} = \pm \frac{A}{z^2} + 2C \quad (a)$$

Граничные условия $\delta z(z=a) = -p_a$; $\delta z(z=b) = -p_b$

$$-p_a = \frac{A}{a^2} + 2C; \quad -p_b = \frac{A}{b^2} + 2C \quad (б)$$

$$p_b - p_a = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) A, \quad \text{откуда } A = \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{b^2 - a^2} \quad (в)$$

Подставив значение A в левую часть уравнений (б), получим

$$2C = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \quad (г)$$

Используя найденные значения A (в) и $2C$ (г), получаем решение задачи Ляме

$$\left. \begin{matrix} \delta z \\ \delta \theta \end{matrix} \right\} = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \pm \frac{a^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2) z^2}$$

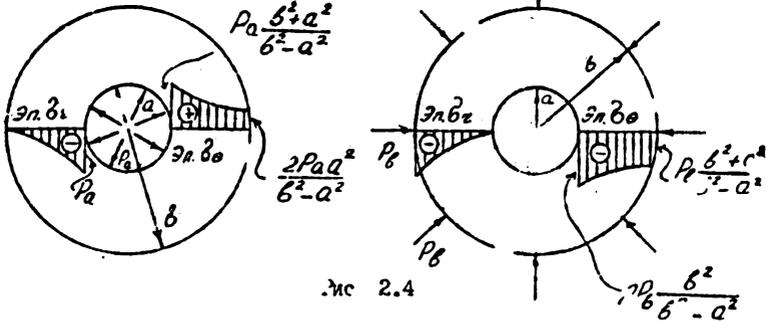
Эпюры этих напряжений показаны на рис. 2.4.

наибольшие сжимающие, дилатные и растягивающие тангенциалы

нормальные напряжения возникли в точках у внутренней поверхности трубы при $z=a$:

$$\max \sigma_z = -\rho a, \quad \max \sigma_\theta = \rho a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

В точках у наружной поверхности трубы при $z=b$ $\sigma_z = 0$; $\sigma_\theta = \frac{2\rho a^2}{b^2 - a^2}$



2.7. Изгиб тонких пластин

Гипотезы (Кирхгофа), причисляемые при расчете тонких пластин ($5 \geq \frac{h}{b} \geq 10$) по приближенной - технической теории.

1. Гипотеза прямых нормалей: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации, а длина его не меняется (гипотеза предполагает, что $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{zx} = 0$, $\epsilon_z = 0$).

2. Гипотеза нерастяжимости срединной плоскости: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, т.е. значит срединная плоскость является нейтральной, следовательно здесь перемещения $u_0 = 0$, $v_0 = 0$.

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки ($\sigma_z = 0$).

2.7.1. Перемещения и деформации в пластинке

Согласно первой гипотезе $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, следовательно, прогибы пластинки не зависят от координаты z , т.е. $w = w(x, y)$.

Составляющие перемещений точек пластинки в направлении осей

x и y выражены через функцию прогибов срединной поверхности:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.45)$$

Составляющие деформации находятся с помощью формул Коши (2.2), подставляя в них значения составляющих перемещения (2.45)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.46)$$

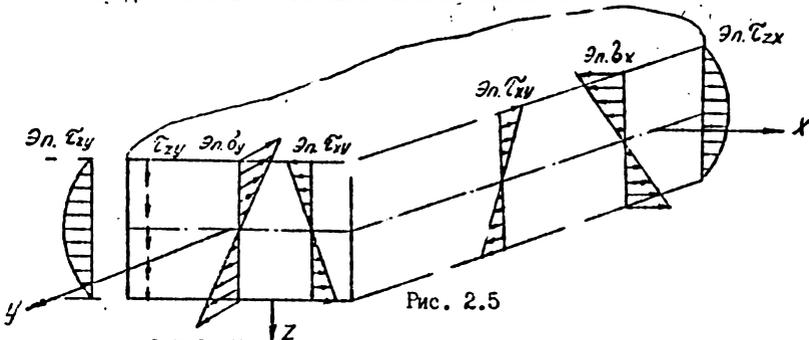
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

2.7.2. Напряжения в пластинке

Напряжения выражены через одну функцию двух переменных $w(x, y)$ следовательно, функция прогибов играет здесь ту же роль, что и функция напряжений в плоской задаче

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \end{aligned} \quad (2.47)$$

На рис. 2.5 показано распределение этих напряжений по толщине пластинки. Напряжения σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ распределяются по линейному закону, обращаясь в нуль в точках срединной плоскости, а напряжения τ_{yz} , τ_{zx} распределяются по параболе, достигая в точках срединной плоскости максимальных значений



2.7.3. Усилия в пластинке

Усилия, возникающие в пластинке, выражены через прогибы ее срединной плоскости.

Изгибающие моменты

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.48)$$

Поперечные силы

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (2.49)$$

Крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.50)$$

Входящая в формулы (2.48), (2.49), (2.50) величина

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ называется цилиндрической жесткостью пластинки и является физической и геометрической характеристикой пластинки при ее изгибе.

