

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРЕТИЧЕСКОМ
МЕХАНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к расчетно-графическим работам
по теоретической механике

СТАТИКА

БРЕСТ - 93

УДК 620.10

При изучении курса теоретической механики студент должен выполнить установленные программой расчетно-графические работы. Эти работы характеризуют умение студента изучить теоретический материал и применить его самостоятельно для решения практических задач.

Основная цель методических указаний - оказать помощь студенту в самостоятельной работе по выполнению расчетно-графических работ.

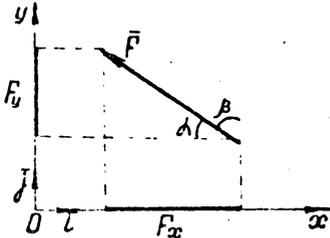
Составители: Виктор Петрович Воробьев, доцент,
Виталий Михайлович Хвисевич, доцент, к.т.н.,
Михаил Иванович Сазонов, проф., к.т.н.,
Борис Григорьевич Холодарь, доц., к.т.н.,
Нина Васильевна Черненко, ст. пр.

Рецензент: кафедра строительной механики
БрПИ,
Зав. сектором НТЦ Госстроя Республики Беларусь,

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В данном разделе содержатся простейшие правила и способы, необходимые студенту для решения любой задачи на равновесие твердых тел.

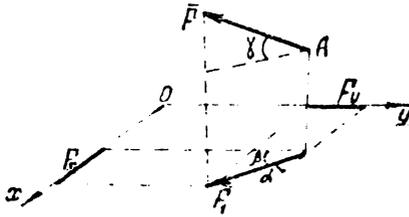
I.1. Проекция силы на координатную ось.



Вектор силы равен:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}.$$

Если линия действия силы не параллельна координатной плоскости, то используется способ двойного проектирования.



Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на косинус острого угла между вектором силы и осью, взятому с соответствующим знаком.

$$F_x = -F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta,$$

$$F \sin \alpha = F_z.$$

В пространстве $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

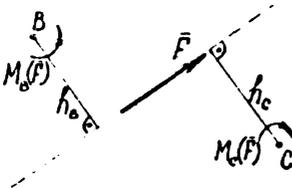
$$F_x = F \cos \alpha;$$

$$F_x = F_1 \cos \alpha = F \cos \gamma \cos \alpha;$$

$$F_y = -F_1 \cos \beta = -F \cos \gamma \cos \beta.$$

γ - угол между вектором и плоскостью XOY.

I.2. Момент силы относительно точки на плоскости.



Момент силы относительно точки на плоскости называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятому с соответствующим знаком.

Плечом силы называется кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы.

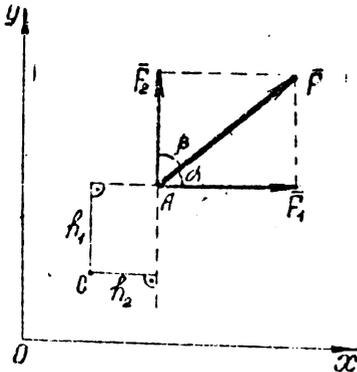
Правило знаков

Если сила поворачивает плоскость относительно точки против часовой стрелки, то момент положителен. В противном случае момент отрицателен.

$$M_B(\vec{F}) = F h_B ;$$

$$M_C(\vec{F}) = F h_C .$$

Иногда момент силы относительно точки удобно вычислять по теореме Вариньона.



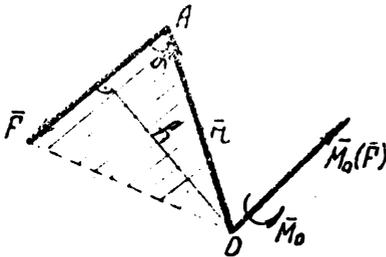
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) ;$$

$$M_O(\vec{F}) = -F_1 h_1 + F_2 h_2 ;$$

$$M_O(\vec{F}) = -F \cos \alpha h_1 + F \cos \beta h_2 .$$

1.3. Момент силы относительно центра и оси в пространстве.



Моментом силы относительно точки (центра) в пространстве называется векторная величина \vec{M}_O , равная векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы A на вектор силы \vec{F} .

$$M_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} .$$

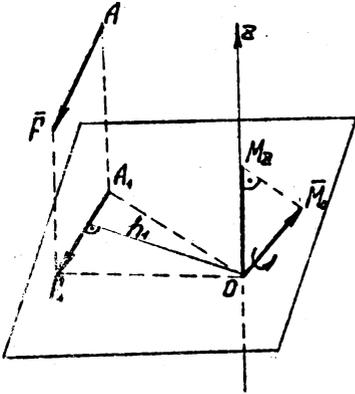
Направлен вектор \vec{M}_O перпендикулярно плоскости векторов

\vec{r} , \vec{F} в ту сторону, чтобы с его конца кратчайший поворот от \vec{r} к \vec{F} был виден против часовой стрелки.

Модуль момента равен:

$$M_o(\vec{F}) = r F \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) = r F \sin \alpha ; \quad r \sin \alpha = h$$

$$M_o = F h$$



Моментом силы относительно оси в пространстве называется скалярная величина M_{L2} , равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

При этом M_{L2} положителен, если проекция силы F_1 поворачивает плоскость вокруг оси при наблюдении с её положительного конца против часовой стрелки.

$$M_o(\vec{F}) = F_1 h_1$$

M_{L2} равен нулю в двух случаях:

1. Сила \vec{F} направлена параллельно оси Z ;
2. Сила \vec{F} пересекает ось Z

Связь между $M_o(\vec{F})$ и $M_{L2}(\vec{F})$ выражается равенством:

$$M_{L2}(\vec{F}) = M_o(\vec{F}) \cos(\angle \vec{M}_o, Z)$$

При решении задач удобно пользоваться теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

Сила \vec{F} лежит в плоскости, параллельной оси Y .

$$M_{Lz}(\vec{F}) = M_{Lz}(\vec{F}_1) + M_{Lz}(\vec{F}_2);$$

$$M_{Lz}(\vec{F}) = -F_1 h_1 - F_2 h_2;$$

$$M_{Lz}(\vec{F}) = -F \cos \alpha h_1 + F \sin \alpha h_2.$$

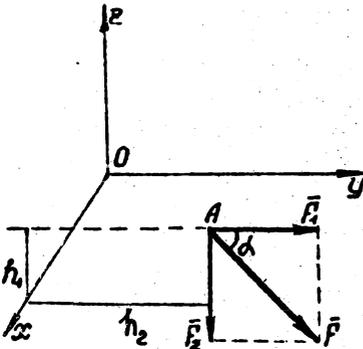
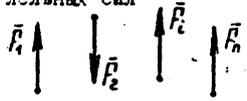
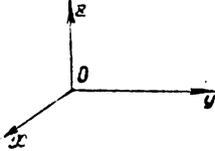


Таблица I.I.

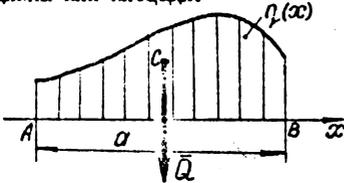
Т А Б Л И Ц А
уравнений равновесия различных систем сил
на плоскости и в пространстве

Вид системы сил	Система сходящихся сил 	Система параллельных сил 	Произвольная система сил 	
Плоская 	$\Sigma F_{kx}=0;$ $\Sigma F_{ky}=0.$ (I.1)	$\Sigma F_{ky}=0;$ $\Sigma M_O(\vec{F}_k)=0.$ (I.2)	$\Sigma F_{kx}=0;$ $\Sigma F_{ky}=0;$ $\Sigma M_O(\vec{F}_k)=0.$ (I.4)	$\Sigma F_{kx}=0;$ $\Sigma M_A(\vec{F}_k)=0;$ $\Sigma M_B(\vec{F}_k)=0;$ $\Sigma M_C(\vec{F}_k)=0.$ (I.3) (I.5) (I.6)
Пространственная 	$\Sigma F_{kx}=0;$ $\Sigma F_{ky}=0;$ $\Sigma F_{kz}=0.$ (I.7)	$\Sigma F_{kz}=0;$ $\Sigma M_x(\vec{F}_k)=0;$ $\Sigma M_y(\vec{F}_k)=0.$ (I.8)	$\Sigma F_{kx}=0;$ $\Sigma F_{ky}=0;$ $\Sigma F_{kz}=0;$ $\Sigma M_x(\vec{F}_k)=0;$ $\Sigma M_y(\vec{F}_k)=0;$ $\Sigma M_z(\vec{F}_k)=0.$ (I.9)	

- Примечание: 1. В системе (I.3) отрезок АВ не параллелен силам.
 2. В системе (I.5) отрезок АВ не перпендикулярен оси ОХ.
 3. В системе (I.6) точки А, В, С не лежат на одной прямой.

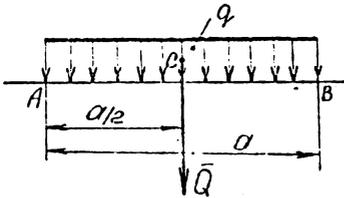
Распределенные нагрузки.

Распределенными называются нагрузки, непрерывно приложенные вдоль некоторой линии или на поверхности тела. Они характеризуются интенсивностью, то есть силой, приходящейся на единицу длины или площади.

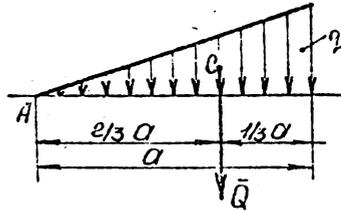


Равнодействующая такой нагрузки \bar{Q} по модулю равна площади криволинейной трапеции и приложена в центре тяжести C этой трапеции.

На практике очень распространены равномерно распределенная нагрузка ($q = const$) и нагрузка, линейно изменяющаяся по длине (треугольная).



$$\bar{Q} = qa$$



$$Q = \frac{1}{2} qa$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ БАЛКИ

Задача С-I

Прежде чем приступать к решению задачи, необходимо изучить следующие темы лекционного курса: связи и их реакции; плоская система сил; определение реакций составных конструкций.

