

А. Н. Прокопеня, А. В. Чичурин

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ
MATHEMATICA
К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Допущено Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
университетов и технических высших
учебных заведений.

МИНСК
БГУ
1999

УДК [517.9: 681.3](075.8)

ББК 22.161.6я73

П 80

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *Н. А. Лукашевич*;
доктор физико-математических наук, профессор *Р. Краглер* (Германия);
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
Брестского государственного университета

Прокопеня А. Н., Чичурин А. В.

П 80 Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. Мн.: БГУ, 1999.— 265 с.

ISBN 985-445-234-4.

В пособии рассматривается применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Дается краткая характеристика пакета, а также описание основных встроенных функций и особенностей их использования. Приведены примеры решения основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, изучаемых в университетском курсе "Дифференциальные уравнения", с помощью рассматриваемого пакета с иллюстрацией основных моментов и особенностей. Показано использование графических возможностей пакета *Mathematica* для визуализации получаемых решений.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов университетов и технических вузов, специализирующихся по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Пособие может быть использовано при чтении общего курса "Дифференциальные уравнения" в вузах. Оно представляет интерес для научно-технических работников, занимающихся решением дифференциальных уравнений, а также для преподавателей лицеев и гимназий с углубленной программой изучения математики.

УДК [517.9: 681.3](075.8)

ББК 22.161.6+32.973.26-018.2я73

ISBN 985-445-234-4

© Прокопеня А.Н., Чичурин А.В., 1999

© БГУ, 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ

Система компьютерной алгебры *Mathematica* (далее в тексте при ссылках на пакет *Mathematica* будем использовать соответствующий русский термин *Математика*, набираемый курсивом), разработанная американской компанией Wolfram Research Inc., является одним из наиболее распространенных в мире программных средств, которое позволяет весьма эффективно выполнять как численные, так и символьные вычисления, имеет развитую двумерную и трехмерную графику и встроенный язык программирования высокого уровня. Указанные возможности *Математики* и удобный пользовательский интерфейс обеспечили ей широкое применение во многих областях современного естествознания. Появившись в 1988 году, за десять лет своего развития *Математика* стала одним из лидеров среди систем компьютерной алгебры и превратилась в мощный инструмент в руках инженера и научного работника, преподавателя и студента. Она позволяет переложить многие громоздкие и трудоемкие аналитические вычисления на компьютер и сосредоточиться на проблеме постановки задачи и анализе результатов ее решения. К ее достоинствам можно также отнести и обширные графические возможности.

Математика находит все более широкое применение и в учебном процессе. В настоящее время она используется более чем в пятидесяти крупнейших университетах мира, на ее базе разработаны сотни различных курсов для студентов и школьников. Кроме того, появились специальные версии пакета для студентов. Список научных монографий, посвященных приложениям *Математики*, составляет более двухсот наименований. Таким образом, *Математика* стала важной составной частью учебного процесса. Однако большая часть литературы по *Математике* издается на английском языке [17-27], что пока затрудняет ее использование студентами в странах СНГ. Лишь в последнее время в России появилось несколько книг [1, 15, 16], в которых достаточно полно описан пакет *Математика* и его возможности. При этом русскоязычная литература, посвященная приложениям *Математики*, практически отсутствует.

Основная цель предлагаемого пособия – познакомить пользователей Беларуси и стран СНГ с пакетом *Математика* и его возможностями и научить его применению для решения основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что во многих случаях такие решения могут быть легко найдены с помощью соответствующих

встроенных в *Математику* функций. Однако применяемый при этом способ решения уравнения остается для пользователя тайной. Поэтому в пособии детально рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений с использованием *Математики* для символьных вычислений и преобразований уравнений к виду, удобному для интегрирования. Многочисленные примеры показывают, что при объединении теории дифференциальных уравнений с возможностями *Математики* удастся проинтегрировать даже такие уравнения, которые не решаются непосредственно с помощью встроенных функций. Изложение базируется на версии *Математики* 3.0, которая позволяет использовать стандартные обозначения для математических объектов. Вся книга представляет собой обычный документ типа Notebook, получаемый при работе с пакетом *Математика* 3.0.