2.7.4. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

Напряжения и усилия в пластинке выражены через прогибы срединной плоскости пластинки $w(x, y)$. Следовательно, для решения задачи необходимо знать функцию прогибов. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (уравнение Софи Жермен)

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q_y \quad (2.51)$$

или $D \nabla^4 w = q_y$

При интегрировании уравнения С. Жермен (2.51) появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий на контуре пластинки и зависящие от характера закрепления ее краев.

Условия на контуре пластинки

На контуре пластинки в зависимости от характера закрепления краев могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. На каждом крае следует задать два граничных условия.

Рассмотрим граничные условия для различных закреплений краев на примере прямоугольной пластинки (рис. 2.6).

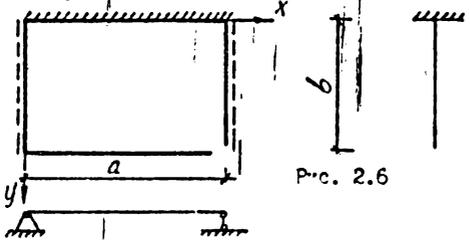


Рис. 2.6

Зашемленный край OA. В заземлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси X , т.е. при $y = 0$ должно быть $w = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Шарнирно-опертые края OC и AB. На шарнирно-опертых краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т.е. $w = 0$ и $M_x = 0$. Выражая изгибающий момент через прогибы пластинки по формулам (2.48), последнее условие может быть представлено

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Свободный край BC. На свободном крае проявляются прогибы и имеют место повороты краевого сечения относительно оси X , т.е. при $y = b$ должно быть $w \neq 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$.

Можно также исползовать статические граничные условия; на свободном крае CB, например, обращаются в нуль изгибающий момент M_y , поперечная сила Q_y и крутящий момент M_{xy} .

2.7.5. Прямоугольная пластинка, решение Навье

Для прямоугольной пластинки решение уравнения С.Жермен (2.51) в конечном виде получить не удается, приходится искать его в виде бесконечного ряда.

Решение, предложенное Навье, пригодно для прямоугольной пластинки, шарнирно-опертой по контуру и нагруженной поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x, y)$, изменяющейся по любому закону (рис. 2.7).

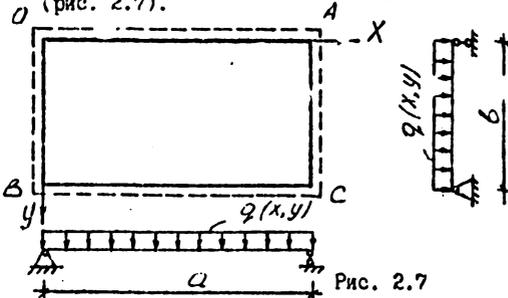


Рис. 2.7

Решение уравнения С.Жермен (2.51) представляет собой двойной тригонометрический ряд по синусам

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (a)$$

где A_{mn} - постоянные числа, коэффициенты ряда;

m, n - целые положительные числа 1, 2, 3 ...

Ряд (а) можно записать в развешенном виде:

$$w(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \\ + A_{21} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots$$

Коэффициенты ряда (а) определяются по формуле

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \iint q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy \quad (6)$$

Дальнейшая конкретизация задачи зависит от вида функции $q(x, y)$.

2.7.6. Прямоугольная пластинка; решение М.Леви

Решение М.Леви является более общим, оно пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других имеют любое закрепление, защемление, шарнирное опирание, свободный край...

Рассмотрим решение на примере пластинки (рис. 2.8), две грани которой шарнирно оперты, две - защемлены.

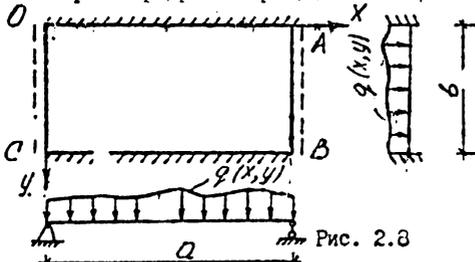


Рис. 2.8

Чтобы выполнить граничные условия, функцию прогибов можно принять в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x \quad (a)$$

где $\alpha = \frac{n\pi}{a}$; Y - произвольная функция одного аргумента y .

Для определения Y подставим функцию (а) в уравнение С.Жермен (2.51), в результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{(4)} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \frac{q(x, y)}{D} \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) разложим правую часть в тригонометрический ряд Фурье по синусам

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin nx \quad (в)$$

Коэффициенты ряда Фурье $F_n(y)$ являются функцией y , и они здесь определяются по формуле из курса математического анализа (разложение производится на отрезке $0 \leq x \leq a$)

$$F_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin nx \, dx \quad (г)$$

Подставим ряд (в) в уравнение (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y'' - 2\alpha Y'' + \alpha^4 Y) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n(y) \sin nx$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} [Y'' - 2\alpha Y'' + \alpha^4 Y - \bar{F}_n(y)] \sin nx = 0$$

Это условие выполняется, если каждый член ряда равен нулю

$$Y'' - 2\alpha Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0 \quad (д)$$

Получено неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка; его решение равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (Y_1) и частного решения неоднородного уравнения $F_n(y)$.

