МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рабочая тетрадь

студента ______________________________
____
группы_________________________________

Брест 2024

УДК 519.852 (076)

Рабочая тетрадь предназначена для подготовки студентов к выполнению аттестационных и контрольных работ. В первой части приведены варианты заданий по таким разделам математического программирования, как линейное программирование, включая транспортную задачу, и программирование на сетях и графах, изучаемым студентами экономических специальностей дневной и заочной форм обучения на втором курсе. Во второй части приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Составители: **Юхимук Т. Ю.**, старший преподаватель;
Юхимук М. М., старший преподаватель;
Махнист Л. П., к. т. н., доцент

Рецензент: **Басик А. И.**, доцент кафедры фундаментальной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина», к. ф.-м. н.

I. Практические задания

№ 1. Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y.

1. $Z = x + 2y$
$$\begin{cases} x + y \ge 2, \\ 2x - 3y \le 10, \\ 3x + 8y \le 40, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2. $Z = x - 4y$
$$\begin{cases} 4x + 3y \le 39, \\ x + 9y \ge 18, \\ x - 3y \ge -9, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

3. $Z = -2x - 4y$
$$\begin{cases} 3x - 5y \ge -10, \\ 4x - y \le 15, \\ x + 4y \ge 8, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

4. $Z = -3x + 2y$
$$\begin{cases} 3x + 8y \ge 32, \\ -x + 2y \le 12, \\ 7x + 4y \le 60, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

5. $Z = 2x + 7y$
$$\begin{cases} 5x - y \ge 5, \\ 4x - y \le 24, \\ -3x + 8y \le 40, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. $Z = x + 3y$
$$\begin{cases} 3x - 5y \le 12, \\ x + 2y \le 15, \\ 7x + 3y \ge 28, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

7. $Z = 2x - 4y$
$$\begin{cases} 4x + y \le 32, \\ -x + 6y \le 42, \\ 5x + 6y \ge 30, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

8. $Z = -3x - 3y$
$$\begin{cases} 2x + 3y \ge 6, \\ 3x - y \le 21, \\ -x + 3y \le 9, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

9. $Z = 4x - 2y$
$$\begin{cases} 5x - 6y \ge -18, \\ x + y \le 14, \\ x - y \le 10, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

10. $Z = -x - 2y$
$$\begin{cases} x + y \ge 2, \\ 3x - y \le 15, \\ -x + 7y \le 35, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

11. $Z = 6x + 5y$
$$\begin{cases} 2x - 3y \le 2, \\ 3x + 7y \le 49, \\ 5x + y \ge 5, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

12. $Z = -3x + 6y$
$$\begin{cases} 7x - 3y \ge 14, \\ x - y \le 6, \\ 5x + 3y \le 46, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

13. $Z = 3x - 2y$
$$\begin{cases} -3x + 5y \le 20, \\ 5x + 2y \le 39, \\ 2x + 7y \ge 28, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

14. $Z = 2x + y$
$$\begin{cases} x + y \ge 3, \\ 4x + 7y \le 49, \\ 3x - 4y \le 9, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

15. $Z = x - 4y$
$$\begin{cases} x + y \ge 1, \\ 3x - 10y \ge -10, \\ 4x - 3y \le 28, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

16. $Z = 4x + 2y$
$$\begin{cases} x + 2y \ge 4, \\ 7x + 2y \le 70, \\ -x + 4y \le 20, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

17. $Z = -x - 5y$
$$\begin{cases} x + 3y \ge 4, \\ 3x + 2y \le 24, \\ 5x - 3y \ge 2, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

18. $Z = -4x + 3y$
$$\begin{cases} 3x + y \ge 6, \\ x - y \le 3, \\ 3x - 8y \ge -21, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

19. $Z = 2x - 3y$
$$\begin{cases} 3x + 8y \ge 35, \\ -4x + 5y \le 16, \\ 7x + 3y \le 66, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

20. $Z = -5x - 3y$
$$\begin{cases} 3x + 5y \ge 15, \\ 3x - 2y \le 15, \\ 2x + 9y \le 72, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

21. $Z = x - 3y$
$$\begin{cases} -2x + y \le 4, \\ x + 3y \ge 6, \\ 3x + 4y \le 27, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

22. $Z = 4x + y$
$$\begin{cases} 3x - 4y \le 12, \\ 5x + 4y \ge 20, \\ x + 2y \le 14, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

23. $Z = -x - 5y$
$$\begin{cases} -3x + 5y \le 9, \\ 5x + 2y \le 47, \\ 2x + 7y \ge 25, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

24. $Z = x + 3y$
$$\begin{cases} x + 4y \ge 6, \\ 4x + y \ge 9, \\ 5x + 7y \le 40, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

25. $Z = 4x + 2y$
$$\begin{cases} -3x + 4y \le 2, \\ 4x - 3y \le 16, \\ -2x + 5y \ge 6, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

26. $Z = -3x + 2y$
$$\begin{cases} 6x - y \ge 6, \\ 2x + 3y \le 22, \\ x - 2y \le 4, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

27. $Z = 4x - 2y$
$$\begin{cases} -x + y \le 2, \\ 2x - 3y \le 10, \\ x + y \le 10, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

28. $Z = x - 3y$
$$\begin{cases} x - 2y \le 2, \\ x + 8y \le 32, \\ x + 2y \ge 6, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

29. $Z = 3x + y$
$$\begin{cases} x - y \le 8, \\ 2x + 9y \le 49, \\ 5x + 6y \ge 40, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

30. $Z = 4x + 2y$
$$\begin{cases} 7x - 3y \ge 7, \\ 4x - 3y \le 20, \\ 3x + 4y \le 40, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Решение

l_1 :

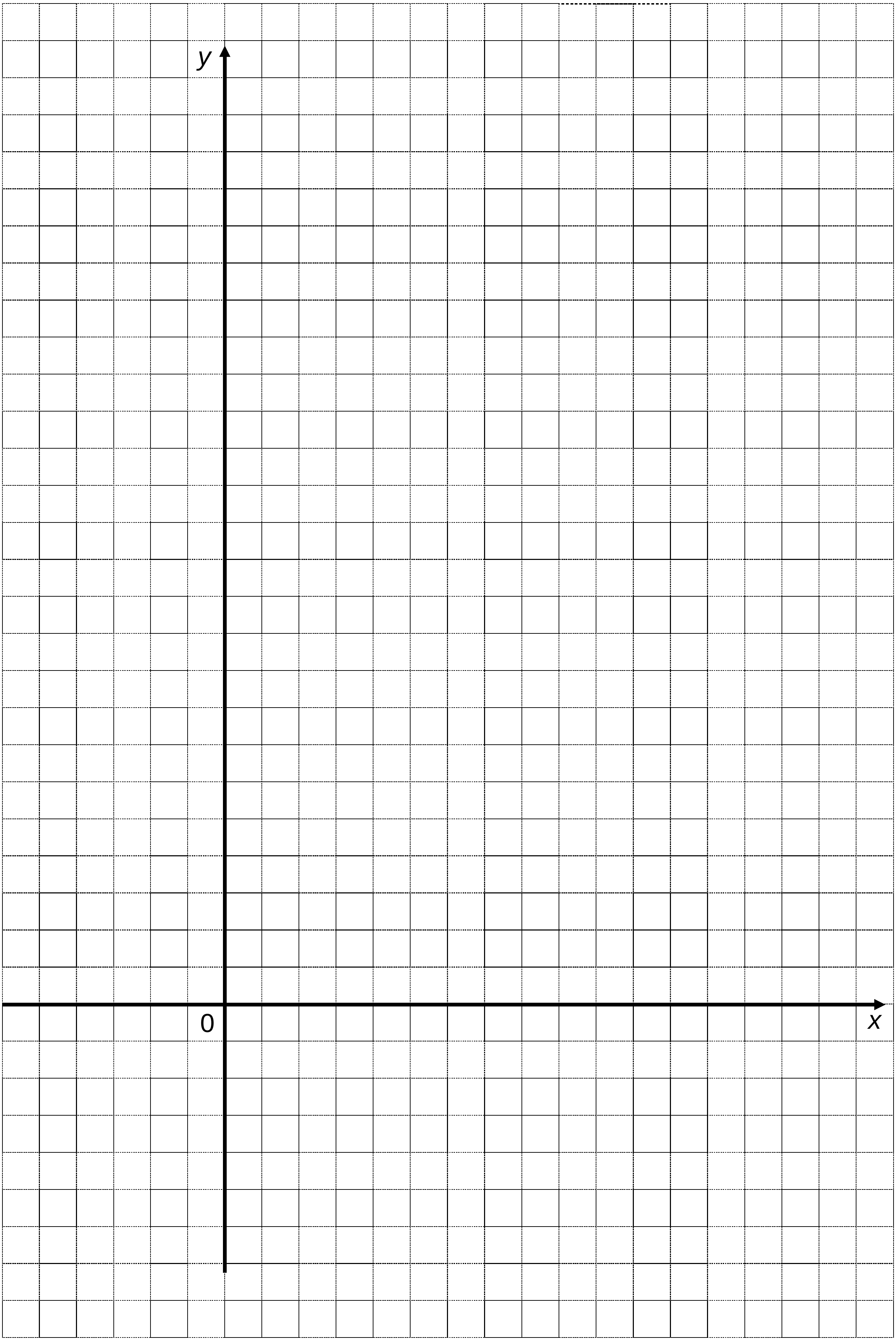
x		
y		

l_2 :

x		
y		

l_3 :

x		
y		


y
0
x

$\mathrm{grad}Z = (\quad ; \quad)$

$\min Z = Z(\quad ; \quad) =$

$\max Z = Z(\quad ; \quad) =$

№ 2. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

1. $\max Z = 3x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 36, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $\min Z = -2x_1 - 4x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 \le 22, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $\max Z = 2x_1 + 3x_2$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 27, \\ 3x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $\max Z = -x_1 + 3x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 23, \\ 3x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $\min Z = x_1 - 4x_2$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 27, \\ 3x_1 + x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $\min Z = -x_1 - 4x_2$
$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 63, \\ 2x_1 + x_2 \le 22, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. $\max Z = 3x_1 + 5x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $\min Z = -5x_1 + x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 \le 49, \\ 4x_1 + x_2 \le 37, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 25, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $\max Z = x_1 + 4x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 24, \\ -x_1 + 4x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $\min Z = -2x_1 - 5x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

13. $\max Z = -x_1 + 7x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 43, \\ x_1 - x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

14. $\min Z = -4x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 - 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15. $\max Z = -3x_1 + 4x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 4x_2 \le 28, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 55, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

16. $\min Z = 4x_1 - 5x_2$
$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 45, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

17. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 22, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

18. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$
$$\begin{cases} -3x_1 + 10x_2 \le 50, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 26, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

19. $\max Z = -3x_1 + 5x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 25, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21. $\max Z = 5x_1 + x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 10, \\ 8x_1 + x_2 \le 64, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

22. $\min Z = -2x_1 - 4x_2$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 \le 23, \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

23. $\max Z = 4x_1 - 2x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 4x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24. $\min Z = x_1 - 4x_2$
$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 3x_1 + x_2 \le 29, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25. $\max Z = -2x_1 + 4x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

26. $\min Z = -x_1 - 5x_2$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 17, \\ 4x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

27. $\max Z = 3x_1 - x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 49, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

28. $\min Z = x_1 - 5x_2$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ 3x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

29. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 13, \\ 3x_1 + x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

30. $\min Z = -4x_1 - 3x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + 5x_2 \le 23, \\ 6x_1 - x_2 \le 36, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

№	*БП*	С$_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*С/О*
0	x_3								
	x_4								
	x_5								
	Δ_j		$Z(X^0) =$						
1	x								
	x								
	x								
	Δ_j		$Z(X^1) =$						
2	x								
	x								
	x								
	Δ_j		$Z(X^2) =$						
3	x								
	x								
	x								
	Δ_j		$Z(X^3) =$						

№3. У поставщиков A_i имеется некоторая однородная продукция в количестве a_i, которую нужно перевезти потребителям B_j в количестве b_j по ценам c_{ij} денежных единиц за перевозку единицы продукции от A_i к B_j. Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки и полностью удовлетворяющий спрос потребителей. Начальный опорный план составить методом северо-западного угла.

1а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	7	3	1	200
A_2	5	6	5	3	150
A_3	4	1	2	1	250
b_j	90	210	100	200	

1б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	5	5	70
A_2	3	7	2	75
A_3	1	4	8	55
b_j	50	80	70	

2а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	1	3	1	150
A_2	4	5	4	3	170
A_3	2	1	6	3	180
b_j	40	160	150	150	

2б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	8	4	3	85
A_2	1	7	5	45
A_3	2	4	3	60
b_j	40	80	70	

3а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	8	5	1	140
A_2	2	5	3	2	160
A_3	1	3	5	1	200
b_j	100	90	120	190	

3б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	2	1	120
A_2	2	4	5	80
A_3	1	4	7	65
b_j	100	80	85	

4а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	6	3	2	250
A_2	3	2	8	1	120
A_3	1	5	6	4	170
b_j	130	140	110	160	

4б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	5	1	120
A_2	1	6	3	125
A_3	2	3	8	105
b_j	100	130	120	

5а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	6	3	1	100
A_2	3	7	5	3	350
A_3	4	1	2	4	150
b_j	50	250	190	110	

5б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	4	1	85
A_2	1	6	2	65
A_3	2	1	7	90
b_j	60	55	125	

6а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	6	4	1	175
A_2	1	4	4	2	250
A_3	2	1	1	3	225
b_j	120	230	160	140	

6б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	4	1	50
A_2	1	3	2	75
A_3	2	2	4	85
b_j	35	85	90	

7а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	8	3	1	255
A_2	3	6	5	2	185
A_3	3	1	5	1	140
b_j	135	145	230	70	

7б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	7	8	6	80
A_2	4	6	5	70
A_3	2	5	7	60
b_j	40	90	80	

8а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	3	2	5	250
A_2	1	6	5	5	170
A_3	2	1	5	3	200
b_j	140	160	150	170	

8б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	8	5	75
A_2	2	7	2	95
A_3	1	4	3	80
b_j	60	90	100	

9а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	6	5	2	150
A_2	1	4	6	6	140
A_3	5	2	3	2	110
b_j	120	70	120	90	

9б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	2	2	65
A_2	1	4	3	80
A_3	3	2	4	75
b_j	55	85	80	

10а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	1	5	2	175
A_2	3	5	8	3	265
A_3	4	2	6	4	190
b_j	140	130	210	150	

10б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	5	2	95
A_2	1	7	2	75
A_3	1	2	6	90
b_j	80	55	125	

11а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	2	2	4	370
A_2	1	5	4	4	160
A_3	3	1	5	2	95
b_j	250	140	160	75	

11б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	2	65
A_2	2	7	3	90
A_3	3	2	8	85
b_j	35	100	105	

12а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	9	3	1	140
A_2	4	7	5	2	170
A_3	4	2	6	2	200
b_j	135	85	150	140	

12б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	7	5	95
A_2	3	5	4	100
A_3	1	4	6	80
b_j	65	100	110	

13а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	1	2	2	90
A_2	4	5	7	3	160
A_3	4	1	3	6	130
b_j	140	90	70	80	

13б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	5	2	100
A_2	1	7	2	85
A_3	1	2	6	115
b_j	120	55	125	

14а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	1	4	5	135
A_2	4	5	7	1	180
A_3	2	1	4	2	145
b_j	95	150	85	130	

14б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	4	2	110
A_2	1	8	1	75
A_3	3	2	2	85
b_j	60	120	90	

15а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	4	5	1	110
A_2	3	4	6	5	180
A_3	2	2	3	4	150
b_j	80	120	140	100	

15б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	3	2	170
A_2	3	1	1	145
A_3	1	2	3	205
b_j	160	140	220	

16а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	2	3	1	90
A_2	3	5	6	3	125
A_3	4	2	1	4	155
b_j	150	35	105	80	

16б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	4	75
A_2	2	7	1	125
A_3	1	2	3	90
b_j	130	60	100	

17а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	4	1	2	75
A_2	4	5	7	2	135
A_3	1	1	3	4	150
b_j	125	60	95	80	

17б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	1	2	95
A_2	2	4	6	125
A_3	2	1	5	80
b_j	120	55	125	

18а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	2	1	2	125
A_2	4	5	7	1	155
A_3	2	2	3	4	220
b_j	150	80	130	140	

18б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	2	3	85
A_2	1	3	6	95
A_3	2	1	4	120
b_j	120	55	125	

19а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	7	3	1	165
A_2	1	6	1	1	150
A_3	2	2	4	8	135
b_j	105	130	105	110	

19б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	8	2	95
A_2	3	5	1	80
A_3	1	2	6	85
b_j	85	75	100	

20а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	5	1	2	205
A_2	2	2	1	1	160
A_3	7	1	7	3	235
b_j	185	120	145	150	

20б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	8	7	1	125
A_2	2	3	2	105
A_3	1	3	6	100
b_j	90	110	130	

21а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	1	140
A_2	5	7	5	1	160
A_3	1	1	7	3	200
b_j	130	120	110	140	

