НОВЫЙ, ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ

Шуть В.Н. (Брестский филиал Института современных знаний им. А.М. Широкова)

1. Постановка задачи. Задача о назначении является частным случа-

ем транспортной задачи. Известен венгерский метод решения задачи о назначении и дельта метод. Оба метода имеют большую вычислительную трудоёмкость при больших матрицах назначений. Предлагаемый метод устраняет данный недостаток.

2. Описание алгоритма. Работа алгоритма начинается с заполнения матрицы стоимостей работ одним из известных методов, например, методом наименьшего элемента.

Определение 1. Строка(столбец) матрицы называется согласованной(ым), если клетка строки(столба) с минимальным тарифом является заполненной.

Начальный опорный план, как и все последующие планы задачи о назначении, имеют матрицу, в каждой(ом) строке(столбце) которой(го) стоит по одной единице. Согласованные строки(столбцы) матрицы опорного плана (и всех последующих) помечаются символом «*». В дальнейшем изложении будем использовать только строки, но всё, что относится к строкам, также выполняется и для столбцов.

Для улучшения начального опорного плана используется операция перемещения единицы по строке i из заполненной клетки ij в клетку ij_l. Для сохранения баланса (1.6, 1.7) одновременно выполняется перемещение в обратном направлении из клетки i_lj_l в клетку i_lj.

Перемещение фиксируется, если алгебраическая сумма $Д=C_{ij}-C_{ijl}+C_{iljl}-C_{ilj}$ положительна. В противном случае возвращаются к первоначальному плану. В алгебраической сумме Д первый элемент является клеткой с единицей, которая будет перемещаться. Она со знаком «+». Затем знаки клеток, участвующие в сдвиге, чередуются.

Число таких сдвигов можно определить по следующей схеме. Единица в первом столбце будет сочетаться с единицами (n-1) столбцов. Единица второго столбца – с единицами (n-2) столбцов и т.д. Итак, число таких операций N равно (n-1)!. В дальнейшем будет показано, что число N возможно значительно сократить.

Число N возможно существенно сократить, если перемещение единицы в строке выполнять только в клетки с меньшими тарифами,

нежели тариф клетки, из которой перемещается единица. В дальнейшем это утверждение будет доказано.

3. Алгоритм метода. Заполняют матрицу стоимостей по методу минимального элемента. Если элемент минимальный в строке, то соответствующая строка помечается символом «*» справа от матрицы. Это означает, что строка согласованная;

Строка с первым не минимальным в ней элементом помечается порядковым номером 1, со вторым – номером 2, и т.д. по мере заполнения матрицы;

К единичному элементу строки с наибольшим помеченным номером (эта клетка имеет наивысший тариф) применяют операцию перемещения. При Д>0 перемещение фиксируется. Клетки матрицы, из которых в результате перемещения были удалены единицы, вычёркиваются из матрицы;

Если в результате выполнения пункта 3 алгоритма появляется новая согласованная строка, то она помечается знаком «*», если исчезает - знак

«*» снимается. Если при выполнении операции перемещения по очередной строке улучшение плана не произошло, то такая строка называется тупиковой и помечается символом «V»;

В результате выполнения пунктов 3 и 4 алгоритма все строки матрицы получают знаки «*» или «V». После этого выполняется повторная операция перемещения в тупиковых строках, в результате которой тупиковая строка либо сохраняет свой статус, либо переходит в разряд согласованных;

Критерием оптимальности плана является помеченность всех строк символами «*» или «V», т.е. все строки либо согласованные, либо тупиковые.

Проведём доказательства правомерности некоторых пунктов алгоритма.

Теорема 1. Перемещение на клетку с большим или равным тарифом не приводит к улучшению промежуточного плана.

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Предположим, что такое перемещение привело к улучшению, т.е. по. Перемещение выполнялось из клетки ij с тарифом C_{ij1} ?C_{ij} (рис. 2.1). Одновременно выполнялось обратное перемещение из клетки с тарифом C_{i1j1} в клетку с тарифом C_{i1j}. Таким образом алгебраическая сумма (выигрыш) запишется:

$$Д=(C_{ij}-C_{ij1})+(C_{i1j1}-C_{i1j}) \quad (3.1)$$

Первый многочлен $(C_{ij}-C_{ij1})$?0, т.к. C_{ij}?C_{ij1} по условию теоремы. Следовательно, для того, чтобы алгебраическая сумма была больше нуля (Д>0) необходимо, чтобы второй многочлен $(C_{i1j1}-C_{i1j})$ был больше нуля:

$$(C_{i1j1}-C_{i1j})>0 \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что $C_{i1j} < C_{i1j1}$. Заметим, что C_{i1j1}?C_{ij}. Действительно, в противном случае, если $C_{i1j1} > C_{ij}$, перемещение начиналось бы с этого элемента (т.к. согласно алгоритму улучшение плана всегда начинается с самого большего заполненного элемента матрицы). Итак, имеем $C_{i1j} < C_{i1j1}$?C_{ij}. Откуда следует, что на пересечении i_1-строки и j-столбца имеется клетка с тарифом меньшим, чем заполненные клетки ij и i_1j_1. Но такого не может быть, т.к. начальное заполнение матрицы производилось методом минимального элемента, и эта клетка была бы заполнена первой. А так как по условиям (2.6) и (2.7) в i_1-строке и j-столбце должна быть только одна единица, то наличие единицы в этой клетке (i_1j) нарушает ограничения (2.6) и (2.7). Полученное противоречие свидетельствует о том, что наше начальное предположение неверно. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет производить перемещения по строке только по клеткам с тарифами меньшими, чем тарифы исходной клетки, что существенно сокращает число перемещений N.

Для обоснования метода в работе доказаны ещё следующие две теоремы:

Теорема 2. В результате выполнения операции перемещения ведомая единица не может занять клетку с тарифом, большим или равным тарифу исходной клетки, с которой начинается перемещение.

Теорема 3. План оптимален, если все строки матрицы, либо согласованные, либо тупиковые.

Проведённые практические испытания метода на многочисленных тестах показали его эффективность.