Пособие состоит из введения в *Математику* и восьми глав. Во вводной главе дается общая характеристика пакета и обсуждаются некоторые особенности его использования. Следует отметить, что *Математика* представляет собой очень обширную систему, фирменное описание ее третьей версии [17], например, составляет около тысячи четырехсот страниц. Поэтому во вводной главе приводятся лишь необходимые для работы с пакетом сведения и рассматриваются основные встроенные функции, которые затем используются в последующих главах. Большое количество примеров демонстрирует применение *Математики* для выполнения численных и символьных вычислений, а также для визуализации математических объектов.

В первой главе рассматриваются некоторые проблемы, для анализа которых необходимо находить решения дифференциальных уравнений. На конкретных примерах показано, как можно использовать *Математику* для получения решения и его визуализации.

Вторая глава содержит основные понятия и определения, используемые в теории дифференциальных уравнений первого порядка, а также анализ дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Использование графических возможностей *Математики* позволяет прояснить геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка и его решения с помощью таких понятий, как "изоклина", "поле направлений", "интегральная кривая".

В третьей главе рассматриваются основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешимых относительно производной.

В четвертой главе обсуждаются методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешимых относительно производной, а также рассматриваются некоторые геометрические

задачи, приводящие к таким уравнениям.

Пятая глава посвящена обсуждению проблемы существования и единственности решения дифференциального уравнения. Кроме того, показана реализация метода последовательных приближений для нахождения решения дифференциального уравнения с помощью *Математики*.

В шестой главе рассматриваются дифференциальные уравнения высших порядков, интегрируемые в квадратурах, а также методы решения дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Седьмая и восьмая главы посвящены анализу линейных дифференциальных уравнений и линейных систем соответственно и методам их интегрирования.

В начале каждой главы приводятся основные теоретические сведения, знание которых требуется для решения задач, а также обсуждаются некоторые общие вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем рассматриваются примеры, иллюстрирующие приведенный теоретический материал и демонстрирующие применение *Математики* для символьных преобразований и решения дифференциальных уравнений. В некоторых случаях проводится сравнение найденных решений с соответствующими результатами, получаемыми с помощью встроенных функций, а также приводятся графики полученных решений. В конце каждой главы приводится краткий перечень заданий для самостоятельного решения.

При написании пособия авторы придерживались программы курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям для университетов. Теоретические сведения по рассматриваемым вопросам можно найти в ряде учебников. Для удобства читателей в конце каждой главы приведен список наиболее распространенных учебников с указанием соответствующих глав и параграфов. Там же указаны разделы задачников, в которых можно найти дополнительные задания. Следует отметить, что часть рассмотренных в пособии уравнений взята из известных задачников А.М.Самойленко, С.А.Кривошеи, Н.А. Перестюка [11], Н.М.Матвеева [9], А.Ф.Филиппова [13], которые являются основными при изучении университетского курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям в Республике Беларусь, а также из задачника Л.И.Креера [8].

Авторы выражают искреннюю признательность профессору Н.А.Лукашевичу и профессору Р.Краглеру за полезные замечания и советы, способствовавшие улучшению данного пособия, а также профессору Н.И.Юрчку, оказавшему значительное содействие в опубликовании.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ*

Пакет *Математика (Mathematica)* представляет собой программное средство для выполнения математических расчетов на компьютере. *Математика* состоит из двух частей: Ядро (*Kernel*) и Оболочка (*Front End*). Ядро представляет собой программное обеспечение, непосредственно выполняющее расчеты, которое работает одинаково на всех типах компьютеров. Оболочка обеспечивает интерфейс между ядром и пользователем. В большинстве компьютерных систем используется интерфейс типа "Notebook", который позволяет создавать документы, содержащие текст, графики, звук и активные формулы или команды, обрабатываемые ядром. Такой документ можно читать на экране компьютера, редактируя и выполняя отдельные его части, сохранить на диске или распечатать на бумаге.