21б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	3	1	75
A_2	2	6	2	95
A_3	1	3	5	80
b_j	65	80	105	

22а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	1	1	1	200
A_2	3	4	3	5	350
A_3	1	2	4	7	150
b_j	130	270	220	80	

22б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	2	45
A_2	1	4	3	75
A_3	1	2	7	90
b_j	35	75	100	

23а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	2	1	3	120
A_2	6	5	4	2	150
A_3	1	3	1	3	130
b_j	140	75	105	80	

23б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	4	75
A_2	2	7	1	125
A_3	1	2	3	90
b_j	130	60	100	

24а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	3	1	75
A_2	6	4	7	1	85
A_3	1	3	1	1	120
b_j	110	70	60	40	

24б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	5	3	85
A_2	1	6	3	80
A_3	1	2	8	135
b_j	50	160	90	

25а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	3	1	2	110
A_2	3	5	3	1	140
A_3	1	3	8	7	200
b_j	150	130	90	80	

25б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	7	1	65
A_2	2	6	1	75
A_3	1	8	5	90
b_j	40	120	70	

26а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	3	2	5	130
A_2	4	8	5	2	145
A_3	1	1	7	2	225
b_j	100	100	120	180	

26б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	5	2	60
A_2	2	5	3	80
A_3	1	1	4	90
b_j	50	80	100	

27а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	4	2	1	135
A_2	2	5	3	4	185
A_3	1	3	6	7	220
b_j	180	200	70	90	

27б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	8	3	95
A_2	2	6	2	125
A_3	1	7	4	150
b_j	70	180	120	

28а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	3	1	1	100
A_2	1	3	6	2	140
A_3	3	2	7	4	180
b_j	90	110	120	100	

28б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	2	110
A_2	1	9	1	120
A_3	2	4	6	70
b_j	80	120	100	

29а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	8	1	3	160
A_2	1	9	1	2	210
A_3	2	1	4	3	230
b_j	100	300	120	80	

29б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	7	2	120
A_2	1	9	1	70
A_3	2	1	3	80
b_j	80	90	100	

30а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	7	1	3	220
A_2	1	9	3	2	180
A_3	2	6	4	5	270
b_j	150	270	160	90	

30б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	2	1	50
A_2	3	7	1	70
A_3	2	1	8	90
b_j	40	60	110	

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					
A_2					
A_3					
b_j					

Решение

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					
A_2					
A_3					
b_j					

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^2	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^3	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^4	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^5	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

$$X^* = X = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}; \; f_{\min} = f\left(X^*\right) = \qquad .$$

б)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1				
A_2				
A_3				
b_j				

Решение

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1				
A_2				
A_3				
b_j				

X^0	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

X^1	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

X^2	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

X^3	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

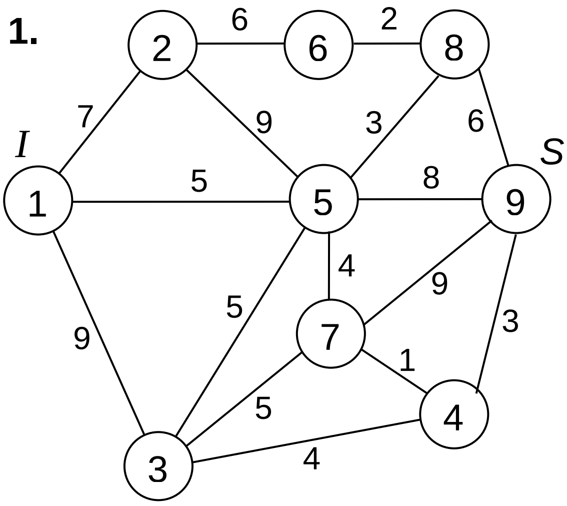
X^4	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

X^5	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

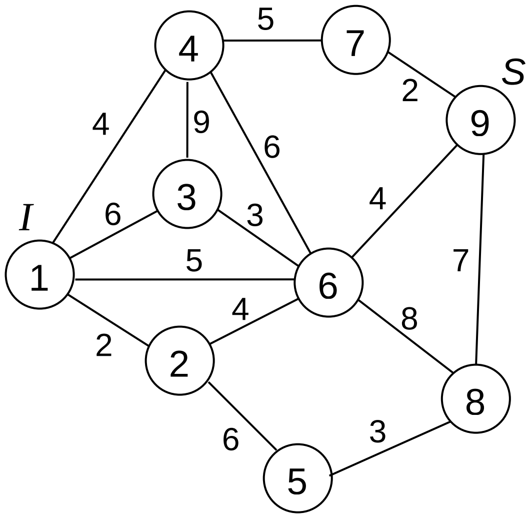
$$X^* = X = \left[\quad \right]; \; f_{\min} = f\left(X^*\right) = \quad .$$

№ 4. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

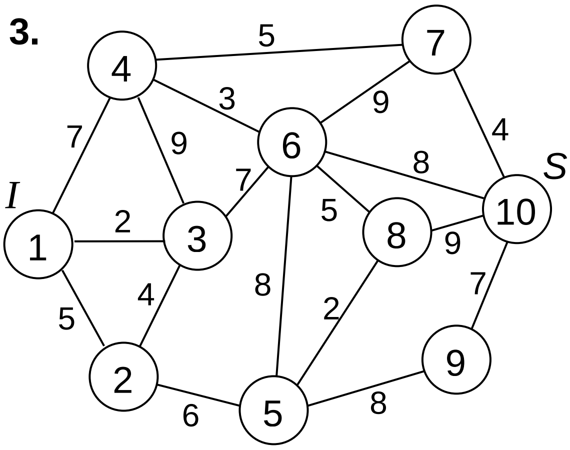
1.



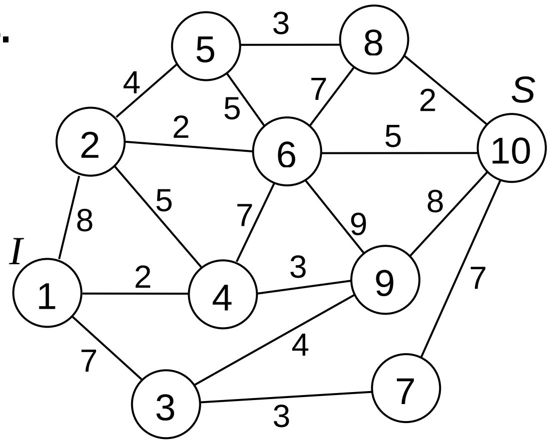
2.



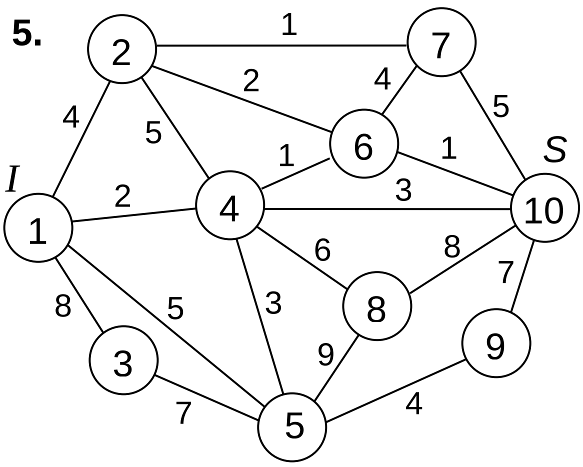
3.



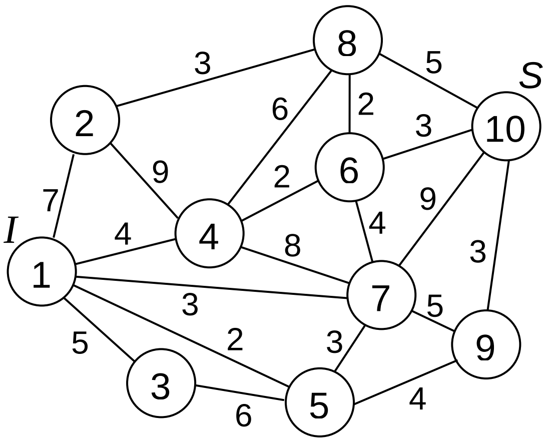
4.



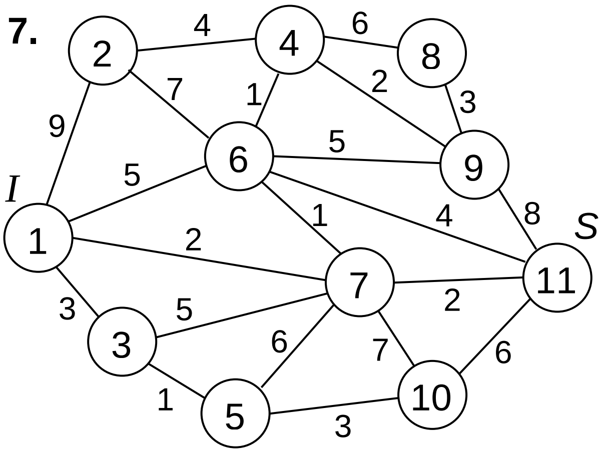
5.



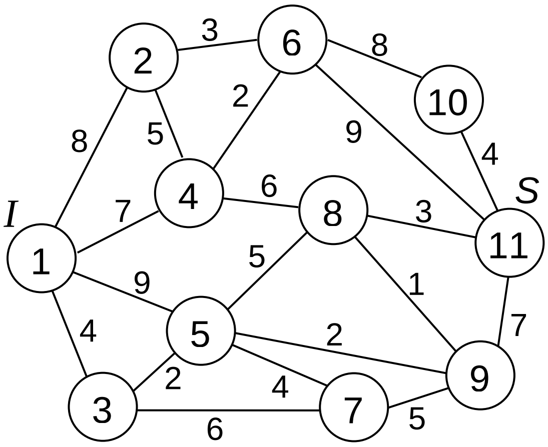
6.



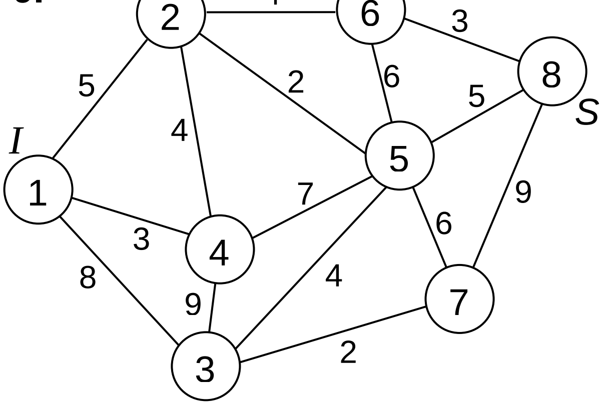
7.



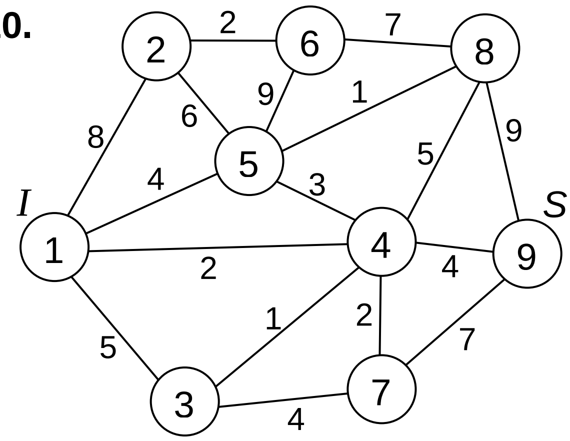
8.



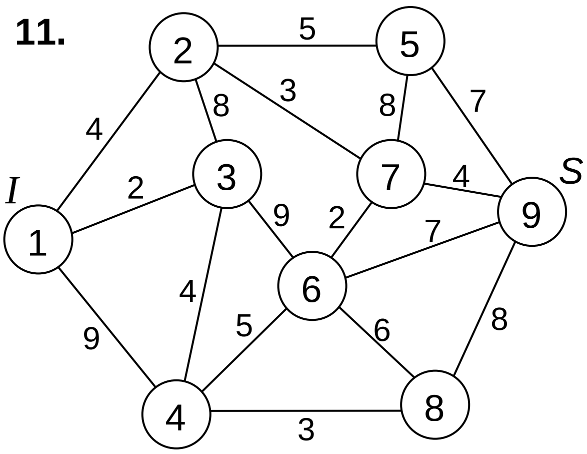
9.



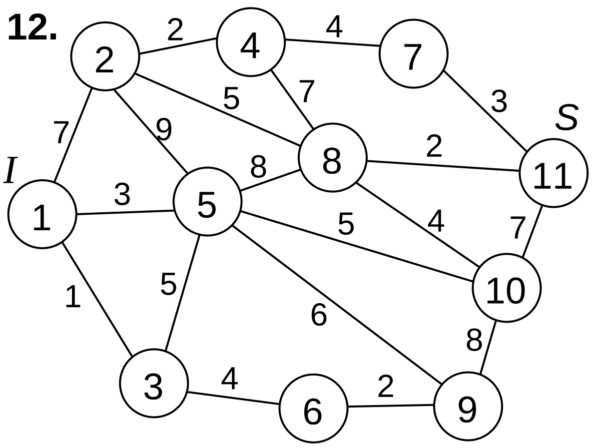
10.



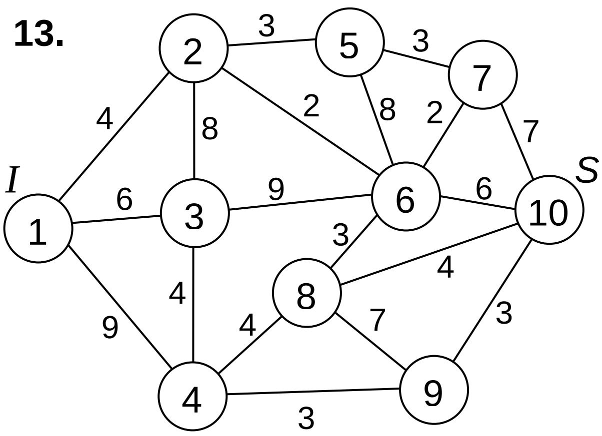
11.



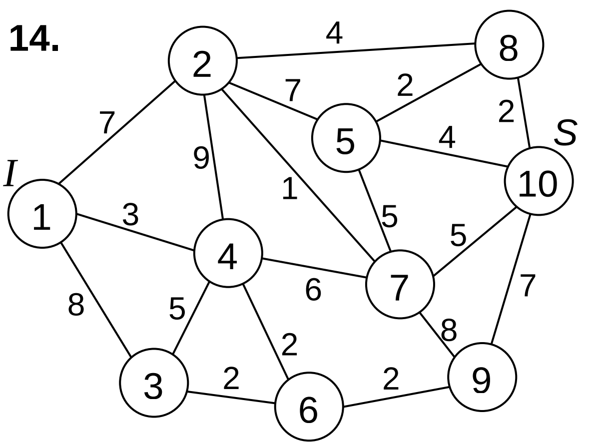
12.



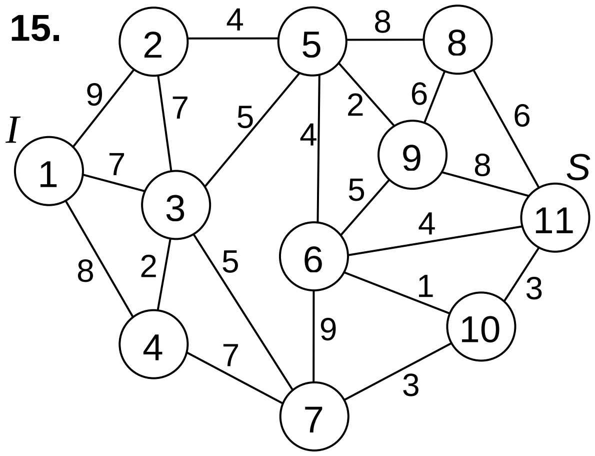
13.



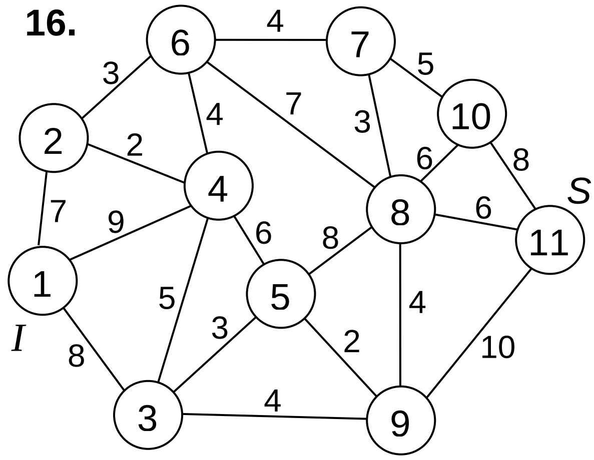
14.