2.1. Условие задачи С-I

Многопролетная балка $ABCD$ состоит из трех жестких частей AB , BC и CD , шарнирно соединенных в точках B и C . С помощью внешних связей (шарнирно-подвижных и шарнирно-непод-

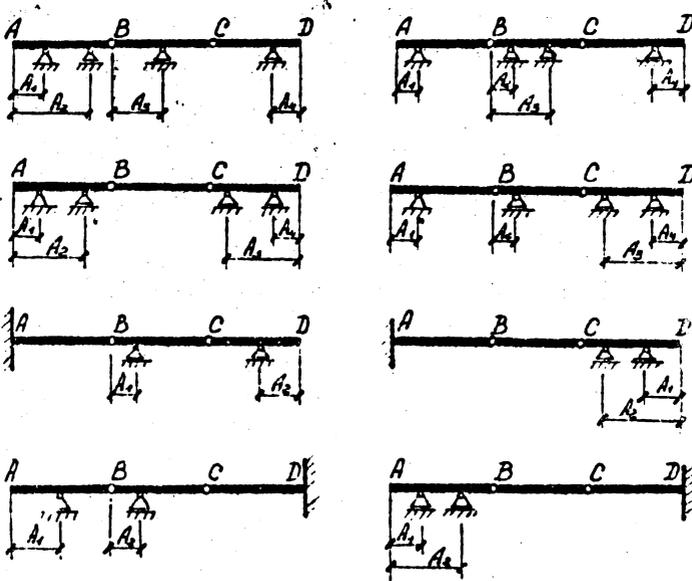
вижных опор или заделки) балка крепится к неподвижному основанию. Балка нагружена вертикальными сосредоточенными силами $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6$ парами сил с моментами M_1, M_2, M_3 и линейно-распределенной нагрузкой с наибольшей интенсивностью q .

Определить реакции опор и давления в шарнирах B, C .

Схемы балок для всех вариантов заданий приведены в таблице 2.1, схема нагрузки - на рис. 2.1.

Таблица 2.1.

Схемы балок



- шарнирно-неподвижная опора



- жесткая заделка или защемление



- шарнирно-подвижная опора



!

$$|AB|=L_1; |BC|=L_2; |CD|=L_3.$$

Схема нагрузки

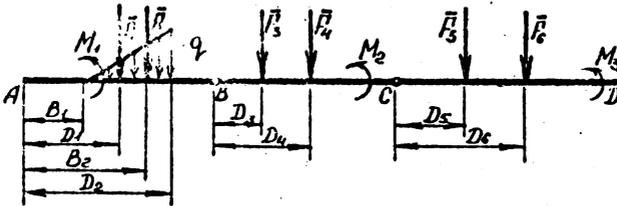


Рис. 2.1.

Примечание: если распределенная нагрузка в пролете 2 или 3, то B_1 и B_2 отсчитываются от точки B или C соответственно.

Исходные данные для расчета содержатся в листе индивидуального задания, синтезированного на ЭВМ, который выдается преподавателем каждому студенту.

2.2. Пример решения задачи С-1

Исходные данные:

Схема № 2			
$\Delta 1 = 3,7 \text{ м}$	$\Delta 2 = 3,6 \text{ м}$	$\Delta 3 = 2,8 \text{ м}$	
$A1 = 0,9 \text{ м}$	$A2 = 1,1 \text{ м}$	$A3 = 2,8 \text{ м}$	$A4 = 0,8 \text{ м}$
Треугольная нагрузка в пролете 3:			
$q = 40,0 \text{ кН/м}$	$B1 = 0,4 \text{ м}$	$B2 = 2,2 \text{ м}$	
$P1 = 35 \text{ кН}$		$D1 = 3,0 \text{ м}$	
$P2 = 66 \text{ кН}$		$D2 = 0,3 \text{ м}$	
$P3 = 59 \text{ кН}$		$D3 = 3,2 \text{ м}$	
$P4 = 70 \text{ кН}$		$D4 = 0,4 \text{ м}$	
$P5 = 58 \text{ кН}$		$D5 = 1,4 \text{ м}$	
$P6 = 41 \text{ кН}$		$D6 = 0,9 \text{ м}$	
$M1 = 41 \text{ кНм}$	$M2 = 43 \text{ кНм}$	$M3 = 16 \text{ кНм}$	

Решение

В соответствии с исходными данными, таблицей 2.1. и рис.2.1. вычерчиваем в масштабе схему балки с нагрузкой (рис.2.2.).

Мысленно отбросив внешние связи, заменим их действие реакциями $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4$ (рис.2.2.). Балка $ABCD$ находится в равновесии под действием задаваемых сил и реакций внешних связей, образующих плоскую систему параллельных сил, для которой можно составить два уравнения равновесия в форме (I.2) или (I.3). (См. таблицу I.I.).

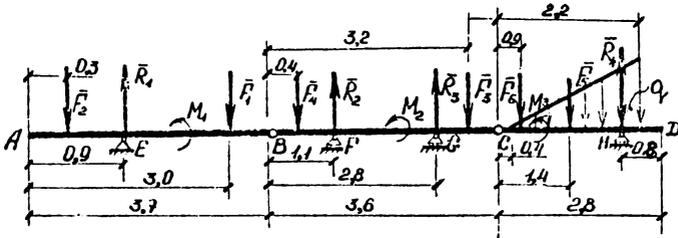


Рис. 2.2.

Поскольку неизвестных значений реакций четыре, а уравнений только два, расчленим балку на части, отбросив внутренние связи в точках B и C , заменим их действие давлениями \bar{R}_B и \bar{R}_C (рис.2.3.).

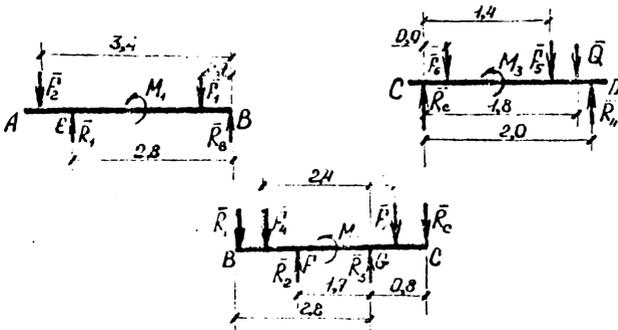


Рис. 2.3.

Распределенную нагрузку на части CD заменим равнодействующей Q , величина которой $Q = \frac{1}{2}q(B_2 - B_1) = \frac{1}{2}40(22 - 0,4) = 36 \text{ кН}$, а линия действия проходит через центр тяжести треугольника, ограниченного графиком q и осью балки.

Составим уравнения равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к каждой части (см. рис. 2.3.)

$$\text{Балка } AB \quad \sum F_{ky} = 0; \quad R_1 + R_B - P_1 - P_2 = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum M_{kA} = 0; \quad 3,4P_2 - 2,8R_1 + M_1 + 0,7P_1 = 0; \quad (2.2)$$

$$\text{Балка } C \quad \sum F_{ky} = 0; \quad R_c + R_4 - P_3 - P_6 - Q; \quad (2.3)$$

$$\sum M_c = 0; \quad 2R_4 + M_3 - 1,4P_3 - 0,9P_6 - 1,6Q = 0; \quad (2.4)$$

$$\text{Балка } BC \quad \sum F_{ky} = 0; \quad R_2 + R_3 - P_B - R_c - P_3 - P_4 = 0; \quad (2.5)$$

$$\sum M_{kC} = 0; \quad 2,8R_B - 1,7R_2 - 0,8R_c + M_2 - 0,4P_3 + 2,4P_4 = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.2.) и (2.4.) находим реакции R_1 , R_4 :

$$R_1 = \frac{1}{2,8}(3,4P_2 + M_1 + 0,7P_1) = \frac{1}{2,8}(3,4 \cdot 66 + 41 + 0,7 \cdot 35) = 104 \text{ кН};$$

$$R_4 = \frac{1}{2}(0,9P_6 + 1,4P_3 + 1,6Q - M_3) = \frac{1}{2}(0,9 \cdot 41 + 1,4 \cdot 58 + 1,6 \cdot 36 - 46) = 64,8 \text{ кН}.$$

После чего из (2.1) и (2.3) определяем давления R_B , R_c :

$$R_B = P_1 + P_2 - R_1 = 35 + 66 - 104 = -3 \text{ кН};$$

$$R_c = P_3 + P_6 + Q - R_4 = 58 + 41 + 36 - 64,8 = 70,2 \text{ кН};$$

и затем из (2.6), (2.5) - реакции R_2 , R_3 :

$$R_2 = \frac{1}{1,7}(2,8R_B + 2,4P_4 + M_2 - 0,4P_3 - 0,8R_c) = \frac{1}{1,7}[2,8(-3) + 2,4 \cdot 79 + 43 - 0,4 \cdot 59 -$$

$$- 0,8 \cdot 70,2] = 85 \text{ кН}; \quad R_3 = R_B + R_c + P_3 + P_4 - R_2 = -3 + 70,2 + 59 + 79 - 85 = 120 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что соблюдается уравнение равновесия сил, приложенных к балке $ABCD$ (рис. 2.2):

$$\sum F_{ky} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - F_1 - F_2 - F_4 - F_5 - F_6 - Q =$$

$$= 104 + 85 + 120 + 64,8 - 35 - 66 - 59 - 79 - 58 - 41 - 36 =$$

$$= 373,8 - 374 = -0,2 \text{ кН} \neq 0.$$

Оцениваем погрешность расчета:

$$\delta = \frac{0,2 \cdot 100\%}{374} = 0,05\% < 3\%.$$

(допустимо)

Ответ: $R_1 = 104 \text{ кН}$; $R_2 = 85 \text{ кН}$; $R_3 = 120 \text{ кН}$; $R_4 = 64,8 \text{ кН}$;
 $R_5 = -3 \text{ кН}$; $R_6 = 70,2 \text{ кН}$

Знак минус указывает, что давление R_5 направлено противоположно показанному на рис. 2.3.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ РАМЫ

Задача С-2

Приступая к решению задачи, необходимо изучить темы лекционного курса, предложенные в п.2.

