

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
“Брестский государственный технический университет”
Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

В.М. Хвисевич

СТАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсу “Теоретическая механика”
для студентов технических специальностей

Брест 2006

УДК 531.8
ББК 531.2
Х 30

Рецензент: кафедра теоретической механики Белорусского национального технического университета.

Хвисевич В.М.
Х 30 Статистика. Курс лекций. – Брест. Издательству БрГТУ. – с. 48.

Теоретическая механика является одной из основных фундаментальных общепрофессиональных дисциплин при подготовке инженеров технических специальностей. Традиционно эта дисциплина делится на три раздела: «Статика», «Кинематика», «Динамика» и ее объем определяется учебными планами в зависимости от специальности.

В настоящем конспекте лекций обобщен опыт преподавания теоретической механики для специальностей, где курс читался в небольшом объеме.

Первый раздел курса «Статика» изложен с учетом практического применения теорий различных систем сил при рассмотрении равновесия абсолютно твердых тел (конструктивные элементы зданий, сооружений, механизмов и машин). При этом основной акцент сделан на методику определения реактивных усилий (реакций) при различных закреплениях (связях) рассматриваемых тел.

УДК 531.8
ББК 531.2

ISBN 985-493-052-1

© В.М. Хвисевич, 2006
© Издательство БрГТУ, 2006

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время перед современным инженером выдвигаются различные задачи, предполагающие расчет сооружений различного назначения, в том числе и коммуникационных систем, механизмов, машин и т.д. Проблемы, возникающие при этом, имеют общую научную базу. Эта общность объясняется тем, что в задачах такого рода большую часть занимают вопросы, связанные с изучением движения или равновесия материальных тел (конструктивных элементов).

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел, а также о возникающих при этом взаимодействиях между телами, называется *теоретической (общей) механикой*. Она является одной из основ всех технических дисциплин и базовой дисциплиной для инженеров технических специальностей.

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных сил.

Теоретическая механика является естественной наукой. В ее основе лежат законы, почерпнутые из многовековой практической деятельности человека.

Большой вклад в развитие теоретической механики внесли Г.Галилей, И.Ньютон, Л.Эйлер, Ж.Лагранж, Н.Б.Жуковский и др. ученые.

В зависимости от возникающих задач теоретическая механика делится на 3 раздела: «Статика», «Кинематика», «Динамика».

ГЛАВА I. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

1.1. Основные понятия

Статика — раздел теоретической механики, где изучается равновесие материальных тел, находящихся под воздействием сил.

Под равновесием будем понимать состояние покоя данного тела по отношению к другим телам. Равновесие материальных тел будем определять по отношению к Земле (абсолютное равновесие тел).

При изучении равновесия деформациями тел пренебрегают и тела считают как недеформированные, абсолютно твердые.

Абсолютно твердым телом будем называть тело, расстояние между любыми 2-мя точками которого не изменяется (тело сохраняет свою форму).

Состояние рассматриваемого тела зависит от характера его механического взаимодействия с другими телами.

Количественной мерой механического взаимодействия тел является *сила* (результат взаимодействия тел, при котором они изменяют свое положение).

Сила-векторная величина. Ее действие на тело определяется: 1) модулем силы; 2) направлением силы; 3) точкой приложения силы. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Примем обозначения: \vec{F} – сила; A – ее точка приложения; CD – линия действия силы (рис. 1.1); длина вектора $\vec{F}(AB)$ – модуль силы.

Единицей измерения силы является ньютон.

Совокупность сил, действующих на абсолютно твердое тело, будем называть системой сил.

Чтобы тело под действием некоторой системы сил находилось в равновесии, необходимо чтобы эти силы удовлетворяли определенным *условиям равновесия*. При этом важным фактором является упрощение заданной системы сил, замена ее более простой эквивалентной системой.

Поэтому в статике твердого тела рассматривают две

проблемы:

а) сложение сил и приведение систем сил к простейшему виду; б) определение условий равновесия действующих на твердое тело систем сил.

Введем необходимые в дальнейшем определения:

— тело, не скрепленное с другими телами, которому можно сообщить любое перемещение, называется *свободным*;

— система сил называется *эквивалентной* данной, если замена ею исходной системы сил не приводит к изменению положения твердого тела;

— система сил называется *уравновешенной* (эквивалентной нулю) если твердое тело под действием этой системы находится в покое;

— сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*.

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел, называются *внешними*. Если сила приложена к телу в одной точке, то ее называют *сосредоточенной*. Силы, действующие на все точки тела или его части (по линии, площади, поверхности) называют *распределенными*.

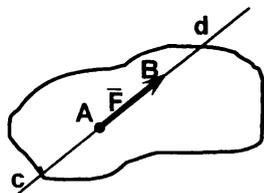


Рис 1.1

1.2. Аксиомы статики

Аксиомы статики (их пять) являются результатом обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и принимаются без доказательства.

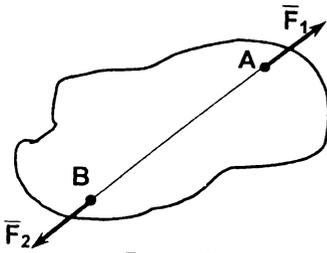


Рис 1.2

1. Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил (рис. 1.2) тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в разные стороны (уравновешенная система сил).

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (F_1 = F_2)$$

2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней добавить или отнять уравновешенную систему сил.

Следствия. Всякую силу, приложенную в какой-либо точке твердого тела, можно переносить вдоль линии ее действия в любую другую точку, при этом действие силы на твердое тело не изменится.

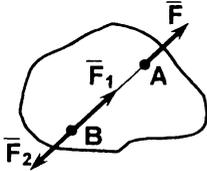


Рис 1.3

Пусть на тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A. Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим в ней две уравновешенные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , то есть $\vec{F}_1 = \vec{F}$; $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ (рис. 1.3). По аксиоме 2 действие сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не изменит состояния тела. Но, по аксиоме 1, силы \vec{F}_2 и \vec{F} также образуют уравновешенную систему, которую можно отбросить. В результате на твердое тело будет действовать сила \vec{F}_1 , но уже приложенная в точке B, то есть сила — скользящий вектор.

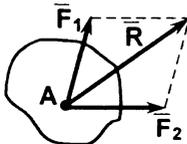


Рис 1.4

3. Аксиома параллелограмма сил. Равнодействующая \vec{R} двух сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенных в одной точке и направленных под углом друг к другу, изображается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.4).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

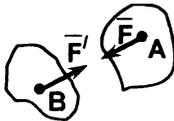


Рис 1.5

4. Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис 1.5). То есть если тело 1 действует на тело 2 с силой \vec{F} , то тело 2 действует на тело 1 с силой \vec{F}' и тогда $\vec{F} = -\vec{F}'$.

Это соотношение выражает закон о равенстве действия и противодействия, который является основным законом механики. Согласно ему, действие тел друг на друга не бывают односторонними.

5. **Принцип отвердения.** Если нетвердое (изменяемое) тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится и в том случае, если тело считать твердым.

Принцип находит широкое применение в инженерных расчетах. Например, для рассмотрения равновесия гибкой нити, ее можно считать абсолютно твердым телом и применять методы статики, однако при этом дополнительным условием является тот факт, что силы должны быть растягивающими.

1.3. Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей

Как известно, в механике различают *свободные* и *несвободные* абсолютно-твердые тела.

При решении практических задач приходится иметь дело с несвободными телами, то есть такими телами, для которых наложены ограничения на те или иные их перемещения (в механике различают два вида перемещений – линейные и угловые).

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются *связями* (для груза, лежащего на столе, связью является плоскость стола и т.д.).

Рассматриваемое тело под действием силы будет стремиться осуществить перемещение. Этому перемещению препятствует связь. По аксиоме 4, связь будет действовать на тело с такой же силой, с какой тело будет действовать на связь.

Сила, с которой действует связь на тело, препятствуя тем или иным перемещениям тела, называется *реакцией связи* (реактивная сила).

Силы, не являющиеся реакциями, будем в дальнейшем называть *активными*.

1.3.1. Принцип освобождаемости от связей

При решении задач статики применяется аксиома связей (принцип освобождаемости): *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей и заменить их действующими на тело реакциями этих связей.*

Пользуясь этим принципом, несвободное тело приводят к свободному путем отбрасывания связей и приложения к нему, кроме действующих активных сил, реакций отброшенных связей.

Направление реакции в зависимости от вида наложенных связей часто неизвестно и должно определяться в результате решения задачи.

Большинство задач статики сводится к определению реакций связей.

1.3.2. Типы связей и их реакции

Рассмотрим основные виды связей и их условные обозначения. На практике можно выделить семь основных связей (закреплений) твердых тел (конструктивных элементов).

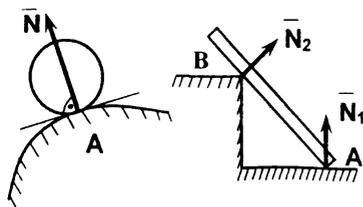


Рис 1.6

1. **Гладкая опорная поверхность** (соприкосновение двух тел). Реакция \vec{N} этой связи направлена по нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис 1.6).

2. **Гибкая связь** (нерастяжимая нить).

Реакция \vec{T} натянутой нити всегда направлена вдоль нити и внутрь от рассматриваемого тела (растяжение, рис. 1.7).

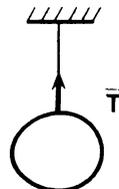


Рис 1.7

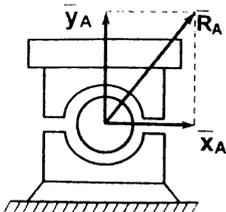


Рис 1.8

3. Цилиндрические шарниры

3а. *Неподвижный шарнир.* Вокруг этого шарнира возможен только поворот (угловое перемещение). Направление реакции \bar{R}_A неизвестно. Однако она лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (XAY) и проходит через эту ось (рис. 1.8). При решении задач ее заранее раскладывают на две составляющие \bar{X}_A, \bar{Y}_A , т.е.

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A.$$

Условное обозначение шарнира

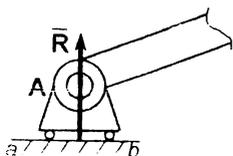


Рис 1.9

3б. *Подвижный шарнир.* Здесь возможен поворот тела вокруг шарнира и линейное перемещение. Реакция этого шарнира направлена перпендикулярно плоскости *ав* перемещения шарнира и проходит через центр шарнира А (рис.1.9).

Условное обозначение шарнира

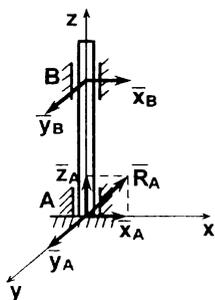


Рис 1.10

4. *Подпятник, подшипник.* Реакция подпятника \bar{R}_A может иметь любое направление в пространстве. При решении задач ее раскладывают на составляющие:

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$$

Реакция подшипника \bar{R}_B лежит в плоскости, параллельной плоскости XAY и проходит через его ось (рис.1.10). Она также заранее раскладывается на составляющие

$$\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B.$$

5. Невесомый стержень

Связи_1,2 - невесомые стержни. Их реакции \bar{S}_1 и \bar{S}_2 всегда направлены вдоль осей стержней.

Стержень может быть растянут-реакция направлена от тела, или сжат-реакция направлена к телу (рис. 1.11а,б).

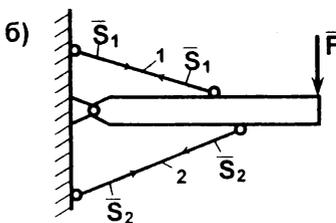
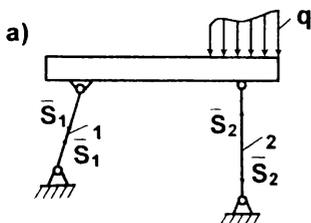


Рис 1.11

ГЛАВА II. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил (или пучком сил) называют такую систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Системы эти могут быть пространственными и плоскими.

Теория этой системы сил применяется для расчета стержневых систем, ферм и т.д.

2.1. Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей силе

Пусть на твердое тело действует пространственная система сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, приложенных в точках A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 2.1).

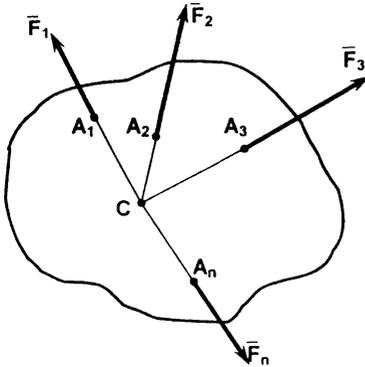


Рис 2.1

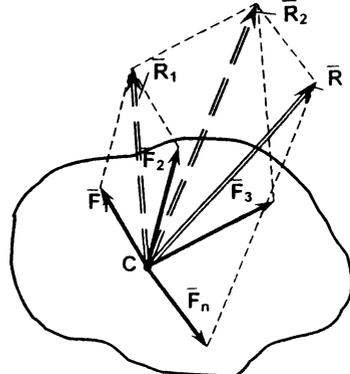


Рис 2.2

На основании следствия из аксиомы 3 перенесем силы по линии их действия в точку C (рис. 2.2). Применяя к первым двум силам \vec{F}_1, \vec{F}_2 аксиому параллелограмма, заменим их равнодействующей \vec{R}_1 :

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Далее сложим \vec{R}_1 и \vec{F}_3 . Тогда получим, что их равнодействующая

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продолжая процесс векторного сложения для всех сил, получим

$$\vec{R} = \vec{R}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.1)$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе, которая является равнодействующей этой системы.

Равнодействующая системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил и равна геометрической сумме этих сил.

Если взять за основу вместо правила параллелограмма правило треугольника, то также можно найти равнодействующую, построив силовой многоугольник. При построении силового многоугольника конец первой силы является началом другой и т.д. (рис. 2.3).

