**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

# *Дискретная математика в задачах и упражнениях*

Методические указания к изучению курса
***«Дискретная математика»***

для студентов специальностей
***6-05-0612-01 «Программная инженерия» и 6-05-0611-03 «Искусственный интеллект»***

Брест 2023

УДК 519.7(075.8)

В методических указаниях приведены и разобраны задачи и упражнения по курсу «Дискретная математика». Указания содержат задания по темам: множества, отношения и булевы функции. Решение заданий описаны доступным языком с подробными пояснениями.

Составители: Глущенко Т. А., старший преподаватель кафедры ИИТ
Швецова Е. В., старший преподаватель кафедры ИИТ
Шуть В. Н., доцент кафедры ИИТ, к. т. н., доцент
Хацкевич М. В., старший преподаватель кафедры ИИТ
Кот А. А., старший преподаватель кафедры АТПиП

Рецензенты: Грицук Д. В., зав. кафедры прикладной математики
и информатики УО БрГУ им. А. С. Пушкина, к. ф.-м. н., доцент

Махнист Л. П., доцент кафедры математики и информатики
УО БрГТУ, к. т. н., доцент

Учреждение образования
© «Брестский государственный технический университет», 2023

# СОДЕРЖАНИЕ



# ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является важной составляющей в системе подготовки инженеров специальностей «Программная инженерия» и «Искусственный интеллект», поскольку понятия, методы и алгоритмы дискретной математики широко применяются как в информатике в целом, так и в практическом программировании.

Дискретная математика читается для студентов *IT*-специальностей как отдельным курсом, так и лежит в основе других читаемых курсов.

В данном пособии рассмотрены задания по трём основным разделам: множества, отношения и булевы функции. Пособие по содержанию составлено в соответствии с ранее изданной теорией по этим же темам. Все приведенные задания и их решения подробно описаны и разобраны, при необходимости приведена теория. Задания варьируются от простых к сложным и максимально охватывают все подтемы разделов.

Пособие написано в легкодоступной и читаемой форме с использованием графических иллюстраций.

Данное методическое пособие разработано в соответствии с учебными планами и программами по дисциплине «Дискретная математика» для специальности 6-05-0612-01 «Программная инженерия» и дисциплине «Теоретико-множественные основы интеллектуальных систем» специальности 6-05-0611-03 «Искусственный интеллект».

## ТЕМА № 1. **МНОЖЕСТВА**

*Рассматриваемые вопросы*

Способы задания множеств. Операции над множествами. Доказательство теоретико-множественных тождеств. Разбиения множеств. Формула включений-исключений. Булеан. Прямое произведение множеств.

*Задание 1*

Множества $A$ и $B$ заданы перечислением элементов, задать их с помощью *характеристического свойства* или *порождающей процедуры*:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

*Решение:*

*1.* $A = \{x: x \in Z \wedge |x| \leq 2\}$ (характеристическое свойство).

*2.* $B = \{3n: n \in Z \wedge 1 \leq n \leq 8\}$ (порождающая процедура).

*Задание 2*

Установите *истинность* или *ложность* каждого из следующих высказываний:

1. $\{2\} \in \{1,2,3,4,5\}$;
2. $\{2\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$;
3. $\emptyset = \{\emptyset\}$;
4. $\{1,2,3\} \in \{\{1,2,3\}\}$;
5. $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,\{1,2,4\}\}$.

*Решение:*

1. Это *ложное* высказывание, элементы множества справа перечислены через запятую в фигурных скобках и там нет элемента $\{2\}$.

2. Это *верное* высказывание. По определению подмножества $A \subseteq B$: каждый элемент множества $A$ есть элемент множества $B$, 2 является элементом множества $A$ и 2 является элементом множества $B$.

3. Это *ложное* высказывание, слева от знака равенства стоит *пустое* множество, в котором *нет ни одного* элемента, а справа стоит множество, в котором есть *один* элемент, *пустое* множество.

4. Это *верное* высказывание, справа стоит множество, содержащее один элемент, множество $\{1,2,3\}$.

5. Это *ложное* высказывание, поскольку элемент 4, принадлежащий множеству слева, не является элементом множества справа.

*Задание 3*

Определите *мощность* указанных множеств:

$A = \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$.

*Решение:*

Элементы *конечных* множеств, задаваемых *перечислением*, берутся в фигурные скобки и отделяются запятой.

Посчитаем мощности указанных множеств: $|A| = 4$, $|B| = 6$. Для множества $A$ множество $\{1,2,3\}$ является его четвертым элементом, множество $\{a, b, \{a, b\}\}$ является шестым элементом для множества $B$.