3.1. Условие задачи С-2

Составная рама состоит из двух жестких металлических частей, шарнирно соединенных в точке С. С помощью внешних связей (шарнирно-неподвижных, шарнирно-подвижных опор, заделок) рама крепится к неподвижному основанию. Рама нагружена сосредоточенными силами $F_1 \neq F_2$, парами сил с моментами $M_1 \neq M_2$ и равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q .

Определить реакции опор и давление в шарнире С.

Геометрические схемы конструкций приведены в приложении II, а общая схема нагружения для всех вариантов заданий приведена на рис. 3.1. Исходные данные для расчета содержатся в листе индивидуального задания, синтезированной на ЭВМ, который выдается преподавателем каждому студенту.

Информация о связях в точках А, В, D, содержится в бланке индивидуального задания. Условные обозначения опор приведены в таблице 3.1.

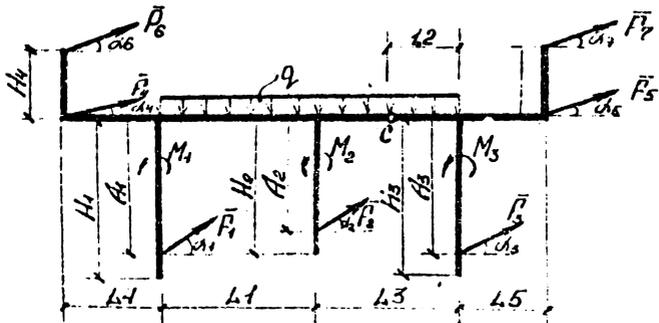


Рис. 3.1. Схема рамы и нагружения

Угол α отсчитывается от горизонтали следующим образом:



Таблица 3.1.

Тип опоры	Жесткая заделка	Шарнирно-неподвижная	Шарнирно-подвижная
Условное обозначение			
	стойка рамы	стойка рамы	стойка рамы
			$\beta > 0$
			$\beta < 0$

При составлении расчетной схемы по исходным данным не нужно показывать силы и пары, значения которых равны нулю. Указывая направления сосредоточенных сил, рекомендуется перейти от тупых углов (если они есть) к острым. Если высота средней стойки рамы равна нулю, то опора в точке В отсутствует.

3.2. Пример решения задачи С-2

Исходные данные:

$L_1 = 2,6$ м	$L_2 = 2,5$ м	$L_3 = 2,5$ м	$L_4 = 2,5$ м
$L_5 = 0,0$ м			
$H_1 = 3,9$ м	$H_2 = 0,0$ м	$H_3 = 5,3$ м	$H_4 = 0,0$ м
$H_5 = 1,7$ м			
Опора А - шарнирно-подвижная, ВЕГА = - 45,0			
опора D - жесткая заделка			
$P_1 = 24$ кН		$\alpha_1 = 180,0$	
$P_2 = 0$ кН		$\alpha_2 = 0,0$	
$P_3 = 0$ кН		$\alpha_3 = 0,0$	
$P_4 = 12$ кН		$\alpha_4 = 45,0$	
$P_5 = 0$ кН		$\alpha_5 = 0,0$	
$P_6 = 0$ кН		$\alpha_6 = 0,0$	
$P_7 = 38$ кН		$\alpha_7 = - 150,0$	
$A_1 = 2,5$ м	$A_2 = 0,0$ м	$A_3 = 0,0$ м	
$q = 5$ кН/м			
$M_1 = 0,0$ кНм	$M_2 = 0,0$ кНм	$M_3 = 27,0$ кНм	

Решение:

В соответствии с исходными данными, рис. 3.1 и таблицей 3.1 вычерчиваем в масштабе схему рамы с нагрузкой (рис.3.2). Мысленно отбросив внешние связи, заменим их действие реакциями \bar{R}_A , X_D , Y_D , M_D . Распределенную нагрузку заменим её равнодействующей \bar{Q} (см.рис.3.2), величина которой равна

$$Q = 5,1 \cdot q = 5,1 : 5 = 25,5 \text{ кН.}$$

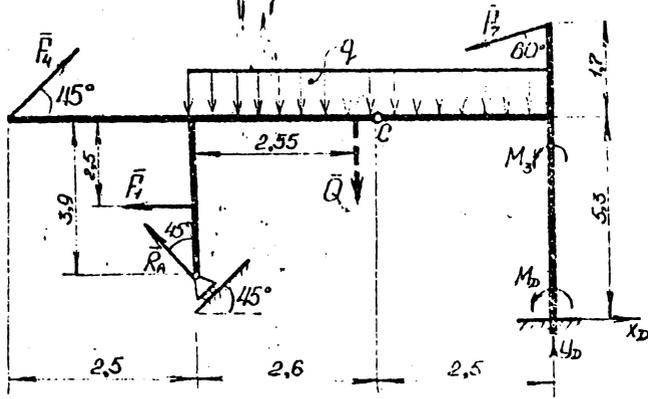


Рис.3.2.

Рамы находится в равновесии под действием задаваемых сил и реакций связей, образующих произвольную плоскую систему сил, для которой можно составить три уравнения равновесия (см.табл.1.1.). Поскольку неизвестных реакций четыре, а уравнений только три, расчленим раму на части, отбросив внутреннюю связь в точке С и заменив ее действие давлениями X_C , Y_C (рис.3.3 и 3.4.).

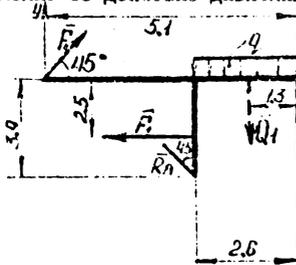


Рис.3.3.

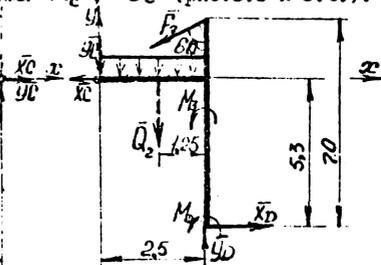


Рис.3.4.

Распределенную нагрузку на левой и правой частях рамы заменим равнодействующими Q_1 и Q_2 соответственно. Причем, $Q_1 = 2,6 \cdot q = 2,6 \cdot 5 = 13 \text{ кН}$; $Q_2 = 2,5 \cdot 5 = 12,5 \text{ кН}$. Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к левой части (см. рис. 3.3.):

$$\sum M_{кс} = 0 ; 1,5 Q_1 - 2,5 F_1 \sin 45^\circ - 2,6 R_A \cos 45^\circ - 2,5 F_2 \quad (3.1)$$

$$- 3,9 R_A \sin 45^\circ = 0 ;$$

$$\sum F_{кx} = 0 ; X_c + F_1 \cos 45^\circ - F_2 - R_A \sin 45^\circ = 0 ; \quad (3.2)$$

$$\sum F_{кy} = 0 ; Y_c + F_1 \sin 45^\circ - Q_1 + R_A \cos 45^\circ = 0. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.1) находим реакцию

$$R_A = \frac{1,5 Q_1 - 2,5 F_1 \sin 45^\circ - 5,1 F_2 \sin 45^\circ}{2,6 \cos 45^\circ + 3,9 \sin 45^\circ} = \frac{1,5 \cdot 13 - 2,5 \cdot 24 - 5,1 \cdot 12 \cdot 0,707}{2,6 \cdot 0,707 + 3,9 \cdot 0,707} =$$

$$= -18,8 \text{ кН},$$

после чего из (3.2) и (3.3) определяем давления X_c , Y_c :

$$X_c = F_1 \cos 45^\circ + R_A \sin 45^\circ - F_2 = 24 - 18,8 \cdot 0,707 - 12 = 0,707 = 2,22 \text{ кН},$$

$$Y_c = Q_1 - F_1 \sin 45^\circ - R_A \cos 45^\circ = 13 - 12 \cdot 0,707 + 18,8 \cdot 0,707 = 17,8 \text{ кН}.$$

Составляем уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к правой части (рис. 3.4):

$$\sum F_{кx} = 0 ; -X_c - F_7 \sin 60^\circ + X_D = 0 ; \quad (3.4)$$

$$\sum F_{кy} = 0 ; Y_D - Y_c - Q_2 - F_7 \cos 60^\circ = 0 ; \quad (3.5)$$

$$\sum M_{кс} = 0 ; 5,3 X_c + 2,5 Y_c + 1,25 Q_2 + M_3 + 7 F_7 \sin 60^\circ - M_D = 0. \quad (3.6)$$

из которых найдем

$$X_D = X_c + F_7 \sin 60^\circ = 2,22 + 38 \cdot 0,866 = 35,1 \text{ кН} ;$$

$$Y_D = Y_c + Q_2 + F_7 \cos 60^\circ = 17,8 + 12,5 + 38 \cdot 0,5 = 40,3 \text{ кН} ;$$

$$M_D = -5,3 X_c - 2,5 Y_c - 1,25 Q_2 - M_3 - 7 F_7 \sin 60^\circ = -5,3 \cdot 2,22 - 2,5 \cdot 17,8 -$$

$$-1,25 \cdot 12,5 - 27 - 7 \cdot 38 \cdot 0,866 = -329 \text{ кНм}.$$

Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия сил, приложенных ко всей раме (рис.3.2):

$$\begin{aligned}\sum M_{кв} &= M_D + M_3 + 2,5 Y_D + 5,3 X_D + 1,7 F_7 \sin 60^\circ - 2,5 F_7 \cos 60^\circ + \\ &+ 0,05 Q - 5,1 F_4 \sin 45^\circ - 2,5 F_1 - 2,6 R_A \cos 45^\circ - 3,9 R_A \sin 45^\circ = \\ &= -329 + 27 + 2,5 \cdot 19,3 + 5,3 \cdot 35,1 + 1,7 \cdot 38 \cdot 0,866 - 2,5 \cdot 38 \cdot \\ &\cdot 0,5 + 0,05 \cdot 25,5 - 5,1 \cdot 12 \cdot 0,707 - 2,5 \cdot 24 + 2,6 \cdot 18,8 \cdot 0,707 + \\ &+ 3,9 \cdot 18,8 \cdot 0,707 = -479,8 + 479,9 = 0,1 \neq 0.\end{aligned}$$

Оцениваем погрешность расчета:

$$\epsilon = \frac{0,1 \cdot 100\%}{479,9} = 0,02\% < 3\%$$

(допустимо)

$$\begin{aligned}\text{Ответ: } R_A &= -18,8 \text{ кН} & X_D &= 35,1 \text{ кН} & Y_D &= 49,3 \text{ кН} \\ M_D &= -329 \text{ кНм} & X_C &= 2,22 \text{ кН} & Y_C &= 17,8 \text{ кН}\end{aligned}$$

Знаки указывают, что R_A и M_D направлены противоположно показанным на рис.3.2.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Задача С-3

Приступая к решению задачи, необходимо изучить следующие темы лекционного курса: связи и их реакции; система сходящихся сил; плоская произвольная система сил; определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и методом сечений (Риттера).