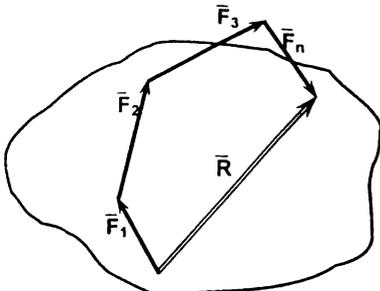


Рис 2.3

плоской системы сил – плоская фигура.

Правила силового параллелограмма и треугольника являются геометрическими способами определения \bar{R} .

Для аналитического способа задания и сложения сил необходимо проектировать вектора сил на оси координат.

2.2. Проекции силы на координатные оси

Пусть имеем силу \bar{F} на плоскости. Введем систему плоских координат.

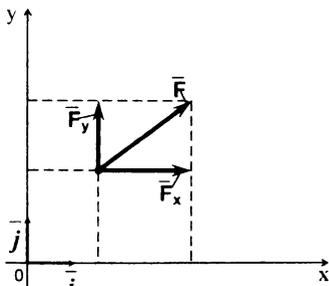


Рис 2.4

Разложим \bar{F} на составляющие вдоль координатных осей (рис.2.4), то есть

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y,$$

$$\bar{F}_x = F_x \cdot \bar{i}; \quad \bar{F}_y = F_y \cdot \bar{j};$$

$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j}, \text{ где } \bar{i}, \bar{j} \text{ – орты.}$$

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой со знаком "+" или "-" длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы.

При решении задач проекции силы получают, умножая ее модуль на косинус острого угла, а знак определяется непосредственно из схемы (рис. 2.5, 2.6). Проекция силы на ось – величина скалярная (на плоскость – векторная).

Различают два случая, то есть $\alpha < 90^\circ$, $\alpha > 90^\circ$ (при $\alpha = 90^\circ$ проекция силы на ось равна нулю).

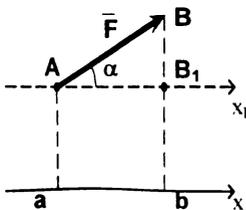


Рис 2.5

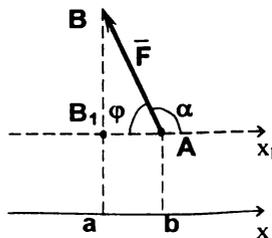


Рис 2.6

В общем случае такой многоугольник является не замкнутым.

Равнодействующая \bar{R} соединяет начало первой силы \bar{F}_1 с концом последней силы \bar{F}_n , то есть является замыкающей.

В силовом многоугольнике силы можно изображать в любой последовательности. От этого изменится лишь его форма, а замыкающая не изменится, значит не изменится и \bar{R} . Для пространственной системы сил силовой многоугольник – пространственная фигура, для

а) угол $\alpha < 90^\circ$ (рис 2.5) — $F_x = ab = AB_1 = F \cos \alpha$

б) угол $\alpha > 90^\circ$ (рис 2.6) — $F_x = AB_1 = ab = F \cos \alpha = -F \cos \varphi$

2.3. Аналитический способ определения равнодействующей

Для аналитического определения \bar{R} выберем систему прямоугольных координат XYZ. Воспользовавшись известной теоремой из геометрии о том, что проекция замыкающей любого многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих его сторон на эту же ось и учитывая, что \bar{R} является замыкающей и что

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad (2.2)$$

спроецируем векторы этого равенства на оси декартовой системы координат.

Тогда

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (2.3)$$

По проекциям определяем модуль \bar{R} и ее направление (косинусы углов с осями)

$$\begin{aligned} \cos \alpha = \cos(\bar{R}; x) &= \frac{R_x}{R} \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad \cos \beta = \cos(\bar{R}; y) = \frac{R_y}{R} \\ \cos \gamma = \cos(\bar{R}; z) &= \frac{R_z}{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В случае плоской системы сходящихся сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iz} = 0.$$

2.4. Условия равновесия системы сходящихся сил

Если тело находится в равновесии под действием системы сходящихся сил, то можно сформулировать две формы равновесия.

1. Геометрическая форма.

При построении силового многоугольника замыкающая сходящихся сил обращается в точку (конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой силы). Такой силовой многоугольник является *замкнутым*.

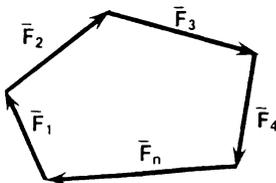


Рис 2.7

В результате можно сформулировать условие равновесия этой системы сил в геометрической форме.

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут (рис.2.7).

В частности при действии на тело трех сил должен быть замкнут силовой треугольник, построенный на этих силах.

2. Аналитическая форма.

При решении задач (особенно пространственных) более удобно использовать условие равновесия сходящихся сил в аналитической форме.

Так как при равновесии системы сходящихся сил равнодействующая равна нулю (силовой многоугольник замкнут), т.е.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0, \quad (2.5)$$

то равны нулю и ее проекции $R_x=0$; $R_y=0$; $R_z=0$, а значит согласно (2.3)

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (2.6)$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно чтобы сумма их проекций на каждую ось прямоугольной системы координат была равна нулю.

Для плоской системы сходящихся сил 3-е равенство превращается в тождество и его можно отбросить, тогда условие равновесия

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (2.7)$$

2.5. Теорема о равновесии трех непараллельных сил

Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием 3-х непараллельных сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

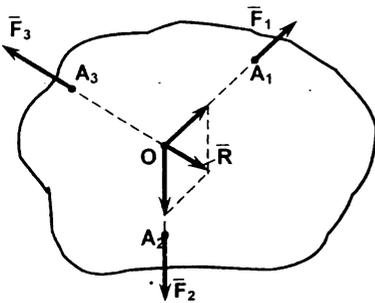


Рис 2.8

Доказательство.

Пусть тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$. (рис 2.8). Перенесем силы \bar{F}_1 и \bar{F}_2 в точку пересечения O их линий действия и сложим их. Тогда

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Теперь имеем две силы \bar{R} и \bar{F}_3 . Так как тело находится в равновесии, то по аксиоме 2 силы \bar{R} и \bar{F}_3 должны лежать на одной прямой, быть равными и направленными в противоположные стороны. Отсюда

линия действия \bar{F}_3 должна проходить через точку O , то есть точку пересечения линии действия всех 3-х сил. Теорема доказана.

Эту теорему удобно применять для определения реакций шарнирных связей тел при действии на них одной силы.

ГЛАВА III. СИСТЕМА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

3.1. Приведение двух параллельных сил к равнодействующей

Существуют три случая приведения такой системы сил.

а) Параллельные силы направлены в одну сторону.

Пусть на абсолютно твердое тело действует две параллельные силы (\vec{F}_1 , \vec{F}_2), направленные в одну сторону. Пересечем их линии действия прямой перпендикулярной им и перенесем эти силы в точки пересечения A и B . Приложим в точках A и B равные, но противоположно направленные силы \vec{S}_1 и \vec{S}_2 . Сложив силы в точках, получим \vec{R}_1 и \vec{R}_2 . Перенесем \vec{R}_1 и \vec{R}_2 в точку их пересечения D (рис.3.1) и разложим их на составляющие. Получим, что эти составляющие одинаковые по величине и направлению с силами в исходных точках A и B , то есть

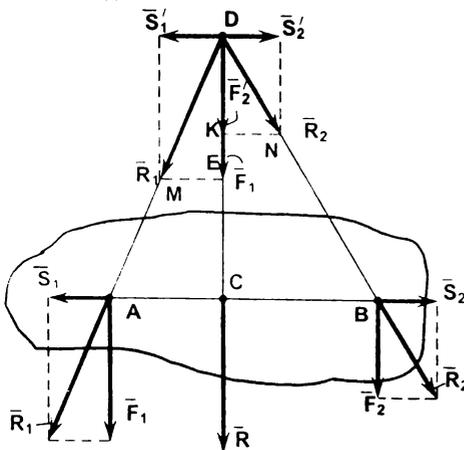


Рис 3.1

$$\begin{aligned} \vec{S}'_1 &= \vec{S}_1; & \vec{S}'_2 &= \vec{S}_2; \\ \vec{F}'_1 &= \vec{F}_1; & \vec{F}'_2 &= \vec{F}_2. \end{aligned}$$

Отбросим систему (\vec{S}'_1, \vec{S}'_2), как эквивалентную нулю (уравновешенную). Тогда получим две силы, которые действуют по одной прямой и параллельны заданным силам. Их равнодействующая

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (3.1)$$

Из подобия $\triangle MDE$ и $\triangle ADC$, а также $\triangle KDN$ и $\triangle CDB$ имеем

$$\frac{AC}{DC} = \frac{S'_1}{F'_1} = \frac{S_1}{F_1}; \quad \frac{BC}{DC} = \frac{S'_2}{F'_2} = \frac{S_2}{F_2}.$$

Поделив левые и правые части этих соотношений друг на друга, получим

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ или } \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}. \quad (3.2)$$

Таким образом равнодействующая 2-х параллельных сил равна по величине их сумме и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей делит отрезок AB прямой между линиями действия этих сил на части *обратнопропорциональные силам*.

б) Две параллельные силы, направленные в противоположные стороны.

Пусть к твердому телу приложены две параллельные силы (\vec{F}_1, \vec{F}_2), направленные в противоположные стороны, причем $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$. Разложим \vec{F}_1 на \vec{R} и \vec{F}'_2 . Пусть $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$ и

приложена в точке B (рис.3.2). Тогда две параллельные силы \bar{R} и \bar{F}'_2 направлены в одну сторону и согласно (3.1)

$$\bar{F}_1 = \bar{R} + \bar{F}'_2, \text{ тогда}$$

$$\bar{R} = \bar{F}_1 - \bar{F}'_2. \quad (3.3)$$

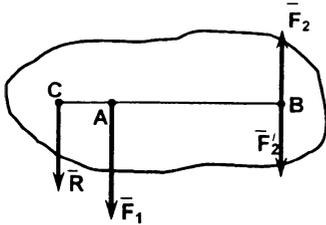


Рис 3.2

Точку приложения силы \bar{R} определяем, по формуле (3.2), где для сил \bar{R} и \bar{F}'_2 равнодействующей является \bar{F}_1 , тогда

$$\frac{AC}{F'_2} = \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}. \quad (3.4)$$

Таким образом две неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны, приводятся к равнодействующей, параллельной этим силам, равной по величине их разности и направленной в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей \bar{R} расположена за линией действия большей силы, ее точка приложения определяется (3.4).

в) Пара сил.

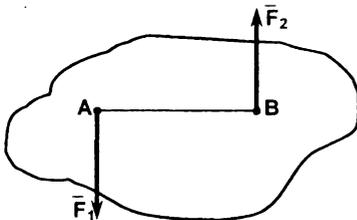


Рис 3.3

Система равных по величине 2-х параллельных направленных в противоположные стороны сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 , называют *парой сил* (рис.3.3). Это предельный случай пункта (б). По формуле (3.3)

$$\bar{R} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 = 0. \quad (3.5)$$

В формуле (3.4) AC и BC равны бесконечности, и теоретически точка C находится в бесконечности. Таким образом равнодействующая этих сил равна нулю. Однако под действием пары сил свободное твердое тело выходит из равновесия и будет совершать вращательное движение. Вращающий эффект пары зависит не только от модуля силы, но и от расстояния между силами пары.

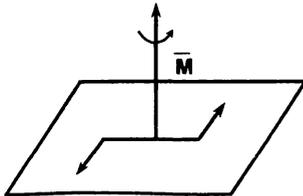


Рис 3.4

Пару нельзя заменить одной силой и поэтому она является самостоятельным силовым фактором. Пара сил действует в плоскости, которую называют плоскостью действия пары.

Количественное значение пары сил характеризуется *моментом пары сил*. В пространстве это векторный момент, а на плоскости - алгебраический.

Векторный момент пары сил в пространстве изображается вектором, который перпендикулярен плоскости действия пары и направлен так, чтобы с его конца было видно стремление пары вращать тело против хода часовой стрелки (рис.3.4).

Модуль момента равен произведению модуля силы пары на плечо пары. Плечо пары h – это кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

$$M = F \cdot h. \quad (3.6)$$

При расположении пар сил на плоскости используют алгебраический момент.

Алгебраический момент пары сил – это взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы пары на плечо пары.

$$M = \pm Fh. \quad (3.7)$$

Алгебраический момент положителен, если пара сил стремится вращать твердое тело в плоскости против хода часовой стрелки, и отрицателен – если по ходу часовой стрелки.

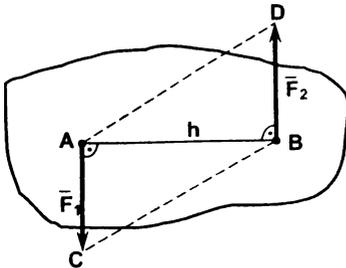


Рис 3.5

Алгебраический момент пары сил равен нулю, если $h=0$. Численно момент пары сил равен площади параллелограмма $ADBC$ (рис.3.5), построенного на силах пары. Размерность момента пары сил $[Н \cdot м]$.

3.2. Теоремы о парах сил на плоскости

Рассмотрим четыре основные теоремы о парах сил на плоскости.

Теорема 1. (О моменте пары сил).

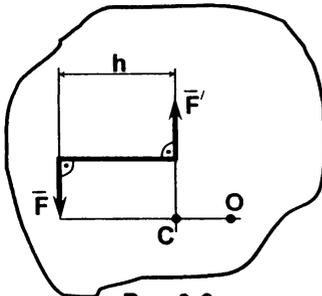


Рис 3.6

Сумма моментов сил, образующих пару, относительно какого-либо центра не зависит от положения этого центра и равна произведению модуля силы пары на плечо.

Выберем произвольную точку O . Определим моменты сил пары относительно этой точки (рис.3.6)

$$\begin{aligned} M_o &= \sum_{K=1}^n M_o(\bar{F}_K) = F(h + OC) - F' \cdot OC = \\ &= Fh + F \cdot OC - F' \cdot OC = F \cdot h. \end{aligned}$$

Теорема 2. (О возможности перемещения пары сил в плоскости ее действия).

