ПРИМЕР ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ, ДЛЯ КОТОРОЙ ЗАДАЧА ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМА

Т.В. Копайцева (Брест, Беларусь)

В настоящей работе приводится пример эллиптической системы двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости, для которой краевая задача типа наклонной производной не является регуляризуемой. Краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского [1]. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и обеспечивает нетеровость задачи в широком классе гильбертовых пространств.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Задача отыскания решения $u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ эллиптической системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 x_2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = 0, \\ -3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 x_2} - 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial l}\right|_{\partial\Omega} = f_1, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = f_2, \tag{2}$$

называется задачей типа наклонной производной. Здесь ν – единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$; l – единичное поле на $\partial\Omega$, составляющее с нормалью ν угол 45° в каждой точке $\partial\Omega$; f_1, $f_2 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

В отличии от системы, приведенной в работе [2], система (1) обладает тем свойством, что каждая компонента u_k ($k = 1, 2$) ее дважды непрерывно дифференцируемого решения в области Ω, удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0$, т.е. является в Ω бигармонической функцией.

Отметим также, что система (1) гомотопна паре уравнений Лапласа [3].

Теорема. *Задача* (1) – (2) *не является регуляризуемой.*

Для доказательства устанавливается, что все миноры второго порядка матрицы Лопатинского задачи (1) – (2) обращаются в нуль в той точке границы $\partial\Omega$, в которой нормаль параллельна оси Ox_2.

Литература

1. Агранович М. С. *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы* / М.С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3-120.

2. Жадан, М.И. *Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка* / М.И. Жадан, А.Т. Усс // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. XXVII, № 6. – С. 489-491.

3. Боярский, Б.В. *О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости* / Б.В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, № 9. – P. 565-570.