4.1. Формулировка задачи

Схема фермы, величины и направления приложенных внешних нагрузок и дополнительные требования указываются преподавателем при выдаче индивидуального задания (см. приложение Ш).

4.2. Требования и способы решения

По заданной схеме фермы и приложенным нагрузкам требуется

определить усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов аналитическим и графическим способом, а также усилия в нескольких заданных стержнях методом сечений.

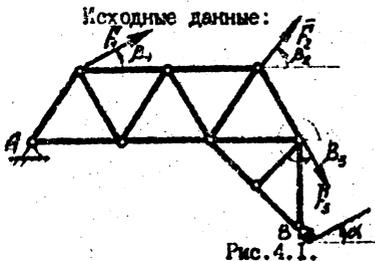
Задача может быть решена вручную или же на ЭВМ.

При решении задачи вручную вначале определяются реакции опор с помощью уравнений равновесия произвольной плоской системы сил, затем методом вырезания узлов для каждого из них производится аналитическое и графическое решение и делается проверка решения. Дополнительно для указанных преподавателем стержней производится решение методом Риттера.

Все "ручное" решение можно облегчить и заметно ускорить во времени, если воспользоваться математическим пакетом "EUREKA", установленным на ЭВМ.

При решении на ЭВМ с помощью специальной программы *FERMA*, кроме полученного аналитического решения, делается проверочное графическое решение (с помощью силовых многоугольников) и решение методом Риттера. По указанию преподавателя дополнительно производится анализ результатов решения (например, подобрать угол установки подвижной опоры, при котором усилия в заданном стержне достигают минимума и т.п.).

4.3. Пример решения задачи С-3



$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 30^\circ \\ \beta_1 &= 30^\circ & F_1 &= 10 \text{ кН} \\ \beta_2 &= 45^\circ & F_2 &= 20 \text{ кН} \\ \beta_3 &= 300^\circ & F_3 &= 30 \text{ кН} \end{aligned}$$

Решение:

4.3.1. Определение опорных реакций

Изобразим расчетную схему фермы в соответствии с исходными данными, приняв длину горизонтального стержня за единицу и заменив действие опорных устройств их реакциями $\bar{R}_A (X_A, Y_A)$ и \bar{R}_B . Начало координат поместим на неподвижной опоре А.

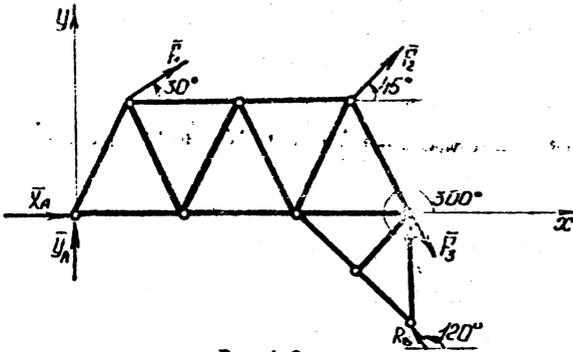


Рис. 4.2.

Составим уравнения равновесия фермы, используя основную систему уравнений равновесия плоской системы сил.

$$\sum F_{Kx} = 0; \quad X_A + F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 45^\circ + F_3 \cos 300^\circ + R_B \cos 120^\circ = 0; \quad (4.1)$$

$$\sum F_{Ky} = 0; \quad Y_A + F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 45^\circ + F_3 \sin 300^\circ + R_B \sin 120^\circ = 0$$

или

$$Y_A + F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 30^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_{KA} = 0; \quad F_1(-\cos 30^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 30^\circ \frac{1}{2}) + F_2(-\cos 45^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 45^\circ \frac{3}{2}) + F_3(-\cos 60^\circ \cdot 0 + \sin 300^\circ \cdot 3) + R_B(\cos 120^\circ \cdot 1 + \sin 120^\circ \cdot 3) = 0 \quad (4.3)$$

Подставив числовые данные, из (3) находим $R_B = 28,51$, затем из (4.1) и (4.2) определяем $X_A = -23,56$, $Y_A = -17,85$.

4.3.2. Определение усилий в стержнях методом вырезания узлов

Пометим узлы фермы буквами, а стержни - цифрами, причем нумерацию стержней удобнее всего выполнить в порядке, соответствующем их рассмотрению в методе вырезания узлов - в каждом последовательно рассматриваемом узле должно подлежать определению не более 2-х неизвестных усилий.

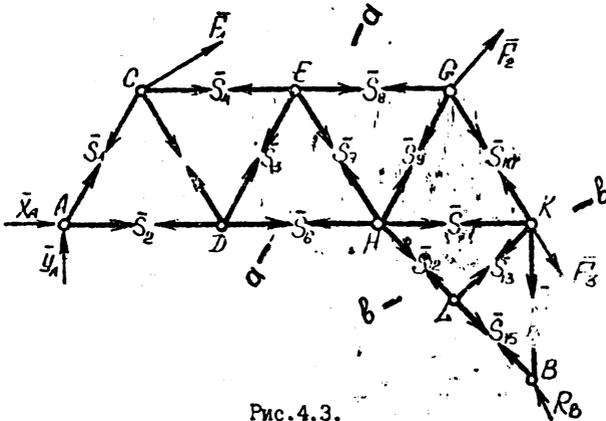
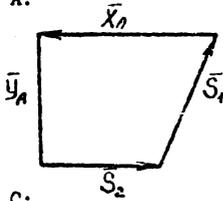


Рис. 4.3.

Нумерация стержней на рис.4.3. соответствует последовательности узлов А, С, Д, Е, G, H, К, В.

Ниже для каждого узла приведено графическое решение (оно выполняется в первую очередь), а также уравнения и их решения.

Узел А:

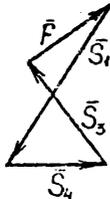


$$X_1 + S_1 \cos 60^\circ + S_2 = 0 \quad ; \quad (4.4)$$

$$Y_1 + S_1 \sin 60^\circ = 0$$

$$S_1 = 20,63 \text{ кН} \quad S_2 = 13,23 \text{ кН}$$

Узел С:

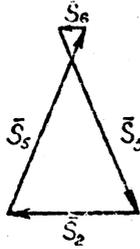


$$-S_1 \cos 60^\circ + S_3 \cos 60^\circ + S_4 + F_1 \cos 30^\circ = 0 \quad (4.5)$$

$$-S_1 \sin 60^\circ - S_3 \sin 60^\circ + F_1 \cos 60^\circ = 0$$

$$S_3 = -14,85 \text{ кН} \quad S_4 = 9,08 \text{ кН}$$

Узел Д:

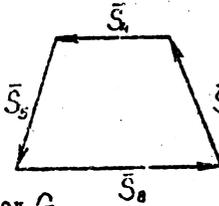


$$-S_2 - S_3 \cos 60^\circ + S_5 \cos 60^\circ + S_6 = 0 \quad (4.6)$$

$$S_3 \sin 60^\circ + S_5 \sin 60^\circ = 0$$

$$S_3 = 14,85 \text{ кН} \quad S_6 = -1,62 \text{ кН}$$

Узел Е:

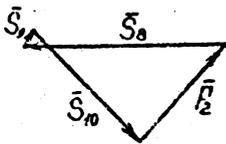


$$-S_4 - S_5 \cos 60^\circ + S_7 \cos 60^\circ + S_8 = 0 \quad (4.7)$$

$$-S_5 \sin 60^\circ - S_7 \sin 60^\circ = 0$$

$$S_7 = -14,85 \text{ кН} \quad S_8 = 23,94 \text{ кН}$$

Узел Г:

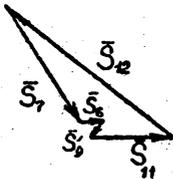


$$-S_9 - S_{10} \cos 60^\circ + S_{11} \cos 60^\circ + F_2 \cos 45^\circ = 0 \quad (4.8)$$

$$-S_{10} \sin 60^\circ - S_{11} \sin 60^\circ - F_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_{10} = -1,62 \text{ кН} \quad S_{11} = 17,97 \text{ кН}$$

Узел Н:

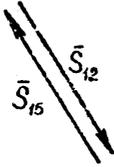


$$-S_7 - S_{12} \cos 60^\circ + S_9 \cos 60^\circ + S_{11} \cos 45^\circ = 0 \quad (4.9)$$

$$S_{12} \sin 60^\circ + S_9 \sin 60^\circ - S_{11} \sin 45^\circ = 0$$

$$S_{12} = 6,01 \text{ кН} \quad S_{13} = -20,16 \text{ кН}$$

Узел Δ



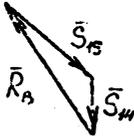
$$-S_{12} + S_{15} = 0 \quad (4.10)$$

$$S_{13} = 0$$

$$S_{13} = 0$$

$$S_{15} = -20,16 \text{ кН}$$

Узел В:



$$S_{14} + S_{15} \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0 \quad (4.11)$$

$$S_{14} = -10,43 \text{ кН}$$

Для узла Δ проектирование проведено на направления Δ -В и Δ -К.

