УДК 527.925

Д.Г. Куприянович, И.Н. Мельникова
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ РЕШЕНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Одной из основных проблем аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений была и остается проблема выделения классов уравнений, решение которых имеет достаточно простой характер подвижных особых точек.

Начиная с работ Брио и Буке, Фукса и Пенлеве, исследования по решению этой проблемы ведутся в нескольких направлениях.

Во-первых, ищутся классы уравнений, решения которых имеют в качестве особых подвижных точек только однозначные полюсы. Оказалось, что уравнения

$$w' = R(w, z), \tag{1}$$

где R – рациональная относительно w и аналитическая относительно z функция, в этом случае имеет вид уравнений Риккати, а уравнения

$$w'' = R(w', w, z), \tag{2}$$

где R – рациональная относительно w' и w и аналитическая относительно z функция, сводятся к 50 каноническим видам, указанным Пенлеве и Гамбье. Во всех остальных случаях уравнения (1) и (2) имеют решения с подвижными критическими особыми точками.

Уравнения

$$P(w', w, z) = 0, \tag{3}$$

где P – полином относительно w' и w и аналитическая функция относительно z, не имеют решений с подвижными критическими особыми точками тогда и только тогда, когда выполнены известные условия Фукса. Что касается уравнений вида

$$P(w'', w', w, z) = 0, \tag{4}$$

а тем более уравнений порядка выше второго или систем двух уравнений, то в общем случае, несмотря на усилия многих математиков, необходимые и достаточные условия однозначных решений не приведены. Указаны лишь отдельные достаточные условия, когда такие уравнения или системы свободны от решений с подвижными критическими особыми точками.

Во-вторых, ищутся классы уравнений и систем, подвижные особые точки которых исчерпываются алгебраическими особыми точками (полюсами, алгебраическими критическими особыми точками и критическими полюсами). Основополагающей в этом плане является теорема, доказанная Пенлеве: уравнения вида (3) не имеют подвижных трансцендентных и существенно особых точек. Попытки Пенлеве и других математиков сформулировать и доказать аналогичный результат даже для довольно частных уравнений порядка выше первого успехом не увенчались. Доводы в пользу высказанной Пенлеве гипотезы о том, что однозначные решения уравнений вида (4) не имеют решений с подвижными особыми линиями, как показали дальнейшие исследования, не подтвердились. Таким образом, несмотря на усилия многих математиков, до настоящего времени не удалось указать достаточно общие классы нелинейных уравнений порядка выше первого, не имеющих решений с подвижными трансцендентными и существенно особыми точками или подвижными критическими полюсами.

Более успешно развивалось направление, где отыскивались классы уравнений и систем уравнений, допускающих решения с подвижными трансцендентными особыми точками, но не имеющие решений с подвижными существенно особыми точками. Здесь следует в первую очередь назвать работы Пенлеве и Кимуры.

Для уравнения первого порядка вида

$$w' = \frac{f(w, z)}{\varphi(w, z)}, \tag{5}$$

где f и φ – целые функции относительно w' и аналитические в области D функции относительно z, Пенлеве доказал, что при условии

$$\varphi(w, z_0) \neq 0, z_0 \in D$$

уравнение (5) не имеет вовсе решений с существенной особенностью в точке z_0.

Что касается уравнений второго порядка, то сначала Пенлеве, а несколько позже и Кимура выделили классы уравнений вида (2), у которых или $w(z)$, или $w'(z)$ не имеют подвижных существенно особых точек. Если $R = \dfrac{Q}{S}$, где Q и S – полиномы относительно w' и w и аналитические функции относительно z, то для отсутствия у $w(z)$ подвижных существенно особых точек, как показали Пенлеве и Кимура, достаточно потребовать выполнения неравенств $q \geq s+3$, где q и s – степени полиномов Q и S относительно w'.

Характер возможных подвижных особых точек решений нелинейного уравнений типа Льенаре

$$w'' + P(w)\,w' + Q(w) = f(z)\,, \tag{6}$$

где P и Q – полиномы относительно w степени соответственно n и m, а f – аналитическая функция относительно z, исследовал Смит. Он установил, что при $n > m$ подвижные особенности решений уравнения (6) исчерпываются полюсами (как правило, критическими) и точками их накопления, откуда следует, что уравнение (6) при $n > m$ не имеет решений с подвижными особыми линиями.

Дальнейшие результаты по решению указанной проблемы были получены Н.П. Еругиным.

Пусть

$$\frac{dx}{dz} = P(x,y,z)\,, \frac{dy}{dz} = Q(x,y,z)\,, \tag{7}$$

где P и Q – полиномы относительно x и y и любые целые функции относительно z; p_1 и p_2, q_1 и q_2 – степени полиномов P и Q относительно x и y.