Однородное уравнение имеет вид

$$Y_1'' - 2\alpha^2 Y_1'' + \alpha^4 Y_1 = 0 \quad (е)$$

Его решение в гиперболическо-тригонометрической форме

$$Y_1 = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y \quad (ж)$$

Общее решение уравнения (е)

$$Y(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \bar{F}_n(y) \quad (з)$$

Подставим функцию $Y(y)$ в (з)

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \bar{F}_n(y)] \sin nx \quad (и)$$

Эта функция является решением уравнения Сен-Венана (2.5I) для поперечной нагрузки $q(x, y)$, распределенной по поверхности пластинки по любому закону, и удовлетворяет граничным условиям на шарнирно-опертых краях ОС и АБ.

Частное решение $F_n(y)$ неоднородного дифференциального уравнения непосредственно зависит от вида функции $F_n(y)$.

Для определения произвольных постоянных A_n , B_n , C_n и используются граничные условия на заделанных краях OA и BC .

Ряды в функциях прогибов и в ее производных сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Навье, поэтому решение М. Леви более удобно в практических расчетах.

2.7.7. Основные уравнения игиба круглой пластинки

В круглых пластинках целесообразно использовать полярную систему координат; в этом случае прогиб и напряжения будут функциями z и θ , т.е. $w(z, \theta)$ и $q(z, \theta)$.

Основные обозначения: M_z - погонный изгибающий момент в сечении, перпендикулярном радиусу-вектору z в рассматриваемой точке, - радиальный изгибающий момент; M_θ - погонный изгибающий момент в сечении, совпадающем с радиусом-вектором z в рассматриваемой точке, - тангенциальный изгибающий момент; $M_{z\theta}$ - крутильный изгибающий момент; Q_z - погонная поперечная сила на площадке с нормалью z - радиальная поперечная сила; Q_θ - погонная поперечная сила на площадке, совпадающей с радиусом-вектором z , - тангенциальная поперечная сила; $q_z^{прив}$ - интенсивность приведенной поперечной силы на гранях контура, перпендикулярных к радиусу-вектору z ; $q_\theta^{прив}$ - на гранях, совпадающих с радиусом-вектором z .

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q \quad (2.52)$$

$$M_z = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (2.53)$$

$$M_{z\theta} = -D (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.54)$$

$$Q_z = -D \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w; \quad Q_\theta = -D \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \quad (2.55)$$

или

$$Q_z = -D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

$$Q_{\theta} = -I \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.56)$$

$$Q_z^{прив} = Q_z \frac{1}{z} \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial \theta}; \quad C_{\theta}^{прив} = Q_{\theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} \quad (2.57)$$

или

$$Q_z^{прив} = -D \left[\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.58)$$

$$Q_{\theta}^{прив} = -D \left[\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]$$

2.7.7.1. Осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки

Задача будет осесимметричной, если нагрузка на пластинку, а также условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла. В этом случае прогибы также не зависят от полярного угла θ , а будут функцией одной координаты z , т.е. $w = w(z)$.

Основные формулы принимают вид.

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{2}{z} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = q \quad (2.59)$$

$$M_{z\theta} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad M_{\theta} = -D \left(\frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.60)$$

$$M_{z\theta} = 0 \quad (2.61)$$

$$Q_z = -D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad Q_{\theta} = 0 \quad (2.62)$$

$$Q_z^{прив} = Q_z; \quad Q_{\theta}^{прив} = 0 \quad (2.63)$$

Уравнение (2.59) можно записать в общем виде. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения w^{\sim} и частного решения неоднородного уравнения w^{\wedge} ; $w = w^{\sim} + w^{\wedge}$ (2.64)

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^4 w^{\sim}}{\partial z^4} + \frac{2}{z} \frac{\partial^3 w^{\sim}}{\partial z^3} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 w^{\sim}}{\partial z^2} + \frac{1}{z^3} \frac{\partial w^{\sim}}{\partial z} = 0$$

соответствующего неоднородному уравнению (2.59) следующее

$$w^{\sim} = C_1 + C_2 \ln z + C_3 z^2 + C_4 z^2 \ln z \quad (2.65)$$

Для того, чтобы получить частное решение w^{\wedge} , уравнение (2.59) представим в виде

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left[z \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial w^{\wedge}}{\partial z} \right) \right] \right] = \frac{q(z)}{D} \quad (2.66)$$

Общий вид частного решения найдем, интегрируя последовательно четыре раза уравнение (2.66)

$$\bar{w} = \frac{1}{D} \int \frac{1}{z} \left\{ \int z \left[\int \frac{1}{z} \left(\int q_1(z) z dz \right) dz \right] dz \right\} dz \quad (2.67)$$