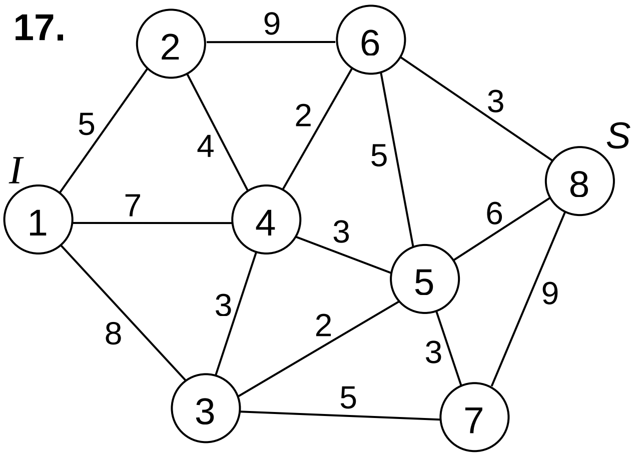
15.



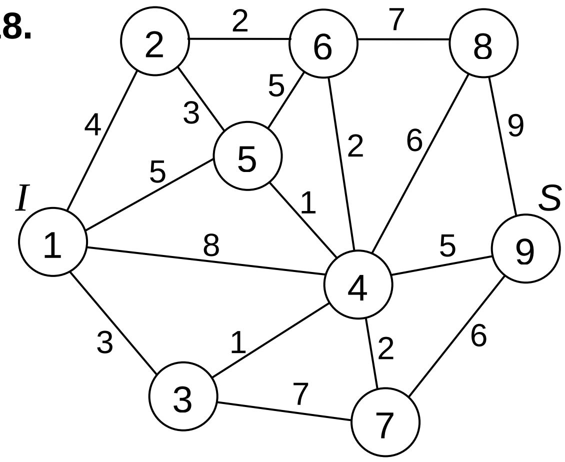
16.



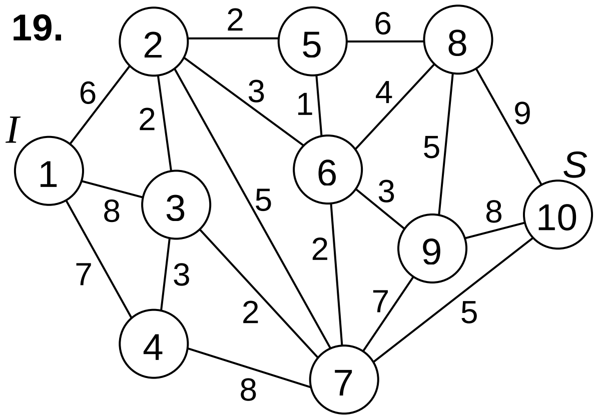
17.



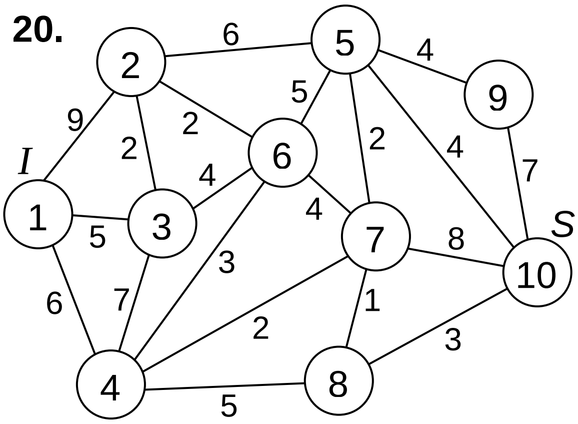
18.



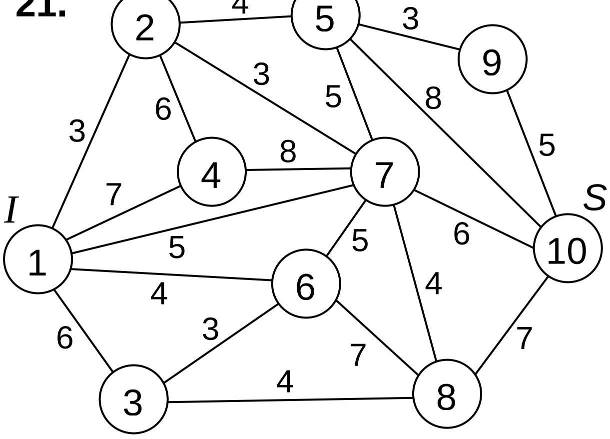
19.



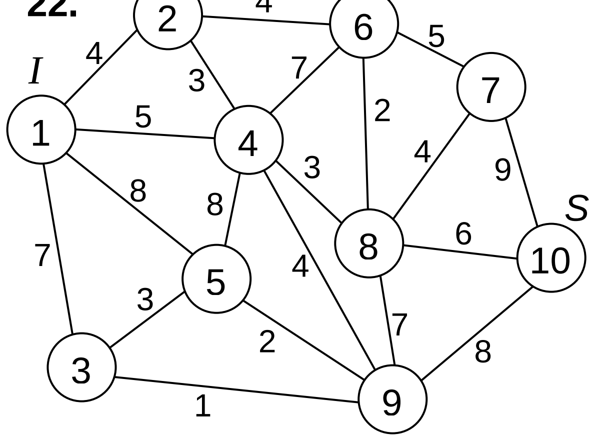
20.



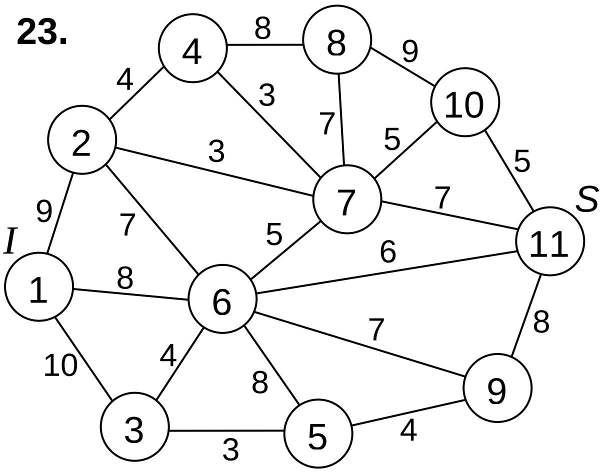
21.



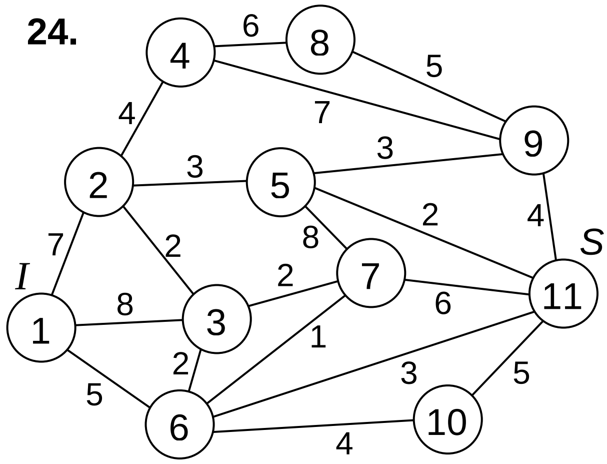
22.



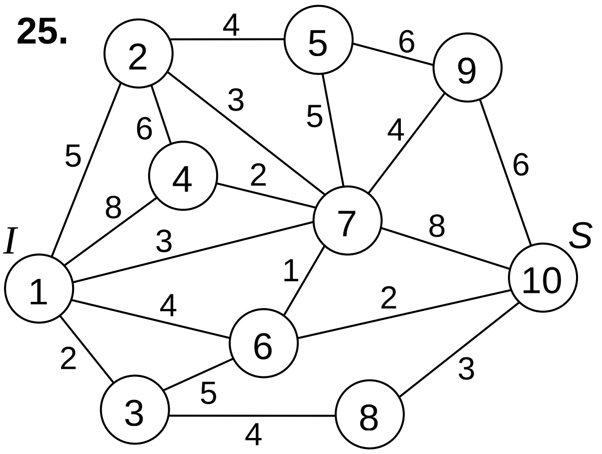
23.



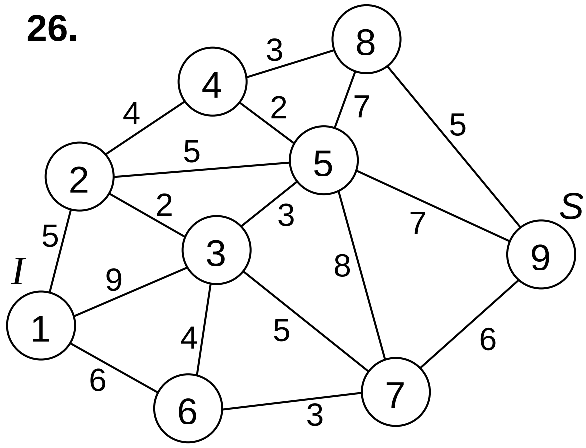
24.



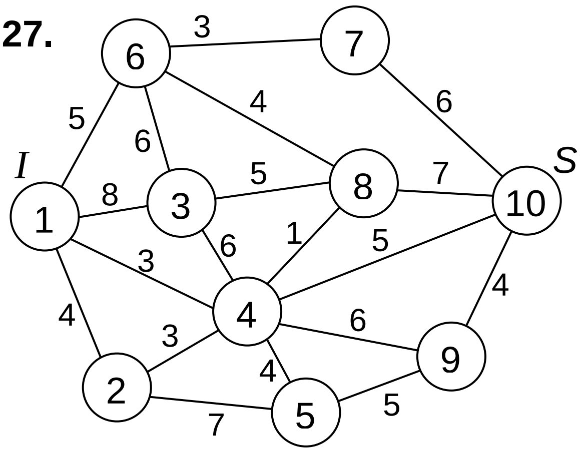
25.



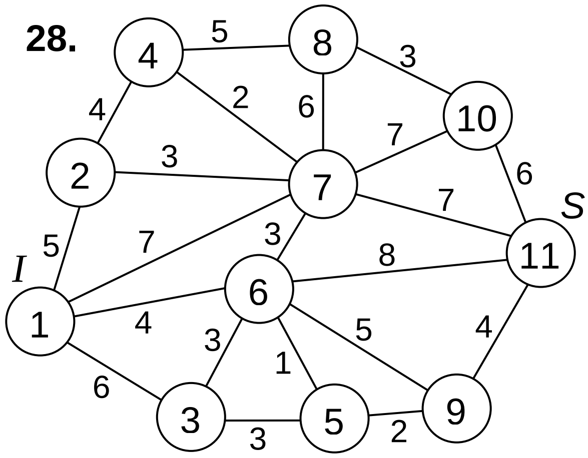
26.



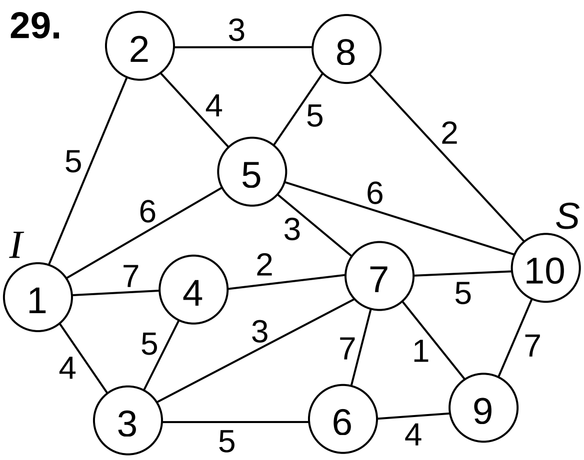
27.



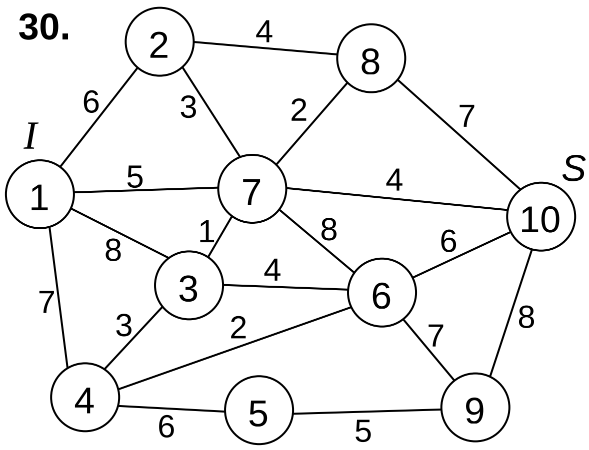
28.



29.



30.

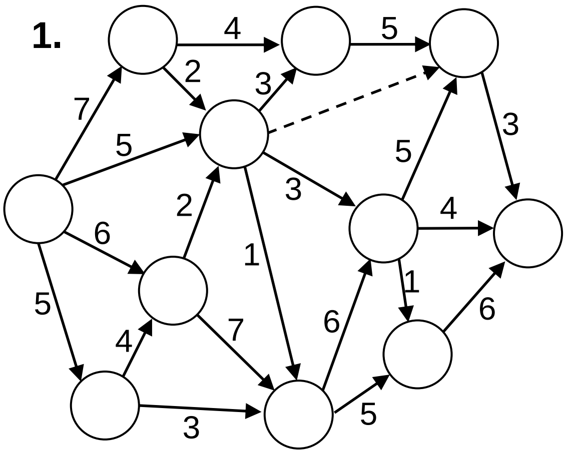


Решение

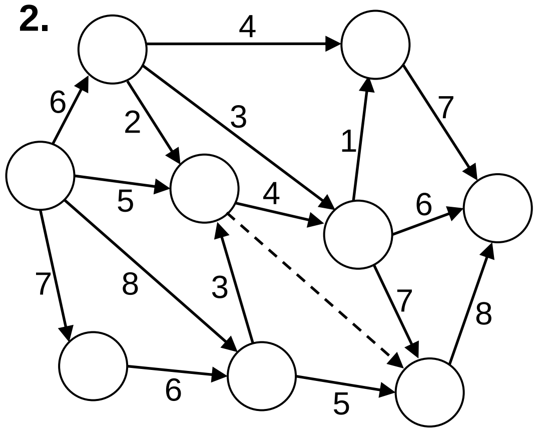
№ 5. Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

1) исходное событие *I* и завершающее событие *S*;
2) номера вершин в натуральном порядке;
3) ранние сроки свершения событий;
4) поздние сроки свершения событий;
5) резервы времени событий;
6) время выполнения комплекса и критический путь.

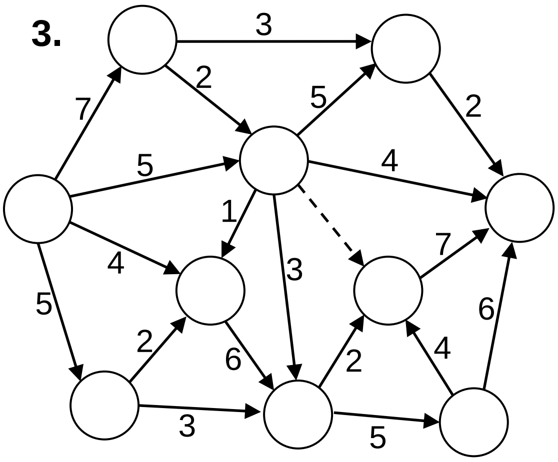
1.



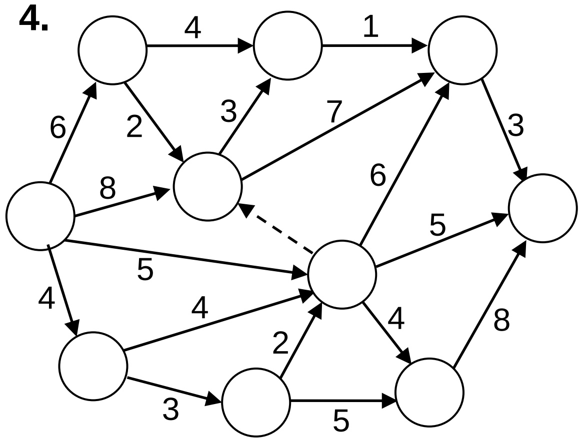
2.



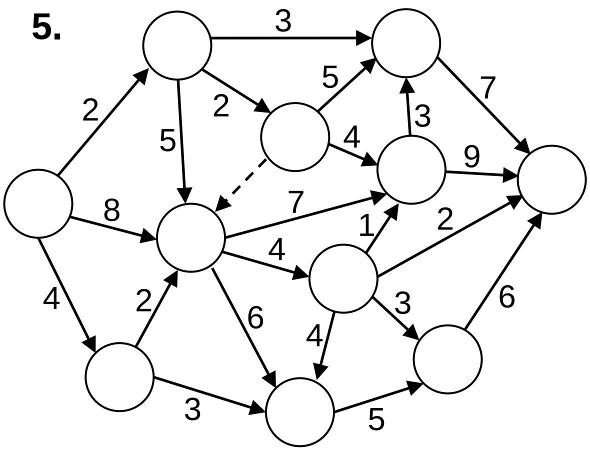
3.



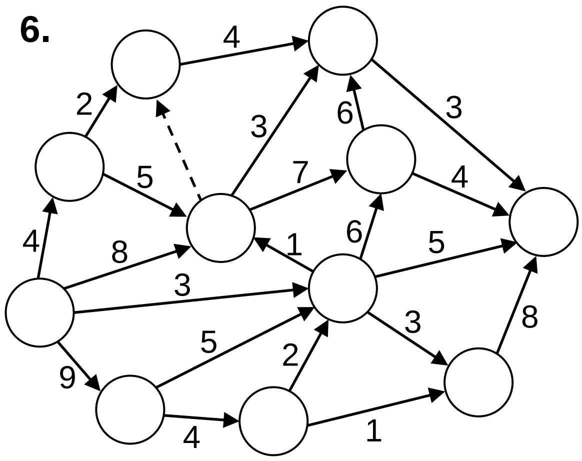
4.