Действие пары сил на абсолютно твердое тело не изменится, если ее перенести в любое положение в плоскости действия пары.

Пусть на твердое тело действует пара (\bar{F}, \bar{F}') .

Возьмем отрезок AB ($AB=h$). Проведем перпендикуляры к AB и линиям действия сил (\bar{F}, \bar{F}') ; тогда $CDEK$ – ромб (рис.3.7).

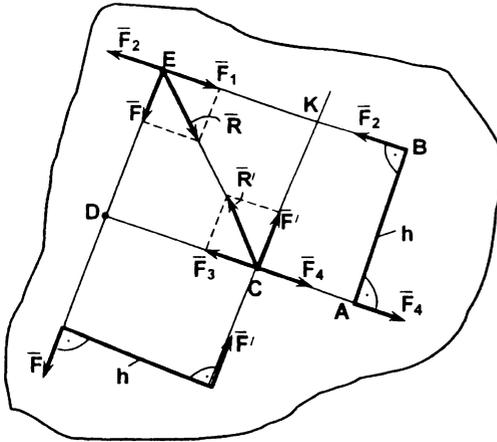


Рис 3.7

Перенесем силы \vec{F}' и \vec{F} вдоль линии их действия в точки C и E . Теперь приложим в этих точках по две уравновешенные силы, линии действия которых совпадают с перпендикулярами, а их модули равны F , то есть

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F.$$

Сложим \vec{F} и \vec{F}_1 ; \vec{F}' и \vec{F}_3 . Тогда $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_1$; $\vec{R}' = \vec{F}' + \vec{F}_3$.

Здесь $\vec{R} = -\vec{R}'$ и их можно отбросить как уравновешенные силы. В результате остаются силы \vec{F}_2 и \vec{F}_4 . Переносим их в точки A и B , получаем пару сил, эквивалентную исходной.

Теорема 3. (Об эквивалентности пар сил.)

Пары сил, имеющие одинаковые по величине и знаку моменты, эквивалентны.

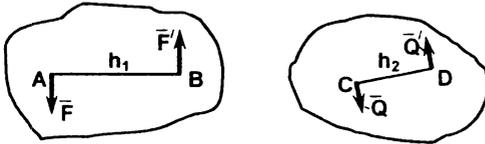


Рис 3.8

Пусть имеются две пары сил (\vec{F}, \vec{F}') и (\vec{Q}, \vec{Q}') с одинаковыми моментами (рис.3.8):

$$M_1 = Fh_1;$$

$$M_2 = Qh_2 = M_1.$$

Возьмем пару (\vec{F}, \vec{F}') . Продолжим прямую вдоль AB на величину

отрезка $BE = h_2$ (рис.3.9). Приложим в точке E уравновешенные силы \vec{Q}_1 и \vec{Q}_2 . Положим $Q_1 = Q_2 = Q$. Учитывая, что $Fh_1 = Qh_2$, получим

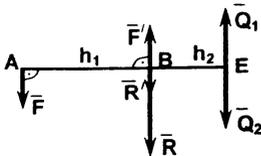


Рис 3.9

$$\frac{F}{h_2} = \frac{Q_2}{h_1}$$

Сложим \vec{F} и \vec{Q}_2 . Тогда согласно (3.1) (правило сложение 2-х параллельных сил) точка B — точка приложения равнодействующей $\vec{R} = \vec{F} + \vec{Q}_2$. Сложим силы \vec{R} и \vec{F}' . Тогда

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{F}' = \vec{F} + \vec{Q}_2 - \vec{F}' = \vec{Q}_2.$$

следовательно на тело действует пара сил (\vec{R}', \vec{Q}_1) с плечом h_2 и эквивалентная паре (\vec{Q}, \vec{Q}') . Используя предыдущую теорему, эту пару перемещаем в положение CD . Теорема доказана.

Следствие. Действие пары сил на тело не изменится, если изменять плечо пары и величину сил пары, оставляя при этом неизменным момент пары.

Теорема 4. (О сложении пар сил на плоскости).

Момент пары сил, которая эквивалентна заданной системе пар сил на плоскости, равен сумме моментов составляющих пар.

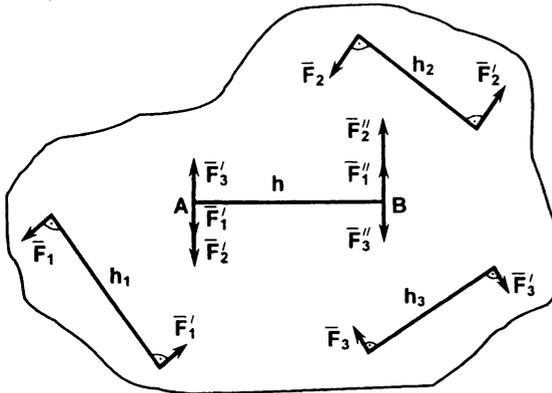


Рис 3.10

Сложим силы, приложенные в точках А и В.

$$R = F_1' + F_2' - F_3'; \quad R' = F_1'' + F_2'' - F_3'';$$

Тогда силы \bar{R} и \bar{R}' образуют пару с плечом h .

Момент этой пары

$$M = Rh = (F_1' + F_2' - F_3')h = F_1'h + F_2'h - F_3'h, \text{ или}$$

$$M = M_1 + M_2 - M_3.$$

Распространяя сложение на систему из n пар, заключаем:

если на твердое тело действует n пар сил с моментами M_1, M_2, \dots, M_n , то складывая последовательно эти пары, их можно заменить одной парой с моментом, равным алгебраической сумме моментов заданных пар, т.е.

$$M = \sum_{k=1}^n M_k. \quad (3.8)$$

3.3. Условие равновесия системы пар сил на плоскости

Для равновесия абсолютно твердого тела, находящегося под действием системы пар сил, расположенных в плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов составляющих равнялась нулю.

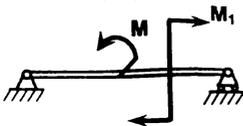


Рис 3.11

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = 0. \quad (3.9)$$

Для пар сил на плоскости приняты следующие обозначения (рис.3.11).

Пусть задана система трех пар сил $[(\bar{F}_1, \bar{F}_1'); (\bar{F}_2, \bar{F}_2'); (\bar{F}_3, \bar{F}_3')]$ с моментами

$$M_1 = F_1 h_1; \quad M_2 = F_2 h_2; \\ M_3 = -F_3 h_3 \text{ (рис. 3.10).}$$

Выберем отрезок AB длиной h . Согласно теореме 3 заданные три пары можно привести к плечу h . Тогда

$$M_1 = F_1 h_1 = F_1' \cdot h, \\ M_2 = F_2 h_2 = F_2' \cdot h, \\ M_3 = F_3 h_3 = F_3' \cdot h.$$

ГЛАВА IV. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

Система сил, линии действия которых произвольно расположены в одной плоскости, называется плоской произвольной системой сил.

Вращательный эффект силы при действии ее на твердое тело характеризуется моментом силы относительно точки.

4.1. Момент силы относительно точки на плоскости

Пусть на твердое тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A. Возьмем некоторый произвольный центр O (рис. 4.1).

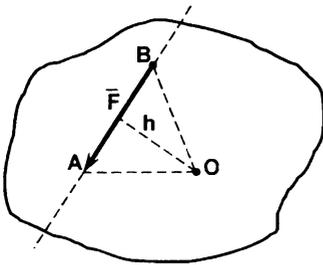


Рис 4.1

Заметим (рис. 4.1), что $M_0(\vec{F}) = 2 \text{пл.} \Delta OAB$ – это геометрическая формула момента силы относительно центра.

Если линия действия силы проходит через точку O, момент силы равен нулю, т.к. $h = 0$.

Единица измерения момента силы $[H \cdot m]$.

Пусть на тело (рис. 4.2) действует система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

Величина, равная алгебраической сумме моментов этих сил относительно центра O, т.е.

$$M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) \quad (4.2)$$

называется *главным моментом системы сил относительно центра O*.

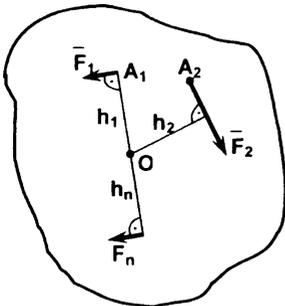


Рис 4.2

4.2. Приведение силы на плоскости к заданному центру (метод Пуансо)

Пусть на плоскости заданы некоторый центр O и сила \vec{F}_1 , которая приложена в точке A (рис. 4.3а).

Приложим в точке O уравновешенную систему сил (\vec{F}', \vec{F}'') . Пусть эти силы равны заданной силе \vec{F} по модулю, т.е. $\vec{F}' = -\vec{F}'' = -F$. (рис. 4.3б).

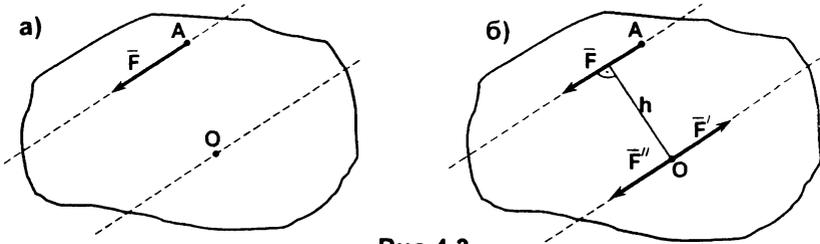


Рис 4.3

Силы \vec{F} и \vec{F}' образуют пару, момент которой $M=Fh$. Этот момент равен моменту силы \vec{F} относительно точки O , т.е. $M_0(\vec{F})$.

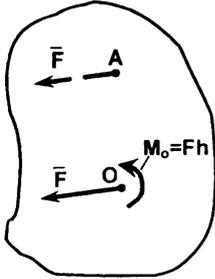


Рис 4.4

Таким образом, вместо действия силы на твердое тело, приложенной в точке A (рис.4.4) можно рассматривать эквивалентное действие этой же силы, но приложенной в точке O , при этом следует учитывать момент силы относительно точки O или момент присоединенной пары. В этом и заключается метод Пуансо.

4.3. Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру

Докажем основную теорему статики (теорему Пуансо):

Любую произвольную плоскую систему сил, действующую на твердое тело, можно привести к одной силе и паре сил.

Пусть на твердое тело действует плоская система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рис. 4.5). Выберем произвольную точку O тела и, пользуясь методом Пуансо, приведем каждую силу к центру O .

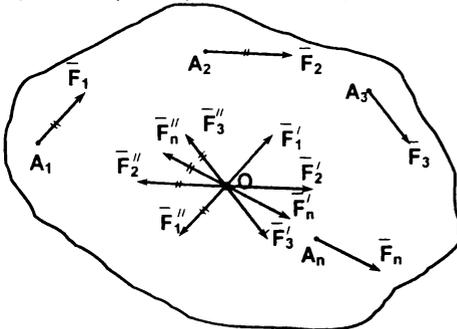


Рис 4.5

Таким образом, произвольная система из n сил заменена системой сходящихся сил $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ и присоединенных пар сил $[(\vec{F}'_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}'_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}'_n, \vec{F}'_n)]$ с моментами M_1, M_2, \dots, M_n .

Складывая сходящиеся силы, получим их равнодействующую

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (4.3)$$

Складывая пары сил, получаем одну эквивалентную пару, момент которой

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i). \quad (4.4)$$

Вектор \vec{R} – называется главным вектором заданной плоской произвольной системы сил, а M_0 – главным моментом этой системы сил относительно центра приведения O .

Таким образом теорема доказана.

Замечание. Главный вектор \bar{R} не зависит от выбора точки O (центра приведения), а главный момент M_0 – зависит.

4.4. Случаи приведения плоской произвольной системы сил

В общем случае, согласно основной теореме статики, произвольную систему сил можно привести к силе и паре сил, но при этом возможны следующие случаи приведения.

1. $\bar{R} \neq 0; M_0 \neq 0$. Такая система сил приводится к паре, момент которой равен главному моменту (тело, под действием этой системы будет стремиться совершать вращательное движение).

2. $\bar{R} \neq 0; M_0 = 0$. Данная система сил приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения O (при действии такой системы тело будет совершать поступательное движение).

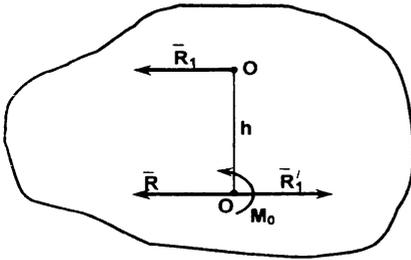


Рис 4.6

3. $\bar{R} \neq 0; M_0 \neq 0$. В этом случае система приводится к равнодействующей, приложенной в некоторой точке O_1 (новый центр приведения).

Пусть момент M_0 образует пара $[\bar{R}_1, \bar{R}'_1]$. Выберем силы пары \bar{R}_1 и \bar{R}'_1 так, чтобы $R_1 = R'_1 = R$ и расположим их как показано на рис.4.6. Тогда

$$h = \frac{M_0}{R}.$$

Отбросив силы \bar{R} и \bar{R}'_1 , как уравновешенные получим, что на твердое тело действует равнодействующая $\bar{R}_1 = \bar{R}$, но уже приложенная в точке O_1 .

4. $\bar{R} = 0; M = 0$. В данном случае система сил эквивалентна нулю, то есть под её действием тело будет находиться в равновесии.

4.5. Теорема Вариньона (о моменте равнодействующей плоской произвольной системы сил)

Если плоская произвольная система сил приводится к равнодействующей, то ее момент относительно любой точки на плоскости равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно этой же точки.

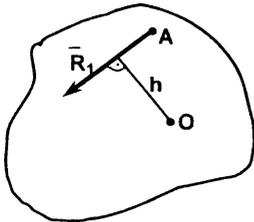


Рис 4.7

Пусть плоская произвольная система сил приводится к равнодействующей, приведенной в точке A (случай 3, рис.4.7).