Для равномерно распределенной нагрузки $q_1(z) = q_1 = \text{const}$ выражение (2.67) после интегрирования принимает вид $\bar{w} = q_1 z^4 / 64D$; общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.59) будет

$$w = \frac{q_1 z^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln z + C_3 z^2 + C_4 z^2 \ln z \quad (2.68)$$

Круглая пластинка равномерно опирается по контуру и нагружена равномерно распределенной по поверхности нагрузкой (рис. 2.9)

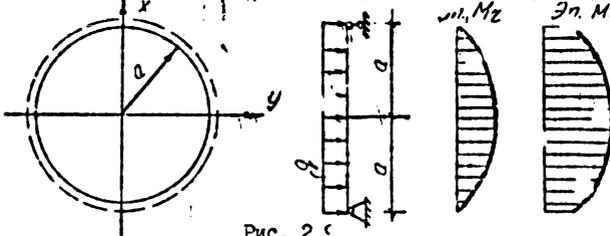


Рис. 2.9

Определяем постоянные интегрирования в решении (2.68), используя граничные условия. В центре пластинки при $z = 0$ прогиб должен иметь конечное значение, так как $\ln z = -\infty$, то в решении (2.68) необходимо опустить члены, содержащие множитель $\ln z$, т.е. принять $C_2 = C_4 = 0$.

Тогда уравнение (2.68) можно записать

$$w = \frac{q_1 z^4}{64D} + C_1 + C_3 z^2 \quad (a)$$

Далее, на контуре пластинки при $z = a$ равны нулю прогиб w и радиальный изгибающий момент M_r

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z^2} + \nu \frac{1}{z} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (б)$$

Подставляя в (б) функции прогибов (а), получим два уравнения с двумя неизвестными C_1 и C_3

$$\begin{aligned} \frac{q_1 a^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 &= 0 \\ \frac{3q_1 a^2}{16D} + 2C_3 + \frac{1}{a} \left(\frac{q_1 a^3}{16D} + 2C_3 a \right) &= 0 \end{aligned}$$

Откуда

$$C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{q_1 a^2}{32D}; \quad C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{q_1 a^4}{32D} - \frac{q_1 a^4}{64D}$$

Функция прогибов (а) при $\nu = 0$ будет иметь вид

$$w = \frac{q(a^2 - z^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - z^2 \right) \quad (в)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при $z = 0$

$$w_{\max} = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D} \quad (г)$$

Выражение для изгибающего момента получим, подставляя функцию прогибов (в) в формулу (2.60)

$$M_z = \frac{q}{16} (3+\nu)(a^2 - z^2); \quad M_\theta = -\frac{q}{16} \left[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)z^2 \right] \quad (д)$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки

$$\text{при } z = 0 \quad M_z(\max) = M_\theta(\max) = \frac{qa^2}{16} (3 + \nu)$$

В точках контура при $z = a$ изгибающие моменты равны $M_z = 0$, $M_\theta = \frac{qa^2}{8} (1 - \nu)$.

Характер эпюр изгибающих моментов показан на рис. 2.9.

Сплошная z -земленная по контуру пластинка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 2.10).

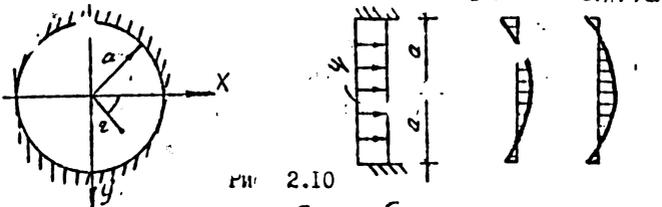


рис. 2.10

Определяем постоянные C_1 и C_3 , используя граничные условия, на внешнем контуре пластинки прогибы и поворот сечений отсутствуют, т.е. при $z = a$, $w = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Подставляем в эти условия функцию прогибов (а) - предыдущего примера

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 = 0; \quad \frac{qa^3}{16D} + 2C_3 a = 0$$

Решая уравнения, находим

$$C_3 = \frac{qa^2}{8D}; \quad C_1 = -\frac{qa^4}{64D}$$

Уравнение изогнутой срединной поверхности принимает вид

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - z^2)^2 \quad (а)$$

Максимальный прогиб при $z = 0$

$$\omega_{\max} = \frac{qa^4}{64D}$$

Выражения для изгибющих моментов

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{q}{16} \left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)z^2 \right] \\ M_\theta &= \frac{q}{16} \left[(1+\nu)a^2 - (1+\nu)z^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки при $z = 0$ равны

$$M_z = M_\theta = \frac{qa^2}{16} (1+\nu)$$

на контуре пластинки при $z = a$

$$M_z = -\frac{qa^2}{8}; \quad M_\theta = -\nu \frac{qa^2}{8}$$

Характер знаков изгибающих моментов показан на рис. 2.10.

Кольцевая пластинка с заделанным наружным краем, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой (рис. 2.11).