Узел К остался не рассмотренным. Уравнения равновесия для этого узла используются для проверки решения:

$$-S_{10} \cos 60^\circ - S_{11} - S_{13} \cos 45^\circ + F_3 \cos 60^\circ = \quad (4.12)$$

$$= -17,97 \cdot 0,5 - 6,01 - 0 \cdot 0,707 + 30 \cdot 0,5 =$$

$$= 0,005$$

$$S_{10} \cos 30^\circ - S_{13} \cos 45^\circ - S_{14} - F_3 \cos 30^\circ = \quad (4.13)$$

$$= +17,97 \cdot 0,866 - 0 \cdot 0,707 + 10,43 - 30 \cdot 0,65 =$$

$$= 0,024$$

Относительная погрешность решения определяется как максимальная абсолютная величина отношения невязки каждого из уравнений (4.12-4.13) к своим слагаемым, входящим в уравнение:

$$\Delta = \max \left| \frac{\delta_i}{z_i} \right| = \left| \frac{0,024}{10,43} \right| = 0,0023 < 0,05$$

Погрешность решения допустима.

Анализируя знаки усилий, заключаем, что стержни 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11 растянуты, стержни 3, 6, 7, 9, 12, 14, 15 сжаты, стержень 13 - ненагружен.

4.3.3. Определение усилий в стержнях методом сечений

Метод Риттера заключается в составлении уравнений равновесия для части фермы, полученной при проведении соответствующего сечения. Сечение проводится таким образом, чтобы в него вошло не более трех стержней, усилия в которых еще не определены (в том числе интересующее нас усилие).

Пусть определению подлежат усилия в стержнях 7, 8, 13.

Для определения усилий в стержнях 7, 8 проводим сечение а-а (см. рис. 4.3) и рассмотрим равновесие левой части конструкции.

Для определения усилия в стержне 7 составляем уравнение равновесия в виде проекции действующих на эту часть сил на ось Y (чтобы в него не вошли неизвестные нам силы \bar{S}_8 и \bar{S}_6):

$$-S_7 \sin 60^\circ + F_1 \sin 30^\circ + Y_A = 0$$

$$S_7 = -14,85 \text{ кН}$$

Для определения усилия в стержне S_8 составим уравнение моментов относительно точки Н (точка Риттера для стержней 6 и 7):

$$-Y_A 2 + F_1 (-\cos 30^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 30^\circ \frac{3}{2}) - S_8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$S_8 = 23,94 \text{ кН}$$

Для определения усилия S_{13} проводим сечение в-в (рис. 4.3) и составим уравнение моментов для нижней части конструкции относительно точки В:

$$\begin{aligned} -S_{13} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 ; \\ S_{13} &= 0 . \end{aligned}$$

4.4. Расчет фермы с помощью программы

FERMA.

В программе предусмотрена возможность проведения расчетов фермы в трех вариантах задания:

- 1) - основной вариант - расчет усилий в стержнях заданной фермы, используя предварительно найденные реакции опор;
- 2, 3) - расчет усилий в стержнях фермы при изменении угла установки подвижной опоры или угла наклона одной из приложенных активных сил.

Для облегчения записи уравнений в программе используется диалоговая форма ввода информации – программа задает вопросы и подсказывает форму ответа на них. Одновременно правильность некоторых действий пользователя контролируется программой.

Результаты решения задачи помещаются в файл *FERMA.REZ*, который может быть затем распечатан, например, с помощью команды *COPY FERMA.REZ PRN*.

К программе *FERMA* имеется приложение в виде текстового файла *FERMA.TXT* с подробным описанием и пояснениями методики решения задачи и рекомендациями для пользователя.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Задача С-4

Приступая к решению задачи, необходимо изучить раздел "Произвольная пространственная система сил" лекционного курса.

5.1. Условие задачи С-4

Однородная прямоугольная плита весом \bar{G} удерживается в равновесии при помощи шести стержней, прикрепленных к неподвижному основанию. Плита загружена сосредоточенными силами \bar{P} и \bar{Q} и парами сил с моментами M_1, M_2, M_3 , плоскости действия которых соответственно параллельны плоскостям yOz, xOz, xOy . Схема плиты приведена на рис.5.1. Положение опорных стержней; размеры плиты и её вес; значение сил \bar{P}, \bar{Q} , точки их приложения и углы α, β, γ , образованные этими силами с осями Ox, Oy, Oz , соответственно; значения моментов пар M_1, M_2, M_3 , приведены в бланке индивидуального задания, синтезированного на ЭВМ.

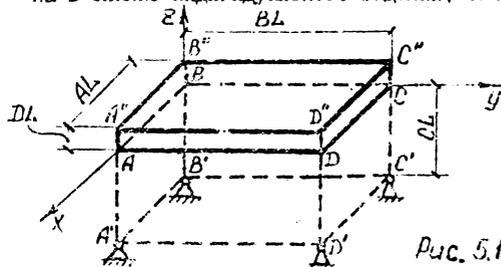


Рис. 5.1

Требуется определить усилия в стержнях, поддерживающих плиту.

5.2. Пример решения задачи С-4

Исходные данные

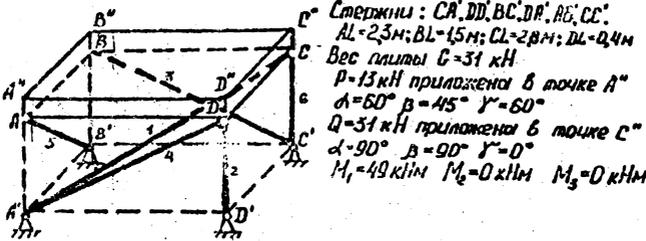


Рис. 5.2.

РЕШЕНИЕ

I. По исходным данным и рис.5.1. вычерчиваем схему конструкции с нагрузкой (рис.5.3.). Определяем синусы и косинусы углов, отмеченных на схеме.

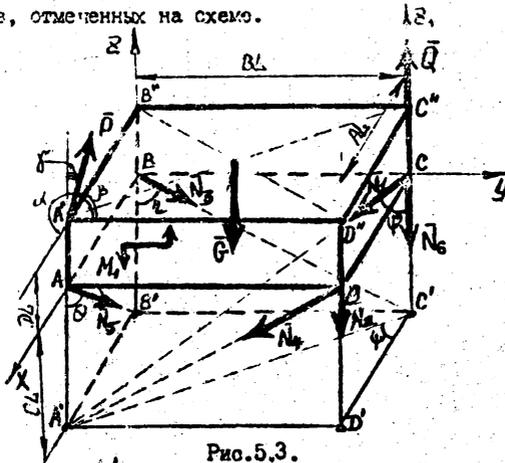


Рис.5.3.

$$\theta = \arctg \frac{DL}{CL} = \arctg \frac{2,3}{2,8} = 39,4^\circ; \quad \sin \theta = 0,635; \quad \cos \theta = 0,773;$$

$$\eta = \arctg \frac{BL}{CL} = \arctg \frac{1,5}{2,8} = 28,2^\circ; \quad \sin \eta = 0,472; \quad \cos \eta = 0,881;$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{BL}{AL} = \operatorname{arctg} \frac{1,5}{2,3} = 33,1^\circ; \quad \sin \psi = 0,546; \quad \cos \psi = 0,838;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{|AC'|}{CL} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{AL^2 + BL^2}}{CL} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2,3^2 + 1,5^2}}{2,8} = 44,4^\circ;$$

$$\sin \varphi = 0,700; \quad \cos \varphi = 0,714.$$

Мысленно сбросив опорные стержни, заменим их действие реакциями $N_1 \div N_6$. Предполагаем, что стержни растянуты, направлением реакции углов $A \div D$ от концов стержней.

2. Рассмотрим равновесие плиты под действием задаваемых сил и реакций связей. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad P \cos \alpha + N_1 \sin \varphi \cos \psi - N_5 \sin \theta = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad P \cos \beta - N_1 \sin \varphi \sin \psi + N_3 \sin \eta - N_4 \sin \eta = 0; \\ \Sigma Z = 0; & \quad -G + P \cos \gamma + Q - N_1 \cos \varphi - N_2 - N_5 \cos \eta - N_4 \cos \eta - \\ & \quad - N_5 \cos \theta - N_6 = 0; \\ \Sigma M_x = 0; & \quad -0,5BL \cdot G - DL \cdot P \cos \beta + BL \cdot Q - BL \cdot N_1 \cos \varphi - BL \cdot N_2 - \\ & \quad - BL \cdot N_4 \cos \eta - BL \cdot N_6 + M_1 = 0; \\ \Sigma M_y = 0; & \quad 0,5AL \cdot G + DL \cdot P \cos \alpha - AL \cdot P \cos \gamma + AL \cdot N_2 + AL \cdot N_4 \cos \eta + \\ & \quad + AL \cdot N_5 \cos \theta = 0; \\ \Sigma M_z = 0; & \quad AL \cdot P \cos \beta - BL \cdot N_1 \sin \varphi \cos \psi - AL \cdot N_4 \sin \eta = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Подставляем в уравнения равновесия известные величины и после вычислений получаем:

$$\begin{aligned} 0,587N_1 - 0,635N_5 &= -0,5; \\ 0,382N_1 + 0,472N_3 - 0,472N_4 &= -0,19; \\ 0,744N_1 + N_2 + 0,881N_3 + 0,881N_4 + 0,773N_5 + N_6 &= 65; \\ 1,07N_1 + 1,5N_2 + 1,32N_4 + 1,5N_6 &= 68,6; \\ 2,3N_2 + 2,03N_4 + 1,78N_5 &= -23,3; \\ 0,872N_1 + 1,09N_4 &= 24,1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

3. Полученную систему линейных алгебраических уравнений (5.2) решаем на ПЭВМ, используя математический пакет "Eureka". Запись системы уравнений (5.2) производится в окне редактирования построчно, так что каждая строка соответствует одному уравнению равновесия (5.2). При вводе уравнений необходимо помнить, что каждая неизвестная величина должна быть обозначена либо строчной, либо прописной буквой с соответствующим индексом.

