УДК 517.95

А.И. Басик, О.А. Гацкевич, Т.В. Копайцева
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ОБ ИНДЕКСЕ РЕГУЛЯРИЗУЕМОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^4$

Введение. В работе рассматривается класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными кососимметрического типа. Для систем этого класса доказывается критерий, позволяющий в явном виде описать условие регуляризуемости Я.Б. Лопатинского произвольной краевой задачи Римана-Гильберта в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности. Это условие обеспечивает нетеровость задачи в широком классе банаховых пространств [1; 2]. Подобный критерий был ранее получен В.И. Шевченко для системы Моисила-Теодореску [3] (см. также [4]), а также А.Т. Уссом для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5]. Для сравнения отметим, что для четырехмерных аналогов системы Коши-Римана [6] и псевдосимметрических эллиптических систем в $\mathbb{R}^4$ [7] такого критерия не существует.

Одной из важных характеристик эллиптической краевой задачи является ее индекс. Доказанный критерий позволяет провести гомотопию произвольной краевой задачи Римана-Гильберта для рассматриваемых систем в классе регуляризуемых краевых задач к простейшему виду, тем самым установить равенство индексов этих задач. Индекс регуляризуемой задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску [3], а также для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5] равен минус единице. В настоящей работе мы распространяем этот результат на класс эллиптических кососимметрических систем в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что рассматриваемый нами класс систем содержит систему Моисила-Теодореску и имеет непустое пересечение, но не совпадает с классом трехмерных аналогов системы Коши-Римана.

Постановка задачи Римана-Гильберта. Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \qquad (1)$$

где $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ – неизвестная вектор-функция; A_1, A_2 и A_3 являются кососимметрическими матрицами размера 4×4 вида

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & c_k \\ -a_k & 0 & c_k & -b_k \\ -b_k & -c_k & 0 & a_k \\ -c_k & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^3$ характеристическая матрица системы (1)

$$\mathfrak{A}(\xi) := A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$$

является невырожденной.

Обозначим $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = \left(\langle a; \xi\rangle^2 + \langle b; \xi\rangle^2 + \langle c; \xi\rangle^2\right)^2,$$

где $\langle x; y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Лемма 1. *Система* (1) *является эллиптической тогда и только тогда, когда векторы a, b и c линейно независимы.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существуют числа ξ_1, ξ_2, ξ_3, не все равные нулю, такие что $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$. Последнее означает, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0, \\ b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 = 0, \\ c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет ненулевое решение, но тогда $\det \mathfrak{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, что противоречит эллиптичности системы (1).

Докажем достаточность. Уравнение $\det \mathfrak{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ равносильно системе (2), которая в силу линейной независимости векторов a, b и c имеет только нулевое решение. Таким образом, система (1) является эллиптической. Лемма доказана.

Задача Римана-Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области Ω и непрерывного по Гельдеру на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \tag{3}$$

где B – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4 вида

$$B(y) = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix},$$

f – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

Условие регуляризуемости. Задача (1), (3) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y) \cdot \int\limits_{\gamma} \mathfrak{A}^{-1}(\lambda\nu(y) + \tau(y))\, d\lambda \tag{4}$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$. Здесь через $\nu = \nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему корень $\alpha + i\beta$ $(\beta > 0)$ уравнения $\det \mathfrak{A}(\lambda\nu(y) + \tau(y)) = 0$.

Отметим, что для максимальности ранга матрицы (4) необходимо, чтобы $rank B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, что и предполагаем в дальнейшем выполненным.

Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j-го и k-го столбцов $(j, k = 1, 2, 3, 4)$ и рассмотрим векторное поле $L = (L_1, L_2, L_3)$, где

$$L_1 = a_1(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_1(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_1(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}),$$
$$L_2 = a_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_2(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_2(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}),$$
$$L_3 = a_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_3(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_3(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}).$$

Теорема 1. *Задача* (1), (3) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется условие*

$$\langle \nu(y); L(y) \rangle \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть H_{jk} – минор матрицы Я.Б. Лопатинского (4), составленный из ее j-го и k-го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$). Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{12} = H_{34}, \quad H_{13} = -H_{24}, \quad H_{14} = H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя

$$H_{12} = \langle a;\xi\rangle(\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34}) + \langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24}) + \langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})),$$

$$H_{13} = \langle b;\xi\rangle(\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34}) + \langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24}) + \langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})),$$

$$H_{14} = \langle c;\xi\rangle(\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34}) + \langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24}) + \langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})),$$

где $\xi = (\alpha + \iota\beta)\nu(y) + \tau(y)$.

