УДК 517.968

В.Т. Дацык
Беларусь, Брест, БрГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Для функции $V(x)$, заданной на положительной полуоси, определим интегральное преобразование

$$A^{\alpha,\mu}V(x) = \int\limits_0^{+\infty} V(t)x^{\mu-1}e_{1,\alpha}^{1,\mu}(-tx^{-\alpha})dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

с функцией типа Райта в ядре

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon,\omega\pi)} e^t t^{-\delta} E_{\frac{1}{\alpha}}(zt^{\beta};\mu)dt, \tag{2}$$

где

$$\gamma(\varepsilon,\omega\pi) = \{p : |p| = \varepsilon, |\arg p| \leqslant \omega\pi\} \cup \{p : |p| \geqslant \varepsilon, \arg p = \pm\omega\pi\} \ -$$

контур Ханкеля и

$$E_\alpha(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)} \ - \tag{3}$$

функция типа Миттаг-Леффлера.

Из свойств функций (2) и (3) следует, что интеграл (1) будет сходиться, если функция $V(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке положительной полуоси и выполняются асимптотические неравенства:

$$|V(x)| < Cx^{\varepsilon} \text{ при } x \to 0, \text{ где } \begin{cases} \varepsilon > -1, & \text{если } \mu \neq 0, \\ \varepsilon > -2, & \text{если } \mu = 0, \end{cases}$$

$$|V(x)| < Ce^{Kx^{\varepsilon}} \text{ при } x \to +\infty, \text{ где } \varepsilon < \frac{1}{1-\alpha} \quad (C, K > 0). \tag{4}$$

Интегральное преобразование (1) обладает следующими свойствами.

1. $A^{\alpha,\mu}V(x) = D_{0x}^{-\mu}A^{\alpha}V(x)$.

Следует из определений операторов дробного интегродифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка $\mu \in \mathbb{R}$

$$D^{\mu}_{st}g(t) = \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\mu)} \int\limits_s^t \frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\mu+1}}, \quad \mu < 0,$$

$$D^{\mu}_{st}g(t) = g(t), \quad \mu = 0,$$

$$D^{\mu}_{st}g(t) = \operatorname{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D^{\mu-n}_{st}g(t), \quad n-1 < \mu \leqslant n (n \in \mathbb{N})$$

и определения регуляризованной дробной производной (производной Капуто)

$$\mathcal{D}^{\mu}_{st}g(t) = \operatorname{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D^{\mu-n}_{st}g(t), \quad n-1 < \mu \leqslant n (n \in \mathbb{N}).$$

2. Если $V(x)$ непрерывна в нуле и дифференцируема при $x > 0$, то

$$D^{\alpha}_{0x}A^{\alpha,\mu}V(x) = A^{\alpha,\mu}V'(x) + V(0)\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{7}$$

На основании свойств операторов дробного дифференцирования и функции Райта имеем

$$D^{\alpha}_{0x}A^{\alpha,\mu}V(x) = \int\limits_0^{+\infty} V(t)x^{\mu-\alpha-1}e^{1,\mu-\alpha}_{1,\alpha}(-tx^{-\alpha})dt =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} V(t)\frac{x^{\mu-1}}{t}e^{0,\mu}_{1,\alpha}(-tx^{-\alpha})dt = -\int\limits_0^{+\infty} V(t)\frac{d}{dt}x^{\mu}e^{1,\mu}_{1,\alpha}(-tx^{-\alpha})dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая

$$e^{1,\delta}_{1,\beta}(-x) \leqslant C_n e^{1,1}_{1,\beta}(-x) \leqslant C_n e^{-x^{\frac{1}{1-\beta}}\cdot\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}\cdot(1-\beta)},$$

где

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^k x^k}{\Gamma(\delta + k(1-\beta))},$$

получим справедливость (7). В частности, при $\mu = 0$ из (7) следует, что

$$D^{\alpha}_{0x}A^{\alpha,0}V(x) = A^{\alpha,0}V'(x). \tag{8}$$

Аналогично, для дробной производной Капуто

$$\mathcal{D}_{0x}^{\alpha} A^{\alpha,1-\alpha} V(x) = A^{\alpha,1-\alpha} V'(x). \tag{9}$$

3. Пусть $0 \leqslant \mu < \alpha$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} D_{0x}^{-\frac{\mu}{\alpha}} V(x) = V_0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} A^{\alpha,\mu} V(x) = V_0. \tag{10}$$

Следует из свойств производной (5) и интегрального преобразования (1).