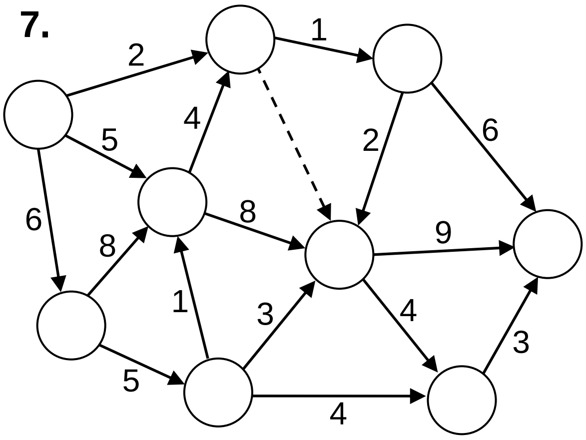
5.



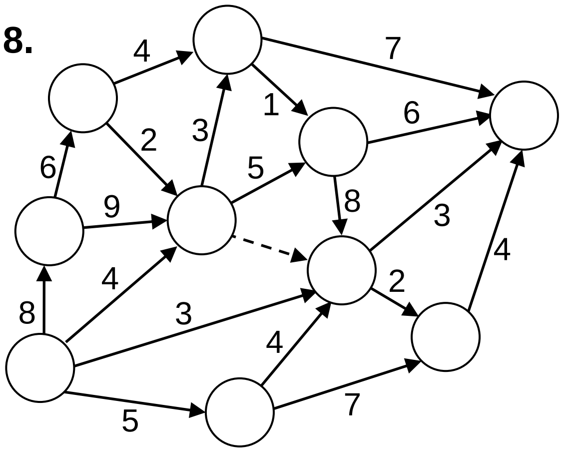
6.



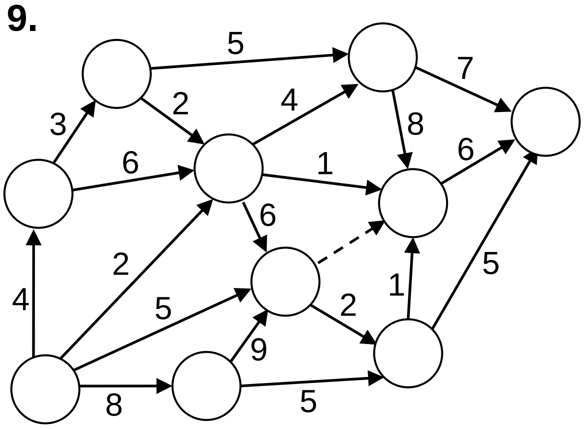
7.



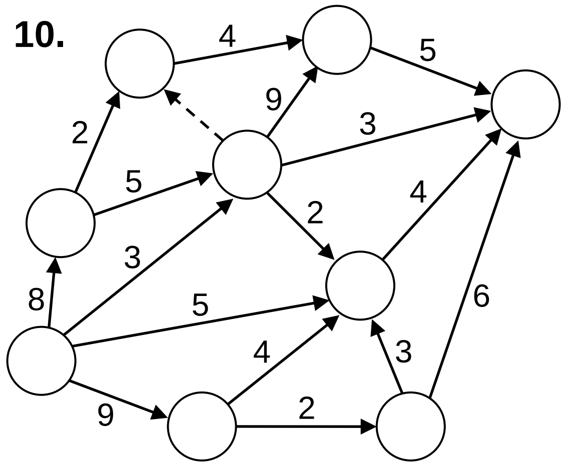
8.



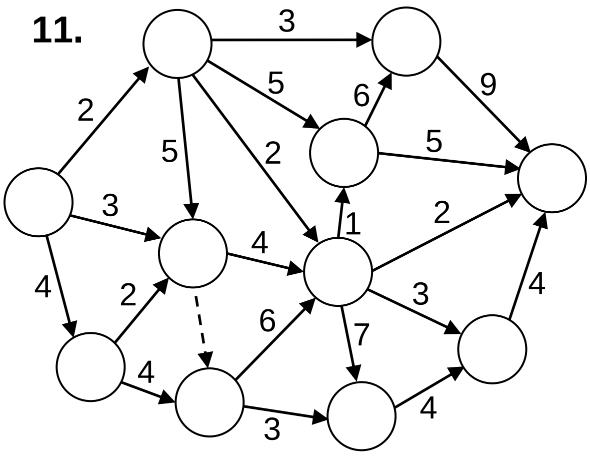
9.



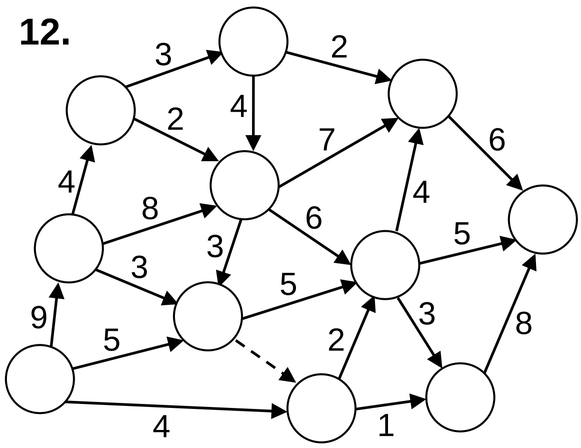
10.



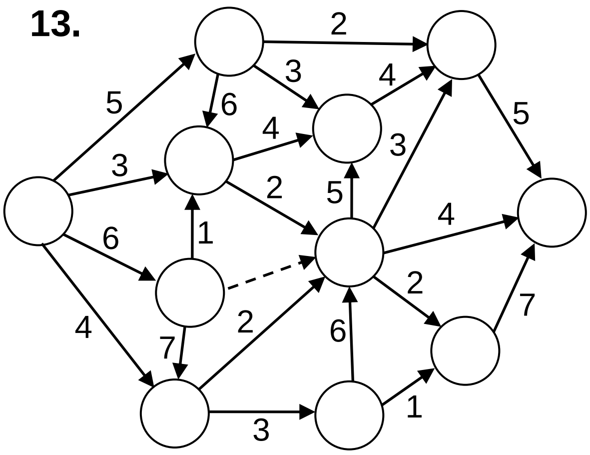
11.



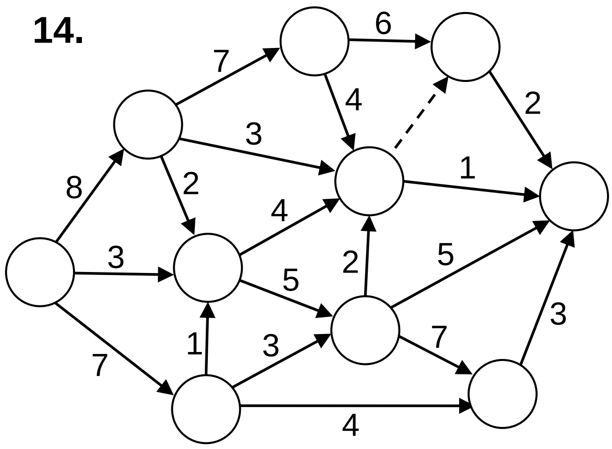
12.



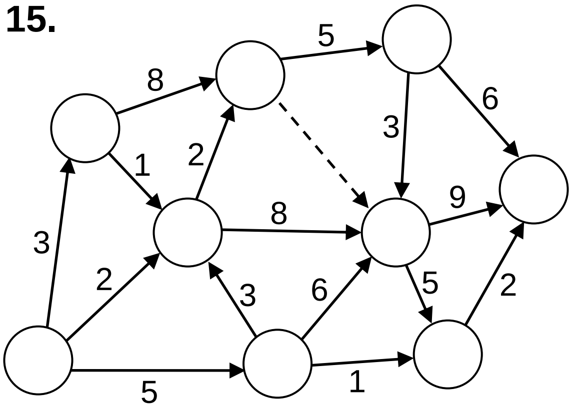
13.



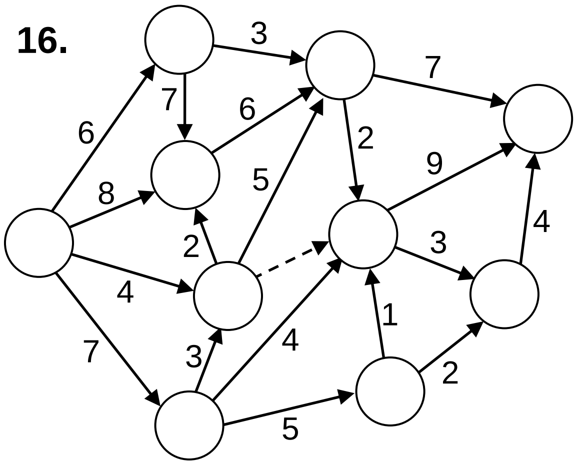
14.



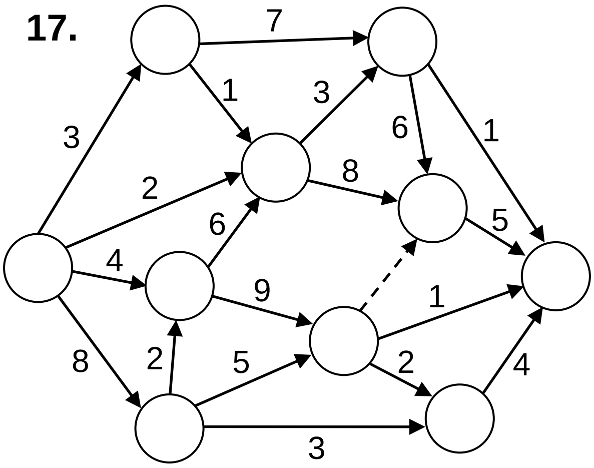
15.



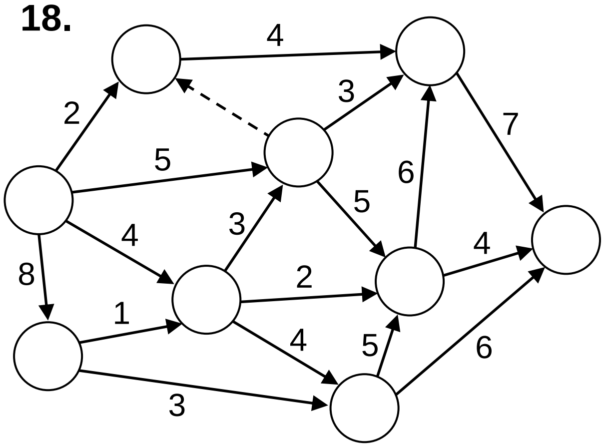
16.



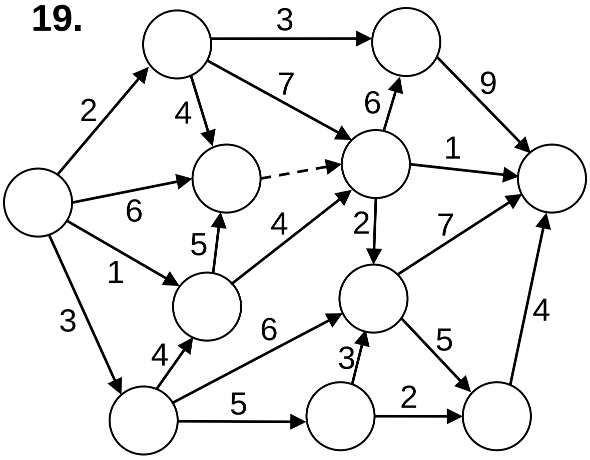
17.



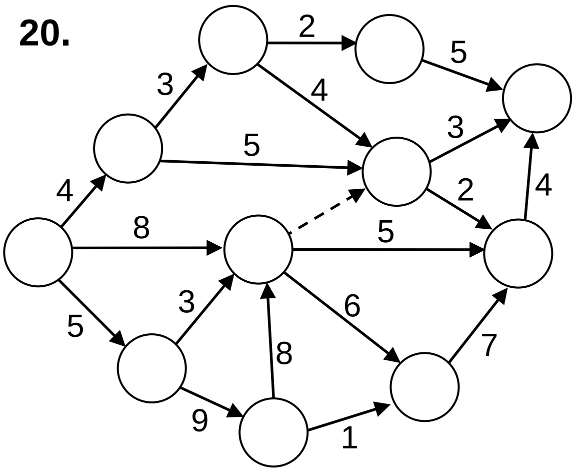
18.



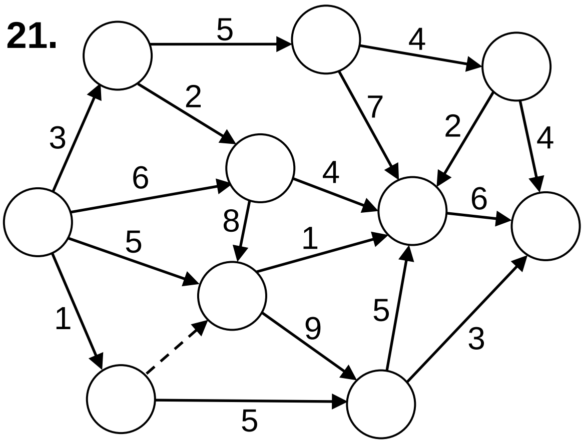
19.



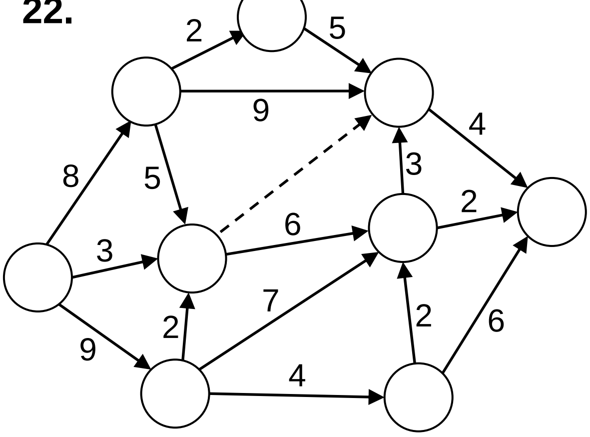
20.



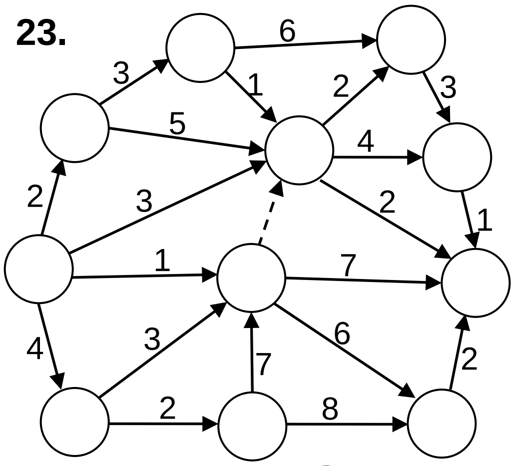
21.



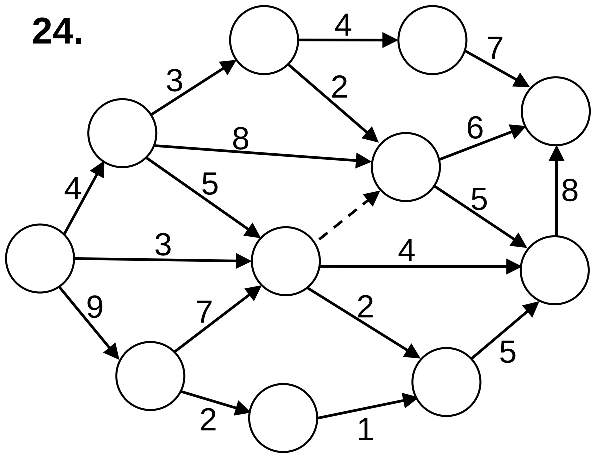
22.



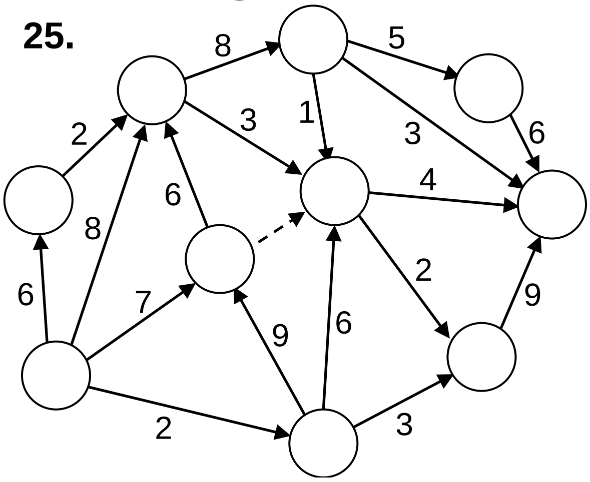
23.