Момент силы \bar{R}_1 относительно точки O

$$M_0(\bar{R}_1) = R_1 h.$$

Но для случая 3, рассмотренного выше, имеем

$$h = \frac{M_0}{R};$$

$$M_0(R_1) = R_1 \frac{M_0}{R} = M_0,$$

где $\bar{R} = \bar{R}_1, M_0 = \sum M_0(\bar{F}_i)$. Окончательно

$$M_0(R_1) = \sum_{i=0}^n M_0(\bar{F}_i).$$

Теорема доказана.

4.6. Условия и уравнения равновесия плоской системы сил

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно некоторого центра одновременно равнялись нулю.

$$\bar{R} = 0; \quad M_0 = 0. \quad (4.5)$$

Исходя из данного условия, получим уравнения равновесия плоской системы сил.

I. Основная форма уравнений равновесия

Согласно (4.5) $\bar{R} = 0$; $M_0 = 0$.

Введем в рассмотрение декартовую систему координат. Учтем, что

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad M_0 = \sum M_0(\bar{F}_i)$$

Для выполнения (4.5) необходимо, чтобы составляющие R_x , R_y одновременно равнялись нулю. Проектируя векторное равенство из условий (4.5) на оси координат получим:

$$R_x = \sum F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum F_{iy} = 0.$$

Окончательно

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_0(F_i) = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum X_i = 0, \\ \sum Y_i = 0, \\ \sum M_{0i} = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Система (4.6) выражает основную форму уравнений равновесия плоской произвольной системы сил (выбор осей X , Y и точки O ничем не ограничены).

II. Вторая форма условий равновесия

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно двух произвольных точек, лежащих в плоскости действия сил, и сумма проекций сил на любую ось, не перпендикулярную к прямой, проходящей через эти точки, равнялась нулю.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; \\ \sum F_{ix} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Здесь ось X не может быть перпендикулярна прямой AB .

III. Третья форма условий равновесия

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов сил относительно трех произвольных центров, не лежащих на одной прямой, равнялись нулю одновременно.

$$\begin{cases} \sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \\ \sum M_C(\bar{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь точки A , B , C не должны лежать на одной прямой.

Замечание. Количество уравнений равновесия для плоской системы сил, действующих на твердое тело, всегда равно трем. Поэтому при решении задач можно использовать только одну форму равновесия, которая наиболее эффективна.

ГЛАВА V. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИЙ ПЛОСКИХ СИСТЕМ СИЛ

5.1. Расчет плоских ферм

Ферма - это жесткая (геометрически неизменяемая) конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных по концам шарнирами (рис.5.1)

5.1.1. Основные понятия. Если стержни фермы расположены в одной плоскости, то такие фермы называют *плоскими*.

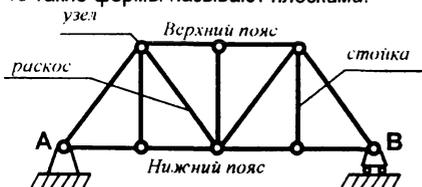


Рис 5.1

Расчет ферм прост, если принять допущения:

1) стержни фермы прямолинейны; 2) трением в шарнирах пренебрегают; 3) силы прикладываются в узлах фермы; 4) стержни считаются невесомыми.

При сделанных допущениях стержни фермы испытывают растягивающие или сжимающие усилия, которые направлены вдоль оси стержня от узлов (растяжение), или к узлам (сжатие).

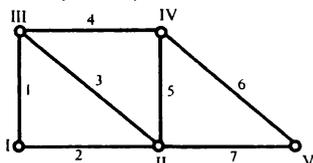


Рис 5.2

Так для фермы на рис 5.2 число узлов $n=5$, тогда число стержней $m=2 \cdot 5 - 3 = 7$. Если $m < (2n-3)$, то ферма будет нежесткой.

Если $m > (2n-3)$ — ферма статически неопределима (с лишними стержнями).

5.1.2. Методы расчета ферм

Основными методами расчета ферм являются:

1) метод вырезания узлов; 2) метод Риттера (метод сечений).

Каждый из этих методов применяют для определения усилий в стержнях ферм в зависимости от целей решаемой задачи.

1.Метод вырезания узлов. Этот метод применяется, когда необходимо определить усилия во всех стержнях фермы.

Пусть необходимо определить усилия в стержнях консольной фермы (рис.5.3). Число узлов $n=5$. Тогда число стержней $m=2n-3=7$.

Сначала осуществляем обозначение узлов и нумерации стержней фермы. Далее расчет фермы производится в следующей последовательности:

1) Определяем реакции в связях (опор).

Освободив ферму от связей и заменяя их реакциями, получаем равновесие фермы при действии плоской произвольной системы сил.

Шарниры фермы называются *узлами фермы* (узлы, закрепленные в опорных точках, называются опорными узлами, т.е. узлы А и В).

Вертикальный стержень называется *стойка*, наклонный - *раскос*. Стержни, образующие верхний контур, называют верхним поясом, нижний контур — нижним поясом.

Установим зависимость между числом стержней m и числом узлов n . Для первого треугольника необходимо 3 стержня и 3 узла.

Присоединение каждого следующего узла требует два стержня. Пусть число узлов n , тогда число стержней всей фермы

$$m=3+2(n-3)=2n-3$$

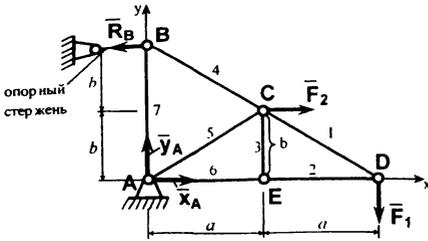


Рис 5.3

Составим уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; & \quad F_2 + x_A - R_B = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & \quad -F_1 + y_A = 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_k) = 0; & \quad R_B 2b - F_2 b - F_1 2a = 0. \end{aligned}$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений, находим значения реакции $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{R}_B$.
Для проверки правильности найденных реакций можно составить уравнение

$$\sum M_E(\bar{F}_k) = 0.$$

2) Мысленно вырезаем узел фермы, где сходятся 2 стержня с неизвестными усилиями. Это могут быть узлы D или B.

Рассмотрим, например, равновесие узла D. Неизвестные усилия в стержнях полагаем растягивающими, направленными от узла. Образуется система сходящихся сил, для которой можно составить два уравнения равновесия (рис.5.4):

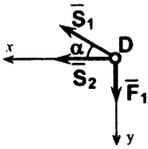


Рис 5.4

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & S_2 + S_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & F_1 - S_1 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему находим:

$$S_1 = \frac{F_1}{\sin \alpha}; \quad S_2 = -\frac{F_1 \cos \alpha}{\sin \alpha} = -F_1 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Затем можно рассмотреть равновесие узла E (рис.5.5).

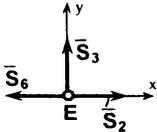


Рис 5.5

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; & \quad S_2 - S_6 = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & \quad S_3 = 0. \end{aligned}$$

Далее по аналогии можно рассматривать узел C и т.д.

Это аналитический способ определения усилий стержней при применении метода вырезания узлов.

3. Для проверки правильности найденных усилий каждого узла используют геометрический способ, т.е. правило силового многоугольника. Например, для узла D строится треугольник сил (рис.5.6а), для узла E реакции \bar{S}_6 и \bar{S}_2 уравниваются (рис 5.6б)

Построение силового многоугольника осуществляется в выбранном масштабе. Длина стороны многоугольника равна модулю соответствующего вектора силы.

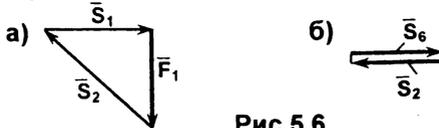


Рис 5.6

II. Метод Риттера (Август Риттер 1826-1906). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в нескольких отдельных стержнях фермы. Для расчета фермы этим методом следует:

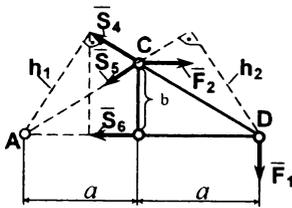


Рис 5.7

1) определить опорные реакции; 2) рассечь ферму на две части и рассмотреть равновесие одной из частей, при этом сечение должно быть проведено не более чем по трем стержням; 3) реакции (усилия) перерезанных стержней направляются в сторону отброшенной части; 4) составить три уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, приложенной к рассматриваемой части фермы: это может быть уравнение моментов сил относительно точки, в которой пересекаются линии действия усилий двух перерезанных стержней, или уравнение

проекций сил на ось, перпендикулярную параллельным стержням, если два из трех перерезанных стержней параллельны.

Пусть в предыдущем примере необходимо определить усилия в стержнях 4, 5, 6. Проведем сечение 1-1 через стержни 4, 5, 6 и рассмотрим равновесие правой от сечения части фермы (рис.5.7).

Для определения усилий \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_6 можно составить уравнения моментов относительно точек, где попарно пересекаются рассматриваемые стержни (точки Риттера).

$$\begin{aligned} \sum M_C(\bar{F}_K) &= 0; & -S_6 b - F_1 a &= 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_K) &= 0; & -F_1 2a - F_2 b + S_4 h_1 &= 0; \\ \sum M_D(\bar{F}_K) &= 0; & -F_2 b + S_5 h_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, определяем S_4 , S_5 , S_6 . Точки А, С, D – называют моментными точками, или точками Риттера

$$S_4 = \frac{F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot b}{h_1}; \quad S_5 = \frac{F_2 \cdot b}{h_2}; \quad S_6 = -\frac{F_1 \cdot a}{h}.$$

Полученные результаты показывают, что стержни 4 и 5 растянуты, а стержень 6 сжат.

5.2. Распределенные силы

В инженерной практике часто встречаются силы, которые приложены не в точке, а распределены по длине, площади твердого тела. Такая система распределенных сил (распределенная нагрузка) характеризуется ее интенсивностью q , то есть величиной силы, приходящейся на единицу длины или площади нагруженного тела.

В инженерных расчётах распределенные нагрузки, действующие на абсолютно твердое тело, заменяют их равнодействующими. Такая сила прикладывается в центре тяжести фигуры, моделирующей нагрузку, и её модуль равен площади (объёму) этой фигуры.

Рассмотрим нагрузки, распределенные по длине абсолютно-твёрдого тела.

Равномерно-распределенная нагрузка (рис.5.8).

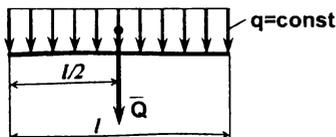


Рис 5.8

Модуль равнодействующей такой нагрузки \bar{Q} равен площади прямоугольника (параллелограмма).

$$\bar{Q} = q \cdot l.$$

Линия действия \bar{Q} проходит через центр тяжести прямоугольника (параллелограмма).

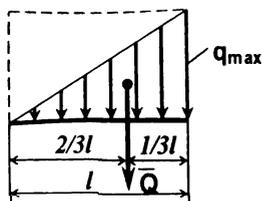


Рис 5.9

Нагрузка, распределенная по линейному закону (рис.5.9).

Модуль равнодействующей такой нагрузки равен площади треугольника

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}.$$

Линия действия силы \bar{Q} проходит через центр тяжести треугольника, который находится на пересечении медиан.

5.3. Реакция жесткой заделки

Рассмотрим еще один вид связи, наложенной на твердое тело – жесткую заделку (закрепление).

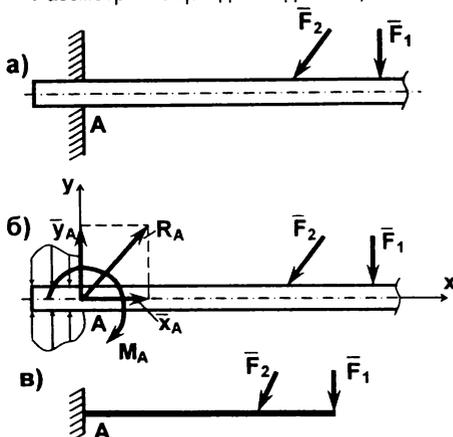


Рис 5.10

Пусть, например, имеем балку, конец которой заделан в стене (рис 5.10а). При такой связи твердое тело не имеет ни линейных, ни угловых перемещений.

Если тело освободить от такой связи, то ее действие заменяется распределенными силами по произвольному закону (рис. 5.10б). Заменяв эти силы элементарными сосредоточенными и затем приводя их к точке А, получим главный вектор \bar{R}_A и главный момент M_A . Так как направление \bar{R}_A неизвестно, в расчетах эту силу раскладывают на

составляющие \bar{X}_A и \bar{Y}_A (рис.5.10б). Момент M_A называют реактивным моментом.

Таким образом, действие жесткой заделки на твердое тело можно заменить тремя реакциями связи: две реактивные силы \bar{X}_A , \bar{Y}_A и реактивный момент M_A .

Условное обозначение жесткой заделки представлено на рис.5.10в.

5.4. Равновесие системы тел. Расчет составных конструкций

Твердые тела, соединенные между собой связями, образуют составную систему (составную конструкцию). Такие конструкции часто встречаются в инженерной практике. При их расчете приходится классифицировать связи на внешние и внутренние.

Внутренние связи соединяют между собой отдельные тела данной системы.

Внешние связи соединяют тела данной системы с телами, не входящими в систему (закрепление конструкции на опорах и т.д.).

Рассмотрим составную конструкцию, например трехшарнирную арку (рис.5.11а). Здесь опоры А и В – внешние связи (неподвижные шарниры). Шарнир С, соединяющий тела I и II – внутренняя связь.

Для определения реакций внешних связей отбросим связи в точках А и В и заменим их реакциями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$. (рис.5.11б).