*Задание 4*

Покажите на числовых примерах и диаграммами *Эйлера-Венна* выполнимость *дистрибутивного* закона: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

*Решение:*

Положим $A = \{1,2,5,8\}$, $B = \{4,5,9\}$, $C = \{3,5,8,9\}$.

Численно найдем *левую* часть нашего выражения:

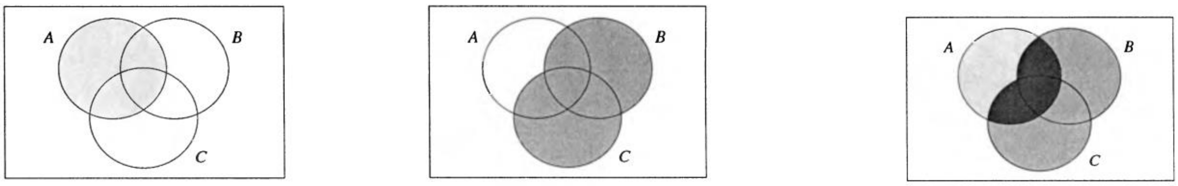
$A \cap (B \cup C) = \{1,2,5,8\} \cap (\{4,5,9\} \cup \{3,5,8,9\}) = \{1,2,5,8\} \cap \{3,4,5,8,9\} =$
$= \{5,8\}$.

Численно найдем *правую* часть выражения:

$(A \cap B) = \{5\}$, $(A \cap C) = \{5,8\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5\} \cup \{5,8\} = \{5,8\}$.

Как видим, левая и правая часть нашего выражения численно равны.

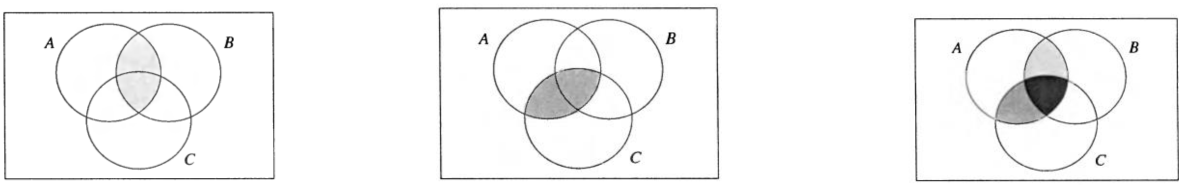
Представим диаграммой *Эйлера-Венна левую часть* выражения, будем строить ее поэтапно (рисунок 1.1).




а) $A$ б) $B \cup C$ в) $A \cap (B \cup C)$

**Рисунок 1.1 – Диаграмма для левой части выражения**

Множество $A \cap (B \cup C)$ выделено на рисунке 1.1в самым темным цветом. Представим диаграммой *правую* часть выражения (рисунок 1.2).




а) $(A \cap B)$ б) $(A \cap C)$ в) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Рисунок 1.2 – Диаграмма для правой части выражения**

Множество $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ изображено на рисунке 1.2 в закрашенной областью.

Результирующие диаграммы для левой и правой части нашего выражения совпадают, что свидетельствует о справедливости *дистрибутивного* закона.

*Задание 5*

Проверить на числовых множествах выполнимость *дистрибутивного закона*:

$A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$.

*Решение:*

Возьмем множества из предыдущего примера:

$A = \{1,2,5,8\}$, $B = \{4,5,9\}$, $C = \{3,5,8,9\}$.

Для симметрической разности есть несколько эквивалентных формул:

$B \vartriangle C = (B - C) \cup (C - B)$ или $B \vartriangle C = (B \cup C) - (B \cap C)$.

Воспользуемся первой из них.

$(B - C) = \{4\}$, $(C - B) = \{3,8\}$, тогда $B \vartriangle C = \{3,4,8\}$.

Для левой части тождества имеем:

$A \cap (B \vartriangle C) = \{1,2,5,8\} \cap \{3,4,8\} = \{8\}$.

Для правой части имеем:

$(A \cap B) = \{5\}$, $(A \cap \mathrm{C}) = \{5,8\}$, $(A \cap B) \vartriangle (A \cap \mathrm{C}) = \{5\} \vartriangle \{5,8\} = \{8\}$.

Как видим, численные значения левой и правой части нашего тождества равны.

*Задание 6*

Используя теоретико-множественные *эквивалентности*, доказать тождество:

$(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

Численно проверить выполнимость тождества.