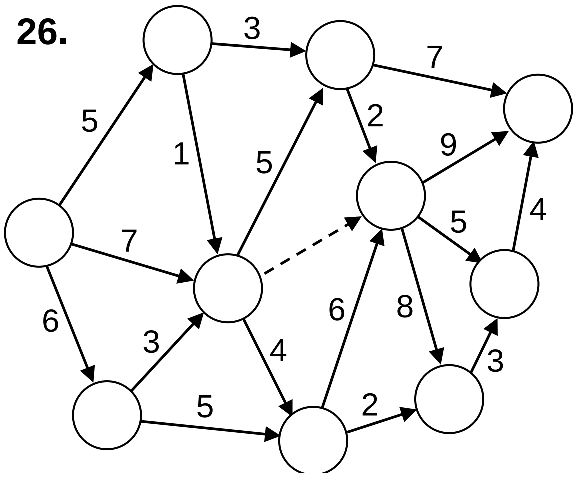
24.



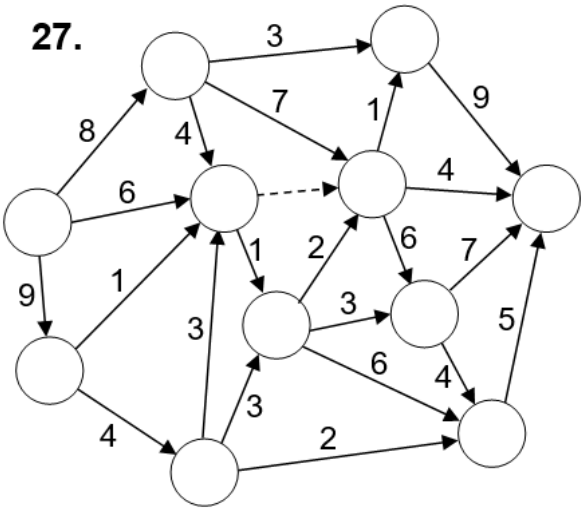
25.



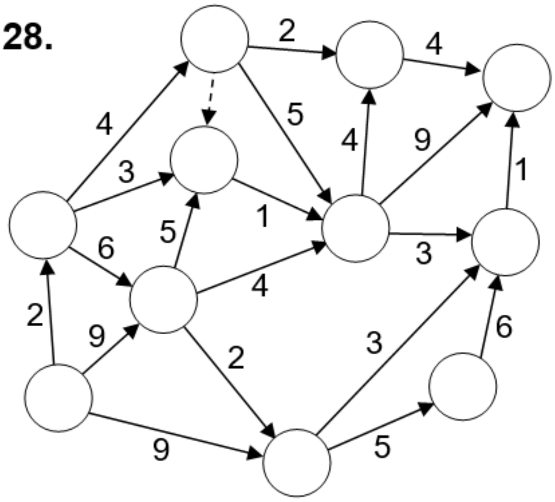
26.



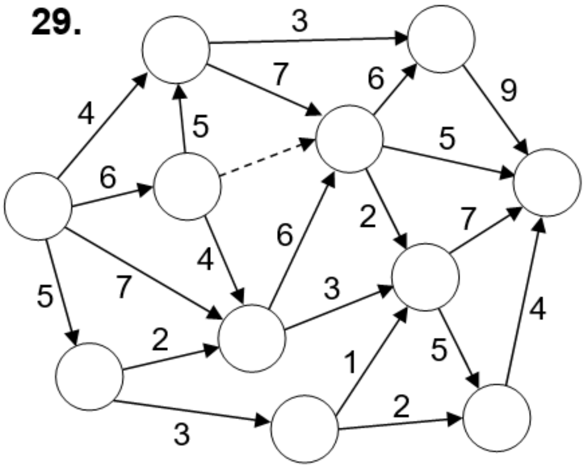
27.



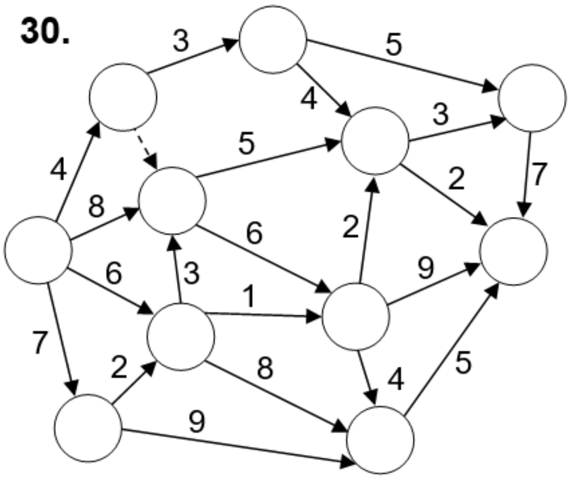
28.



29.



30.



Решение

$L_{крит}$:

$t_{крит}$ =

II. Решение типового варианта

№ 1. Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y:
$Z = x + 2y$

$$\begin{cases} 3x + 4y \ge 12, \\ 7x - 2y \le 42, \\ -x + 4y \le 20, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Решение

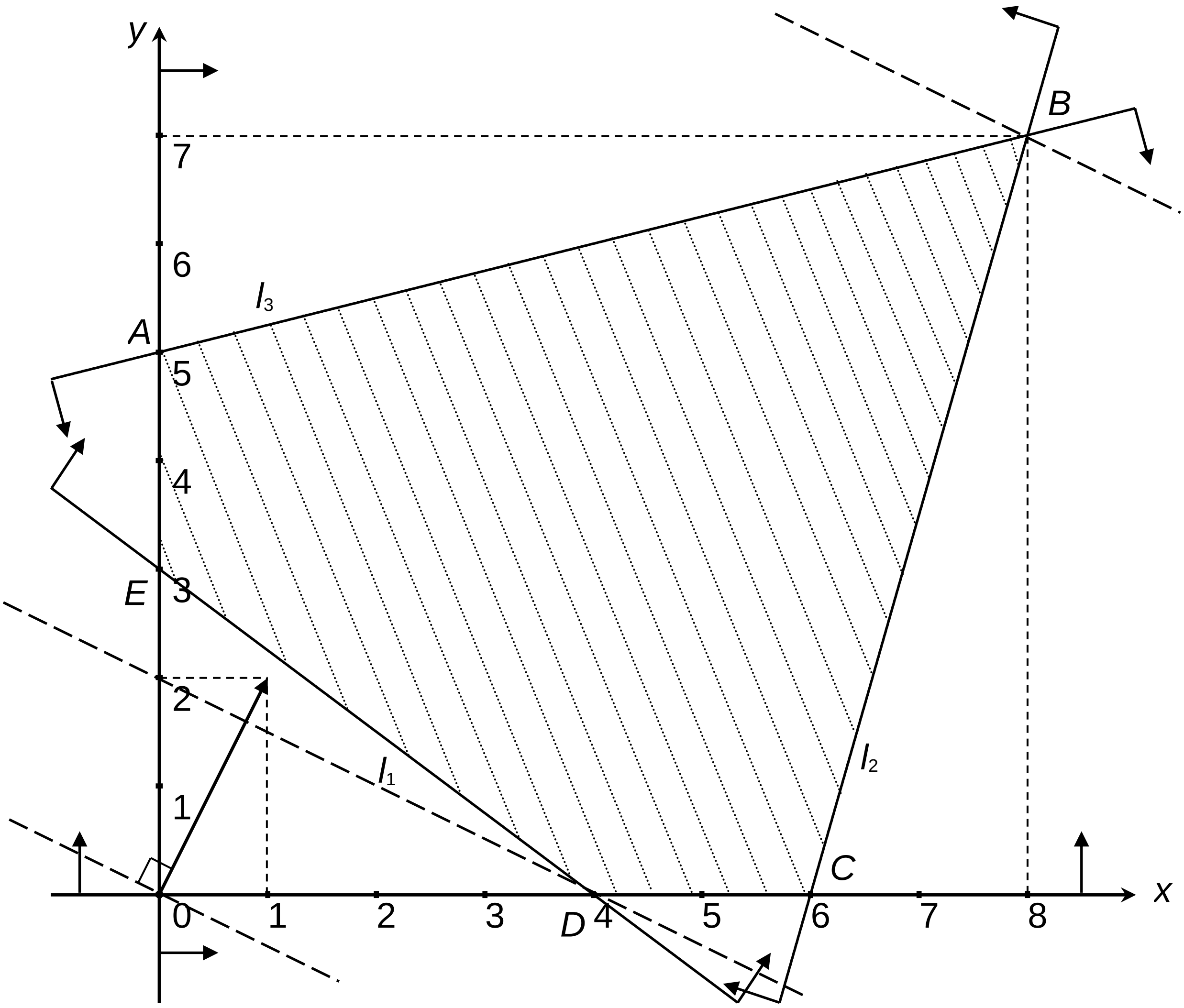
Неравенства системы ограничений задают в прямоугольной системе координат Oxy полуплоскости, границами которых являются прямые $l_1 : 3x + 4y = 12$, $l_2 : 7x - 2y = 42$, $l_3 : -x + 4y = 20$ и координатные оси. Построим указанные прямые по двум точкам:

$$l_1:\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \qquad l_2:\ \begin{array}{c|c|c} x & 6 & 8 \\ \hline y & 0 & 7 \end{array} \qquad l_3:\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 5 & 6 \end{array}$$

Каждая из прямых разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Чтобы определить ту полуплоскость, которая содержит область допустимых решений задачи, достаточно подставить в соответствующее неравенство координаты любой точки, не лежащей на прямой. Если получится верное неравенство, то укажем стрелками на полуплоскость, содержащую эту точку. Иначе укажем на другую полуплоскость.

Заметим, что точка $O(0;0)$ не лежит ни на одной из этих прямых. Подставим ее координаты в неравенство $3x + 4y \ge 12$, соответствующее прямой l_1: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \ge 12 \Leftrightarrow 0 \ge 12$. Поскольку получили неверное неравенство, то отметим полуплоскость, не содержащую точку $O(0;0)$. Подставим координаты точки $O(0;0)$ в неравенство $7x - 2y \le 42$, соответствующее прямой l_2: $7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \le 42 \Leftrightarrow 0 \le 42$. Так как получили верное неравенство, то отметим полуплоскость, содержащую точку O. Подставляя координаты точки $O(0;0)$ в неравенство $-x + 4y \le 20$, соответствующее прямой l_3, получим $-0 + 4 \cdot 0 \le 20 \Leftrightarrow 0 \le 20$. Поэтому также отметим полуплоскость, содержащую точку O.

Наконец, условия неотрицательности $x \ge 0, y \ge 0$ задают полуплоскости, ограниченные координатными осями.
Общей частью отмеченных полуплоскостей является выпуклый пятиугольник $ABCDE$, который и образует область допустимых решений данной задачи.



Направления возрастания и убывания целевой функции Z определим с помощью вектора $\operatorname{grad} Z = \left(Z'_x; Z'_y\right)$. Вектор градиента $\operatorname{grad} Z$ показывает направление наискорейшего возрастания, а вектор антиградиента $-\operatorname{grad} Z$ – направление наискорейшего убывания целевой функции Z. Находим вектор $\operatorname{grad} Z = (1;2)$ и откладываем его от начала координат (при этом конец данного вектора будет находиться в точке с координатами $(1;2)$). Перпендикулярно вектору градиента строим линию уровня (например, проводя ее через начало координат).

Будем перемещать линию уровня в направлении вектора $\operatorname{grad} Z$ до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку максимума B, координаты которой находим как решение системы уравнений прямых l_2 и l_3, проходящих через эту точку: $\begin{cases} 7x - 2y = 42, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 4y = 84, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 104, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 7. \end{cases}$

Таким образом, $\max Z = Z(8;7) = 1\cdot 8 + 2\cdot 7 = 22$.

Далее будем перемещать линию уровня в противоположном направлении до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку минимума D, которая является точкой пересечения прямой l_1 с осью Ox. Найдем координаты этой точки: $\begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$

Таким образом, $\min Z = Z(4;0) = 1\cdot 4 + 2\cdot 0 = 4$.

Ответ: $\min Z = Z(4;0) = 4$; $\max Z = Z(8;7) = 22$.

№ 2. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Перейдем к канонической форме записи задачи, добавив к левым частям первых трех неравенств системы ограничений так называемые *балансовые* неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5. Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases} \qquad (2)$$

Говорят, что ограничение задачи имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным 1, а в остальные ограничения – с коэффициентом, равным 0. Эта переменная называется *предпочтительной*. В нашем случае предпочтительными являются переменные x_3, x_4, x_5.

Назовем предпочтительные переменные *базисными*, а остальные – *свободными*. Найдем начальный опорный план задачи, приравнивая свободные переменные к нулю и выражая базисные из ограничений-равенств: $X^0 = (0; 0; 3; 9; 8)$.

Дальнейшие рассуждения будем вести с использованием симплексных таблиц.

№	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	C/O
				9	6	0	0	0	
0	x_3	0	3	-1	1	1	0	0	–
	x_4	0	9	1	2	0	1	0	9/1=9
	x_5	0	8	**2**	-1	0	0	1	8/2=4
	Δ_j		$Z(X^0)=0$	-9	-6	0	0	0	
1	x_3	0	7	0	0,5	1	0	0,5	7/0,5=14
	x_4	0	5	0	**2,5**	0	1	-0,5	5/2,5=2
	x_1	9	4	1	-0,5	0	0	0,5	–
	Δ_j		$Z(X^1)=36$	0	-10,5	0	0	4,5	
2	x_3	0	6	0	0	1	-0,2	0,6	
	x_2	6	2	0	1	0	0,4	-0,2	
	x_1	9	5	1	0	0	0,2	0,4	
	Δ_j		$Z(X^2)=57$	0	0	0	4,2	2,4	

Будем использовать следующие обозначения: *БП* – столбец базисных переменных; $C_Б$ – столбец коэффициентов при базисных переменных целевой функции (1); A_0 – столбец решений; $A_j\ \left(j=\overline{1,5}\right)$ – столбцы коэффициентов при переменной x_j в уравнениях системы ограничений; $\Delta_j\ \left(j=\overline{0,5}\right)$ – индексные оценки (образуют индексную строку); C/O – столбец симплексных отношений.

Заполним симплексную таблицу для нулевой итерации:

В столбцах 5 – 9 в строке под переменными задачи записываем их коэффициенты из целевой функции (1), а ниже (в строках 2, 3, 4) – соответствующие коэффициенты из уравнений системы ограничений (2). Базисные переменные с их коэффициентами из целевой функции дублируем во 2-м и 3-м столбцах. В 4-м столбце записываем правые части равенств системы ограничений.

Заполним элементы индексной строки. В 4-м столбце записываем значение целевой функции в начальном опорном плане как сумму произведений элементов 3-го и 4-го столбцов:

$$\Delta_0 = Z(X^0) = C_Б \cdot A_0 = 0\cdot 3 + 0\cdot 9 + 0\cdot 8 = 0.$$

Индексную оценку переменной x_1 находим как сумму произведений элементов 3-го и 5-го столбцов минус соответствующий x_1 коэффициент целевой функции, записанный выше в 1-й строке:

$$\Delta_1 = C_Б \cdot A_1 - c_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 9 = -9.$$

Аналогичным образом находим индексные оценки других переменных:

$$\Delta_2 = C_Б \cdot A_2 - c_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 6 = -6;$$
$$\Delta_3 = C_Б \cdot A_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$
$$\Delta_4 = C_Б \cdot A_4 - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$
$$\Delta_5 = C_Б \cdot A_5 - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

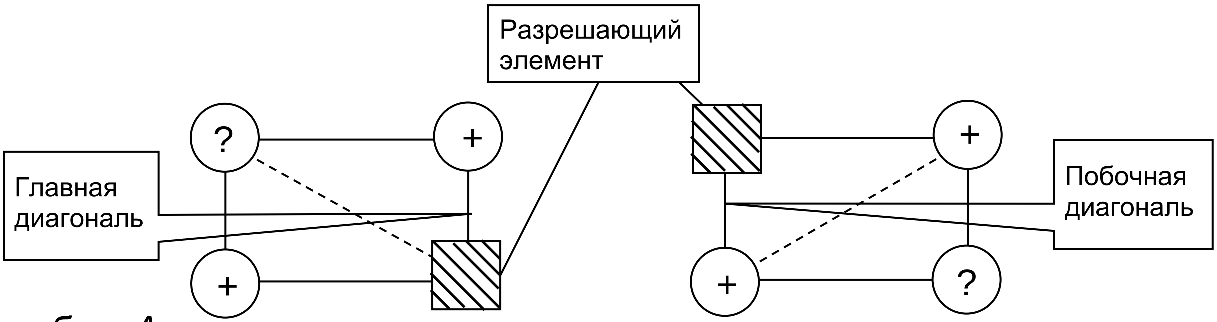
При решении задачи на максимум опорный план является оптимальным, если все индексные оценки – неотрицательны ($\Delta_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5} \right)$). При решении задачи на минимум условием оптимальности опорного плана является неположительность индексных оценок ($\Delta_j \leq 0 \left(j = \overline{1,5} \right)$). Наш начальный план максимальным не является, поскольку $\Delta_1 < 0$ и $\Delta_2 < 0$. Выберем наибольшую по модулю «плохую» оценку $\Delta_1 = -9$ и назовем соответствующий ей 5-й столбец *разрешающим*.