Условие максимальности ранга матрицы Я.Б. Лопатинского (3) равносильно тому, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y выполняется условие

$$|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 \neq 0.$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = \\ = (|\langle a;\xi\rangle|^2 + |\langle b;\xi\rangle|^2 + |\langle c;\xi\rangle|^2)\times \\ \times|\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34}) + \langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24}) + \langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})|^2 = \\ = (|\langle a;\xi\rangle|^2 + |\langle b;\xi\rangle|^2 + |\langle c;\xi\rangle|^2)|\langle \tau; L\rangle + \alpha\langle\nu; L\rangle + \iota\beta\langle\nu; L\rangle|^2. \qquad (6)\end{gathered}$$

Докажем необходимость выполнения неравенства (4). Предположим, что в некоторой точке $y_0 \in \partial\Omega$ выполняется равенство $\langle\nu(y); L(y_0)\rangle = 0$, т.е. вектор $L(y_0)$ лежит в касательной плоскости $T_{y_0}\partial\Omega$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y_0. Поэтому найдется единичный вектор $\widetilde{\tau} \in T_{y_0}\partial\Omega$, ортогональный $L(y_0)$. Положив в формуле (5) $\tau = \widetilde{\tau}$ и $y = y_0$, получим $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$, что противоречит максимальности ранга матрицы (3).

Обратно, пусть выполняется условие (5), однако $|H_{12}|^2+|H_{13}|^2+|H_{14}|^2 = 0$ в некоторой точке y_0 и при некотором единичном векторе τ, тогда из формулы (6) следует, что

$$\langle a;\xi\rangle = 0, \quad \langle b;\xi\rangle = 0 \text{ и } \langle c;\xi\rangle = 0,$$

где $\xi = (\alpha+i\beta)\nu(y_0)+\tau$. Последнее противоречит эллиптичности системы (1). Теорема доказана.

Индекс задачи (1), (3). При выполнении условия (5), согласно теореме 1, задача (1), (3) является регуляризуемой. Это означает, что однородная задача (1), (3) имеет α линейных независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение β линейно независимых условий разрешимости. Число $\alpha - \beta$ называется индексом задачи (1), (3). Известно, что индекс является гомотопически устойчивым. Вычисление индекса проведем методом гомотопий.

Напомним, что две задачи Римана-Гильберта называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского. При этом предполагается, что деформация сохраняет гладкость (непрерывность по Гельдеру) коэффициентов этих задач.

В силу непрерывности векторного поля $L(y)$ и связности поверхности $\partial\Omega$ скалярное произведение $\langle \nu(y); L(y)\rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$. Не ограничивая общности, можно считать, что всюду на $\partial\Omega$ выполняется неравенство

$$\langle \nu(y); L(y)\rangle > 0$$

(случай $\langle \nu(y); L(y)\rangle < 0$ сводится к рассматриваемому, например, умножением одного из граничных условий (3) на -1).

Так как $\mathrm{rank} B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, то на поверхности $\partial\Omega$ первая строка

$$m(y) := (m_1(y), m_2(y), m_3(y), m_4(y))$$

матрицы $B(y)$ не обращается в нуль. Поэтому существует [8] непрерывное отображение $M : \partial\Omega \times [0; 1] \to \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ такое, что при каждом $y \in \partial\Omega$

$$M(y, 0) = m(y) \text{ и } M(y, 1) = (1, 0, 0, 0)$$

и при каждом $t \in [0; 1]$ вектор-функция $M(\cdot, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\partial\Omega$.

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (3). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки $N = (N_1(y,t), N_2(y,t), N_3(y,t), N_4(y,t))$

$$\Xi(y,t) N^T(y,t) = \widetilde{L}(y,t), \tag{7}$$

где матрица $\Xi(y,t)$ имеет вид (для упрощения записей точка $(y,t) \in \partial\Omega\times$ $\times[0; 1]$, в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается):

$$\Xi = \left(\begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ -a_1M_2 - b_1M_3 - c_1M_4 & a_1M_1 - c_1M_3 + b_1M_4 \\ -a_2M_2 - b_2M_3 - c_2M_4 & a_2M_1 - c_2M_3 + b_2M_4 \\ -a_3M_2 - b_3M_3 - c_3M_4 & a_3M_1 - c_3M_3 + b_3M_4 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc} M_3 & M_4 \\ b_1M_1 + c_1M_2 - a_1M_4 & c_1M_1 - b_1M_2 + a_1M_3 \\ b_2M_1 + c_2M_2 - a_2M_4 & c_2M_1 - b_2M_2 + a_2M_3 \\ b_3M_1 + c_3M_2 - a_3M_4 & c_3M_1 - b_3M_2 + a_3M_3 \end{array} \right),$$