*Решение:*

Используя эквивалентность $A - B = A \cap \bar{B}$, имеем:

$(A - B) - C = (A \cap \bar{B}) - C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) =$ (ассоциативность операции пересечения) $= A \cap \overline{(B \cup C)} =$ (по закону *де Моргана*) $= A - (B \cup C)$.

Возьмем данные из предыдущего примера: $A = \{1,2,5,8\}$, $B = \{4,5,9\}$, $C = \{3,5,8,9\}$.

Численно вычислим *леву*ю часть тождества:

$A - B = \{1,2,8\}$, $(A - B) - C = \{1,2\}$.

Численно вычислим *правую* часть тождества:

$(B \cup C) = \{3,4,5,8,9\}$, $A - (B \cup C) = \{1,2\}$.

Как видим, численные результаты обеих частей тождества совпадают.

*Задание 7*

Про два *непустых* множества $A$ и $S$ известно, что $A \cap \bar{S} = \emptyset$. Найти чему равны $A \cup S$ и $A \cap S$.

*Решение:*

У нас возможны *четыре* варианта расположения двух множеств друг относительно друга на диаграммах:

1. Множества между собой не пересекаются: $A \cap S = \emptyset$. В этом случае $A \cap \bar{S} = A$. Это не наш случай.

2. Множества $A$ и $S$ пересекаются между собой, но не являются подмножествами друг друга, $A \cap S \neq \emptyset$. В этом случае $A \cap \bar{S} = A - S \neq \emptyset$. Это тоже не наш случай.

3. Множество $S$ является подмножеством множества $A$, $S \subseteq A$. В этом случае $A \cap \bar{S} = A - S \neq \emptyset$. И это не наш случай.

4. Множество $A$ является подмножеством множества $S$, $A \subseteq S$. Только в этом случае выполняется $A \cap \bar{S} = \emptyset$, что видно из рисунка 1.3 и $A \cup S = S$, $A \cap S = A$.

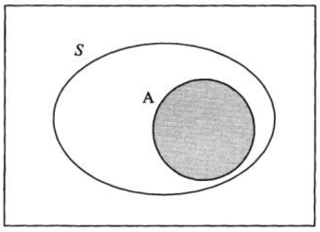



**Рисунок 1.3 – Диаграмма *Эйлера-Венна* для четвёртого случая**

*Задание 8*

Выяснить, является ли система множеств $A_1, A_2, A_3$ разбиением множества $A = \{a, b, c, d, e\}$, если:

1. $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, d\}$, $A_3 = \{c, e\}$;
2. $A_1 = \{a, d\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{d, e\}$;
3. $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$, $A_3 = \{e, f\}$.

*Решение:*

1. Множества $A_1, A_2, A_3$ являются подмножествами множества $A$, попарно не пересекаются и объединение этих подмножеств есть множество $A$. Мы получили *разбиение* $A$.

2. Множества $A_1, A_2, A_3$ являются подмножествами множества $A$, объединение подмножеств есть множество $A$, но $A_1 \cap A_3 = \{d\} \neq \emptyset$, поэтому данное семейство подмножеств $A$ не является его *разбиением*. Это *покрытие* множества $A$.

3. Множество $A_3$ не является подмножеством множества $A$, поэтому данная система множеств $A_1, A_2, A_3$ не является ни разбиением, ни покрытием множества $A$.

*Задание 9*

Показать на числовых примерах, что в общем случае справедливо неравенство: $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.

*Решение:*

Определим множества: $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$. Тогда $A \cup B = \{1,2,3\}$.

Построим булеаны указанных множеств.

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

Подставим полученные результаты в левую и правую части нашего неравенства:

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \neq \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

Как видим, для нашего примера неравенство является верным.

*Задание 10*

Задано множество $A = \{\emptyset\}$. Найти булеаны $P(A)$ и $P(P(A))$.

*Решение:*

Мощность $|A| = 1$, значит мощность булеана $|P(A)| = 2^{|A|} = 2$.

Построим его: $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Теперь построим $P(P(A))$. Его мощность $|P(P(A))| = 2^{|P(A)|} = 2^2 = 4$.

$P\big(P(A)\big) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

*Задание 11*

Пусть $U$ – множество студентов некоторого вуза. Определим его подмножества: $A$ – множество студентов, которые учатся на «*отлично*», $B$ – множество студентов, изучающих английский язык, $C$ – множество студентов, имеющих спортивный разряд и $D$ – множество студентов, состоящих в студенческом профкоме.

