О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

Матюшков Л.П. (Брестский филиал Института современных знаний им. А.М. Широкова), Матюшкова Г.Л. (ОИПИ НАН Беларуси, г. Минск)

Метод ветвей и границ относят к специальным типам поиска с ограничениями. Они обычно связаны с тем, что каждое решение может быть оценено некоторой стоимостью, причем каждое частичное решение имеет оценку меньшую или равную по сравнению с более глубоким его развитием, включающим еще один шаг при продвижении к конечной цели.

Классической моделью для иллюстрации метода при решении дискретных задач является задача коммивояжера, привлекающая ясностью постановки и наличием хороших прикладных интерпретаций. В ее классической постановке требуется из исходного пункта объехать все остальные заданные пункты, по кратчайшему маршруту, побывав в каждом не более одного раза и вернуться в начальный. Расстояния a_{ij} между всеми пунктами можно задать квадратной матрицей (a_{ij}) размерности n x n (в общем случае полагается $a_{ii} = 0$; некоторые a_{ij} могут быть неравными a_{ji}). Задача имеет ряд экономических интерпретаций, положительно влияющих на усвоение метода в учебном процессе и стимулирующих его применение на практике. Например, выбор маршрутов: прокладки связного кабеля между рабочими станциями, кольцевой ЛВС, инкассаторской машины, выполнения заказов с доставкой в заданные места и т.п.

Если принять за исходный пункт (1) начала движения корневую вершину графа-дерева, то любой вариант обхода всех пунктов будет определяться как сумма конкретных ветвей графа по маршруту (в соответствии с их весом (длиной – a_{ij})) плюс a_{j1} при завершении маршрута в вершине j.

Соответственно любая известная часть конкретного маршрута тогда будет иметь точную оценку *Fф* (фактически пройденный путь до промежуточной вершины j). Оптимальное решение задачи теоретически можно найти, перебрав все варианты, но такой подход чаще всего неосуществим из-за больших затрат времени и памяти ЭВМ. По трудоемкости решения эта задача относится к классу NP – полных [1]. Смысл использования для ее решения метода ветвей и границ сводится к ускорению получения решения путем прекращения ветвления графа из вершин с оценками, которые превышают некоторое заданное граничное значение или равны ему.

Считается, что из данной вершины ветвление графа можно не рассматривать, если ее оценка $F = F_ф + F_о$ превысила некоторый заданный порог, где $F_о$ – оптимистическая оценка еще непройденного пути такая, что фактический оставшийся путь будет больше или равен ей.

Поэтому эффективность решения задачи зависит от метода расчета текущего порогового значения $F_р$ и подбора хорошей быстровычислимой функции $F_о$.

Функцию $F_о$ для ускорения вычислений можно считать равной сумме минимальных путей из тех вершин, которые еще не пройдены, хотя для некоторых из них в уже сложившейся ситуации они заведомо должны быть больше. Исходя из структур конкретных задач могут приниматься и иные решения, но во всех случаях выбор $F_о$ зависит от человека, а затем по заданному алгоритму формально осуществляется ЭВМ.

Выбор начального значения $F_р$ и последующих его значений также регулируется человеком. В этих выборах $F_р$ и $F_о$ кроется одна из важнейших особенностей метода, так как дальше решение задачи может идти формальным путем.

В качестве начального значения можно принимать любое известное допустимое решение задачи. Как и во всех итерационных методах ключ к успеху лежит в хорошем выборе начального приближения. Чтобы его осуществлять автоматически, нужно задать принципы выбора одного или нескольких маршрутов. Например, по принципу FIFO (первый пришел – первый обслуживаешься (всегда идти в ближайший пункт)) получить один вариант полного допустимого решения, который назовем текущим рекордом – F_{tr} и положим $F_p = F_{tr}$. Реализация этого принципа требует времени пропорционального n^{2^p}[1]. Можно пользоваться и случайными механизмами, когда выявление особенностей задачи ограничено временем или доверить его выбор пользователю, который, исходя из своего опыта может назвать готовый маршрут для расчета на ЭВМ.

Например, с помощью датчика случайных чисел можно выбрать несколько (3-5) маршрутов и вычислить среди них наилучший, который примем за F_{tr}

Используя эти предварительные соображения, опишем, одну из возможных прикладных вычислительных схем решения задачи, которая оправдала себя на практике:

На основе избранного принципа отыскать начальное F_{tr}

Из выбранной вершины i (начальная вершина $i = 1$), построить все одношаговые пути в вершины j, которые не встречаются на пути из 1 в i на данном маршруте; получить их оценки $F = F_ф + F_o$ и пополнить ими список оставшихся для рассмотрения вершин графа-дерева.

Изъять из списка для дальнейшего рассмотрения вершины, которые имеют оценку F ? F_{tr}. Если список будет пустым, то F_{tr} объявляется оптимальным вариантом решения задачи.

Если построена в процессе решения концевая вершина графа и ее оценка $F < F_{tr}$, то она становится новым текущим F_{tr}.

Выбирается вершина с наименьшей оценкой F и выполняется пункт 2. Если несколько вершин имеют одинаковую оценку, то выбирается вершина на более дальнем ярусе от корня, и при наличии нескольких таких вершин на одном ярусе выбирается вершина в лексикографическом порядке.

Примечание. В ситуациях, когда переполняется память или израсходовано лимитное время на работу алгоритма, можно выбрать за результат решения задачи текущий рекорд. Временные характеристики в прикладном плане очень важны в решении задач, так как время вычислений может оказаться, исходя из требований практики, с ограничениями. Последующие его затраты сведут на нет пользу от полученного решения.

Следует отметить, что этот алгоритм можно подвергнуть еще некоторой модификации, которая его не очень усложнит, но может резко ускорить получение результата. Это касается момента, когда из-за возрастания оценки всех вершин, полученных из рассматриваемой, надо покинуть достигнутый ярус графа. В это время можно попытаться достроить маршрут из вершины этого яруса с наименьшей оценкой до конечной вершины по одному из названных выше принципов (FIFO, случайный выбор и т.п.).

Изложенный подход к решению задачи хорошо усваивается студентами в учебной работе и может использоваться при «ручном» решении, а также на ЭВМ. При его изложении можно обратить внимание на современное конструктивное направление развития прикладной математики, когда отдельные моменты в решении задач определяют успех в зависимости от вклада человека (определение начальных условий, подбор аппроксимирующих и оценочных функций и т.п.). Изложенный подход можно легко перенести на решение всех дискретных задач с возможностью пошаговых движений к конечному результату.

ЛИТЕРАТУРА:

Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир; - 1980. – с. 477.