Применим интегральное преобразование (1) к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} u(x,y) = L_x u(x,y) + F(x,y) \tag{11}$$

дробного порядка $\alpha \in (0;1)$ относительно неизвестной функции $u(x,y)$, $u : \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ определяет либо производную Римана-Лиувилля D_{0y}^{α}, либо производную в смысле Капуто $\mathcal{D}_{0y}^{\alpha}$, где L_x – линейный оператор, зависящий только от x с областью определения $D(L_x)$; $\mathbb{X}$ – множество точек x, $y \in \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$, $F(x,y) : \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – заданная функция.

Предположим, что функция $V(x,y)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} V(x,y) = L_x V(x,y) + G(x,y), \tag{12}$$

т.е. $V(x,y) \in D(L_x)$ для любого фиксированного $y \in \mathbb{R}_+$, $V(x,y) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{X}$ и удовлетворяет начальному условию

$$V(x,0) = \tau(x), \; x \in \mathbb{X}. \tag{13}$$

С помощью (8) и (10) получаем, что если:

1) $K(x,y) = A_y^{\alpha} G(x,y), x \in \mathbb{X}$;

2) функции $V(x,y), V_y(x,y) L_x V(x,y)$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{X}$ удовлетворяют асимптотическим неравенствам (4) относительно y при $y \to 0$ и при $y \to \infty$;

3) $A_y^{\alpha} V(x,y) \in D(L_x)$ и $A_y^{\alpha} L_x V(x,y) = L_x A_y^{\alpha} V(x,y)$ для любого фиксированного $y \in \mathbb{R}_+$,

то функция $u(x,y)$, определенная равенством $u(x,y) = A_y^{\alpha} V(x,y)$ является решение уравнения (11) в случае производной Римана-Лиувилля D_{0y}^{α} и удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \tau(x), x \in \mathbb{X}. \tag{14}$$

Аналогично, если для любого фиксированного $x \in \mathbb{X}$ выполнены соотношения:

1) $F(x,y) = A_y^{\alpha,1-\alpha} G(x,y)$;

2) функции $V(x,y), V_y(x,y)$ и $L_x V(x,y) \forall x \in \mathbb{X}$ по y при $y \to 0$ и $y \to \infty$ удовлетворяют асимптотическим неравенствам (4);

3) $A_y^{\alpha,1-\alpha} V(x,y) \in D(L_x)$ и $A_y^{\alpha,1-\alpha} L_x V(x,y) = L_x A_y^{\alpha,1-\alpha} V(x,y)$, то $u(x,y) = A_y^{\alpha,1-\alpha} V(x,y)$ есть решение уравнения

$$\mathcal{D}_{0x}^{\alpha} u(x,y) = L_x u(x,y) + F(x,y) \tag{15}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), x \in \mathbb{X}.$$

Таким образом, вопрос о существовании и представлении решения задачи Коши для уравнения (11) с начальными условиями (14) с производной Римана-Лиувилля или (15) с производной Капуто сводится к решению задачи Коши (13) для дифференциального уравнения (12).

Список использованной литературы

1. Джрбашян, М. М. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функцией Миттаг-Леффлера / М. М. Джрбашян, Р. А. Багян // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 6. – С. 1297–1300.

2. Джрбашян, М. М. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка / М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян // Изв. АН Армян. ССР. Математика. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 3–28.

3. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.