Выразить через операции над множествами $A$, $B$, $C$, $D$ следующие множества студентов:

*а)* множество студентов, не состоящих в профкоме, но изучающих английский язык;

*б)* множество отличников, у которых есть спортивный разряд;

*в)* множество отличников-спортсменов, состоящих в профкоме;

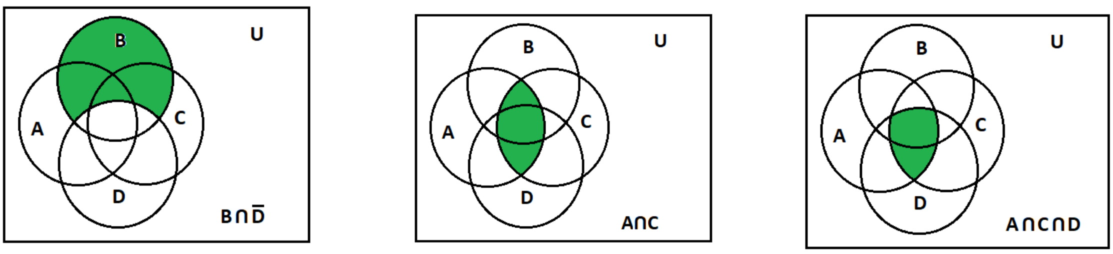
*г)* множество студентов, не являющихся отличниками и не состоящих в профкоме.

*Решение:*

*1.* Студенты, принадлежащие данному множеству, должны *одновременно* не состоять в профкоме ($\overline{D}$) и изучать английский язык ($B$), поэтому используем операцию *пересечения* – $B \cap \overline{D}$. Диаграмма *Эйлера-Венна* для полученного результата приведена на рисунке 1.4а.

*2.* Студенты, принадлежащие данному множеству, должны *одновременно* быть отличниками и иметь спортивный разряд, также используем операцию *пересечения* – $A \cap C$. Диаграмма *Эйлера-Венна* для полученного результата приведена на рисунке 1.4б.

*3.* Проводим аналогичные рассуждения и используем вновь операцию *пересечения:* $A \cap C \cap D$. Диаграмма *Эйлера-Венна* для полученного результата приведена на рисунке 1.4в.



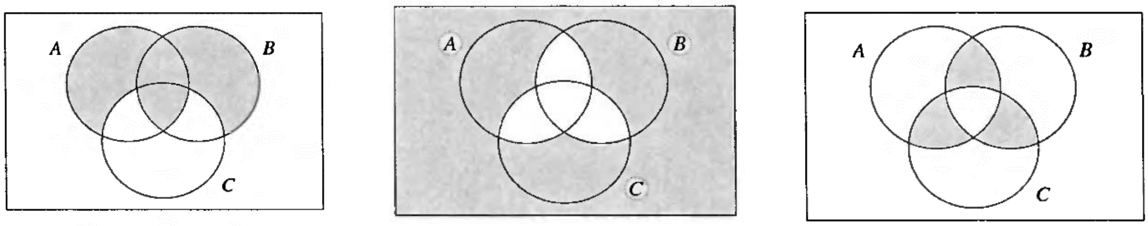

а) б) в)

**Рисунок 1.4 – Диаграммы *Эйлера-Венна***

*4.* Мы определяем множество студентов, *одновременно не обладающих* свойствами быть отличниками ($\bar{A}$) и иметь спортивный разряд ($\bar{D}$), поэтому используем операции *пересечения* и *дополнения* – $\bar{A} \cap \bar{D}$.

*Задание 12*

Опишите множества, соответствующие закрашенной части каждой диаграммы *Эйлера-Венна* (рисунок 1.5).



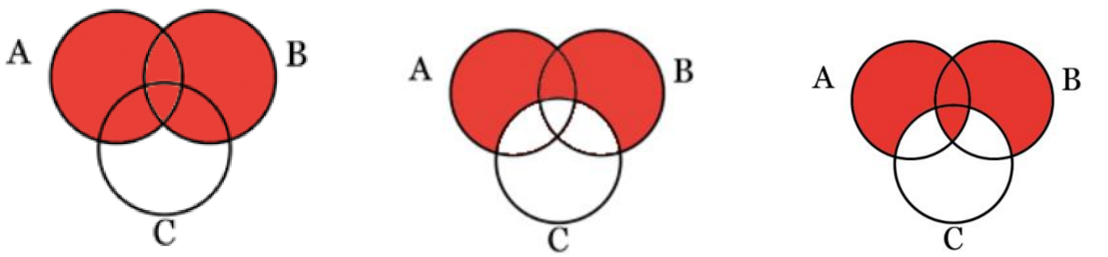

а) б) в)

**Рисунок 1.5 – Диаграммы *Эйлера-Венна***

*Решение:*

*Первая диаграмма*

Будем строить ее в *три* этапа, результаты построения представлены на рисунке 1.6, результирующее множество – $((A \cup B) - C) \cup (A \cap B)$.