1. Основные элементы *Математики*

1.1. Численные расчеты

- а) В отличие от традиционного калькулятора, который имеет фиксированную степень точности вычислений, *Математика* может производить вычисления с любой точностью. Кроме того, *Математика* может производить расчеты с использованием большого числа специальных функций.
- б) С помощью *Математики* можно вычислять интегралы, численно решать алгебраические и дифференциальные уравнения и системы уравнений.
- в) *Математика* может обрабатывать численные данные, производя их статистический анализ, а также производить фурье-анализ, интерполяцию и аппроксимацию данных с помощью метода наименьших квадратов.
- г) *Математика* может работать не только с числами, но и с матрицами,

* Полужирным шрифтом в тексте набраны названия разделов меню, команд, функций и опций *Математики*, а также секции или ячейки, содержащие команды и формулы, предназначенные для обработки ядром.

Курсивом набраны название пакета *Математика*, а также математические формулы и определения. Кроме того, курсивом набраны метки секций *In[1]:=* и *Out[1]=*, содержащие соответственно данные, предназначенные для обработки ядром, и получаемые результаты.

обеспечивая выполнение всех операций линейной алгебры. Например, можно вычислить определитель матрицы, обратную матрицу, найти собственные значения и собственные векторы.

1.2. Символьные вычисления

а) *Математика* позволяет производить манипулирование алгебраическими формулами, т.е. разлагать на множители, раскрывать скобки и производить упрощение полиномов и рациональных выражений. Она также позволяет находить алгебраические решения полиномиальных уравнений и систем уравнений.

б) *Математика* может вычислять интегралы и производные, решать дифференциальные уравнения в символьной форме.

в) *Математика* может представлять функции в виде разложения в ряд, а также вычислять пределы.

1.3. Графические средства

а) *Математика* может строить двумерные и трехмерные графики функций, заданных явно или в параметрической форме, а также контурные графики и графики плотности. Аналогично можно изображать и численные данные.

б) В *Математике* существует много опций, позволяющих контролировать различные аспекты графиков. Например, для трехмерных графиков можно изменять цвет, тени, освещение и яркость поверхности и т.д.

в) *Математика* включает графический язык, позволяющий изображать геометрические объекты, используя стандартные фигуры: многоугольники, окружности и их дуги и т.д., а также вставлять текст в любое место двумерного или трехмерного графического объекта.

1.4. Программирование

а) Кроме встроенных функций, *Математика* позволяет определять дополнительные функции.

б) *Математика* включает в себя такой мощный элемент, как правила преобразования, которые позволяют преобразовывать символьные выражения из одной формы в другую.