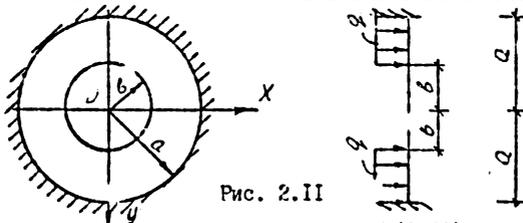


Рис. 2.11

Для определения постоянных в функции (2.66) используем следующие граничные условия. На внешнем заделанном краю при $z = a$, $\omega = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$; на внутреннем свободном краю при $z = b$

$$M_z = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0;$$

$$Q_z^{\text{прив}} = Q_z = -D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0.$$

Подставляя в эти граничные условия функции прогибов (2.68), получаем следующую систему уравнений

$$\frac{qa^2}{64D} + C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a = 0$$

$$\frac{qa^2}{16D} + \frac{C_2}{a} + 2C_3 a + 2C_4 a \ln a + C_4 a = 0$$

$$\frac{qa^2 \rho^2}{16D} - \frac{\rho^2}{8} + 2C_3 + 2C_4 \ln b + 3C_4 +$$

$$\sqrt{\left(\frac{qb^2}{16D} + \frac{C_2}{8} + 2C_3 + 2C_4 \ln b + C_4\right)} = 0$$

$$\frac{qb^2}{2D} + \frac{4C_4}{\rho} = 0$$

Решая систему, определяем значения коэффициентов

$$C_1 = \frac{qa^2}{64D\alpha} \left\{ (1-\nu)a^4 - \left[(5-3\nu)a^4 - 4(1+\nu)\ln a \right] a^2 b^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \left[2(1+\nu) + (1-2\nu)\ln a \right] \left((1-\nu) + 4(1+\nu)\ln \frac{b}{a} \right) b^4 \right\};$$

$$C_2 = -\frac{qa^2 b^2}{16D\alpha} \left\{ (1+\nu)a^2 + \left[(1-\nu) + (1+\nu)\ln \frac{b}{a} \right] b^2 \right\};$$

$$C_3 = \frac{q}{32D\alpha} \left\{ -(1-\nu)a^4 - 2(1-\nu)(1+2\nu\ln a)a^2 b^2 + \right.$$

$$\left. + \left[(3+\nu) + 4(1+\nu)\ln b \right] b^4 \right\}; \quad C_4 = -\frac{qb^2}{8D}$$

где

$$\alpha = (1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2$$

Уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (2.68)

после подстановки значений постоянных

$$w = \frac{qa^4}{64D} \left[-1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - 4k\ln\rho - 8\rho^2\rho^2\ln\rho \right]$$

где

$$\rho = \frac{b}{a}; \quad \beta = \frac{b}{a}; \quad k = \frac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)(1+4\beta^2\ln\beta)}{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2} \beta^2$$

дальнейший подсчет углов и напряжений выполняется, как в предыдущих примерах...

2.7.8. О сущности вариационных методов решения задач по теории изгиба пластинок

Сущность вариационных методов заключается в приведении основного дифференциального уравнения в частных производных (2.51), точного решения которого для многих важных практических задач не получено, к системе линейных алгебраических уравнений, приближенное значение функции прогибов $w(x, y)$ можно принимать в виде ряда с конечным числом членов

$$w_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (a)$$

где $\varphi_i(x, y)$ — линейные независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи; a_i — постоянные параметры, подлежащие определению из условий, чтобы функция (а) по возможности точнее представляла искомую функцию $w(x, y)$.

В зависимости от числа членов ряда (а) решение может быть получено с любой степенью точности. Для отыскания параметров используются методы Рунге-Тимошенко, Бубнова-Галеркина, Власова и др.

2.7.9. Задачи для самостоятельного решения

Задача № I.

Прямоугольная пластинка (рис. 2.12) изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивности q_f . Дано уравнение упругой поверхности пластинки w . Требуется:

I. Установить, каким граничным условиям удовлетворяет предложенное уравнение упругой поверхности

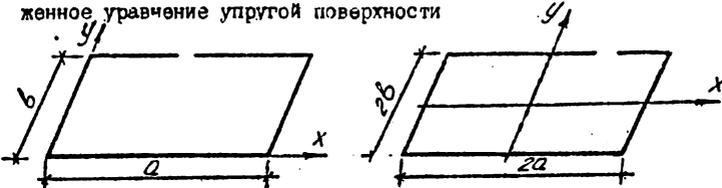


Рис. 2.12

2. Определить постоянный коэффициент C , используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки в прямоугольных координатах.

3. Составить выражения моментов и поперечных сил по известным формулам для этих моментов и поперечных сил в прямоугольных координатах.

4. Построить эпюры моментов и поперечных сил в сечениях X или Y .

Уравнения поперечной нагрузки $q(x, y)$ и упругой поверхности пластинок $w(x, y)$ приведены в таблице 3.

Необходимые числовые значения для прямоугольных пластинок брать из табл. 3.