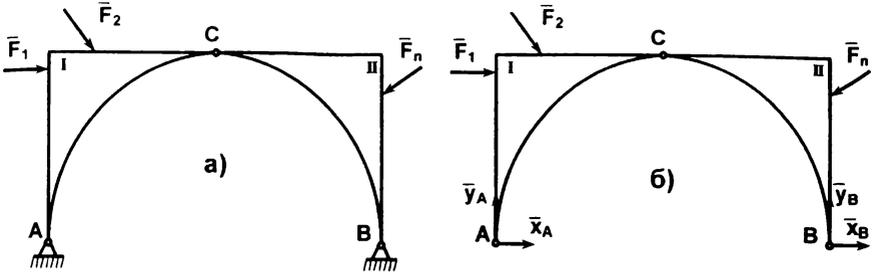


Рис 5.11

Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия, а неизвестных реакций четыре. Так как в данном случае точки А и В расположены на горизонтальной прямой, удобно применить 2-ю форму уравнений равновесия (4.7):

$$\begin{aligned} \sum M_A(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum M_B(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum F_{ix} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из 1-го уравнения можно выразить \bar{Y}_B , из 2-го - \bar{Y}_A , третье уравнение устанавливает только связь между реакциями, значения же самих реакций найти нельзя.

Задача для всей конструкции является статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости (составления дополнительных уравнений) конструкцию расчленяют по внутренним связям на части, рассматривая равновесие каждой из частей (рис. 5.12).

Для данной конструкции можно рассмотреть равновесие левой части, мысленно отбросив правую часть. Действие правой части на левую заменим реакциями шарнира С, т.е. \bar{X}_C, \bar{Y}_C (рис.5.12). Составим для левой части уравнения равновесия (основная форма):

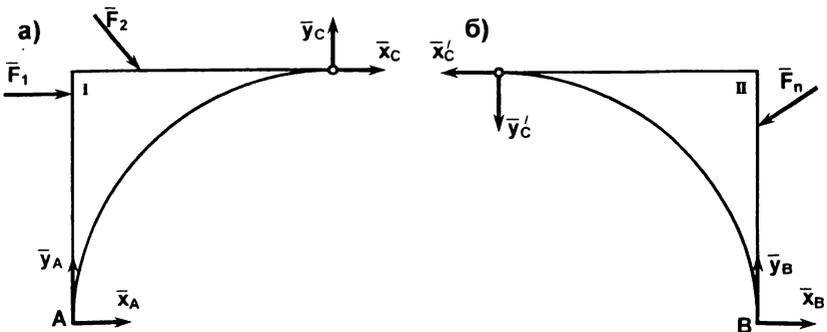


Рис 5.12

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum M_c(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из 3-го уравнения этой системы выражаем значения \bar{X}_A , из 1-го и 2-го находим значения реакций внутренней связи \bar{X}_C и \bar{Y}_C .

Решая 3-е уравнение системы (5.1), находим значение \bar{X}_B .

В других схемах конструкций удобно сразу рассматривать равновесие их отдельных частей. Например, задачу определения реакций для данной конструкции можно решить, рассмотрев равновесия левой (рис.5.12а) и правой частей (рис 5.12б) в отдельности. При этом реакции шарнира С в правой части равны по модулю и противоположны по направлению реакциям левой части (4-я аксиома статики).

$$\bar{X}_C = -\bar{X}'_C, \quad \bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C.$$

Для каждой из частей мы можем составить по три уравнения равновесия имея шесть неизвестных, т.е. задача статически определима, однако решение полученных алгебраических уравнений для данной модели осуществить труднее, чем решение уравнений при первой расчётной схеме.

5.5. Равновесие рычага

Тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной этой оси, называется рычагом (рис.5.13). Здесь точка А – опорная точка. Рычаг часто встречается в инженерной практике. При таких условиях на рычаг действует плоская произвольная система сил. Запишем уравнения статики:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} + x_A &= 0; \\ \sum F_{iy} + y_A &= 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

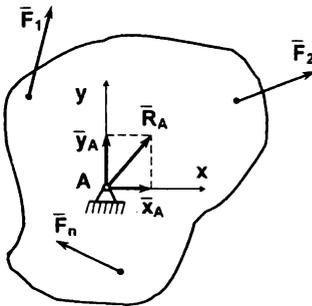


Рис 5.13

Из первых двух уравнений можно определить реакцию оси рычага. Последнее уравнение дает условие, которому должны удовлетворять силы, действующие на рычаг, для того чтобы рычаг находился в равновесии.

Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов активных сил, действующих на рычаг, относительно опорной точки была равна нулю (3-е уравнение системы 5.3).

5.6. Устойчивость тел при опрокидывании

Эта теория так же часто находит применение в практике (расчет подпорных стен, подъемных кранов и тд.). Пусть на тело веса \bar{P}

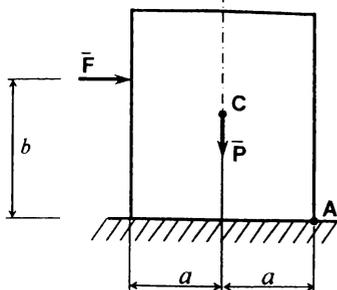


Рис 5.14

действует горизонтальная сила \bar{F} , которая недостаточна по величине, чтобы сдвинуть тело по опорной поверхности (рис.5.14). При соответствующих условиях сила \bar{F} может опрокинуть тело относительно точки А. Проанализируем состояние такого тела.

Составим уравнение моментов сил относительно этой точки:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -Fb + Pa = 0; \quad Pa = Fb.$$

Обозначим $Pa = M_{уд}$, $Fb = M_{опр.}$, где

$M_{уд}$ — удерживающий момент, $M_{опр.}$ — опрокидывающий момент.

Для устойчивого положения тела необходимо условие:

$$M_{уд} > M_{опр.} \quad (5.4)$$

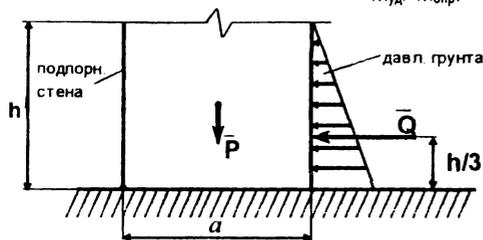


Рис 5.15

Коэффициент $K = \frac{M_{уд}}{M_{опр}}$ назы-

вается коэффициентом устойчивости при опрокидывании тела. Если $K > 1$ — состояние тела устойчивое, $K = 1$ — граница устойчивости, $K < 1$ — неустойчивое состояние.

При действии на тело нагрузки, распределенной по линейному закону

(рис.5.15) ее действие заменяют равнодействующей \bar{Q} и тогда $M_{опр} = Q \cdot \frac{1}{3}h$; $M_{уд} = P \cdot \frac{a}{2}$.

5.7. Трение

В инженерной практике существуют два основных вида трения: трение скольжения и трение качения.

5.7.1. Трение скольжения

При попытке двигать одно тело по поверхности другого возникает сила, препятствующая взаимному скольжению соприкасающихся тел. Это сила трения. Она возникает из-за шероховатости соприкасающихся поверхностей и сил молекулярного сцепления соприкасающихся тел.

Точной теории трения пока не создано. Законы трения носят лишь качественный характер и являются некоторым приближением к действительности. В основу расчетов с учетом трения положены законы, сформулированные Г. Амонтоном и Ш. Кулоном.

Рассмотрим соприкосновение двух тел (рис. 5.16). Если поверхности тел абсолютно гладкие и тела абсолютно твердые, то реакция направлена по нормали в точке со-

прикосновения, и $\vec{R} = \vec{N}$. Однако в действительности все тела деформируемы и в той или иной степени шероховаты, поэтому реакция \vec{R} направлена под некоторым углом φ к нормали. Разложим ее по нормали n и касательной t на составляющие $\vec{F}_{тр}$ и \vec{N} . \vec{N} называется нормальной реакцией, $\vec{F}_{тр}$ силой трения скольжения (если она мала, ею можно пренебречь, и тогда \vec{R} совпадает с \vec{N}). Рассмотрим соприкосновение двух тел (рис. 5.16). Если поверхности тел абсолютно гладкие и тела абсолютно твердые, то реакция направлена по нормали в точке соприкосновения, и $\vec{R} = \vec{N}$. Однако в действительности все тела деформируемы и в той или иной степени шероховаты, поэтому реакция \vec{R} направлена под некоторым углом φ к нормали. Разложим ее по нормали n и касательной t на составляющие $\vec{F}_{тр}$ и \vec{N} . \vec{N} называется нормальной реакцией, $\vec{F}_{тр}$ силой трения скольжения (если она мала, ею можно пренебречь, и тогда \vec{R} совпадает с \vec{N}).

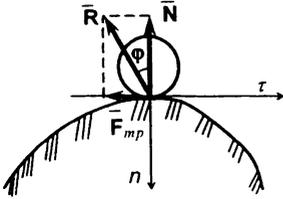


Рис 5.16

Рассмотрим кулоново трение. В 1781 г. Кулон установил приближенные законы трения на простом опыте (рис.5.17).

Пока тело находится в состоянии покоя, сила трения \vec{F} называется силой трения покоя - $\vec{F}_{мп}$. Увеличивая \vec{Q} , при $\vec{P} = \text{const}$, можно достичь положения, когда малейшее увеличение \vec{Q} выведет тело из состояния равновесия, и оно будет скользить, то есть при таком состоянии сила трения $\vec{F}_{мп}$ будет наибольшей и равна $\vec{F}_{мп}^{max}$.

Опытами установлено:

- величина силы трения зависит от активных сил и заключена в интервале $0 \leq \vec{F}_{мп} \leq \vec{F}_{мп}^{max}$;
- максимальная сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей;
- максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению:

$$F_{мп}^{max} = f \cdot N, \quad (5.5)$$

где f — коэффициент трения скольжения (безразмерная величина);

- коэффициент трения f зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, его величина определяется экспериментально.

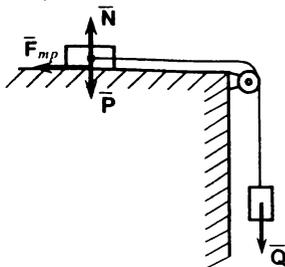


Рис 5.17

Хотя величина f и зависит от относительной скорости скольжения, в технических расчётах этой зависимостью пренебрегают.

Для некоторых материалов коэффициент трения имеет значения:

$$f=0,4 \div 0,7 \text{ (дерево); } \quad f=0,15 \div 0,25 \text{ (металлы)}$$

- Замечания.** 1. Когда груз в покое, $\vec{F}_{мп}$ равна сдвигающей силе \vec{Q} . Значение $\vec{F}_{мп}^{max}$ сила трения принимает только тогда, когда достигается предельное равновесие.
2. При движении тела $\vec{F}_{мп}$ направлена против движения.

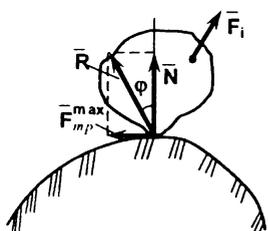


Рис 5.18

С учетом (5.5) имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}^{max}}{N}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = f,$$

то есть тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения.

Определяя угол трения φ при скольжении тела в различных направлениях, очевидно, что полная реакция \bar{R} образует коническую поверхность (рис.5.19а). Если свойства поверхности по всем направлениям одинаковы, то конус будет прямым круговым (рис.5.19б).

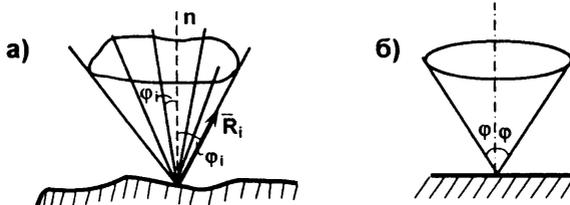


Рис 5.19

При равновесном положении тела $0 \leq \bar{F}_{mp} \leq \bar{F}_{mp}^{max}$.

Так как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}^{max}}{N}$, то

$$\varphi \leq \varphi_{max}. \quad (5.6)$$

Соотношение (5.6) определяет условие равновесия тела.

Таким образом, условие равновесия тела формулируется так.

Для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на тело, проходила внутри конуса трения.

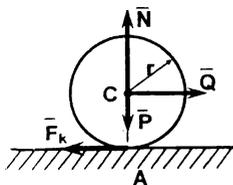


Рис 5.20

5.7.2. Трение качения

Пусть рассматриваемое тело имеет форму катка. Под действием активных сил такое тело может катиться по поверхности другого тела. Из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения возникают реактивные силы, которые препятствуют и скольжению, и качению. Примеры: качение колес автомобиля, вагонов, роликов в подшипниках и тд.

Пусть каток катится по некоторой поверхности под дейст-

вию активных сил. Эти силы состоят из веса \bar{P} , движущей силы \bar{Q} , приложенной к центру колеса параллельно касательной в точке соприкосновения тел А (рис.5.20). При чистом качении (без скольжения) и при соприкосновении тел только в точке А возникает пара сил (\bar{Q}, \bar{F}_k) , где \bar{F}_k - сила трения качения, а силы \bar{P} и \bar{N} уравновешиваются. Эта пара катит каток при сколь угодно малой \bar{Q} .

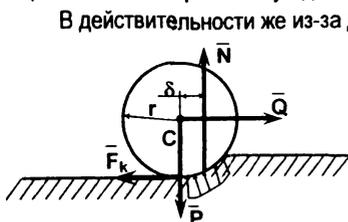


Рис 5.21

В действительности же из-за деформации тел касание будет не в одной точке А, а по некоторой поверхности, то есть возникает сопротивление качению (рис.5.21).

Сопротивление, возникающее при качении катка, называется *трением качения*.

Из-за деформации нормальная составляющая реакции \bar{N} сместится в сторону действия силы \bar{Q} на величину δ .

Таким образом на каток будут действовать две пары сил: (\bar{Q}, \bar{F}_k) и (\bar{P}, \bar{N}) . Моменты этих пар определяются

$$M_{\text{де}} = F_k \cdot R; \quad M_c = N \cdot \delta,$$

где $M_{\text{де}}$ - движущий момент, M_c - момент сопротивления качению.