1. $A \cup B$ 2. $(A \cup B) - C$ 3. $((A \cup B) - C) \cup (A \cap B)$

**Рисунок 1.6 – Результаты построения**

*Вторая диаграмма*

Будем строить ее в *два* этапа, результаты построения представлены на рисунке 1.7, результирующее множество – $U - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$.


1. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 2. $U - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

**Рисунок 1.7 – Результаты построения**

*Третья диаграмма*

Будем строить ее в *два* этапа, результаты построения представлены на рисунке 1.8, результирующее множество – $((A \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})) - (A \cap B \cap C)$.


$(A \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ $\quad$ $((A \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})) - (A \cap B \cap C)$

**Рисунок 1.8 – Результаты построения**

*Задание 13*

Упростить выражение: $\overline{A \cup (A - \bar{B}) \cup (\bar{A} - \bar{B})}$, используя формулу $A - B = A \cap \bar{B}$, другие эквивалентности и раскрывая дистрибутивный закон.

*Решение*

$$\overline{A \cup (A - \bar{B}) \cup (\bar{A} - \bar{B})} = (\text{раскрываем разность}) = \overline{A \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)} =$$
$$= (\text{собираем дистрибутивный закон}) = \overline{A \cup (B \cap (\bar{A} \cup A))} =$$
$$= (\text{поскольку } \bar{A} \cup A = U\ ) = \overline{A \cup (B \cap U)} =$$
$$= (\text{и поскольку} B \cap U = B) = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ (закон де Моргана)}$$

*Задание 14*

На множестве действительных чисел $R$ заданы два его подмножества, отрезки $A = [3; 7]$ и $B = [6; 10]$. Найти результаты операций над множествами: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \Delta B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$. Изобразить графически на плоскости $R^2$ множество $A \times B$.

*Решение:*

1. $A \cup B = [3; 10]$;
2. $A \cap B = [6; 7]$;
3. $A - B = [3; 6)$. Число $6$ в искомое множество не входит, поэтому у нас *полуинтервал*;
4. $A \Delta B = [3; 6) \cup (7; 10]$;
5. $\bar{A} = (-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$, поскольку $\bar{A} = U - A$, а $U = (-\infty; +\infty)$;
6. $\bar{B} = (-\infty; 6) \cup (10; +\infty)$.

Построим множество $A \times B$ в первой четверти координатной плоскости $R^2$.

Множество, стоящее первым в прямом произведении $A \times B$, откладываем по оси *абсцисс*, второе – по оси *ординат*. Прямому произведению соответствует область, заштрихованная «*в полоску»* на рисунке 1.9.

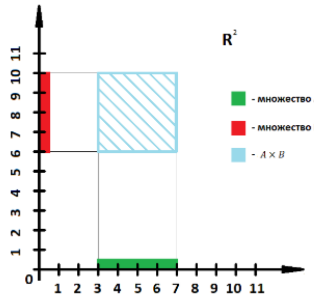



**Рисунок 1.9 – Прямое произведение множеств $A \times B$**

*Задание 15*

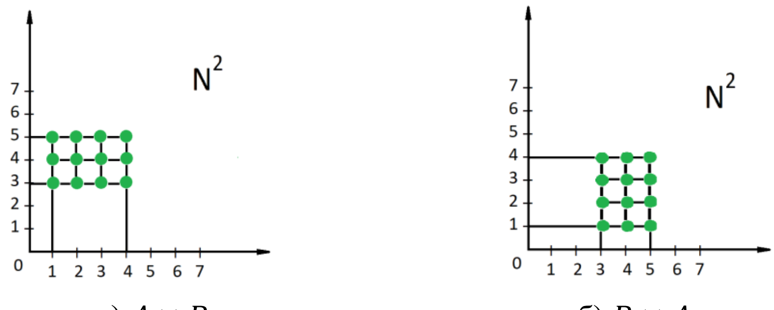
На множестве натуральных чисел $N$ заданы два его подмножества, $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{3,4,5\}$. Найти численные результаты операций $A \times B$, $B \times A$, $(A \times B) - (B \times A)$, $(A \times B) \cap (B \times A)$. Изобразить графически на плоскости $R^2$ полученные множества (*4* отдельных рисунка). Верно ли в *общем случае* равенство $A \times B = B \times A$. Для какого случая оно справедливо?