Таблица 3

Уравнения прямоугольных пластинок

Номер варианта задачи (сумма трех последних цифр шифра)	Очертания пластинок по рис. 2.12. Уравнения поперечной нагрузки $q(x, y)$ и упругой поверхности пластинок $w(x, y)$. жесткость пластинок $D = const$
I	2
0	Очертание пластинок по рис. 2.12а $q = const; w = C(x-a)^2(y-b)^2; C = const$
1	Очертание пластинок по рис. 2.12а $q = const; w = Cxy(x-a)(y-b); C = const$
2	Очертание пластинок по рис. 2.12а $C = const; q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
3	Очертание пластинок по рис. 2.12; $q_0 = const; C = const$ $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}; w = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
4	Очертание пластинок по рис. 2.12а; $q_0 = const; C = const$ $q = q_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}; w = C \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$
5	Очертание пластинок по рис. 2.12а; $q_0 = const; C = const$ $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}; w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
	Очертание пластинок по рис. 2.12а; $q_0 = const; C = const$ $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{2\pi x}{a}; w = C \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{2\pi x}{a}$

Продолжение табл. 3

I	:	2
7	Очертание пластинки по рис. 2.12а; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}; w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$	
8	Очертание пластинки по рис. 2.12а; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $q = q_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{3\pi x}{a}; w = C \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{3\pi x}{a}$	
9	Очертание пластинки по рис. 2.12а; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}; w = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$	
10	Очертание пластинки по рис. 2.12а; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $q = q_0 \sin \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{3\pi x}{a}; w = C \sin \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{3\pi x}{a}$	
11	Очертание пластинки по рис. 2.12а; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $w = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$	
12	Очертание пластинки по рис. 2.12а; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $q = q_0 \left[\frac{1}{b^4} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \sin \frac{\pi y}{b}$ $w = C \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$	
13	Очертание пластинки по рис. 2.12б; $q_0 = \text{const}; C = \text{const}$ $q = q_0 \frac{1}{a^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \sin \frac{\pi x}{a}$ $w = C \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$	
14	Очертание пластинки по рис. 2.12б; $q = q_0 \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{16a^4} \cos \frac{\pi x}{2a}$ $w = C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{2a} \right) \cos \frac{\pi y}{b}$	
15	Очертание пластинки по рис. 2.12б; $q = q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b} + \frac{1}{16a^4} \cos \frac{\pi x}{2b}$ $w = C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{2b}$	

Таблица 4

Числовые значения для прямоугольных пластин

Последняя цифра шифра	a_2 м	b_2 м	Толщина h_2 м	x м	y м	ν
0	6	3	0,1	2	1	0,3
1	3	6	0,1	2	2	0,3
2	3	3	0,1	1	1	0,25
3	6	6	0,2	2	2	0,25
4	6	3	0,1	2	1	0,3
5	3	6	0,1	1	2	0,3
6	3	3	0,2	1	1	0,35
7	6	6	0,2	2	2	0,35
8	6	3	0,2	2	1	0,3
9	6	6	0,2	2	2	0,3

Примечание: ν - коэффициент Пуассона.

Задача № 2.

Круглая пластинка (рис. 2.13) изгибается под действием поперечной нагрузки с тензивностью ν . Задаю уравнение упругой поверхности пластинки w

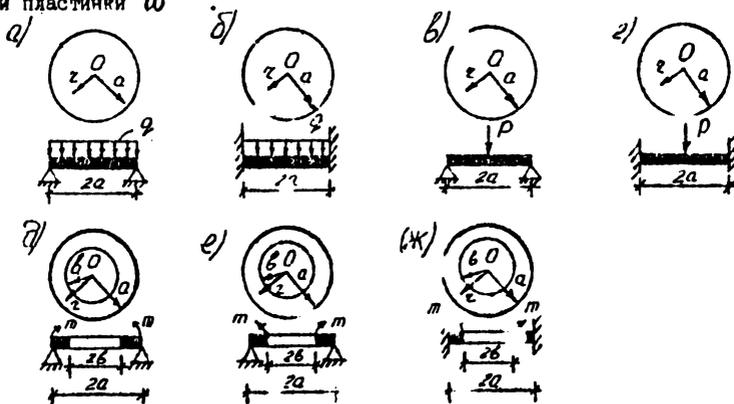


Рис. 2.13

Требуется:

1. Проверить граничные условия.
 2. Определить погонный коэффициент Q , используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки в полярных координатах.
 3. Составить выражения моментов и поперечных сил в полярных координатах.
 4. Построить эпюры моментов и поперечных сил в диаметральных поперечных сечениях.
- Очертание и уравнение круглых пластинок взять из табл. 5; числовые значения принять из табл. 6.