Для того, чтобы каток оставался неподвижным (предельный случай)

$$F_k = \frac{\delta}{r} N. \quad (5.7)$$

Сила \bar{F}_k называется *силой трения качения*, δ — *коэффициентом трения качения* (его размерность [м]), и величина определяется для каждого материала из справочника.

Условие качения тела

$$M_{\text{де}} \geq M_c.$$

Сравнивая (5.7) и (5.5), видим, что силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$ и \bar{F}_k отличаются коэффициентами f и δ/r . В связи с тем, что величина δ/r много меньше f , в инженерной практике целесообразно и экономически обосновано применение трения качения.

Значения δ для наиболее используемых материалов:

металл/металл $\delta=0,001 \div 0,005$ м; дерево/дерево $\delta=0,05 \div 0,08$ м.

ГЛАВА VI. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

Силы произвольно расположенные в пространстве при действии на тело образуют пространственную произвольную систему сил.

Для проведения статических расчетов здесь необходимо иметь дело с векторными моментами пар сил, сил относительно центра, алгебраическими моментами сил относительно оси.

6.1. Векторный момент силы в пространстве относительно центра

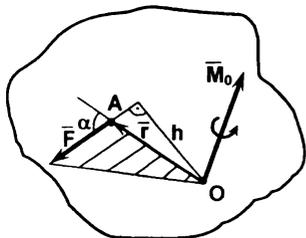


Рис 6.1

Пусть в пространстве имеется сила \vec{F} , приложенная в точке A . Возьмем некоторый центр O (рис 6.1).

Векторным моментом силы \vec{F} относительно точки O в пространстве называется вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, перпендикулярный плоскости, проходящей через вектор \vec{F} и центр O и направленный так, чтобы поворот плоскости был виден с его конца происходящим против хода часовой стрелки:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (6.1)$$

то есть момент можно представить в виде векторного произведения, где модуль этого произведения определяется

$$M_O(\vec{F}) = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin(\widehat{r, \vec{F}}) = r \cdot F \sin \alpha = F \cdot h.$$

Здесь h называется плечом силы.

При решении задач векторным моментом силы не оперируют (он необходим для доказательства теорем, общих выводов и т.д.), для этого используют момент силы относительно оси.

6.2. Момент силы относительно оси

Пусть в пространстве задана сила \vec{F} , которая приложена в точке A . Проведем ось Oz и плоскость перпендикулярную оси (рис.6.2).

Моментом силы относительно оси называется момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{np} \cdot h = 2\text{пл.} \Delta O A_1 B_1, \quad (6.2)$$

где \vec{F}_{np} — вектор проекции силы на плоскость перпендикулярную оси z .

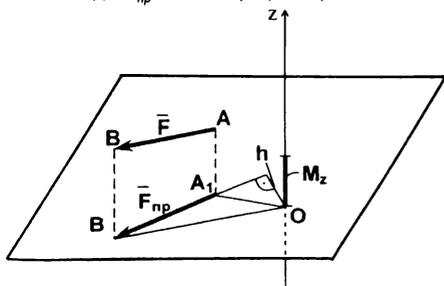


Рис 6.2

Момент силы относительно оси положителен, если вектор проекции силы \vec{F}_{np} стремится повернуть тело против часовой стрелки при наблюдении с конца оси.

$M_z(\vec{F})$ является отрезком на оси Oz (рис.6.2).

Из формулы (6.2) можно получить важные свойства момента силы относительно оси:

- момент силы относительно оси ра-

вен нулю, если сила параллельна оси;

- момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось.

Объединяя эти два свойства, можно сказать, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

6.3. Связь между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр

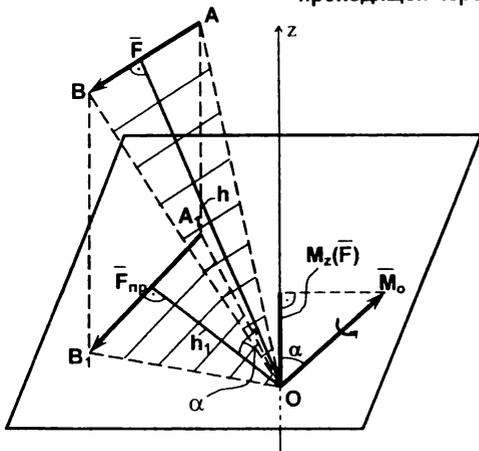


Рис 6.3

Пусть имеем силу \vec{F} и ось Oz (рис.6.3). Проведем плоскость, перпендикулярную Oz . Тогда момент силы \vec{F} относительно точки O , лежащей на оси, будет

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h,$$

а относительно оси OZ

$$M_z(\vec{F}) = F_{np} \cdot h_1, \text{ или}$$

$$M_O(\vec{F}) = 2\pi \Delta OAB; \quad M_z(\vec{F}) = 2\pi \Delta OA_1B_1,$$

Однако площадь ΔOA_1B_1 есть проекция ΔOAB на плоскость и площадь ΔOA_1B_1 есть произведение площади ΔOAB на косинус угла α между плоскостями этих треугольников. Так как угол α является также углом между вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ и осью Oz , то

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cdot \cos \alpha, \quad (6.3)$$

и момент силы относительно оси выражается проекцией на эту ось векторного момента силы относительно любой точки на оси.

6.4. Формулы моментов силы относительно осей координат

Используя связь момента силы относительно оси с векторным моментом силы относительно точки на оси, можно получить формулы моментов силы относительно осей координат.

Пусть задана сила \vec{F} в пространстве. Выберем систему координат $Oxyz$ (рис.6.4) и покажем векторы \vec{r} и $\vec{M}_O(\vec{F})$.

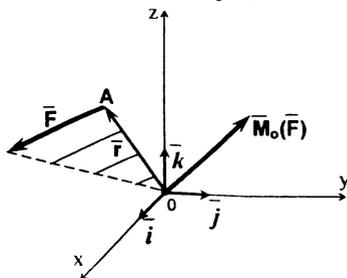


Рис 6.4

Представим векторы $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}_O(\vec{F})$ в виде:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k};$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k};$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k},$$

где F_x, F_y, F_z - проекции силы на оси координат; x, y, z - проекции радиус-вектора \vec{r} ; M_x, M_y, M_z - проекции момента $\vec{M}_O(\vec{F})$ на координатные оси.

Тогда

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

По этой формуле можно вычислить проекции вектора $\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F})$ на оси координат:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \\ M_y &= M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; \\ M_z &= M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x; \end{aligned} \quad (6.4)$$

и затем определить модуль $M_0(\vec{F})$ и направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} M_0(F) &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \\ \cos \alpha &= \frac{M_x(\vec{F})}{M_x}; \quad \cos \beta = \frac{M_y(\vec{F})}{M_y}; \quad \cos \gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{M_z}. \end{aligned} \quad (6.4^*)$$

6.5. Приведение силы в пространстве к заданному центру

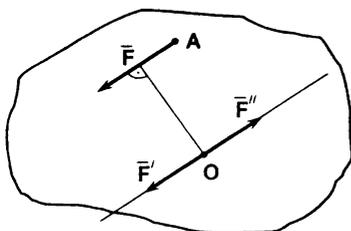


Рис 6.5

Пусть на твердое тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A (рис.6.5). Применим метод Пуансо. Через произвольный центр O проведем прямую, параллельную линии действия силы \vec{F} . В точке O приложим две уравновешенные силы \vec{F}' и \vec{F}'' , такие, что $F' = F'' = F$.

Силы \vec{F} и \vec{F}'' образуют пару, векторный момент которой равен векторному моменту силы \vec{F} относительно центра O (рис.6.6), т.е. $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$.

Таким образом, при переносе силы в пространстве в любую точку (точка приведения) необходимо приложить в этой точке силу и векторный момент этой силы относительно точки приведения.

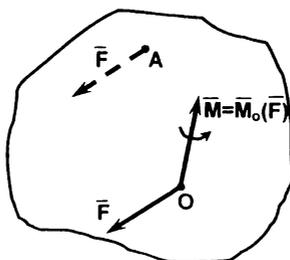


Рис 6.6

6.6. Приведение пространственной произвольной системы сил к заданному центру (основная теорема статики)

Пусть в пространстве задана некоторая произвольная система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, действующая на твердое тело (рис. 6.7). Возьмем некоторый центр O .

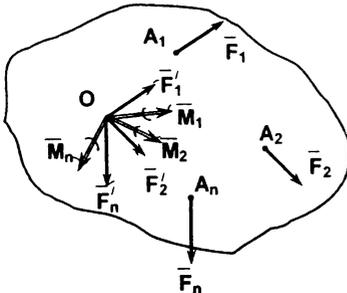


Рис 6.7

Применяя метод Пуансо к каждой силе, получим систему сходящихся сил $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ в точке O и систему пар сил $[(\vec{F}'_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}'_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}'_n, \vec{F}'_n)]$ с векторными моментами, равными векторным моментам сил относительно точки O .

Складывая силы, получим вектор

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (6.5)$$

Сложив векторные моменты, получим

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i), \quad (6.6)$$

где $\sum \vec{M}_i$ - сумма векторных моментов пар сил.

Вектор \vec{R} называется главным вектором пространственной системы сил, и он равен геометрической сумме всех сил.

Вектор \vec{M}_0 называется главным моментом заданной системы сил относительно центра O , и он равен геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O .

Вектор \vec{R} не зависит от выбора центра O , а величина момента \vec{M}_0 зависит от выбора этого центра.

Таким образом, можно сформулировать основную теорему статики для пространственной произвольной системы сил.

Систему сил произвольно расположенную в пространстве можно заменить одной силой, равной главному вектору системы, приложенному в центре приведения, и одной парой сил, векторный момент которой равен главному моменту сил относительно центра приведения.

6.7. Случаи приведения пространственной системы сил к заданному центру

Как и для случая плоской произвольной системы сил существует несколько случаев приведения системы сил и в пространстве.

I. $\vec{R} = 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$.

Система сил приводится к паре, момент которой равен главному моменту системы.

II. $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 = 0$.

Такая система сил приводится к равнодействующей, приложенной в ц. O .

III. $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$.

Здесь в свою очередь имеет место три случая:

а) $\vec{R} \perp \vec{M}_0$.

В этом случае система сил приводится к равнодействующей, приложенной уже не в центре O .

Доказательство:

Если $\vec{R} \perp \vec{M}_0$, следовательно пара сил, к которой приведена система сил, лежит в плоскости что и вектор \vec{R} .

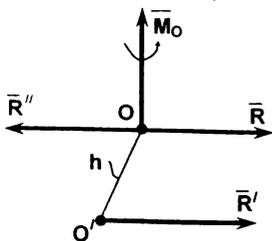


Рис 6.8

Силы пары \vec{R}' и \vec{R}'' выберем такими, чтобы $R' = R'' = R$ и расположим их как на рис.6.8. Плечо пары $h = \frac{M_0}{R}$. Исключая силы \vec{R} и \vec{R}'' как взаимноуравновешенные, получаем силу \vec{R}' , которая приложена в точке O_1 .

б) $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ и $\vec{R} \parallel \vec{M}_0$ (рис.6.9а).

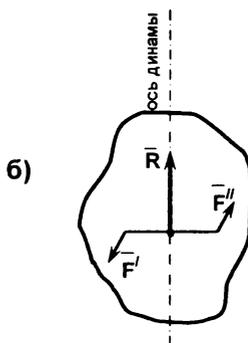
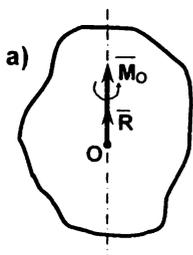


Рис 6.9

Заменим \vec{M}_0 парой сил (рис.6.9б).

В этом случае совокупность силы \vec{R} и пары сил с моментом \vec{M}_0 образуют так называемый динамичный винт (динама). Прямая, на которой расположены \vec{R} и \vec{M}_0 , называется осью динамы. Если такая система сил действует на твердое тело, то оно совершает сложное винтовое движение.

в) $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$, а \vec{R} и \vec{M}_0 направлены под любым углом α друг к другу.

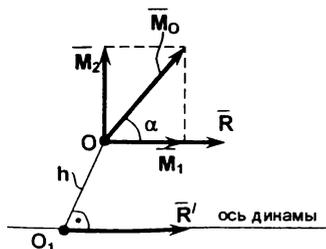


Рис 6.10

В этом случае абсолютно твердое тело под действием такой системы сил будет в покое.

Разложим вектор \vec{M}_0 на составляющие \vec{M}_1 по линии \vec{R} и вектор $\vec{M}_2 \perp \vec{R}$. Согласно условию такая система приводится к равнодействующей \vec{R}' приложенной в т. O_1 . Тогда вектора \vec{M}_1 и \vec{R}' , которые параллельны, образуют динаму, ось которой будет проходить через точку O_1 .

IV. Вектора \vec{R} и \vec{M}_0 одновременно равны нулю:

$$\vec{R} = 0; \vec{M}_0 = 0.$$

В этом случае абсолютно твердое тело под действием такой системы сил будет в покое.

6.8. Уравнения равновесия пространственной системы сил.

Для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент одновременно равнялись нулю.

Если система сил находится в равновесии, то согласно случаю IV

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_{ix} = 0 \text{ и } \vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.7)$$

Векторные равенства (6.7) выражают условие равновесия пространственной произвольной системы сил.

Введем декартовую систему координат X, Y, Z . Проектируя векторные равенства (6.7) на оси этой системы получим

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0; \quad M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0,$$

$$\text{откуда } R_x = \sum F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum F_{iz} = 0;$$

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad M_y = \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad M_z = \sum M_z(\vec{F}_i) = 0 - \text{одновременно.}$$

Согласно (6.7) получим 6 уравнений равновесия для пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; & \quad \sum M_x(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum F_{iy} = 0; & \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum F_{iz} = 0; & \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.9. Уравнение центральной оси

Центральной осью пространственной системы сил является ось динами. Составим ее уравнение в декартовой системе координат.