Н.П. Еругин доказал теорему: если выполнены условия

$$p_1 = q_2 + 2, q_2 = p_2 + 2$$

и коэффициенты при y^{p_2} и x^{q_1} в разложениях полиномов P и Q соответственно по x и y постоянны, то система (7) вовсе не имеет решений с подвижными существенно особыми точками.

Выделению классов нелинейных систем двух дифференциальных уравнений, не имеющих решений с подвижными существенно особыми линиями, а также изучению структуры решения в их окрестности посвящена данная работа. Первоначально мы выбрали в качестве объекта исследования систему

$$\frac{dx}{dz} = \frac{P(x,y,z)}{R(x,y,z)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Q(x,y,z)}{S(x,y,z)}, \tag{8}$$

где P, Q, R и S – многочлены относительно x и y с аналитическими в некоторой области D коэффициентами относительно z.

Обозначим наибольший общий делитель многочленов P и Q через $K(x,y,z)$, а многочленов R и S – через $L(x,y,z)$, т.е. будем считать, что

$$P(x,y,z) = K(x,y,z)\,P_1(x,y,z),$$
$$Q(x,y,z) = K(x,y,z)\,Q_1(x,y,z),$$
$$R(x,y,z) = L(x,y,z)\,R_1(x,y,z),$$
$$S(x,y,z) = L(x,y,z)\,S_1(x,y,z),$$

где, следовательно, K, L, P_1, Q_1, R_1 и S_1 – многочлены относительно x и y, коэффициенты которых представляют собой голоморфные функции относительно z в области D, причем P_1 и Q_1, а также R_1 и S_1 уже не имеют общих делителей при произвольных значениях $z \in D$.

Пусть представления многочленов K, L, P_1, Q_1, R_1 и S_1 по степеням x и y имеют вид

$$K(x,y,z) = \sum_{i=0}^{k_1} K_i^{(1)}(y,z)\,x^{k_1-i} = \sum_{j=0}^{k_2} K_j^{(2)}(x,z)\,y^{k_2-j},$$

$$L(x,y,z) = \sum_{i=0}^{l_1} L_i^{(1)}(y,z)\,x^{l_1-i} = \sum_{j=0}^{l_2} L_j^{(2)}(x,z)\,y^{l_2-j},$$

$$P_1(x,y,z) = \sum_{i=0}^{p_1} P_i^{(1)}(y,z)\,x^{p_1-i} = \sum_{j=0}^{q_2} Q_j^{(2)}(x,z)\,y^{q_2-j},$$

$$R_1(x,y,z) = \sum_{i=0}^{r_1} R_i^{(1)}(y,z)\,x^{r_1-i} = \sum_{j=0}^{r_2} R_j^{(2)}(x,z)\,y^{r_2-j},$$

$$S_1(x,y,z) = \sum_{i=0}^{s_1} S_i^{(1)}(y,z)\,x^{s_1-i} = \sum_{j=0}^{s_2} S_j^{(2)}(x,z)\,y^{s_2-j},$$

где $K_0^{(i)}(\xi,z)\,L_0^{(i)}(\xi,z)\,P_0^{(i)}(\xi,z)\,Q_0^{(i)}(\xi,z)\,R_0^{(i)}(\xi,z)\,S_0^{(i)}(\xi,z) \neq 0\,(i=1,2)$.

Через $x = G(z)$ обозначим общие корни многочленов $S_j^{(2)}(x,z)$ $(j = 0,1,\cdots,s_2)$, через $y = H(z)$ – общие корни многочленов $R_i^{(1)}(y,z)$ $(i = 0,1,\cdots,s_2)$.

Определение 1. Точку (x_0, y_0, z_0), где z_0 – внутренняя точка области D, а x_0, y_0 – конечные комплексные числа, будем называть обыкновенной точкой системы (8), если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $R(x_0,y_0,z_0)\,S(x_0,y_0,z_0) \neq 0$;
2) $P(x_0,y_0,z_0)\,S_1(x_0,y_0,z_0) \neq 0, R(x,y,z_0) \neq 0, y_0 \neq H(z_0)$;
3) $Q(x_0,y_0,z_0)\,R_1(x_0,y_0,z_0) \neq 0, S(x,y,z_0) \neq 0, y_0 \neq G(z_0)$.