в) *Математика* представляет собой язык программирования высокого уровня, на котором можно писать как малые, так и большие программы. Программы могут включать в себя обработку произвольных символьных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Введение в среду пакета Mathematica 2.2. М.: Филинь, 1997.
2. Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Мн.: Вышэйшая школа, 1990.
3. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
5. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
6. Горт В. Дифференциальные уравнения, М.-Л., ГТТЛ, 1933.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1961.
8. Креер Л.И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям. М.: Учпедгиз, 1940.
9. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Мн.: Вышэйшая школа, 1987.
10. Кожеро М.В., Мататов В.И., Прокашева В.А. Методические указания и задачи к контрольным работам по дифференциальным уравнениям. Мн.: БГУ, 1989. Ч. 1.
11. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958.
13. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1985.
14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957.
15. Воробьев Е.М. Введение в систему "Математика": Учебн. пособие. М.: Финансы и статистика, 1998.
16. Дьяконов В.П. Системы символьной математики *Mathematica 2* и *Mathematica 3*. М.: СК Пресс, 1998.
17. S.Wolfram. The *Mathematica* book. 3d ed.: Wolfram Media, Champaign, 1996.
18. Davenport J.H., Siret Y., Tournier E. Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation. Academic Press, New York, 1988.
19. Gray T.W., Glynn J. Exploring Mathematics with *Mathematica*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.
20. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff problems. Springer-Verlag, New York, 1987.
21. Maeder R. Programming in *Mathematica*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
22. Simmons G.F. Differential Equations: With Applications and Historical Notes. McGraw-Hill, New York, 1972.
23. Spiegel, Murray R. Mathematical Handbook of Formulas and Tables. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, New York, 1991.
24. Thomas, George B., Jr., Ross L. Finney. Calculus and Analytic Geometry. Addison-Wesley, Reading, MA, 8th edition, 1992.
25. Wolfram S. *Mathematica*: A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley, Reading, MA, 2nd edition, 1991.
26. Zwillinger Daniel. Handbook of Differential Equations. Academic Press, New York, 2nd ed., 1992.
27. Coombes K.R., Hunt B.R., Lipsman R.L., Osborn J.E., Stuck G.J. Differential Equations with *Mathematica*. John Wiley & Sons, New York, 1998.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Астроида 175, 176
- Визуализация 58, 65
- Вронскиан 205, 206, 208
- Выражения 76-84
 - полная форма 77
- Вычисление
 - пределов 36
 - произведений 41, 43
 - сумм 41, 42
- Вычисления
 - приближенные 14-16
 - символьные 7, 22
 - точные 14-16
- Графики функций
 - одной переменной 43-57
 - двух переменных 58-65
- Дифференциал полный 32
- Дифференциальное уравнение (ДУ)
 - Абея 144
 - Бернулли 137-139, 141, 148
 - в полных дифференциалах 150, 151
 - в точных производных 194
 - гипергеометрическое 219- 221, 224
 - Дарбу 147, 148
 - Клеро 161- 163, 165, 166, 168
 - Лагранжа 161-162, 167
 - линейное первого порядка 132
 - Лягерра 220
 - неоднородное линейное 201
 - обобщенно-однородные 129-131, 197, 198
 - однородные 122, 125, 196
 - однородные линейные 201
 - первого порядка 105
 - не разрешенные относительно производной 158
 - Риккати 140-142, 144
 - с разделяющимися переменными 113-115, 122
 - Эйлера 218
 - Эйри 225, 226
 - Эрмита 220
 - Якоби 220
- Дифференцирование функций 31, 32
- Задача Коши 111, 179, 182
- Изоклина 105, 106, 109, 110
- Интегральная кривая 105-108, 110, 172
- Интегрирование функций 31, 33, 34
- Интегрирующий множитель 134, 153-155
- Итератор 67
- Линейная зависимость функций 204-208
- Линейная независимость функций 204-207
- Метод
 - вариации произвольных постоянных 132
 - интегрируемых комбинаций 243
 - интегрирующего множителя 134, 153-155
 - последовательных приближений (Пикара) 181, 182
- Общий интеграл 174
- Огибающая 163, 164, 168
- Оператор
 - дифференцирования 20
 - подстановки 19
- Определитель Грамма 207
- Ортогональные траектории 170-172
- Поле направлений 105-107, 109
- Правила замен 19, 88
- Программирование 7, 65
- Преобразование
 - выражений 87
 - правила и шаблоны 87-93
- Разложение функций в ряд 36-38, 220-222
- Решение уравнений
 - символьное 28
 - численное 18
- Решение ДУ
 - общее 162, 210-213, 215-219
 - особое 114, 166
 - символьное 34

- частное 222-226
- численное 20, 21
Секция 8, 9
Система линейных ДУ 229, 230
Собственная пара матрицы 238
Собственное значение 238-242
Собственный вектор 238-242
Списки 65-74, 79
Справочная информация 11
Степенной ряд 37, 38
Теорема существования и
единственности решения 179

Условие Липшица 179-181

Функции

- встроенные 17, 18
- вводимые пользователем 83, 84
- чистые 85-87

Фундаментальная система решений
204, 230

Характеристическое уравнение 213-
216, 229, 231-233

Численные расчеты 12

SUMMARY

A.N.Prokopenya and A.V. Chichurin

USAGE of the SYSTEM *MATHEMATICA* for SOLVING ORDINARY. DIFFERENTIAL EQUATIONS

Textbook

Minsk, Publishing House of Belarus State University, 1999
ISBN 985-445-234-4

Usage of computer algebra system *Mathematica* for solving ordinary differential equations is discussed. The textbook consists of the following chapters: Preface, an introductory *Mathematica* chapter which is followed by eight special chapters devoted to various aspects of ordinary differential equations, an Index and a List of References.

The important features of *Mathematica* such as numerical and symbolic calculation, graphics and high level programming are thoroughly discussed and illustrated by many examples in an *introductory chapter*.