*Решение:*

Численно найдем результаты операции прямого произведения над множествами и проиллюстрируем их графически. Будем использовать первую четверть $R^2$. Множество $N^2 = N \times N$ представляет собой бесконечное множество точек с координатами из натуральных чисел.

1. $A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5)\}$. Графическая иллюстрация результата $A \times B$ приведена на рисунке 1.10а.

2. $B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$. Графическая иллюстрация результата $B \times A$ приведена на рисунке 1.10б.




а) $A \times B$ б) $B \times A$

**Рисунок 1.10 – Графическая иллюстрация прямого произведения**

3. $(A \times B) - (B \times A) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$. Графическая иллюстрация результата представлена на рисунке 1.11а.

4. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$. Графическая иллюстрация результата представлена на рисунке 1.11б.


а) $(A \times B) - (B \times A)$ б) $(A \times B) \cap (B \times A)$

**Рисунок 1.11 – Графическая иллюстрация результатов операций**

Как видим из приведенных примеров, в общем случае $A \times B \neq B \times A$.

Равенство имеет место только в случае, когда $A = B$.

*Задание 16*

Проиллюстрировать графически и показать на числовых примерах выполнение свойства операции $\times$: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. Как называется это свойство?

*Решение:*

Примем, что множество $A$ – это отрезок $[2;5]$, множество $B$ – это отрезок $[4;8]$, а множество $C$ – это отрезок $[4;7]$ на действительной оси $R$.

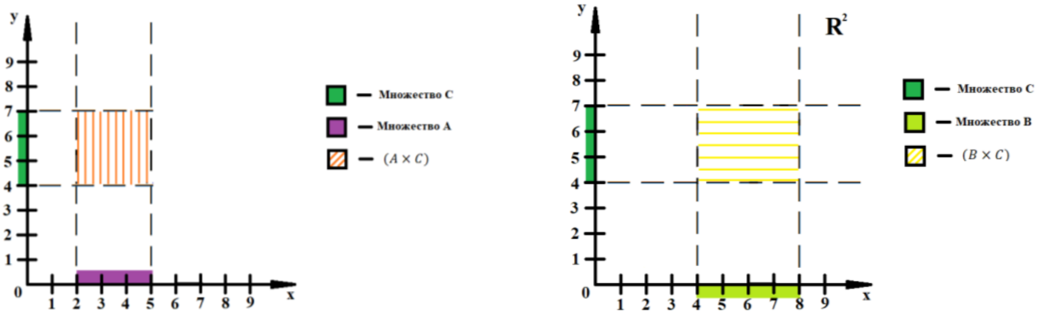
Рассмотрим *правую* часть равенства.

Найдем прямое произведение множеств $(A \times C)$. Первое множество будем откладывать по оси *Ox*, второе – по оси *Oy*.

Результатом операции будет множество всех точек квадрата с вершинами в точках $(2,4), (2,7), (5,4), (5,7)$.

Теперь найдем прямое произведение множеств $(B \times C)$. Результатом будет множество всех точек прямоугольника с вершинами $(4,4), (4,7), (8,4), (8,7)$.

Изобразим на плоскости $R^2$ полученные множества. Графическая иллюстрация результатов приведена на рисунке 1.12.




а) $A \times C$ б) $B \times C$

**Рисунок 1.12 – Графическая иллюстрация результатов операций**

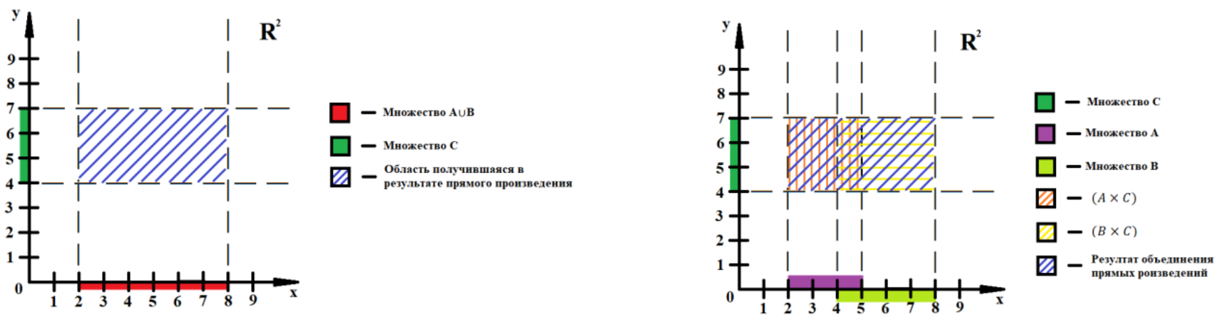
Теперь объединим наши два множества $(A \times C) \cup (B \times C)$. Результатом будет множество всех точек прямоугольника с вершинами в точках $(2,4), (2,7), (8,4), (8,7)$.