Перед записью уравнений следует задать строку, начинающуюся с символа "точка с запятой", в которой указать свою группу, фамилию и номер варианта задачи.

Для решения уравнений переходим в окно *Solve*. Для вывода на печать уравнений и полученных результатов следует перейти в окно *Report* и при помощи команды *Output* задать режим *Printer*. Печать осуществляется по команде *GO* (при подключенном принтере).

Для рассматриваемого примера на ПЭВМ получены следующие значения усилий в стержнях.

$$N_1 = -65,4 \text{ кН}; \quad N_2 = -34,8 \text{ кН}; \quad N_3 = -0,3,2 \text{ кН};$$

$$N_4 = 72,1 \text{ кН}; \quad N_5 = -50,2 \text{ кН}; \quad N_6 = 63,8 \text{ кН}.$$

Знаки усилий указывают, что стержни 1, 2, 3, 5 - сжаты, стержни 4, 6 - растянуты.

4. Для проверки решения составим дополнительные три уравнения моментов относительно вспомогательных осей X_1, Y_1, Z_1 .

Например

$$\begin{aligned} \sum M_{Z_1} &= BL \cdot P \cos \alpha + AL \cdot P \cos \beta - AL \cdot N_4 \sin \eta - BL \cdot N_5 \sin \theta = \\ &= 15 \cdot 13 \cdot \cos 60^\circ + 2,3 \cdot 13 \cos 45^\circ - 2,3 \cdot 72,1 - 0,4172 - 15 \cdot \\ &\quad (-50,2) \cdot 0,635 = 78,7 - 78,3 = 0,4 \neq 0. \end{aligned}$$

Погрешность

$$\epsilon = \frac{0,4 \cdot 100}{78,7} = 0,51\% < 3\%$$

3% (допустимо).

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЕЛА
Задача С-5

Для заданной плоской фигуры, составленной из нескольких элементов, определить положение центра тяжести.

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются по формулам:

$$\begin{cases} x_c = \frac{S_y}{F} \\ y_c = \frac{S_x}{F} \end{cases}$$

Здесь $\begin{cases} S_y = \sum F_k x_k \\ S_x = \sum F_k y_k \end{cases}$ — статические моменты фигуры относительно осей x, y ;

F_k — площади составных частей фигуры;
 x_k, y_k — координаты центров тяжести этих частей;
 F — площадь всей фигуры.

Если плоская фигура имеет вырез, то площадь этого выреза берется с отрицательным знаком.

При решении задачи все данные заносятся в таблицу:

Номер элемента	F_k	x_k	y_k	$S_{ky} = F_k x_k$	$S_{kx} = F_k y_k$
Σ					

Схемы сечений приведены в приложении I. При выполнении задания сечение должно быть вычерчено в масштабе.

Пример выполнения задания

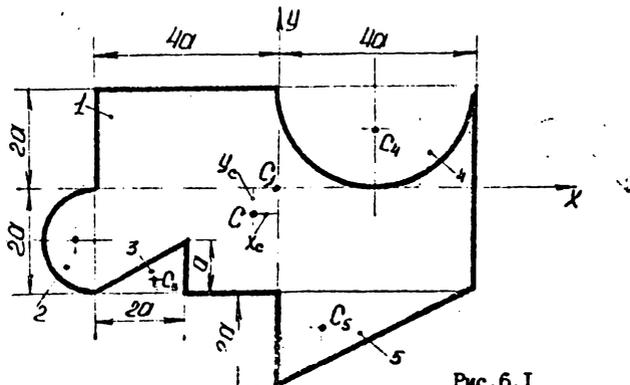


Рис. 6. I

РЕШЕНИЕ

Разбиваем фигуру на пять простых составных элементов (см. рис. 6.1)
 прямоугольник 1 размерами $8a \times 4a$;
 полукруг 2 радиуса $R_2 = 4a$;
 треугольник 3 (вырез);
 полукруг 4 радиуса $R_4 = 2a$ (вырез);
 треугольник 5.

Введем систему координат x, y с началом в центре тяжести C_1 прямоугольника 1.

Определяем площади F_k и координаты x_k, y_k центров тяжести C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 составных элементов.

Прямоугольник 1

Полукруг 2

$$F_1 = 8a \cdot 4a = 32a^2;$$

$$F_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2} = 1,57a^2;$$

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = -(4a + \frac{4a}{3\pi}) = -11,12a;$$

$$y_1 = 0.$$

$$y_2 = -a.$$

Треугольник 3

Полукруг 4

$$F_3 = -\frac{1}{2} 2a \cdot a = -a^2;$$

$$F_4 = -\frac{\pi R_4^2}{2} = \frac{\pi (2a)^2}{2} = -2\pi a^2 = -6,28a^2$$

$$x_3 = -(2a + \frac{2a}{3}) = -\frac{8}{3}a = -2,67a;$$

$$x_4 = 2a;$$

$$y_3 = -(2a - \frac{a}{3}) = -\frac{5}{3}a = -1,67a.$$

$$y_4 = (2a - \frac{4R_4}{3\pi}) = 2a - \frac{8a}{3\pi} = 1,15a.$$

Треугольник 5

$$F_5 = \frac{1}{2} 4a \cdot 2a = 4a^2;$$

$$x_5 = \frac{4a}{3} = 1,33a;$$

$$y_5 = -(2a + \frac{2a}{3}) = -\frac{8}{3}a = -2,67a.$$

Составляем таблицу:

Номер элемента.	F_k	x_k	y_k	$S_{kx} = F_k x_k$	$S_{ky} = F_k y_k$
1	$32a^2$	0	0	0	0
2	$1,57a^2$	$-4,42a$	$-a$	$-6,94a^3$	$-1,57a^3$
3	$-a^2$	$-2,67a$	$-1,67a$	$2,67a^3$	$1,67a^3$
4	$-6,28a^2$	$2a$	$1,15a$	$-12,56a^3$	$-7,22a^3$
5	$4a^2$	$1,33a$	$-2,67a$	$5,32a^3$	$-10,68a^3$

Продолжение таблиц

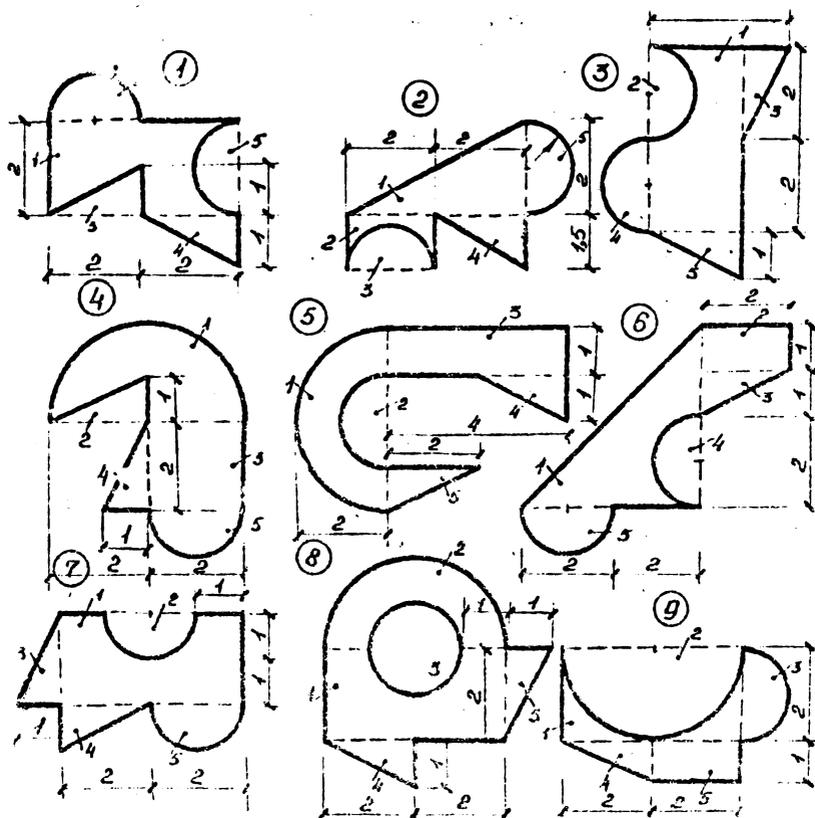
$30,29a^2$	-	-	$-11,61a^3$	$-17,8a^3$
------------	---	---	-------------	------------