Таблица 5

Очертания и уравнения круглых пластинок

Номер варианта задачи (сумма двух последних цифр шифра)	Очертания пластинок по рис. 2.13. Поперечная нагрузка и уравнение упругой поверхности $w(x, y)$. жесткость пластинки $D = const$
1	2
1	Пластинка свободно опирается по контуру (рис. 2.13а). Нагрузка интенсивности $q = const$ распределена по всей площади пластинки, $\nu = const$. $w = \frac{q}{16} (a^2 - b^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - b^2 \right)$
2	Пластинка заделана по контуру (рис. 2.13б). Нагрузка интенсивности $q = const$ распределена по всей площади пластинки, $\nu = const$.
3	Пластинка свободно опирается по контуру и нагружена сосредоточенной силой P (рис. 2.13в), $\nu = const$. $w = P \frac{3+\nu}{1+\nu} \left[(a^2 - b^2) + 2b^2 \ln \frac{a}{b} \right]$
4	Пластинка заделана по контуру и нагружена сосредоточенной силой P (рис. 2.13г). $w = P \left(a^2 \ln \frac{a}{b} + \frac{b^2}{2} \right); \nu = const$
5	Пластинка в виде кругового кольца, свободно опирается по контуру, нагружена моментами M , равномерно распределенными по наружному контуру (рис. 2.13д). $w = M \left[\frac{a^2 - b^2}{12} - \frac{2(1+\nu)}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \right]; \nu = const$

Продолжение табл. 5

1	2
6	<p>Пластинка в виде кругового кольца, свободно опираемая по наружному контуру, нагружена моментами M, равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 2.13в)</p> $v\tau = C \left[\frac{\sigma^2 - \sigma^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln \frac{b}{a} \right]; C = \text{const}$
7	<p>Пластинка в виде кругового кольца, защемленная по наружному контуру, нагружена моментами M, равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 2.13ж)</p> $w = C \left(2 \ln \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right); C = \text{const}$

Таблица 6
Числовые значения для круглых пластинок

Последняя цифра шифра	σ м	b м	Толщина, h м	ν
0	3	1	0,1	0,25
1	4	1	0,1	0,25
2	4	2	0,2	0,25
3	5	2	0,2	0,3
4	5	3	0,1	0,3
5	6	3	0,1	0,3
6	6	2	0,2	0,35
7	5	3	0,1	0,35
8	5	2	0,2	0,35
9	6	3	0,1	0,3

Задача № 3.

Круглая пластинка, сплошная или кольцевая (с вырезом в центре), опираемая по наружному контуру, находится под действием внешней нагрузки (рис. 2.13).

Требуется:

1. Найти уравнение изгибающей поверхности пластинки $w(x, y)$, воспользовавшись общим решением основного дифференциального уравнения изгиба пластинки. Произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 определяют из условий на контуре пластинки.

2. Составить выражения для изгибающих моментов M_z и M_θ для поперечной силы Q_z .

3. Построить эп. для M_z и M_θ для диаметрального сечения пластинки.

Очертание и уравнение пластинок взять из т. д. 7; числовые значения принять из т. т. 6.

Таблица 7

Очертания и уравнения круглых пластинок

Номер варианта задачи (сумма трех последних цифр шифра)	Очертания пластинок по рис. 2.13а. Поперечная нагрузка и общее решение основного дифференциального уравнения изгиба пластины $w(z)$. Жесткость пластины $D = const$
1	2
1	Пластинка свободно оперта по контуру (рис. 2.13а). Нагрузка интенсивности $q = const$ распределена по всей площади пластинки $w = C_3 + C_4 z^2 + \frac{q z^4}{64D}$
2	Пластинка заделана по контуру (рис. 2.13б). Нагрузка интенсивности $q = const$ распределена по всей площади пластинки $w = C_3 + C_4 z^2 + \frac{q z^4}{D}$
3	Пластинка в виде кругового кольца, свободно опертая по контуру, нагружена моментами M_1 , равномерно распределенными по наружному контуру (рис. 2.13д) $w = C_1 \ln z + C_2 z^2 \ln z + C_3 + C_4 z^2$
4	Пластинка в виде кругового кольца, свободно опертая по контуру, нагружена моментами M_1 , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 2.13е) $w = C_1 \ln z + C_2 z^2 \ln z + C_3 + C_4 z^2$
5	Пластинка в виде кругового кольца, заделанная по наружному контуру, нагружена моментами M_1 , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 2.13ж) $w = C_1 \ln z + C_2 \ln z z^2 + C_3 + C_4 z^2$

Задача № 4. (пример взят из /5/).

Прямоугольная пластинка (рис. 2, I26) изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивности

$$q = q_0 \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} \right]$$

$q_0 = \text{const}$

Задано уравнение упругой поверхности пластинки

$$w = C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right); C = \text{const}.$$

$a = 2,0$ м; $b = 1,0$ м; $\nu = 0,3$ м. Жесткость пластинки $D = \text{const}$.

Требуется:

1. Установить, каким граничным условиям удовлетворяет заданное уравнение упругой поверхности.

2. Определить постоянный коэффициент C .

3. Построить эпюры M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y для сечения

Решение.

1. Определение граничных условий пластинки (условий на контуре пластинки):

при $x = \pm a$; $w = 0$; при $y = \pm b$; $w = 0$.