The *first chapter* considers several problems demonstrating the necessity to obtain solutions of differential equations for their analysis; several examples show how to use *Mathematica* in order to obtain and visualize the solutions.

The *second chapter* comprises the main notion and definitions used in the context of the theory of ordinary differential equations of first order. Differential equations with separable variables are analyzed too. With the usage of the graphical facilities of *Mathematica* a geometrical interpretation of the solutions of first order differential equations in terms of directional fields is demonstrated.

Reduction of the solution to quadratures through integration of first order differential equations is considered in the *third chapter*.

Differential equations of Lagrange and Clairaut type and some other first order differential equations which cannot be simply solved by their derivatives are investigated in the *fourth chapter*.

In the *fifth chapter* the problem of existence and uniqueness of the solution of differential equations is discussed.

Certain types of higher order differential equations which can be integrated in terms of quadratures are considered in the *sixth chapter*.

Chapters seven and eight are devoted to the integration of linear differential equations and systems respectively. Applying the capabilities of *Mathematica* to analytical transformations of functions and to reductions of differential equations to forms most convenient for integration is demonstrated.

An *Index* containing a list of the essential functions built into *Mathematica* supplements the textbook and obviously simplifies its usage.

The textbook contains all main types of differential equations which are studied in a university course on "Ordinary Differential Equations". Many examples demonstrate the usefulness of *Mathematica* in order to obtain solutions of differential equations and visualize them. This textbook will be very useful and interesting for students, instructors and researchers investigating the solution of differential equations.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ	6
1. Основные элементы <i>Математики</i>	6
2. Запуск <i>Математики</i> . Работа с программой. Выход	8
3. Получение справочной информации от <i>Математики</i>	11
4. Численные расчеты в <i>Математике</i>	12
5. Символьные вычисления	22
6. Графика в <i>Математике</i>	43
7. Элементы программирования	65
Глава 1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ	95
Упражнения	103
Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ	105
Упражнения	120
Глава 3. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ	122
3.1. Однородные уравнения	122
3.2. Обобщенные однородные уравнения	129
3.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	132
3.4. Уравнение Бернулли	137
3.5. Уравнение Риккати	140
3.6. Уравнение Абеля	144
3.7. Уравнение Дарбу	147
3.8. Уравнения в полных дифференциалах	150
3.9. Метод интегрирующего множителя	153
Упражнения	156
Глава 4. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ	158
4.1. Уравнения, не содержащие явно одного из переменных	158
4.2. Уравнения, разрешенные относительно y или x	159
4.3. Уравнения Лагранжа и Клеро	161
4.4. Геометрические задачи	170
Упражнения	176
Глава 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ	177
Упражнения	188
Глава 6. УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ В КВАДРАТУРАХ. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА	189
6.1. Уравнение вида $F(x, y^{(n)})=0$	189
6.2. Уравнение вида $F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$	190
6.3. Уравнения в точных производных	194
6.4. Уравнения, однородные относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$	196
6.5. Обобщенно-однородные уравнения	197

Упражнения	200
Глава 7. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ	201
7.1. Общие свойства линейных уравнений	201
7.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения, приводимые к ним	213
7.3. Специальные линейные уравнения второго порядка	219
Упражнения	226
Глава 8. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	228
8.1. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами	229
8.2. Матричный метод интегрирования линейных систем	237
8.3. Метод интегрируемых комбинаций	243
8.4. Элементы качественной теории линейных систем 2-го порядка с постоянными коэффициентами	248
Упражнения	251
ОСНОВНЫЕ ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИКИ	253
ЛИТЕРАТУРА	260
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	261
SUMMARY	263

Учебное издание

Прокопеня Александр Николаевич
Чичурин Александр Вячеславович

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ
МАТЕМАТИКА
К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *И. С. Александрович*
Технический редактор *И. П. Тихонова*
Корректор *Н. Н. Семашко*

Подписано в печать 08.09.99. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,6. Уч.-изд. л. 13,3. Тираж 500 экз. Зак. 647.

Белорусский государственный университет.
Лицензия ЛВ № 315 от 14.07.98.
220050, Минск, пр. Ф. Скорины, 4.

Отпечатано в Издательском центре БГУ.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.