Рассмотрим *левую* часть равенства.

Найдем объединение множеств: $A \cup B = [2; 8]$.

Найдем прямое произведение множеств $(A \cup B) \times C$. Результатом прямого произведения множеств $(A \cup B) \times C$ будет множество всех точек прямоугольника с вершинами в точках $(2,4), (2,7), (8,4), (8,7)$.

Изобразим на плоскости $R^2$ результаты *левой* и *правой* части нашего равенства (рисунок 1.13).




а) $(A \cup B) \times C$ б) $(A \times C) \cup (B \times C)$

**Рисунок 1.13 – Графическая иллюстрация результатов операций**

Как мы видим, результаты *левой* и *правой* части нашего равенства совпадают как графически, так и численно.

Мы проверили выполнение *дистрибутивного закона*: прямое произведение дистрибутивно относительно операции *объединения* множеств.

*Задание 17*

Найти количество натуральных чисел, не больших *1000*, которые не делятся ни на *15*, ни на *20*, ни на *36*.

*Решение:*

Как мы знаем, количество натуральных чисел, делящихся на число $p$ и не превосходящих числа $n$, равно $[\frac{n}{p}]$ (берем целую часть от частного).

Количество натуральных чисел, делящихся одновременно на числа $\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{k}$ и не превосходящих числа $n$, равно $[\frac{n}{\text{НОК}(\mathrm{p}_1,\dots,\mathrm{p}_\mathrm{k})}]$.

Вначале найдём по формуле *включений-исключений* количество чисел, делящихся или на *15*, или на *20*, или на *36* из нашего промежутка.

$N = N_{15} + N_{20} + N_{36} - N_{15,20} - N_{15,36} - N_{20,36} + N_{15,20,36}$.

Произведем расчеты.

Количество чисел, делящихся на *15*: $N_{15} = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66$.

Количество чисел, делящихся на *20*: $N_{20} = \left[\frac{1000}{20}\right] = 50$.

Количество чисел, делящихся на *36*: $N_{36} = \left[\frac{1000}{36}\right] = 27$.

Количество чисел, делящихся на *15* и *20*: $N_{15,20} = \left[\frac{1000}{\text{НОК}(15,20)}\right] = \left[\frac{1000}{60}\right] = 16$.

Количество чисел, делящихся на *15* и *36*: $N_{15,36} = \left[\frac{1000}{\text{НОК}(15,36)}\right] = \left[\frac{1000}{180}\right] = 5.$

Количество чисел, делящихся на *20* и *36*: $N_{20,36} = \left[\frac{1000}{\text{НОК}(20,36)}\right] = \left[\frac{1000}{180}\right] = 5.$

Количество чисел, делящихся и на 15, и на *20*, и на *36*:

$N_{15,20,36} = \left[\frac{1000}{\text{НОК}(15,20,36)}\right] = \left[\frac{1000}{180}\right] = 5.$

Подставим полученные результаты в формулу *включений-исключений*.

$N = 66 + 50 + 27 - 16 - 5 - 5 + 5 = 122.$

Теперь найдем количество натуральных чисел, не больших *1000*, которые не делятся ни на *15*, ни на *20*, ни на *36*.

$\bar{N} = 1000 - 122 = 878.$

*Задание 18*

Предположим, что, согласно исследованию, из *200* людей, смотрящих телевизор, *110* человек смотрят спортивную передачу, *120* – комедии, *85* предпочитают драмы, *50* смотрят драмы и спорт, *70* – комедии и спорт, 55 смотрят комедии и драмы и *30* человек смотрят все три вида передач.

*а)* Сколько человек смотрят спорт, комедии или драмы?

*б)* Сколько человек не смотрят ничего из вышеперечисленного?

*в)* Сколько человек смотрят только спорт?

*г)* Сколько человек смотрят драмы или спорт, но не смотрят комедии?

*д)* Сколько человек смотрят ровно две программы?