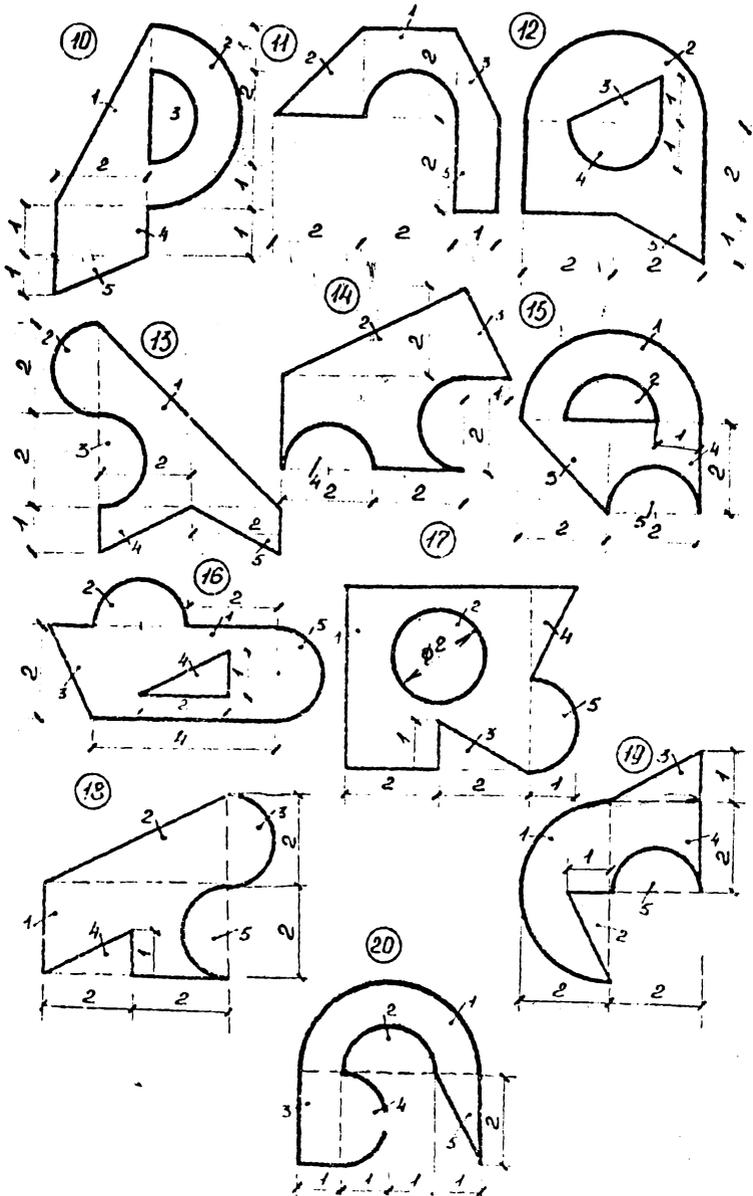
Вычисляем координаты центра тяжести фигур

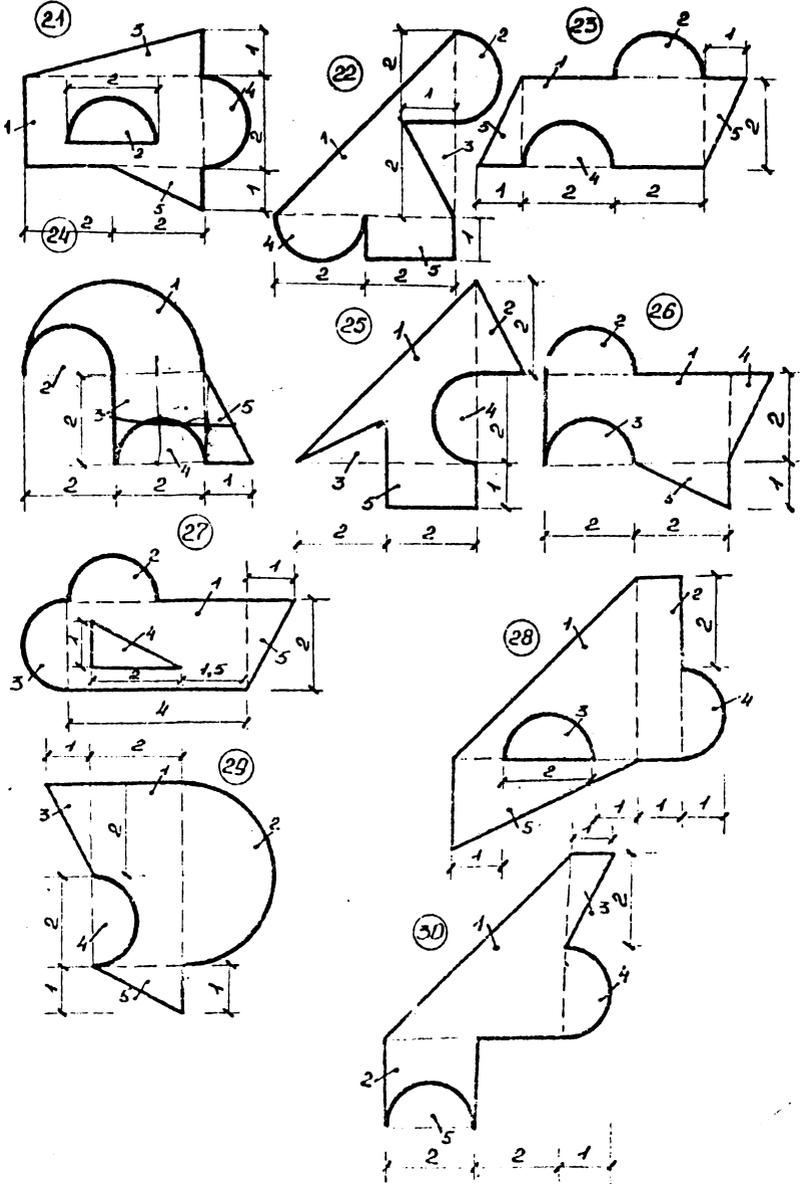
$$x_c = \frac{S_y}{F} = -\frac{11,61a^3}{30,29a^2} = -0,38a; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = -\frac{17,8a^3}{30,29a^2} = -0,59a.$$

Наносим центр тяжести на чертеж (см. рис. 6.1).

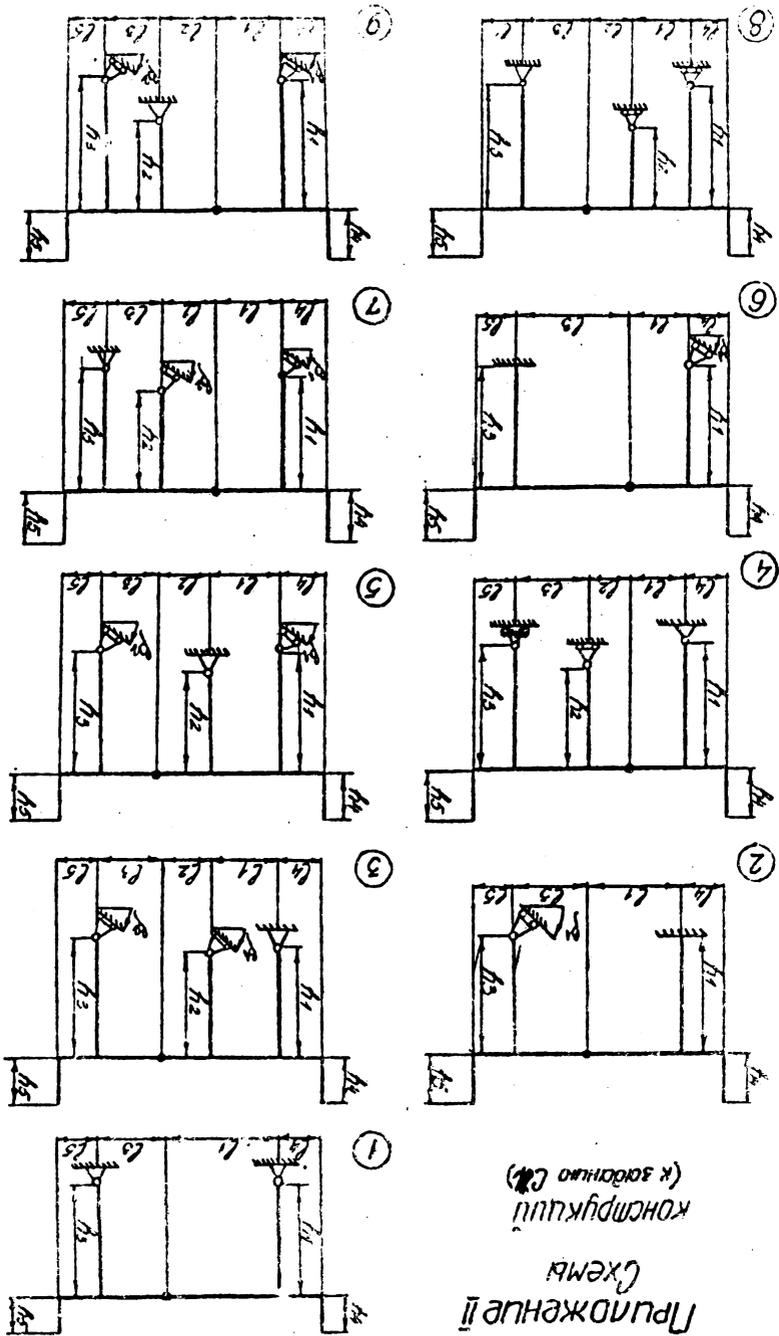
ПРИЛОЖЕНИЕ I



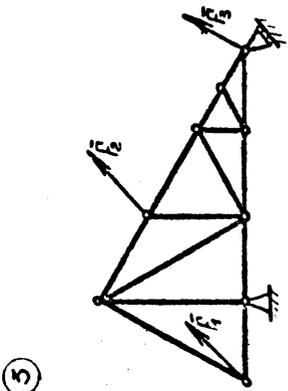




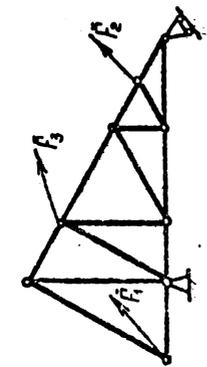
Продольные
схемы
конструкций
(к варианту СР)



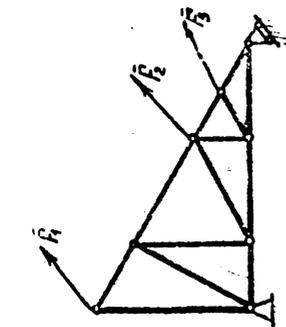
Приложение III
(к заданию С-3)