Переменную x_1 будем вводить в базис вместо одной из базисных переменных начального плана. Для определения выводимой из базиса переменной разделим на положительные элементы разрешающего столбца соответствующие элементы 4-го столбца A_0. Полученные частные запишем в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее: $\theta = \min\{9;4\} = 4$. Это число соответствует переменной x_5, соответствующую строку назовем *разрешающей*, а число 2, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, назовем *разрешающим элементом*. Таким образом, переменная x_1 заменит в базисе переменную x_5. Базисными становятся элементы x_1, x_3, x_4, а свободными – x_2 и x_5.

Заполним симплексную таблицу для первой итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной x_5 запишем переменную x_1, а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 9 из целевой функции. Другие элементы этих столбцов оставим без изменений. Далее разделим элементы разрешающей строки (столбцы 4 – 9) нулевой итерации на разрешающий элемент и запишем полученные частные в соответст-вующих ячейках новой таблицы. Запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая Δ_1). Остальные элементы таблицы получим с помощью схематического правила (*правила прямоугольника*):

элемент (**?**) новой итерации есть разность произведений элементов предыдущей итерации на главной и на побочной диагоналях, деленная на разрешающий элемент:



Столбец A_0:

1-й элемент: $\dfrac{3\cdot 2-(-1)\cdot 8}{2}=7$; 2-й элемент: $\dfrac{9\cdot 2-1\cdot 8}{2}=5$.

Столбец A_2:

1-й элемент: $\dfrac{1\cdot 2-(-1)\cdot(-1)}{2}=0{,}5$; 2-й элемент: $\dfrac{2\cdot 2-1\cdot(-1)}{2}=2{,}5$.

Столбец A_3:

1-й элемент: $\dfrac{1\cdot 2-(-1)\cdot 0}{2}=1$; 2-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2-1\cdot 0}{2}=0$.

Столбец A_4:

1-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2-(-1)\cdot 0}{2}=0$; 2-й элемент: $\dfrac{1\cdot 2-1\cdot 0}{2}=1$.

Столбец A_5:

1-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2-(-1)\cdot 1}{2}=0{,}5$; 2-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2-1\cdot 1}{2}=-0{,}5$.

Элементы индексной строки можно находить тем же способом, что и в нулевой итерации, а можно воспользоваться правилом прямоугольника:

$$\Delta_0=Z(X^1)=\frac{0\cdot 2-8\cdot(-9)}{2}=36;$$

$$\Delta_2=\frac{-6\cdot 2-(-1)\cdot(-9)}{2}=-10{,}5; \qquad \Delta_3=\frac{0\cdot 2-0\cdot(-9)}{2}=0;$$

$$\Delta_4=\frac{0\cdot 2-0\cdot(-9)}{2}=0; \qquad \Delta_5=\frac{0\cdot 2-1\cdot(-9)}{2}=4{,}5.$$

Поскольку $\Delta_2<0$, то опорный план $X^1=(4;0;7;5;0)$ также не является оптимальным. Единственная отрицательная индексная оценка определяет в качестве разрешающего 6-й столбец. Разделим элементы 4-го столбца A_0 на соответствующие элементы разрешающего столбца, запишем положительные результаты в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее: $\theta=\min\{14;2\}=2$. Это число соответствует переменной x_4, поэтому 2-я строка таблицы первой итерации будет разрешающей, а число 2,5, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, будет разрешающим элементом.

Итак, переменная x_2 заменит в базисе переменную x_4. Базисными становятся элементы x_1, x_2, x_3, а свободными – x_4 и x_5.

Заполним симплексную таблицу для второй итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной x_4 запишем переменную x_2, а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 6 из целевой функции. Далее разделим элементы разрешающей строки первой итерации на разрешающий элемент, заполнив строку новой таблицы, и запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая Δ_2). Остальные элементы таблицы (включая элементы индексной строки) получим с помощью правила прямоугольника:

Столбец A_0:

1-й элемент: $\dfrac{7\cdot 2{,}5-0{,}5\cdot 5}{2{,}5}=6$; 3-й элемент: $\dfrac{4\cdot 2{,}5-(-0{,}5)\cdot 5}{2{,}5}=5$.

Столбец A_1:

1-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2{,}5-0{,}5\cdot 0}{2{,}5}=0$; 3-й элемент: $\dfrac{1\cdot 2{,}5-(-0{,}5)\cdot 0}{2{,}5}=1$.

Столбец A_3:

1-й элемент: $\dfrac{1\cdot 2{,}5-0{,}5\cdot 0}{2{,}5}=1$; 3-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2{,}5-(-0{,}5)\cdot 0}{2{,}5}=0$.

Столбец A_4:

1-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2{,}5-0{,}5\cdot 1}{2{,}5}=-0{,}2$; 3-й элемент: $\dfrac{0\cdot 2{,}5-(-0{,}5)\cdot 1}{2{,}5}=1$.

Столбец A_5:

1-й элемент: $\dfrac{0{,}5\cdot 2{,}5-(-0{,}5)\cdot 0{,}5}{2{,}5}=0{,}6$;

3-й элемент: $\dfrac{0{,}5\cdot 2{,}5-(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)}{2{,}5}=0{,}4$.

Индексная строка: $\Delta_0=Z(X^2)=\dfrac{36\cdot 2{,}5-(-10{,}5)\cdot 5}{2{,}5}=57$;

$\Delta_1=\dfrac{0\cdot 2{,}5-(-10{,}5)\cdot 0}{2{,}5}=0$; $\Delta_3=\dfrac{0\cdot 2{,}5-(-10{,}5)\cdot 0}{2{,}5}=0$;

$\Delta_4=\dfrac{0\cdot 2{,}5-(-10{,}5)\cdot 1}{2{,}5}=4{,}2$; $\Delta_5=\dfrac{4{,}5\cdot 2{,}5-(-10{,}5)\cdot(-0{,}5)}{2{,}5}=2{,}4$.

Так как все $\Delta_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right)$, то опорный план $X^2=(5;2;6;0;0)$ является оптимальным. Оптимальным планом исходной задачи является план $X^*=(5;2)$ и $\max Z=Z(X^*)=57$.

Ответ: $\max Z=Z(5;2)=57$.

№ 3. У поставщиков A_i имеется некоторая однородная продукция в количествах a_i, которую нужно перевезти потребителям B_j в количествах b_j по ценам c_{ij} денежных единиц за перевозку единицы продукции от A_i к B_j. Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки и полностью удовлетворяющий спрос потребителей. Начальный опорный план составить методом северо-западного угла.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	1	75
A_2	4	5	7	3	95
A_3	3	1	3	5	120
b_j	100	60	70	60	290

Решение

Составим начальный опорный план задачи методом северо-западного угла.

Опорный план транспортной задачи имеет $n+m-1=3+4-1=6$ базисных переменных, которые записываются в соответствующие внутренние клетки таблицы. Остальные клетки свободных переменных, равных нулю, оставляют пустыми. Согласно методу северо-западного угла, вначале определяем $x_{11}=\min(a_1;b_1)=\min(100;75)=75$. При этом уменьшаем на 75 единиц спрос 1-го потребителя и вычеркиваем запас 1-го поставщика (остальные клетки в первой строке будут свободными). Получим таблицу, в верхних левых углах внутренних клетках которой мелким шрифтом записаны стоимости c_{ij}.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 **75**	3	2	1	~~75~~ 0
A_2	4	5	7	3	95
A_3	3	1	3	5	120
b_j	~~100~~ 25	60	70	60	290

В оставшейся части таблицы «северо-западная» клетка расположена в 1-м столбце и во 2-й строке. Аналогично находим соответствующий ей минимум оставшихся запаса и спроса: $x_{21}=\min(a_2;b_1)=\min(25;95)=25$. Значит, спрос 1-го потребителя удовлетворен, и остальные клетки 1-го столбца будут свободными. Получим следующее:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 **75**	3	2	1	~~75~~ 0
A_2	4 **25**	5	7	3	~~95~~ 70
A_3	3	1	3	5	120
b_j	~~100~~ ~~25~~ 0	60	70	60	290

Следующая «северо-западная» клетка расположена во 2-м столбце и во 2-й строке. Для нее $x_{22} = \min(a_2; b_2) = \min(70; 60) = 60$. При этом спрос 2-го потребителя будет удовлетворен, поэтому оставшаяся клетка 2-го столбца окажется свободной:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 **75**	3	2	1	~~75~~ 0
A_2	4 **25**	5 **60**	7	3	~~95~~ ~~70~~ 10
A_3	3	1	3	5	120
b_j	~~100~~ ~~25~~ 0	~~60~~ 0	70	60	290

Продолжая аналогично, получим таблицу перевозок с первоначальным планом X^0:

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 **75**	3	2	1	~~75~~ 0
A_2	4 **25**	5 **60**	7 **10**	3	~~95~~ ~~70~~ ~~10~~ 0
A_3	3	1	3 **60**	5 **60**	~~120~~ ~~60~~ 0
b_j	~~100~~ ~~25~~ 0	~~60~~ 0	~~70~~ ~~60~~ 0	~~60~~ 0	290

По плану X^0 осуществляются следующие перевозки: от A_1 к B_1 – 75 единиц груза, от A_2 к B_1 – 25 единиц, к B_2 – 60 единиц и к B_3 – 10 единиц груза, от A_3 к B_3 и к B_4 – по 60 единиц груза. Общая стоимость таких перевозок составит $f\left(X^0\right)=75\cdot4+25\cdot4+60\cdot5+10\cdot7+60\cdot3+60\cdot5=1250$ денежных единиц.

Для проверки на оптимальность полученного опорного плана применим так называемый *метод потенциалов*. Каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j приписываются соответственно числа u_i и v_j, называемые их *потенциалами*.

Для базисных (занятых) клеток рассматриваемого опорного плана должны выполняться равенства $u_i+v_j=c_{ij}$. В нашем случае получим систему:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4, \\ u_2+v_1=4, \\ u_2+v_2=5, \\ u_2+v_3=7, \\ u_3+v_3=3, \\ u_3+v_4=5. \end{cases}$$

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 **75**	3	2	1	$u_1=0$
A_2	4 **25**	5 **60**	7 **10**	3	$u_2=0$
A_3	3	1	3 **60**	5 **60**	$u_3=-4$
v_j	$v_1=4$	$v_2=5$	$v_3=7$	$v_4=9$	

Так как число потенциалов на единицу меньше, чем число уравнений полученной системы, то один из них выберем произвольным образом, например, $u_1=0$. Тогда из системы последовательно получим: $v_1=4$, $u_2=0$, $v_2=5$, $v_3=7$, $u_3=-4$, $v_4=9$.

Далее для всех свободных (не занятых) клеток подсчитаем оценки $\mathrm{V}_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$. Если все $\mathrm{V}_{ij}\le0$, то опорный план оптимален, иначе можно перейти к новому опорному плану с меньшим значением целевой функции.

В нашем случае
$$\begin{aligned} &\mathrm{V}_{12}=0+5-3=2, \\ &\mathrm{V}_{13}=0+7-2=5, \\ &\mathrm{V}_{14}=0+9-1=8, \quad (\max) \\ &\mathrm{V}_{24}=0+9-3=6, \\ &\mathrm{V}_{31}=-4+4-3=-3, \\ &\mathrm{V}_{32}=-4+5-1=0. \end{aligned}$$

Так как среди оценок имеются положительные, то план X^0 не является оптимальным.

Для перехода к новому опорному плану введем перевозку, соответствующую наибольшей из вычисленных оценок $V_{14} = 8$, в число базисных перевозок. Построим *цикл пересчета* свободной клетки $(1;4)$, который представляет собой замкнутую ломаную, одна вершина которой лежит в выбранной, а остальные – в базисных клетках (соседние звенья ломаной должны быть взаимно перпендикулярны). При этом вершинам цикла поочередно приписываются знаки «плюс» или «минус», начиная со знака «плюс» у выбранной свободной клетки:

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 – **75**	3	2	1 +	0
A_2	4 + **25**	5 **60**	7 – **10**	3	0
A_3	3	1	3 + **60**	5 – **60**	-4
v_j	4	5	7	9	

Если в пределах цикла в клетках со знаком «плюс» добавить, а из клеток со знаком «минус» отнять одно и то же число, то получим допустимый план перевозок. Наибольшее количество продукции, которое мы можем переместить из «отрицательных» клеток в «положительные», равно наименьшей из перевозок, стоящих в «отрицательных» клетках, то есть величине (75; 10; 60) = 10 min. Поэтому в клетках со знаком «плюс» добавляем эту величину, а со знаком «минус» – вычитаем. В результате получили новый опорный план X^1, в котором клетка $(1;4)$ стала базисной, а клетка $(2;3)$ – свободной:

X^1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 **65**	3	2	1 **10**	0
A_2	4 **35**	5 **60**	7	3	0
A_3	3	1	3 **70**	5 **50**	-4
v_j	4	5	7	9	

Вычислим общую стоимость полученных перевозок:
$f\left(X^1\right) = 65 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 35 \cdot 4 + 60 \cdot 5 + 70 \cdot 3 + 50 \cdot 5 = 1170$ денежных единиц.

Заметим, что изменение общей стоимости перевозок по сравнению с планом X^0 составило $1250 - 1170 = 80 = \Delta_{14} \cdot 10$ денежных единиц.

Контроль общего объема перевозок: $65 + 10 + 35 + 60 + 70 + 50 = 290$.

Проверим полученный план X^1 на оптимальность, для чего снова применим метод потенциалов (как и ранее, положим в системе $u_1 = 0$):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases}$$

X^1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 – **65**	3	2	1 + **10**	$u_1 = 0$
A_2	4 + **35**	5 – **60**	7	3	$u_2 = 0$
A_3	3	1 +	3 **70**	5 – **50**	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = -1$	$v_4 = 1$	

Найдем оценки свободных клеток:

$\mathrm{V}_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$

$\mathrm{V}_{13} = 0 - 1 - 2 = -3,$

$\mathrm{V}_{23} = 0 - 1 - 7 = -8,$

$\mathrm{V}_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$

$\mathrm{V}_{31} = 4 + 4 - 3 = 5,$

$\mathrm{V}_{32} = 4 + 5 - 1 = 8.\ (\max)$

Поскольку среди оценок имеются положительные, то план X^1 также не является оптимальным. Построим цикл пересчета для клетки $(3;2)$ (см. последнюю таблицу) и переместим в пределах цикла из «отрицательных» в «положительные» клетки $\min(65;60;50) = 50$ единиц продукции. В результате получим опорный план X^2, для которого общая стоимость перевозок составит $f\left(X^2\right) = 15 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 85 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 1 + 70 \cdot 3 = 770$ денежных единиц.

Для нового плана находим потенциалы (будем их записывать сразу в таблицу) и вычисляем оценки свободных клеток:

X^2	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 – **15**	3	2 +	1 **60**	0
A_2	4 + **85**	5 – **10**	7	3	0
A_3	3	1 + **50**	3 – **70**	5	−4
v_j	4	5	7	1	

$\mathrm{V}_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$

$\mathrm{V}_{13} = 0 + 7 - 2 = 5,\ (\max)$

$\mathrm{V}_{23} = 0 + 7 - 7 = 0,$

$\mathrm{V}_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$

$\mathrm{V}_{31} = -4 + 4 - 3 = -3,$

$\mathrm{V}_{34} = -4 + 1 - 5 = -8.$

Контроль: $15 + 60 + 85 + 10 + 70 + 50 = 290$.

Поскольку план X^2 не является оптимальным, то составляем новый цикл, отталкиваясь от ячейки $(1;3)$. В результате получим опорный план X^3, для которого $f\left(X^3\right) = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 95 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 60 \cdot 3 = 720$. Этот план снова проверяем на оптимальность.

X^3	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 – **5**	3	2 + **10**	1 **60**	0
A_2	4 **95**	5	7	3	0
A_3	3 +	1 **60**	3 – **60**	5	1
v_j	4	0	2	1	

$\mathrm{V}_{12} = 0 + 0 - 3 = -3,$
$\mathrm{V}_{22} = 0 + 0 - 5 = -5,$
$\mathrm{V}_{23} = 0 + 2 - 7 = -5,$
$\mathrm{V}_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$
$\mathrm{V}_{31} = 1 + 4 - 3 = 2, \quad (\max)$
$\mathrm{V}_{34} = 1 + 1 - 5 = -3.$

Контроль: $5 + 10 + 60 + 95 + 60 + 60 = 290$.