Следовательно, пластинка опирается по всем четырем краям.

Выясним, как опирается - шарнирно или жестко.

Уравнение углов поворота в направлении, параллельном Ox :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

При $x = \pm a$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ левый и правый края заделаны. Уравнение углов поворота в направлении, параллельном Oy :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -C \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right)$$

При $y = \pm b$ $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ верхний и нижний края заделаны.

Итак, пластинка заделана по всем четырем краям.

2. Определение постоянной C . Воспользуемся уравнением

(2.30) и составим соответствующие производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a};$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{\pi x}{a};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{\pi x}{a};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x^2} &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^3 \sin \frac{\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (2.30) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} DC\pi^4 \left(\frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \right. \\ \left. + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) = \\ DC\pi^4 \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} \right] \end{aligned}$$

Подставив в уравнение (2.30) левую и правую (см. заданное выражение для нагрузки) части, после сокращений получаем $C = q_0 / D\pi^4$

3. Составление выражений для внутренних усилий согласно формулам (2.61), (2.62) и (2.63) и полученному значению C :

$$\begin{aligned} M_x = DC \left[\left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} + \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi y}{b} \right] = \\ \frac{q_0}{\pi^2} \left[\frac{1}{a^2} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} \right] \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} M_y = \frac{q_0}{\pi^2} \left[\frac{1}{b^2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} + \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \right] \\ \text{В целях составления выражения } M_{xy} \text{ определяем } \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}: \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C \frac{\pi^2}{ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ M_{xy} = -\frac{q_0}{\pi ab} (1 - \nu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

В целях составления выражений Q_x и Q_y определяем $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x^2}$:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = D \left(\frac{\pi}{a} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x^2} = D \left(\frac{\pi}{a} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{a};$$

$$Q_x = -D D \left[\left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \left(\frac{\pi}{a} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right] =$$

$$= \frac{q_0}{\pi a} \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \right]$$

Аналогичным образом получаем

$$Q_y = -\frac{q_0}{\pi b} \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin^2 \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b} \right]$$

Подставив в вышенайденные выражения усилий заданные числовые данные и $\eta = \frac{b}{6}$, находим для требуемого сечения $y = \frac{b}{6}$ следующие выражения:

$$M_x = \frac{q_0}{\pi^2} \left(0.12 \cdot 5 \cos \frac{\pi x}{a} + 0.26 \right); \quad M_y = \frac{q_0}{\pi} \left(1.006 \cos \frac{\pi x}{a} + 0.866 \right);$$

$$M_{xy} = -0.175 \frac{q_0}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad Q_x = -0.666 \frac{q_0}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a};$$

$$Q_y = -\frac{q_0}{\pi} \left(0.62 \cos \frac{\pi x}{a} + 0.5 \right).$$

По последним выражениям усилий для сечения $y = \frac{b}{6}$ строим эпюры по ординатам (табл. 1), изменяя x от $-a$ до $+a$ (рис. 2.14 и табл. 1)

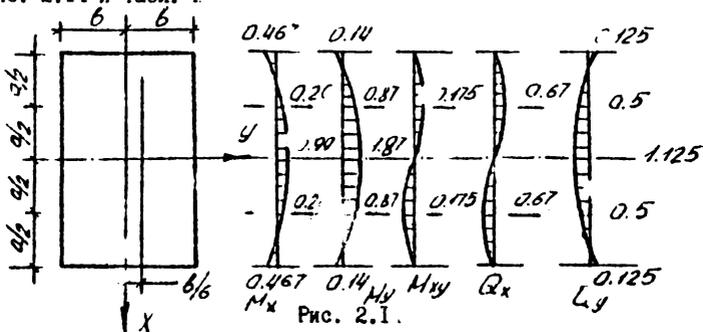


Таблица А

X	M_x	M_y	M_{xy}	Q_x	Q_y
	-0,467	-0,14	0	0	0,125
-0,5	0,26	0,87	0,175	0,666	-0,5
0	0,99	1,87	0	0	-1,175
0,5	0,26	0,87	-0,175	-0,666	-0,5
	-0,467	-0,14	0	0	0,125

Таблица Б

Эпюры	Множители
M_x, M_y, M_{xy}	q_0 / π^2
Q_x, Q_y	q_0 / π^2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М., 1982.
3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М., 1990.
4. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М., 1984.
5. Кутуков Б.Н., Кац М.М. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-строительных специальностей высших учебных заведений. М., 1990.

Учебное издание
Автор: Рочник Олег Анатольевич

Теория упругости. Учебное пособие по одноименному курсу
для студентов специальности 29.03.

Ответственный за выпуск: Рочник О.А.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 17.05.91 г. Формат 60x84/16. Печать
офсетная. Усл.п.л. 3,2. Уч.изд.л.3,5. Тираж 500 экз.
Заказ № 404. Цена 2 руб. Отпечатано на роталитне
Брестского политехнического института. 224017, Брест,
ул. Московская, 257.