Пусть система сил приведена к центру O (\vec{R} и \vec{M}_0). Разложим \vec{M}_0 на составляющие \vec{M}_1 и \vec{M}_2 .

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2; \quad \vec{M}_1 = \vec{M}_0 - \vec{M}_2.$$

Вектора \vec{M}_2 и \vec{R} на основании случая III а приводятся к \vec{R}' , приложенной в точке O_1 (рис.6.11);

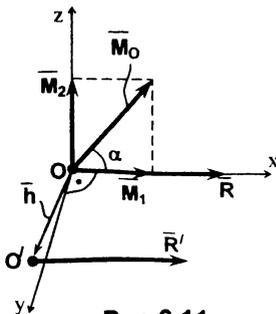


Рис 6.11

$$OO_1 = h = \frac{M_2}{R} = \frac{M_0 \sin \alpha}{R};$$

Определим положение точки O_1 вектором \vec{h} .

$$M_2 = \vec{h} \times \vec{R}'; \quad \text{т.к. } \vec{R} = \vec{R}', \text{ то } M_2 = \vec{h} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_0 = M_{0x} \vec{i} + M_{0y} \cdot \vec{j} + M_{0z} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{h} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k};$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \cdot \vec{j} + R_z \cdot \vec{k};$$

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_0 - \bar{h} \times \bar{R} = \bar{M}_0 - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{M}_0 - \bar{h} \cdot \bar{R} = \bar{M}_0 - [(y \cdot R_z - z \cdot R_y) \bar{i} + (z \cdot R_x - x \cdot R_z) \bar{j} + (x \cdot R_y - y \cdot R_x) \bar{k}].$$

Представляя вектор $M_{1x} \bar{i} + M_{1y} \bar{j} + M_{1z} \bar{k}$ и сравнив \bar{M}_0 и два последних выражения для \bar{M}_1 , следует:

$$M_{1x} = M_{0x} - (y \cdot R_z - z \cdot R_y);$$

$$M_{1y} = M_{0y} - (z \cdot R_x - x \cdot R_z);$$

$$M_{1z} = M_{0z} - (x \cdot R_y - y \cdot R_x).$$

Векторы \bar{M}_1 и \bar{R} коллинеарны, а значит их проекции пропорциональны, т.е.

$$\frac{M_{1x}}{R_x} = \frac{M_{1y}}{R_y} = \frac{M_{1z}}{R_z}; \text{ или } \frac{M_{0x} - (y \cdot R_z - z \cdot R_y)}{R_x} = \frac{M_{0y} - (z \cdot R_x - x \cdot R_z)}{R_y} = \frac{M_{0z} - (x \cdot R_y - y \cdot R_x)}{R_z}. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) является уравнением прямой, пересекающей координатные оси. Это уравнение центральной оси.

Принимая последовательно $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ получим координаты точек пересечения оси с координатными плоскостями.

Для случая IIIа, когда $M_0 \perp \bar{R}$, т.е. $\bar{M}_1 = 0$ получаем уравнение линии действия равнодействующей.

$$\frac{M_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (z \cdot R_x - x \cdot R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (x \cdot R_y - y \cdot R_x)}{R_z} = 0 \quad (6.10)$$

6.10. Теорема Вариньона для произвольной системы сил в пространстве

Пусть на твердое тело действует пространственная система сил, которая имеет равнодействующую $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}$.

Теорема: Момент равнодействующей произвольной системы сил относительно некоторой оси равен сумме моментов отдельных сил системы относительно этой же оси.

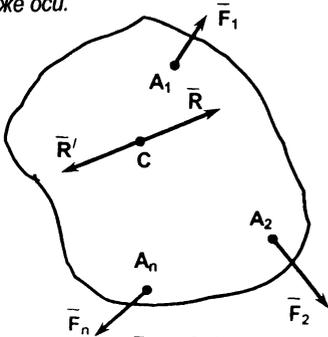


Рис 6.12

Доказательство: Приложим в т.С силу $\bar{R}' = -\bar{R}$. Т.к. силы \bar{R}' и \bar{R} уравновешенные, то система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}')$ находится в состоянии равновесия. Введем систему координат OXYZ. Тогда для этой системы сил можно составить уравнения моментов относительно любой оси, например, относительно оси OX.

$$\begin{aligned}\sum M_x(\bar{F}_i) + M_x(\bar{R}') &= 0; \\ \sum M_x(\bar{F}_i) &= -M_x(\bar{R}'); \\ -M_x(\bar{R}') &= M_x(\bar{R}).\end{aligned}$$

или

$$\boxed{M_x(\bar{R}) = \sum M_x(\bar{F}_i).}$$

Это справедливо и для моментов сил относительно других осей.

6.11. Несвободное тело в пространстве

Иногда связи, наложенные на твердое тело, закрепляют его не жестко. Тогда часть уравнений равновесия, составленных на основании аксиомы связи, не будут содержать неизвестные реакции. Эти уравнения будут накладывать ограничения на активные силы, действующие на тело.

Определение. Уравнения равновесия несвободного тела, закрепленного не жестко, составленные на основании аксиомы связей и не содержащие неизвестные реакции называются условиями равновесия несвободного тела.

6.11.1. Твердое тело с одной закрепленной точкой

Тело с одной закрепленной точкой имеет 3 степени свободы.

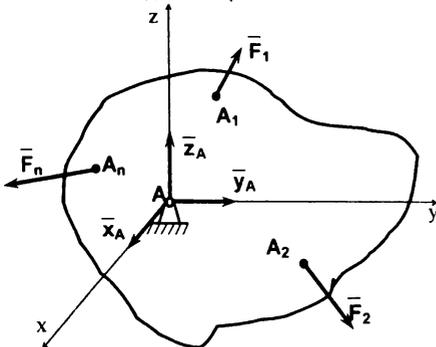


Рис 6.13

Пусть на тело, закрепленное в т.А с помощью сферического шарнира, действует произвольная пространственная система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$.

Если тело освободить от связи, то она заменяется составляющими реакции $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{z}_A$. Для этих реакций связи и системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, приложенных к телу, можно составить 6 уравнений равновесия.

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} + X_A &= 0; & \sum M_x(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum F_{iy} + Y_A &= 0; & \sum M_y(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum F_{iz} + Z_A &= 0; & \sum M_z(\bar{F}_i) &= 0.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Из первых 3-х уравнений можно определить X_A, Y_A, Z_A . А три уравнения моментов, т.е. в них не входят реакции связей, являются условиями равновесия для внешних сил, т.е. для равновесия тела с одной закрепленной точкой необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно трех координатных осей, проходящих через точку закрепления, равнялись нулю.

6.11.2. Тело, закрепленное в 2-х точках

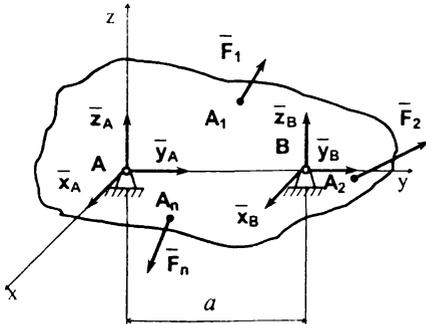


Рис 6.14

$$\begin{aligned}
 \sum F_{ix} + X_A + X_B &= 0; & \sum M_x(\bar{F}_i) + Z_B \cdot a &= 0; \\
 \sum F_{iy} + Y_A + Y_B &= 0; & \sum M_y(\bar{F}_i) &\neq 0; \\
 \sum F_{iz} + Z_A + Z_B &= 0; & \sum M_z(\bar{F}_i) - X_B \cdot a &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Уравнение $\sum M_y(\bar{F}_i) = 0$ не содержит реакций и оно является условием равновесия приложенных к телу сил. Из 4-го и 6-го уравнений определяем Z_B и X_B . Из 1-го и 3-го находим X_A и Z_A . Таким образом, остается одно уравнение, в котором две реакции Y_A и Y_B . Для этих реакций задача статически неопределима. Чтобы эта задача была статически определимой, можно, например, шаровой шарнир «В» заменить подшипником, тогда $Y_B = 0$ (рис. 6.15). Задача становится статически определимой.

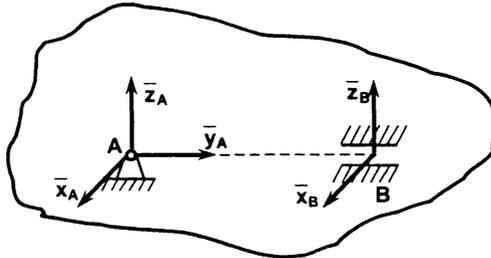


Рис 6.15

ГЛАВА VII. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛА.

7.1. Понятие центра параллельных сил

Пусть к твердому телу приложена в пространстве система параллельных одинаково направленных сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Равнодействующая этих сил

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

направлена также как силы и будет приложена в некоторой точке С (рис. 7.1).

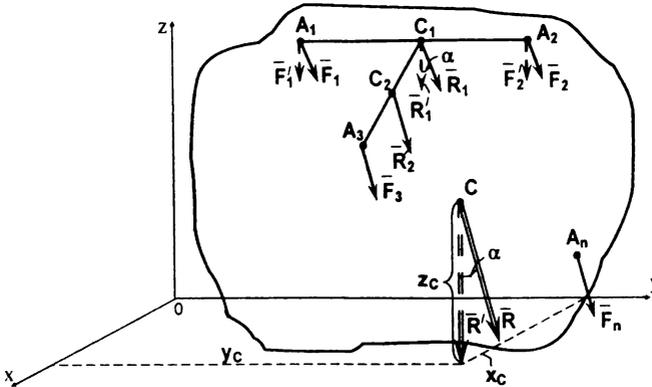


Рис 7.1

Покажем, что при повороте всех сил в одну сторону на некоторый угол α положение этой точки не изменится.

Сложим силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Их равнодействующая $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ будет приложена в точке C_1 , которая делит отрезок A_1A_2 на части, обратно пропорциональные силам

$$\frac{A_1C_1}{A_1C_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Повернем силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 в одну сторону на угол α_1 , тогда \vec{R}_1 также повернется на этот угол α , но положение точки C_1 не изменится.

Сложим теперь силы \vec{R}_1 и \vec{F}_3 . Равнодействующая $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3$ будет приложена в точке C_2 на отрезке A_3C_1 . Положение этой точки не изменится, если силы также повернуть на угол α .

Поступая аналогично с оставшимися силами, придем к равнодействующей \vec{R} , приложенной в точке С.

Таким образом, точка С, в которой приложена равнодействующая параллельных сил и которая не изменяет своего положения при повороте всех сил в одну и ту же сторону на одинаковый угол, называется *центром параллельных сил*.

Определим координаты этой точки.

Введем произвольную систему координат OXYZ. Координаты точек приложения сил будут $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$; $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ..., $A_n(X_n, Y_n, Z_n)$, $C(X_c, Y_c, Z_c)$.

Повернем силы так, чтобы они оказались параллельными оси OZ . По теореме Вариньона составим момент от \bar{R} относительно оси OY :

$$M_y(\bar{R}) = \sum M_y(\bar{F}_i),$$

то есть

$$R \cdot X_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n,$$

тогда

$$R x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i; \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{R}.$$

Теперь составим момент силы R относительно оси OX :

$$R \cdot Y_c = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n,$$

тогда

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{R}.$$

Для определения Z_c повернем все силы параллельно оси OY или OX . Составим момент силы \bar{R} относительно оси OZ . Получим

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{R}.$$

Таким образом, координаты центра параллельных сил определяются

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{R}; \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{R}; \quad Z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{R}. \quad (7.1)$$

Суммы $\sum F_i x_i$, $\sum F_i y_i$, $\sum F_i z_i$ называются статическими моментами системы параллельных сил относительно плоскостей YOX , XOZ , YOZ , соответственно.

7.2. Центр тяжести твердого тела

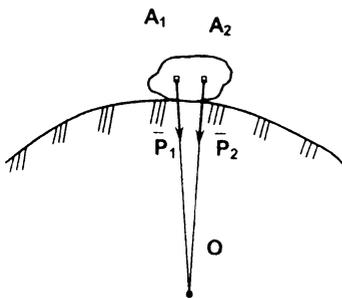


Рис 7.2

На все тела, находящиеся в области притяжения Земли, действует сила этого притяжения. Если тело разбить на элементарные частицы, то на каждую из них будут действовать силы притяжения, направленные к центру Земли (рис. 7.2). Так как расстояние между этими частицами намного меньше, чем радиус Земли ($R = 6378$ км), то эти силы с определенной долей погрешности можно считать параллельными. Следовательно, к данной системе сил можно применить результат, полученный выше (речь идет о центре параллельных сил). Сформулируем понятие о центре тяжести тела при принятых допущениях.

Центром тяжести тела называется точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести, приложенным к отдельным элементарным частицам тела.

Так как сила тяжести (вес тела) равна

$$\bar{P} = \sum \Delta p_i,$$

где Δp_i - вес элементарной частицы, то

$$X_c = \frac{\sum \Delta p_i x_i}{P}; \quad Y_c = \frac{\sum \Delta p_i y_i}{P}; \quad Z_c = \frac{\sum \Delta p_i z_i}{P}. \quad (7.2)$$

7.3. Центр тяжести однородных тел

Как известно, сила тяжести частицы определяется как

$$\Delta p_i = \Delta m_i g,$$

где Δm_i - масса частицы, а g — ускорение свободного падения.

Если частица имеет объем ΔV_i , то

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i,$$

где ρ_i — объемная плотность.

Если тело представляет материальную поверхность, то

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta S_i,$$

где ρ_i — поверхностная плотность, ΔS_i — площадь элемента поверхности.

Для материальной линии

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta L_i,$$

где ρ_i — линейная плотность, ΔL_i — дна элемента линии.