Видим, что план X^3 также не оптимален, поэтому перейдем к новому опорному плану X^4:

X^4	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4	3	2 **15**	1 **60**	0
A_2	4 **95**	5	7	3	2
A_3	3 **5**	1 **60**	3 **55**	5	1
v_j	2	0	2	1	

$\mathrm{V}_{11} = 0 + 2 - 4 = -2,$
$\mathrm{V}_{12} = 0 + 0 - 3 = -3,$
$\mathrm{V}_{22} = 2 + 0 - 5 = -3,$
$\mathrm{V}_{23} = 2 + 2 - 7 = -3,$
$\mathrm{V}_{24} = 2 + 1 - 3 = 0,$
$\mathrm{V}_{34} = 1 + 1 - 5 = -3.$

Контроль: $15 + 60 + 95 + 5 + 60 + 55 = 290$.

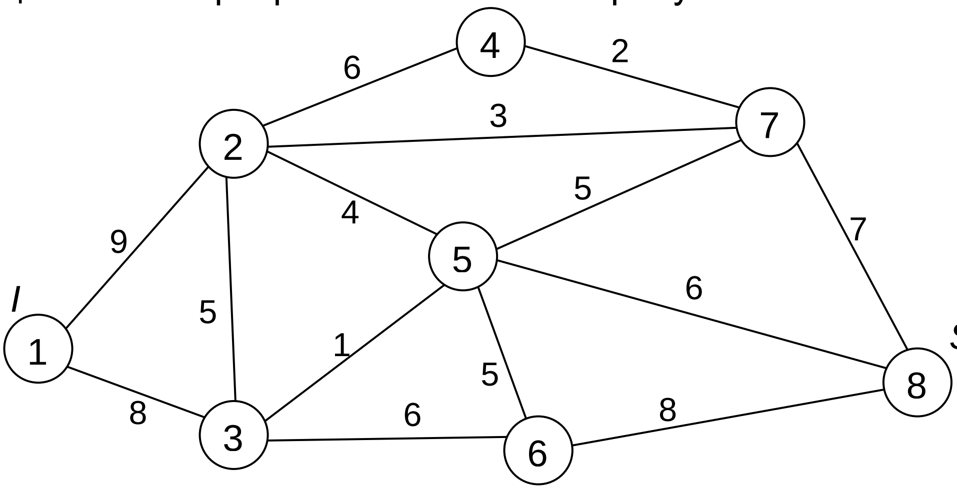
Поскольку все $\mathrm{V}_{ij} \le 0$, то план $X^* = X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 \\ 95 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 55 & 0 \end{bmatrix}$ оптимален и обеспечивает минимум стоимости всех перевозок:

$f_{\min} = f\left(X^*\right) = 15 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 95 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 60 \cdot 1 + 55 \cdot 3 = 710$ денежных единиц.

По этому плану следует перевезти от A_1 к B_3 15 единиц продукции, от A_1 к B_4 – 60 единиц, от A_2 к B_1 – 95 единиц, от A_3 к B_1 – 5 единиц, от A_3 к B_2 – 60 единиц и от A_3 к B_3 – 55 единиц.

Ответ: $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 \\ 95 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 55 & 0 \end{bmatrix}$; $f_{\min} = f\left(X^*\right) = 710$.

№ 4. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Решение

Вершина 1 (I) является *истоком*, а вершина 8 (S) – *стоком* данной сети. Максимальное количество r_{ij} вещества (груза, информации и т. п.), которое может пропустить за единицу времени ребро $(i;j)$, называется его *пропускной способностью*. По условию задачи $r_{\text{ij}} = r_{\text{ji}}$, например, $r_{13} = r_{31} = 8$, $r_{35} = r_{53} = 1$ и т. д. При этом полагают все $r_{\text{ii}} = 0$.

Пропускные способности сети запишем в квадратной матрице R 8-го порядка (порядок равен количеству вершин). Для наглядности клетки с нулевыми пропускными способностями оставим пустыми.

R	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1		9	8					
2	9		5	6	4		3	
3	8	5			1	6		
4		6					2	
5		4	1			5	5	6
6			6		5			8
7		3		2	5			7
8					6	8	7	

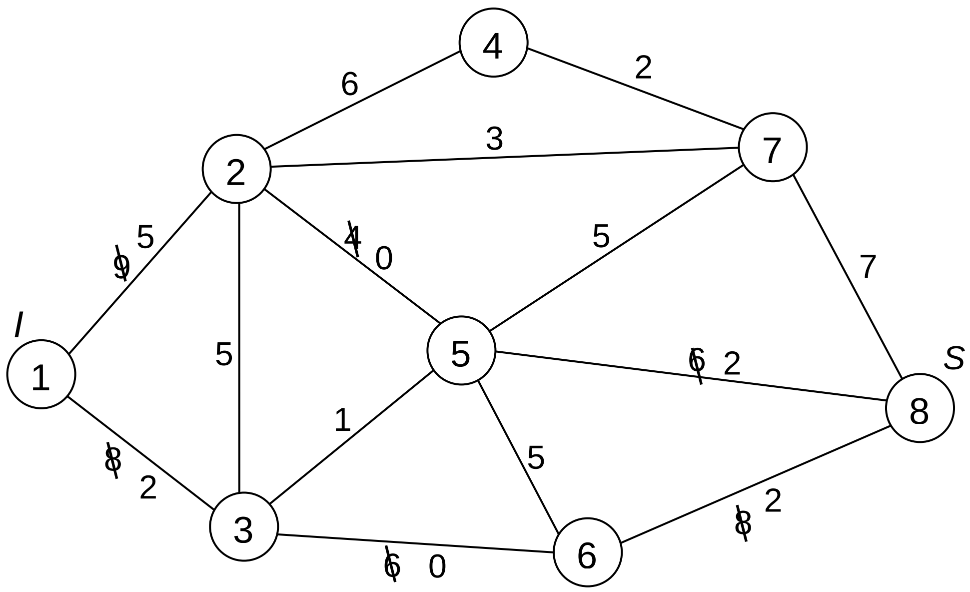
Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро $(i;j)$ в единицу времени, называется *потоком по ребру* $(i;j)$. Считается, что $x_{\text{ij}} = -x_{\text{ji}}$. Совокупность $X = \{x_{\text{ij}}\}$ потоков по всем ребрам сети называют *потоком по сети*, а функция $f = \sum\limits_{\text{j}} x_{I\,\text{j}} = \sum\limits_{\text{i}} x_{\text{i}S}$ (общее количество вещества, выте-кающее их истока, и общее количество, втекающее в сток) называется *мощностью потока* на сети. Ребро $(i;j)$ называется *ненасыщенным*, если $x_{\text{ij}} < r_{\text{ij}}$, и *насыщенным*, если $x_{\text{ij}} = r_{\text{ij}}$.

Сформируем на сети начальный поток X^0. Будем составлять пути из *I* в *S* по ненасыщенным ребрам. При этом будем следить, чтобы потоки формировались в одном направлении.

Рассмотрим путь 1 – 3 – 6 – 8. Так как $\min(8;6;8) = 6$, то по этому пути пропустим 6 ед. вещества. Ребро (3;6) станет насыщенным.

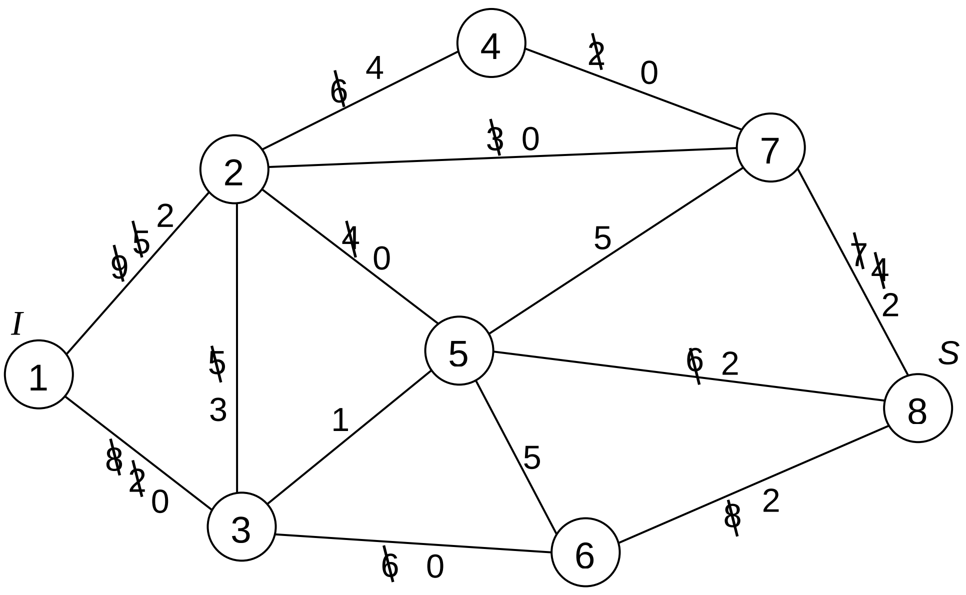
Для пути 1 – 2 – 5 – 8 $\min(9;4;6) = 4$, поэтому пропустим по данному пути 4 ед. вещества. Ребро (2;5) – насыщенное.

Будем отмечать резервы пропускных способностей ребер на сети, перечеркивая «старые» значения пропускных способностей:



Далее пропустим по пути 1–2–7–8 $\min(5;3;7) = 3$ ед. вещества, а по пути 1–3–2–4–7–8 – min (2; 5; 6; 2; 4) = 2 ед. При этом ребра (2;7) и (1;3) станут насыщенными.

Отобразим изменения на сети.



Пути, которые формируют начальный поток X^0, можно находить до тех пор, пока существует проход по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Получаем следующий начальный поток X^0 (в скобках будем указывать количество вещества, пропускаемого по данному пути):

1 – 3 – 6 – 8 (6)
1 – 2 – 5 – 8 (4)
1 – 2 – 7 – 8 (3)
1 –3 – 2 – 4 – 7 – 8 (2)

Найдем мощность потока X^0: $f\left(X^0\right) = 6 + 4 + 3 + 2 = 15$ ед.

Запишем поток X^0 в виде матрицы:

X^0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1		7	8					
2	-7		-2	2	4		3	
3	-8	2				6		
4		-2					2	
5		-4						4
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-4	-6	-5	

Например, через ребро (1;3) проходит $6 + 2 = 8$ единиц. Значит, в клетку (1;3) матрицы X^0 записываем $x_{13} = 8$, а в клетку (3;1) – $x_{31} = -8$. Через ребро (5;8) проходит 4 единицы, поэтому в клетку (5;8) записываем $x_{58} = 4$, а в клетку (8;5) – $x_{85} = -4$. И т.д.

Составляем матрицу $R - X^0$, элементы которой $r_{ij} - x_{ij}$ позволяют судить о насыщенности ребер сети:

$$r_{ij} - x_{ij} = \begin{cases} = 0, \text{ если ребро } (i, j) \text{ насыщено,} \\ \neq 0, \text{ если ребро } (i, j) \text{ ненасыщено.} \end{cases}$$

R-X^0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1		2						
2	16		7	4				
3	16	3			1			
4		8						
5		8	1			5	5	2
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					10	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Для этого просматриваем 1-ю стоку матрицы $R - X^0$. Из вершины 1 по ненасыщенному ребру можно попасть только в вершину 2. Из вершины 2 – в вершины 1 (которую мы игнорируем, так как она уже рассматривалась), 3 и 4. Из вершины 3 можно попасть лишь в вершину

5, а из нее – в вершину 8. В итоге получаем следующий список вершин, достижимых из истока по путям, состоящим из ненасыщенных ребер:

$$1:2$$

$$2:3,4$$

$$3:5$$

$$5:8$$

Так как сток находится в этом списке, то начальный поток не является максимальным и его можно улучшить.

Получили путь $1\overset{2}{-}2\overset{7}{-}3\overset{1}{-}5\overset{2}{-}8$. 1–2–3–5–8 Находим величину $\Delta=\min(2;7;1;2)=1$, на которую нужно увеличить поток по ребрам (1;2), (2;3), (3;5) и (5;8), чтобы получить более мощный поток.

В результате получим поток X^1, мощность которого равна $f\left(X^1\right)=f\left(X^0\right)+\Delta=15+1=16$.

X^1	1	2	3	4	5	6	7	8
1		8	8					
2	-8		-1	2	4		3	
3	-8	1			1	6		
4		-2					2	
5		-4	-1					5
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-5	-6	-5	

Проверим этот поток на макси-мальность, для чего найдем матрицу $R-X^1$:

R-X^1	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1						
2	17		6	4				
3	16	4						
4		8						
5		8	2			5	5	1
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					11	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток:

$$1:2$$

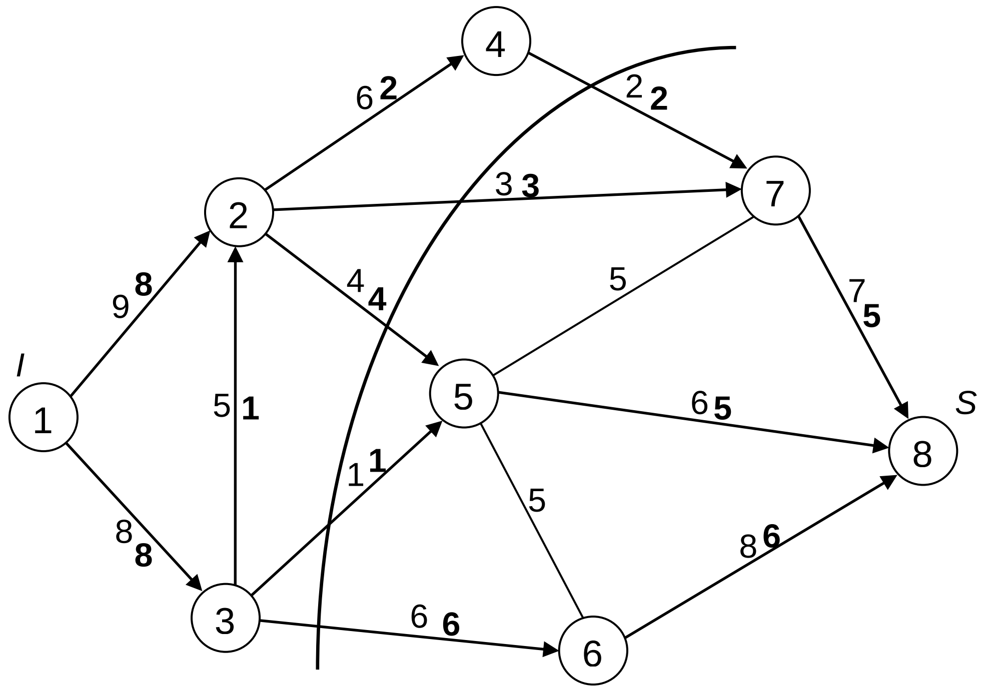
$$2:3,4$$

$$3:\times$$

$$4:\times$$

Такого пути нет, поэтому поток $X^*=X^1$ – максимальный и его мощность равна $f_{\max}=f\left(X^*\right)=16$.

Нанесем этот поток на сеть с указанием величин (выделим полужирным) и направления потоков по отдельным ребрам:

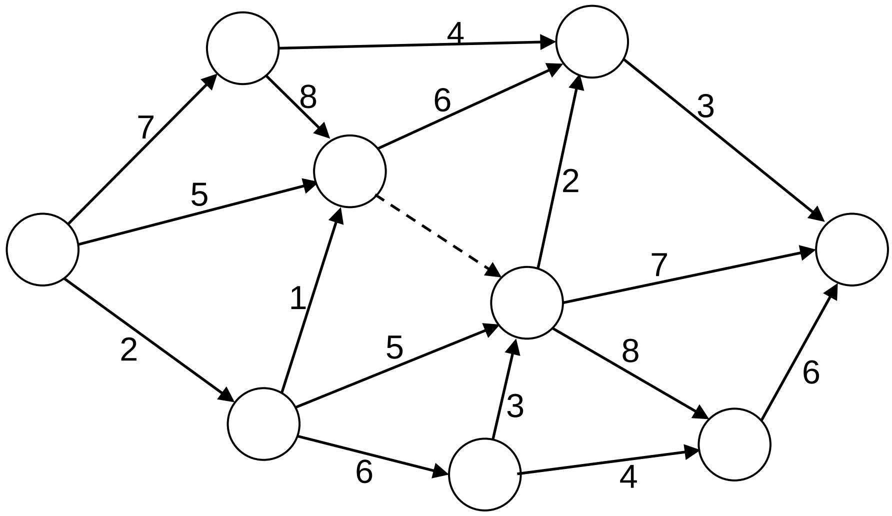


Проверим правильность построенного максимального потока с помощью теоремы Форда - Фалкерсона, согласно которой максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего исток от стока.

Ребра (4;7), (2;7), (2;5), (3;5), (3;6), очевидно, образуют искомый разрез, так как пропускная способность ребер разреза равна $r_{47} + r_{27} + r_{25} + r_{35} + \; + r_{36} = 2 + 3 + 4 + 1 + 6 = 16$ ед., что совпадает с максимальной мощностью на сети. Значит, максимальный поток построен верно.