Определение 2. Точку (∞, y_0, z_0), где z_0 – внутренняя точка области D, а y_0 – конечное комплексное число, будем при условии

$$p_1 - r_1 \geq max\{l_1 - k_1 + 2, q_1 - s_1 + 2\} \tag{9}$$

называть обыкновенной точкой системы (8), если

1) при $p_1 - r_1 > max\{l_1 - k_1 + 2, q_1 - s_1 + 2\}$ выполнено условие

$$K_0^{(1)}(y_0, z_0)\, P_0^{(1)}(y_0, z_0)\, S_0^{(1)}(y_0, z_0) \neq 0, R(x, y, z_0) \neq 0, y_0 \neq H(z_0)\,; \tag{10}$$

2) при $p_1 - r_1 = l_1 - k_1 + 2, q_1 - s_1 < l_1 - k_1$ выполнено хотя бы одно из двух условий: (10) или

$$L_0^{(1)}(y_0, z_0)\, R_0^{(1)}(y_0, z_0)\, S_0^{(1)}(y_0, z_0) \neq 0; \tag{11}$$

3) при $p_1 - r_1 = q_1 - s_1 + 2, q_1 - s_1 > l_1 - k_1$ выполнено хотя бы одно из двух условий: (10) или

$$K_0^{(1)}(y_0, z_0)\, Q_0^{(1)}(y_0, z_0)\, R_0^{(1)}(y_0, z_0) \neq 0, S(x, y, z_0) \neq 0; \tag{12}$$

4) при $p_1 - r_1 = l_1 - k_1 + 2, q_1 - s_1 = l_1 - k_1$ выполнено хотя бы одно из трех условий: (10),(11) или (12).

Аналогично при условии

$$p_1 - r_1 \geq max\{l_2 - k_2 + 2, p_2 - r_2 + 2\} \tag{13}$$

вводится понятие обыкновенной точки системы (8) вида (x_0, ∞, z_0), где z_0 – внутренняя точка области D, а x_0 – конечное комплексное число.

Теорема 1 (теорема существования). *Система (8) при любом $z_0 \in D$ и любых конечных или бесконечных x_0 или y_0, для которых (x_0, y_0, z_0) – обыкновенная точка, имеет единственное решение $(x(z), y(z))$ со свойством*

$$x(z) \to x_0, y(z) \to y_0 z \to z_0. \tag{14}$$

Точка $z = z_0$ для функций $x(z)$ и $y(z)$ этого решения будет или точкой голоморфности, или алгебраической особой точкой (полюсом, критическим полюсом или алгебраической критической особой точкой).

Теорема 2 (теорема единственности). *Если решение $(x(z), y(z))$ системы (8) обладает таким свойством: существует путь L, вдоль которого $z \to z_0 \in D$ и на котором, исключая быть может точку z_0, функции $x(z)$ и $y(z)$ являются аналитическими, и на нем последовательность точек $\{z_n\} \to z_0$ и такая, что $\{x(z_n)\} \to x_0, \{y(z_n)\} \to y_0$,* *где (x_0, y_0, z_0) – обыкновенная точка системы (8), то это решение обладает свойством (14) и совпадает в окрестности точки $z = z_0$ с решением, описанным в теореме 1.*

Теоремы 1 и 2 обобщают известные теоремы Коши и Пенлеве о существовании и единственности решений, в которых аналогичные утверждения доказываются для правильной точки системы.

Далее рассмотрим существенно особые точки аналитической функции и разобъем их на два класса. К первому классу относим все те существенно особые точки аналитической функции $w = f(z)$, в которых множество неопределенности этой функции не более чем счетно. Все остальные существенно особые точки функции $w = f(z)$ относим ко второму классу. Тогда можно установить справедливость следующих утверждений:

1. Существенно особые точки первого класса аналитической функции всегда расположены на ее особых линиях.

2. Если z_0 есть существенно особая точка первого класса аналитической функции $w = f(z)$, то в окрестности $|z - z_0| < r$ существует не более чем счетное число областей, примыкающих к этой точке, в каждой из которых существует при $z \to z_0$ вполне определенный предел $f(z)$, конечный или бесконечный, и по крайней мере в двух этих областях указанные пределы различны.

3. Если z_0 есть существенно особая точка второго класса аналитической функции $w = f(z)$, то в области ее аналитичности обязательно существует путь L, вдоль которого $z \to z_0$, что $\lim f(z)$ при $z \to z_0$ $(z \in L)$ не существует, т.е. множество неопределенности функции $w = f(z)$ в точке z_0 вдоль пути L будет множеством мощности континуума.

Используя эти утверждения, можно провести классификацию систем вида (8), которые не имеют решений с подвижными существенно особыми точками. При этом к истинности окончательного результата можно прийти методом исключения систем из рассмотренных систем вида (8), которые имеют решения хотя бы с одной неопределенной компонентой.

Список использованной литературы

1. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – 3-е изд. – Минск : Наука и техника, 1979. – 572 с.

2. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.

3. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ОНТИ, 1939. – 717 с.