Для однородного тела плотность ρ одинакова во всех точках, и формулы, определяющие положение центра тяжести, запишутся в пределе с учетом (7.2):

для объема, учитывая что $\Delta p_i = g \rho_i \Delta V_i$):

$$X_c = \frac{\int x dv}{V}; \quad Y_c = \frac{\int y dv}{V}; \quad Z_c = \frac{\int z dv}{V}, \quad (7.3)$$

где V — объем всего тела;

для поверхности $\Delta p_i = g \rho_i \Delta S$:

$$X_c = \frac{\int x ds}{S}; \quad Y_c = \frac{\int y ds}{S}; \quad Z_c = \frac{\int z ds}{S}, \quad (7.4)$$

где S — площадь всей поверхности;

для линии $\Delta p_i = g \rho_i \Delta L$, тогда в пределе

$$X_c = \frac{\int x dl}{L}; \quad Y_c = \frac{\int y dl}{L}; \quad Z_c = \frac{\int z dl}{L}, \quad (7.5)$$

где L — длина линии.

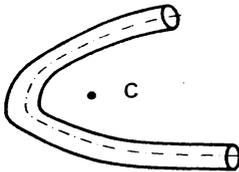


Рис 7.3

Числители в формулах (7.3), (7.4), (7.5) будем называть соответственно статическими моментами объема, площади или длины тела относительно точки, осей или плоскостей координат.

Интегралы в этих формулах могут быть заменены конечными суммами. Например, в формуле (7.4)

$$X_c = \frac{\int x ds}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta S_i}{S},$$

где ΔS_i - площадь бесконечно малой площадки.

Замечание. Центр тяжести тела зависит только от формы тела и может располагаться вне тела (рис. 7.3).

7.4. Статический момент площади относительно осей координат

Пусть тело имеет вид однородной тонкой пластинки любой формы (рис. 7.4). Для координат центра тяжести этой плоской фигуры согласно (7.4) имеем

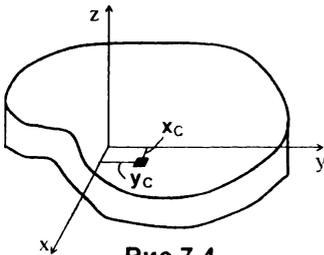


Рис 7.4

$$X_c = \frac{\int x ds}{S} = \frac{\sum x_i \Delta S_i}{S} \quad (7.6)$$

$$Y_c = \frac{\int y ds}{S} = \frac{\sum y_i \Delta S_i}{S}$$

Здесь ΔS_i — площадь бесконечно малой площадки, S — площадь всей пластинки.

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно какой-либо оси называется сумма произведений бесконечно малых площадок, составляющих фигуру, на расстояние от центра площадок до этой оси.

$$S_x = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot x_i. \quad (7.7)$$

Если какая-либо ось проходит через центр тяжести, то статический момент тела относительно этой оси равен нулю. Единица измерения статического момента площади [м³].

7.5. Методы определения центра тяжести

Рассмотренные ниже методы позволяют в некоторых случаях упростить определение центра тяжести тел.

1. Метод симметрии. Если тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит соответственно на плоскости, оси или в центре симметрии (рис. 7.5).

Пусть тело имеет, например, плоскость симметрии П.

Так как тело однородно, то обе его части имеют одинаковый вес и центры тяжести этих частей находятся на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии ($a_1 = a_2$).

Легко видеть, что равнодействующая этих сил будет приложена в середине отрезка C_1C_2 , то есть центр тяжести C будет лежать в плоскости симметрии.

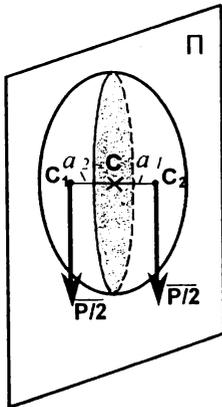


Рис 7.5

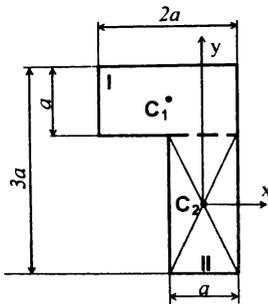


Рис 7.6

Если рассмотреть шар, куб, прямоугольник и т.д., то их центр тяжести будет находиться в геометрическом центре.

2. Метод разбиения тела на части. Положение центра тяжести можно определить, если тело или фигуру можно разбить на части, центры тяжести которых уже известны.

Пусть, например, имеется плоская фигура (рис. 7.6). Разобьем ее на два прямоугольника, центры тяжести которых находятся на пересечении диагоналей (свойство симметрии). Выберем систему координат с началом в точке C_2 . Тогда, согласно (7.4)

$$X_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{S}, \quad Y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2}{S}.$$

Площадь сечения всей фигуры

$$S = s_1 + s_2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2.$$

Координаты центров тяжести элементарных фигур

$$x_1 = -\frac{a}{2}; \quad y_1 = \frac{3}{2}a; \quad x_2 = 0; \quad y_2 = 0.$$

Тогда по формуле (7.4)

$$X_c = \frac{2a^2 \left(-\frac{a}{2}\right) + 2a^2 \cdot 0}{4a^2} = -\frac{a}{4}, \quad Y_c = \frac{2a^2 \cdot \frac{3}{2}a + 2a^2 \cdot 0}{4a^2} = \frac{3}{4}a.$$

Откладывая в масштабе X_c и Y_c , получим положение центра тяжести C .

3. Метод отрицательных масс. По сути это тот же метод разбиения тела на части. Пусть тело имеет полость, в которой нет массы (рис. 7.7). Обозначим центр тяжести тела, заполненного массой C , а его площадь S , центр тяжести сплошной фигуры (без полости) обозначим C_1 , а ее площадь $s_1 = s + s_2$. Пустая полость имеет центр тяжести C_2 и площадь s_2 . Тогда на основании (7.6) получим

Тогда

$$X_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{S}; \quad Y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2}{S},$$

где $S = s_1 - s_2$ - площадь тела, заполненного массой.

Координаты центров тяжести элементарных фигур

$$x_1 = 2a; \quad y_1 = 2a; \quad x_2 = 2a + \frac{a}{2}; \quad y_2 = 2a + \frac{a}{2}; \quad s_1 = (4a)^2; \quad s_2 = a^2$$

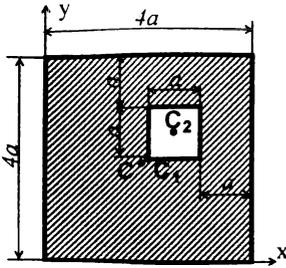


Рис 7.7

Окончательно

$$X_c = \frac{16a^2 \cdot 2a - a^2 \cdot 2,5a}{15a^2} = 1,97a,$$

$$Y_c = \frac{16a^2 \cdot 2a - a^2 \cdot 2,5a}{15a^2} = 1,97a.$$

7.6. Центры тяжести некоторых фигур

Определим центры тяжести фигур, которые часто используются в инженерной практике.

7.6.1. Центр тяжести треугольника

Разобьем треугольник на узкие полоски, параллельные стороне AC (рис. 7.8). Приближенно эти полоски можно считать прямоугольниками ввиду их малости. Для таких фигур положение центра тяжести известно. Обобщая это для каждой полоски, видим, что центр тяжести треугольника будет лежать на медиане BE. Выполнив такой прием в двух других направлениях (разбиение осуществляется параллельно AB и BC), убеждаемся, что центр тяжести должен лежать и на двух других медианах AF и CK. Т. Обобщая заключаем, что центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан.

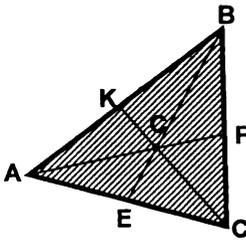


Рис 7.8

$$CE = \frac{1}{3} BE; \quad BC = \frac{2}{3} BE;$$

$$CF = \frac{1}{3} AF, \text{ и т.д.}$$

7.6.2. Центр тяжести дуги окружности

Установим центр тяжести однородной дуги окружности AB, имеющей угол 2α (рис. 7.9). Начало координат выберем в центре окружности. Тогда центр тяжести будет находиться на оси симметрии Oх. В этом случае $y_c = 0$ и необходимо определить только координату x_c .

Разобьем дугу AB на элементы ΔL_i . Как известно, центр тяжести однородной линии определяется по формуле (7.5) и для дуги AB

$$X_c = \frac{1}{L_{AB}} \int_{AB} x dl$$

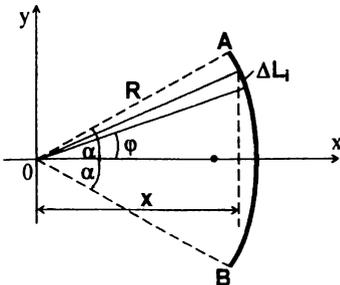


Рис 7.9

При достаточном уменьшении элемента ΔL_i его положение определяется углом φ . Координата центра тяжести элемента ΔL_i $x = R \cos \varphi$, а его длина $dL = R d\varphi$. Подставив эти значения в подынтегральное выражение, получим

$$\int_{AB} x dl = \int_0^\alpha R \cos \varphi R d\varphi = 2R^2 \sin \alpha.$$

Длина же дуги окружности $L_{AB} = 2\alpha \cdot R$. Тогда

$$X_c = \frac{1}{L_{AB}} \int_{AB} x dl = \frac{2R^2 \sin \alpha}{2\alpha R} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}, \quad (7.8)$$

где угол α – в радианах.

Следовательно, центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии и отстоит от центра окружности на расстояние X_c от центра окружности.

7.4.3. Центр тяжести кругового сектора

Рассмотрим круговой сектор (рис. 7.10). Проведем оси координат (ось Ox — ось симметрии). Разобьем сектор на одинаковые элементарные секторы. Вследствие малости каждого сектора, его основание можно считать прямолинейным, т.е. приближенно элементарный сектор можно считать равнобедренным треугольником, центр тяжести которого лежит на расстоянии $\frac{2}{3}R$ от вершины. На таком же расстоянии лежат и цен-

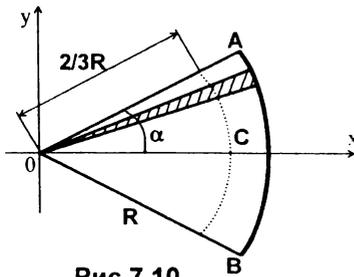


Рис 7.10

тры тяжести остальных элементарных секторов. Таким образом, центр тяжести всего сектора совпадает с центром тяжести дуги окружности радиусом $2R/3$ с центральным углом 2α . Центр тяжести этой дуги находится по формуле (7.8). Тогда центр тяжести кругового сектора

$$X_c = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} \quad (7.9)$$

7.4.4. Центр тяжести полуокруга

Рассмотрим полуокруг радиуса R (рис. 7.11). Полуокруг получается из кругового сектора, если принять $2\alpha = \pi$.

Вследствие этого центр тяжести полуокруга можно определить по формуле (7.9), то есть

$$X_c = \frac{2 R \sin \pi / 2}{3 \pi / 2} = \frac{4 R}{3 \pi} \quad (7.10)$$

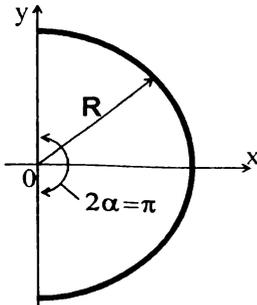


Рис 7.11

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I. Исходные положения статики	4
1.1. Основные понятия	4
1.2. Аксиомы статики	5
1.3. Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей	6
Глава II. Система сходящихся сил	8
2.1. Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей силе	8
2.2. Проекция силы на координатные оси	9
2.3. Аналитический способ определения равнодействующей	10
2.4. Условия равновесия системы сходящихся сил	10
2.5. Теорема о равновесии трех непараллельных сил	11
Глава III. Система двух параллельных сил. Теория пар сил.	12
3.1. Приведение двух параллельных сил к равнодействующей	12
3.2. Теоремы о парах сил на плоскости	14
3.3. Условие равновесия системы пар сил на плоскости	16
Глава IV. Произвольная система сил на плоскости	17
4.1. Момент силы относительно точки на плоскости	17
4.2. Приведение силы на плоскости к заданному центру (метод Пуансо)	17
4.3. Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру	18
4.4. Случаи приведения плоской произвольной системы сил	19
4.5. Теорема Вариньона	19
4.6. Условия и уравнения равновесия плоской системы сил	20
Глава V. Некоторые приложения теорий плоских систем сил	21
5.1. Расчет плоских ферм	21
5.2. Распределенные силы	23
5.3. Реакция жесткой заделки	24
5.4. Равновесие системы тел. Расчет составных конструкций	24
5.5. Равновесие рычага	26
5.6. Устойчивость тел при опрокидывании	27
5.7. Трение	27
Глава VI. Пространственная произвольная система сил	31
6.1. Векторный момент силы в пространстве относительно центра	31
6.2. Момент силы относительно оси	31
6.3. Связь между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр	32
6.4. Формулы моментов силы относительно осей координат	32
6.5. Приведение силы в пространстве к заданному центру	33
6.6. Приведение пространственной произвольной системы сил к заданному центру	34
6.7. Случаи приведения пространственной системы сил к заданному центру	34
6.8. Уравнения равновесия пространственной системы сил	36
6.9. Уравнения центральной оси	36
6.10. Теорема Вариньона для произвольной системы сил в пространстве	37
6.11. Несвободное тело в пространстве	38
Глава VII. Центр параллельных сил. Центр тяжести тела	40
7.1. Понятие центра параллельных сил	40
7.2. Центр тяжести твердого тела	41
7.3. Центр тяжести однородных тел	42
7.4. Статический момент площади относительно осей координат	43
7.5. Методы определения центра тяжести	43
7.6. Центры тяжести некоторых фигур	45

Учебное издание

Виталий Михайлович Хвисевич

СТАТИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсу "Теоретическая механика"
для студентов технических специальностей

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 28.12.2006 г. Формат 60x84¹/₁₆. Усл. п.л. 2,79. Уч. изд. л. 3.
Заказ № 1152. Тираж 150 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

ISBN 985-493-052-1



9 789854 930527