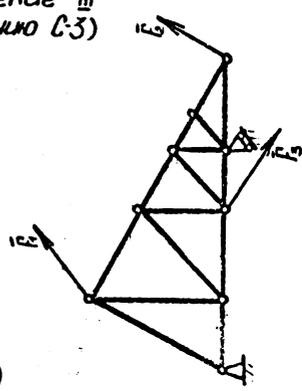
3



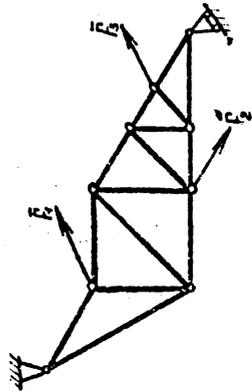
2



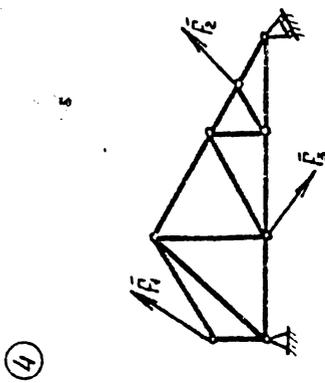
1



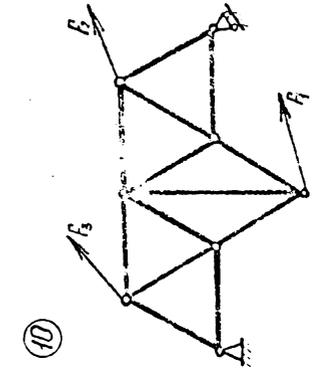
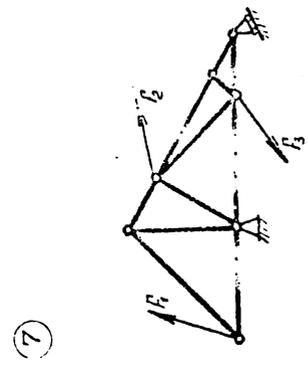
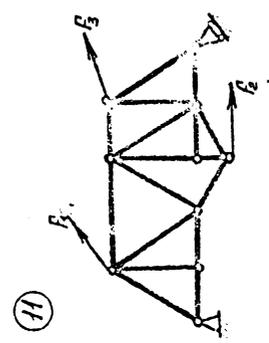
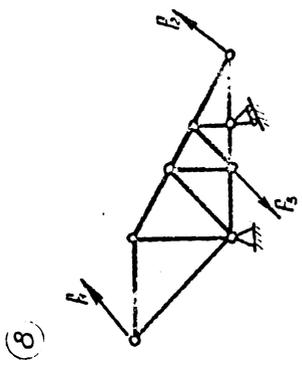
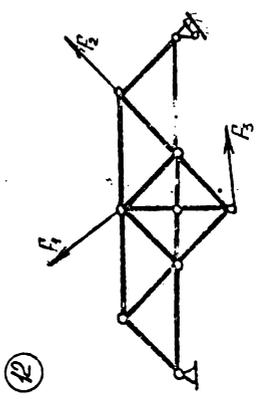
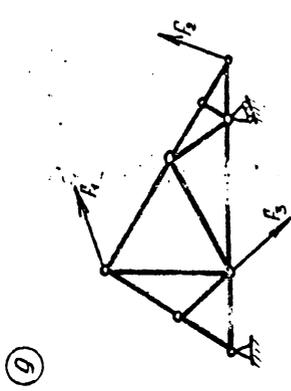
6

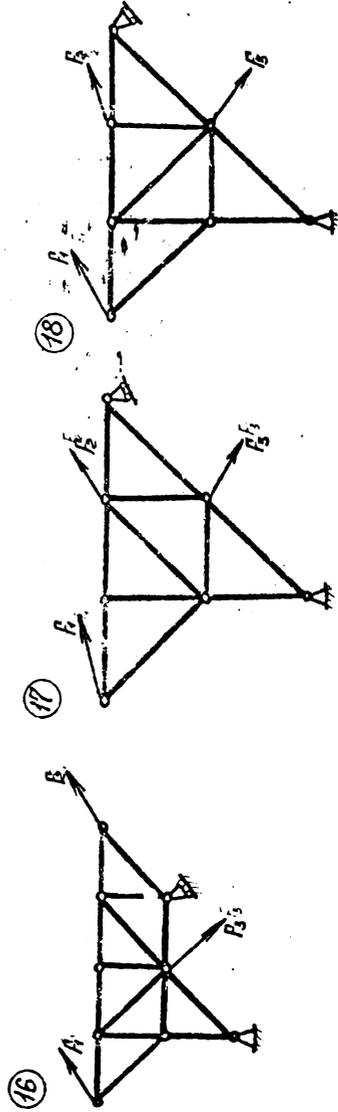
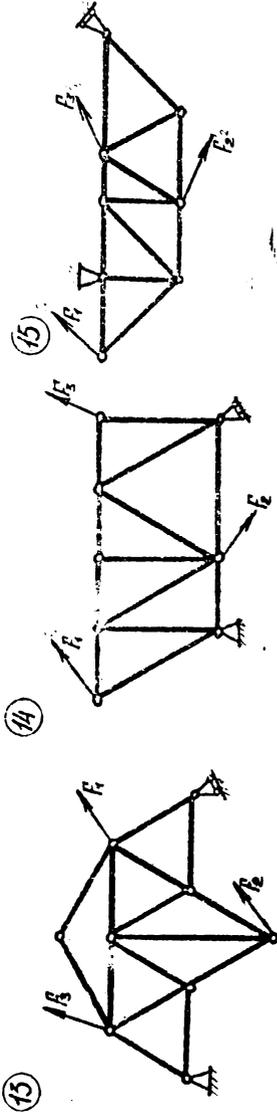


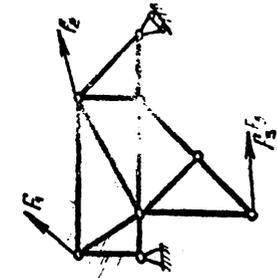
5



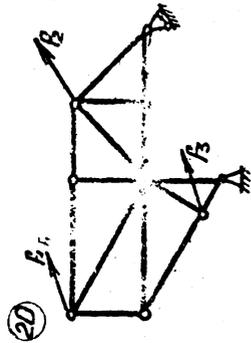
4



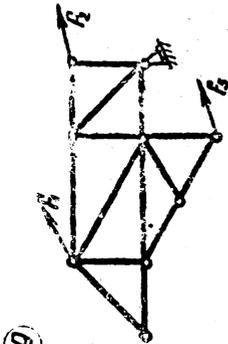




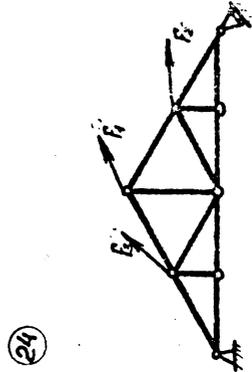
19



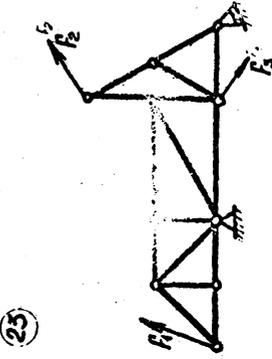
20



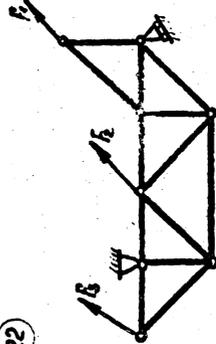
21



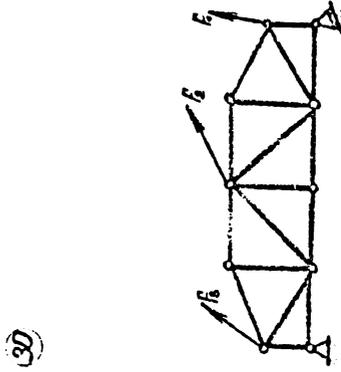
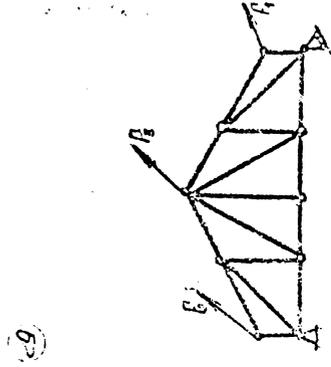
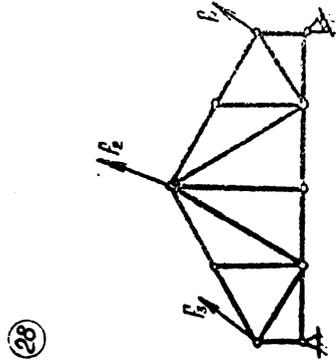
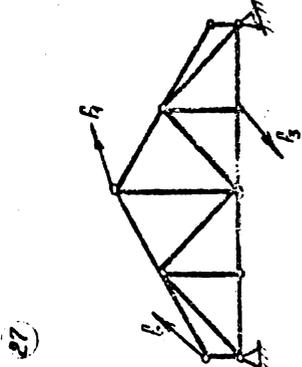
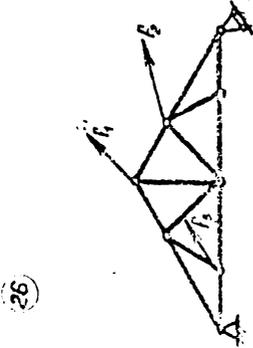
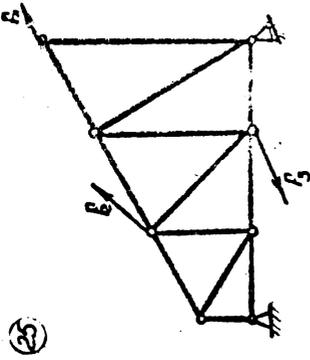
22



23



24



УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Боробьев Виктор Петрович
Сазонов Михаил Иванович
Хвисевич Еиталий Михайлович
Холодарь Борис Григорьевич
Черненко Нина Васильевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к расчетно-графическим работам
по теоретической механике.

СТАТИКА

(для студентов специальностей 29.05, 29.06,
29.03, 29.08, 31.10)

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.
Редактор Стрелок Т.С.

Подписано к печати 2.10.82 г. . Формат 60x84/16.

Усл. п.л. 1,86. Уч. изд.л. 2,0. Тираж 500 экз. Заказ № 64.

Бесплатно. Отпечатано на ротапринтере Брестского политехнического
института. 224017, Брест, ул. Московская, 267.