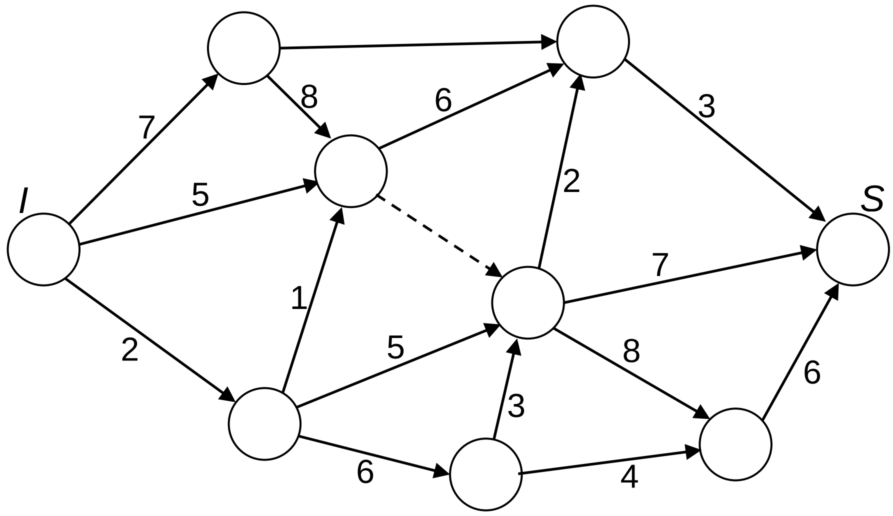
$$\textbf{\textit{Ответ}}\textbf{:}\; X^* = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -6 & -5 & 0 \end{bmatrix};\; f_{\max} = f\left(X^*\right) = 16.$$

№ 5. Для данного сетевого графика комплекса работ определить:
1) исходное событие *I* и завершающее событие *S*;
2) номера вершин в натуральном порядке;
3) ранние сроки свершения событий;
4) поздние сроки свершения событий;
5) резервы времени событий;
6) время выполнения комплекса и критический путь.

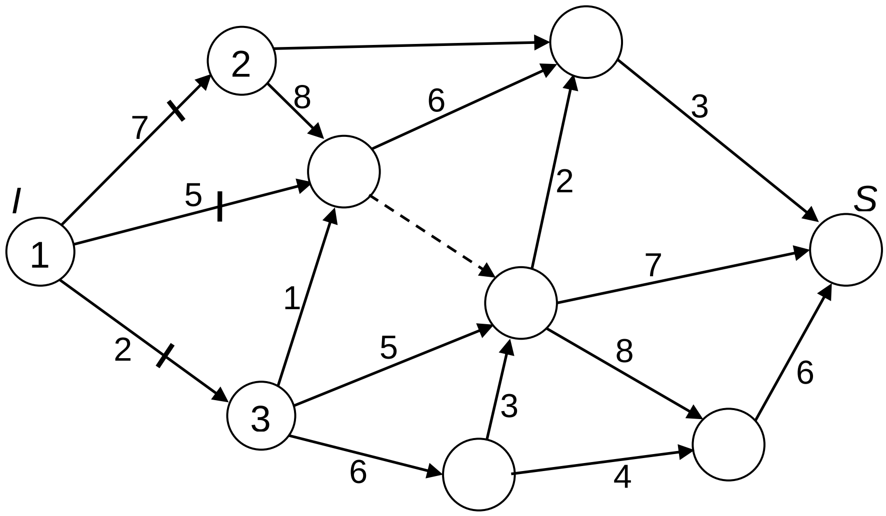


Решение

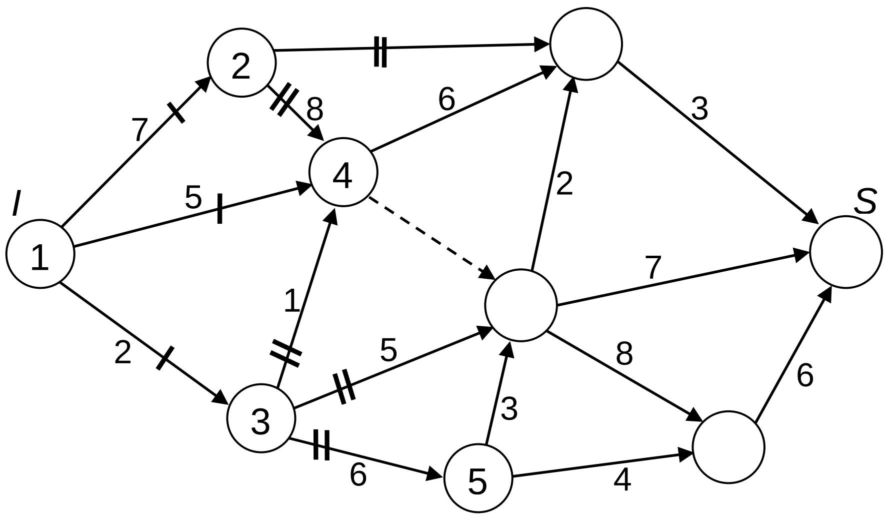
1. *Исходным событием I* является первое слева событие как не имеющее предшествующих вершин, а *завершающим событием S* является последнее правое как не имеющее последующих вершин:



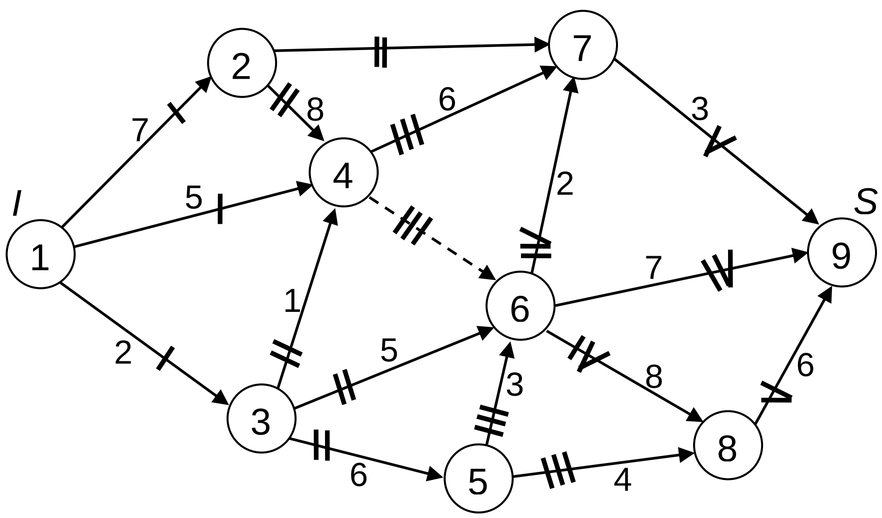
2. Нумерация вершин начинается с присвоения номера 1 исходному событию *I*. На первом шаге зачеркнем все работы, начинающиеся в этой вершине (одной чертой) и будем считать, что они выполнены. Продолжим нумерацию тех вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ. Это будут вершины 2 и 3. Назовем их *вершинами первого уровня*:



На втором шаге зачеркнем двумя чертами работы, начинающиеся в вершинах первого уровня, и аналогично продолжаем нумерацию вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ (опять же считая выполненными все вычеркнутые работы). Это будут вершины 4 и 5 – *вершины второго уровня*:

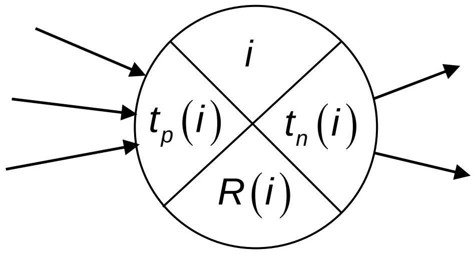


Продолжая аналогично, получим нумерацию вершин в натуральном порядке. Номер вершины начала любой из работ меньше номера вершины ее окончания.



Из вершины 4 в вершину 6 идет пунктирная линия. Это означает, что 6-я работа наступает после 4-й с нулевыми затратами времени.

3. Для дальнейшей работы с графом каждую вершину разобьем на четыре части. В верхней части указывается номер события *i*, в левой – ранний срок $t_p(i)$ свершения события *i*, в правой – поздний срок $t_n(i)$ свершения события *i*, в нижней – резерв $R(i)$ времени этого события.



Сначала рассчитываются ранние сроки свершения событий (для события I его полагают равным 0). Для остальных событий (в порядке возрастания номеров) эти сроки подсчитываются по формуле

$$t_p(j) = \max_{(i;j)\in U_j^+}\left[t_p(i) + t(i;j)\right],$$

где U_j^+ – множество работ, входящих в *j*-е событие; $t_p(i)$ – ранний срок наступления начального события работы $(i;j)$ с продолжительностью $t(i;j)$.

Ранний срок $t_p(i)$ свершения события *i* – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

В нашем случае будем иметь:

$t_p(2) = t_p(1) + t(1;2) = 0 + 7 = 7;$

$t_p(3) = t_p(1) + t(1;3) = 0 + 2 = 2;$

$t_p(4) = \max\big(t_p(2) + t(2;4); t_p(1) + t(1;4); t_p(3) + t(3;4)\big) =$

$\quad = \max(7 + 8; 0 + 5; 2 + 1) = \max(15;5;3) = 15;$

$t_p(5) = t_p(3) + t(3;5) = 2 + 6 = 8;$

$t_p(6) = \max\big(t_p(4) + t(4;6); t_p(3) + t(3;6); t_p(5) + t(5;6)\big) =$

$\quad = \max(15 + 0; 2 + 5; 8 + 3) = \max(15;7;11) = 15;$

$t_p(7) = \max\big(t_p(2) + t(2;7); t_p(4) + t(4;7); t_p(6) + t(6;7)\big) =$

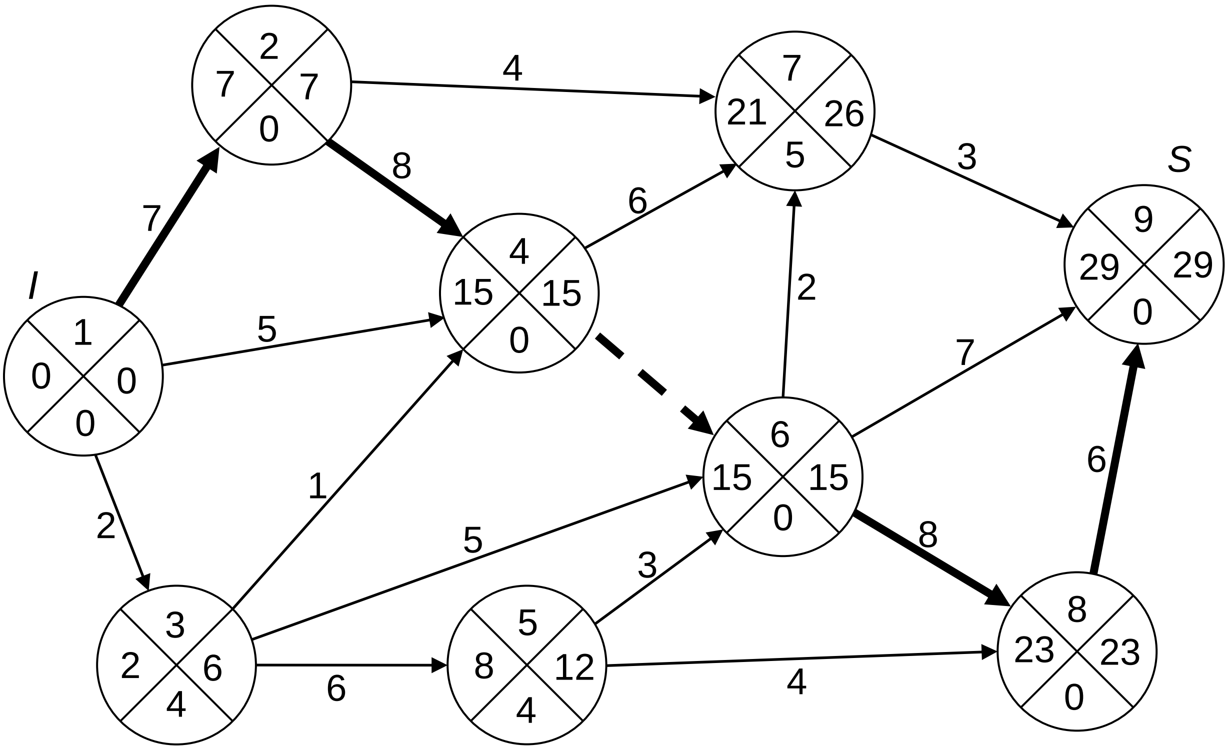
$\quad = \max(7 + 4; 15 + 6; 15 + 2) = \max(11;21;17) = 21;$

$t_p(8) = \max\big(t_p(6) + t(6;8); t_p(5) + t(5;8)\big) = \max(15 + 8; 8 + 4) = \max(23;12) = 23;$

$$t_p(9) = \max\left(t_p(7) + t(7;9); t_p(6) + t(6;9); t_p(8) + t(8;9)\right) =$$
$$= \max(21 + 3; 15 + 7; 23 + 6) = \max(24; 22; 29) = 29.$$

В итоге получено число $t_{крит} = 29$ – минимальное время, за которое можно выполнить весь комплекс работ.

4. Найдем поздние сроки свершения событий.



Считается, что поздний срок свершения завершающего события равен критическому сроку: $t_n(9) = t_p(9) = t_{крит} = 29$. Затем, в порядке убывания вершин, поздние сроки свершения событий находим по формуле:

$$t_n(i) = \min_{(i;j)\in U_i^-}\left[t_n(j) - t(i;j)\right],$$

где U_i^- – множество работ, выходящих из *i*-го события, а $t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы $(i;j)$.

Поздний срок $t_n(i)$ наступления *i*-го события – это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае будем иметь:

$t_n(8) = t_n(9) - t(8;9) = 29 - 6 = 23;$

$t_n(7) = t_n(9) - t(7;9) = 29 - 3 = 26;$

$$t_n(6)=\min\left(t_n(7)-t(6;7);t_n(9)-t(6;9);t_n(8)-t(6;8)\right)=$$
$$=\min(26-2;29-7;23-8)=\min(24;22;15)=15;$$
$$t_n(5)=\min\left(t_n(6)-t(5;6);t_n(8)-t(5;8)\right)=\min(15-3;23-4)=\min(12;19)=12;$$
$$t_n(4)=\min\left(t_n(7)-t(4;7);t_n(6)-t(4;6)\right)=\min(26-6;15-0)=\min(20;15)=15;$$
$$t_n(3)=\min\left(t_n(4)-t(3;4);t_n(6)-t(3;6);t_n(5)-t(3;5)\right)=$$
$$=\min(15-1;15-5;12-6)=\min(14;10;6)=6;$$
$$t_n(2)=\min\left(t_n(7)-t(2;7);t_n(4)-t(2;4)\right)=\min(26-4;15-8)=\min(22;7)=7;$$
$$t_n(1)=\min\left(t_n(2)-t(1;2);t_n(4)-t(1;4);t_n(3)-t(1;3)\right)=$$
$$=\min(7-7;15-5;6-2)=\min(0;10;4)=0.$$

5. Резервы времени событий найдем по формуле

$$R(i)=t_n(i)-t_p(i)$$

и внесем их в нижние четверти вершин:

$R(1)=0-0=0;$ $\quad R(2)=7-7=0;$ $\quad R(3)=6-2=4;$

$R(4)=15-15=0;$ $\quad R(5)=12-8=4;$ $\quad R(6)=15-15=0;$

$R(7)=26-21=5;$ $\quad R(8)=23-23=0;$ $\quad R(9)=29-29=0.$

6. Ранее было найдено время выполнения комплекса: $t_{крит}=29$.

Для работ критического пути все резервы времени равны 0, поэтому критическим является путь $L_{крит}:1-2-4-6-8-9$ (выделен на графе).

***Ответ*:** $L_{крит}:1-2-4-6-8-9$; $t_{крит}=29$.

Литература

1. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование : учеб. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 352 с.

2. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование : учеб. пособие / А. В. Кузнецов [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова и Р. А. Рутковского. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2021. – 448 с.

3. Кузьмина, Е. В. Элементы математического программирования : практикум по высшей математике для студентов технических специальностей : в 8 ч. / Е. В. Кузьмина, Л. Т. Мороз. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2007. – Ч. 6. – 45 с.

4. Юхимук, Т. Ю. Математическое программирование : метод. рекомендации / Т. Ю. Юхимук, М. М. Юхимук, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2019. – 44 с.

5. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» для студентов экономических специальностей / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2000. − 91 с.

6. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2005. − 92 с.

7. Гладкий, И. И. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / И. И. Гладкий, С. Т. Гусева, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2011. − 32 с.

8. Махнист, Л. П. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : практикум для студентов экономических специальностей / Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, И. И. Гладкий. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2016. − 84 с.

Содержание

Практические задания……………………………………………………..…… **3**

Решение типового варианта……..………………………………………… **31**

Литература………………………………………………………………… **54**

Учебное издание

Составители:
Юхимук Татьяна Юрьевна,
Юхимук Михаил Михайлович,
Махнист Леонид Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рабочая тетрадь

Ответственный за выпуск: Юхимук М. М.
Редактор: Винник Н. С.
Компьютерная верстка: Горбач А. А.
Корректор: Дударук С. А.

Подписано в печать 27.04.2024 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 3,75. Уч. изд. л. 3,49. Заказ № 506. Тираж 30 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, Распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.