а правая часть системы (7):

$$\widetilde{L}(y,t) = \begin{pmatrix} t(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)L_1(y) + t\nu_1(y) \\ (1-t)L_2(y) + t\nu_2(y) \\ (1-t)L_3(y) + t\nu_3(y) \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом $t \in [0;1]$

$$\det \Xi(y,t) = (a,b,c)(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)^2 \neq 0,$$

то система (7) однозначно разрешима (через (a,b,c) обозначено смешанное произведение векторов a, b и c), при этом отображение $N : \partial\Omega \times [0;1] \to \mathbb{R}^4$ непрерывно и, как нетрудно видеть, при каждом фиксированном $t \in [0;1]$ непрерывно по Гельдеру на $\partial\Omega$. При $t = 0$ решением системы (7) является вторая строка матрицы $B(y)$. Рассмотрим гомотопию задачи (1), (3), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y,t)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega) \tag{8}$$

имеет вид

$$B(y,t) = \begin{pmatrix} M_1(y,t) & M_2(y,t) & M_3(y,t) & M_4(y,t) \\ N_1(y,t) & N_2(y,t) & N_3(y,t) & N_4(y,t) \end{pmatrix}.$$

Так как векторное поле $L(y,t)$, отвечающее задаче (1), (8), имеет вид

$$L(y,t) = (1-t)L(y) + t\nu(y),$$

то $\langle \nu(y); L(y,t) \rangle = (1-t)\langle \nu(y); L(y) \rangle + t > 0$ при всех $y \in \partial\Omega$ и любом $t \in [0;1]$. Следовательно, задача (1), (3) в классе регуляризуемых краевых задач гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием $(y \in \partial\Omega)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\nu(y),b,c)}{(a,b,c)} & \frac{(a,\nu(y),c)}{(a,b,c)} & \frac{(a,b,\nu(y))}{(a,b,c)} \end{pmatrix} U(y) = f(y). \tag{9}$$

Отметим, что задача (1), (9) регуляризуема для любых линейно независимых векторов a, b и c .

Проведем теперь гомотопию эллиптической системы задачи (1), (9). Если a, b, c образуют правую тройку векторов, то непрерывной деформацией в $\mathbb{R}^3$ с сохранением условия линейной независимости она может быть сгомотопирована в стандартный базис e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ (см., например, [9, с. 211]). В этом случае задача (1), (9) гомотопна задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \qquad (x \in \Omega) \qquad (10)$$

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \qquad (y \in \partial\Omega). \qquad (11)$$

Заменой $V = (-u_2, -u_3, -u_4)$ и $W = u_1$ (10), (11) приводится к виду

$$\mathrm{div} V(x) = 0, \quad \mathrm{rot}\, V(x) = \mathrm{grad}\, W(x), \qquad (12)$$

$$W|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad \langle V, \nu \rangle|_{\partial\Omega} = -f_2(y). \qquad (13)$$

Индекс последней задачи вычислен в работе [8] и равен минус единице.

Левая тройка векторов a, b, c непрерывной деформацией в $\mathbb{R}^3$ может быть переведена в базис $-e_1, e_2, e_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ (см., например, [9, с. 211]). Тогда (1), (9) гомотопна задаче

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \qquad (x \in \Omega) \qquad (14)$$

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \qquad (y \in \partial\Omega). \qquad (15)$$

Задача (14), (15) заменой $V = (-u_2, u_3, u_4)$ и $W = u_1$ также приводится к виду (12), (13) и, следовательно, имеет индекс, равный минус единице. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Индекс регуляризуемой задачи Римана-Гильберта* (1), (3) *равен минус единице.*

Список использованной литературы

1. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.

3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана-Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : респ. межведомств. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

4. Полунин, В. А. Об условии Шапиро-Лопатинского в задаче Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка / В. А. Полунин, А. П. Солдатов // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – Белгород, 2010. – № 17 (88), вып. 20. – С. 91–99.

5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана-Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши-Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

6. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши-Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

7. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

8. Шевченко, В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : респ. межведомств. сб. – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172–186.

9. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров ; с прил. собр. задач, снабж. решениями, сост. А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1968. – 911 с.