*Решение:*

Универсум в нашей задаче $U = 200$, это множество людей, среди которых проводится опрос. Обозначим через $A$ множество людей, которые смотрят спорт, через $B$ множество людей, которые смотрят комедии и через $C$ множество людей, которые смотрят драмы.

*а)* В первом задании нам надо найти мощность объединения множеств $A, B$ и $C$. Воспользуемся формулой включений-исключений.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$

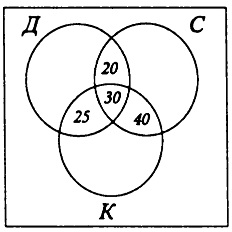
Подставим данные задачи в формулу, имеем:

$|A \cup B \cup C| = 110 + 120 + 85 - 70 - 50 - 55 + 30 = 170.$

*б)* Найдем, сколько человек не смотрят ничего из вышеперечисленного.

$|\overline{A \cup B \cup C}| = 200 - 170 = 30.$

Для ответа на оставшиеся вопросы построим диаграмму *Эйлера-Венна* для наших множеств и произведем разбиение $U$, диаграммы приведены на рисунке 1.14.



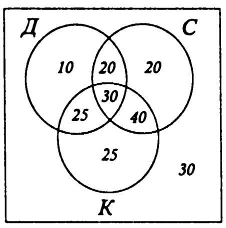




**Рисунок 1.14 – Диаграммы *Эйлера-Венна***

На диаграмме сразу отмечаем множество $A \cap B \cap C$, его мощность: $|A \cap B \cap C| = 30$. Теперь подсчитаем, сколько человек смотрит драмы и спорт, но не смотрит комедии: $50 - 30 = 20$. Тут стоит заметить, что когда мы говорим, что $50$ человек смотрят драмы и спорт, нас не интересует, сколько из них смотрят еще и комедии.

Аналогично подсчитаем количество человек, которые смотрят драмы и комедии, но не смотрят спорт: $55 - 30 = 25$. Наконец подсчитаем, сколько человек смотрят спорт и комедии, но не смотрят драмы: $70 - 30 = 40$. Нанесем полученные результаты на множества, левая диаграмма рисунка 1.14.

Теперь по диаграмме легко подсчитать, сколько людей смотрят только драмы: $85 - 20 - 25 - 30 = 10$. Только спорт: $110 - 20 - 40 - 30 = 20$. Только комедии: $120 - 25 - 40 - 30 = 25$. Нанесем полученные результаты на множества, правая диаграмма рисунка 1.14.

Теперь легко ответить на оставшиеся вопросы.

*в)* Только спорт смотрят $20$ человек.

*г)* Смотрят драмы или спорт, но не смотрят комедии $10 + 20 + 20 = 50$ человек.

*д)* Смотрят ровно две программы $20 + 25 + 40 = 85$ человек.

*Задание 19*

Пусть $A = \{0,1\}$. Определим множество $A^n$, $n > 1$ как множество двоичных $n$-разрядных наборов. Зададим на $A^n$ его подмножества: $B$ – множество наборов с *нечетным* количеством единиц, $C$ – множество наборов, начинающихся с *0* и $D$ – множество наборов, оканчивающихся на *11*. Требуется найти мощности следующих множеств: $B \cup C$, $B - D$.

*Решение:*

*1.* Найдем мощности множеств $B$ и $C$, а затем воспользуемся формулой включений-исключений:

$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$.

$|B| = 2^{n-1}$, поскольку из всего множества двоичных $n$-разрядных наборов мощностью $2^n$, половина наборов содержит *нечетное* количество единиц, другая половина – *четное*, а это и есть $2^{n-1}$. Мощность $C$ также равна $2^{n-1}$, поскольку половина всех двоичных $n$-.разрядных наборов начинается с *0*. Поскольку для $|B \cap C|$ мы учитываем *2* указанных свойства, то $|B \cap C| = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$.

Имеем: $|B \cup C| = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2} \cdot (2 + 2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-2}, n \geq 2$.

*2.* Для мощности разности двух множеств справедлива формула: $|B - D| = |B| - |B \cap D|$. Найдем недостающие мощности множеств: $|D| = 2^{n-2}$, поскольку два последних разряда мы уже определили и нам надо подсчитать количество $(n - 2)$ разрядных двоичных чисел. $|B \cap D| = 2^{n-3}$, тут мы уже определили *3* свойства. В результате имеем:

$|B - D| = 2^{n-1} - 2^{n-3} = 2^{n-3} \cdot (4 - 1) = 3 \cdot 2^{n-3}, n \geq 3$.

## **ТЕМА № 2.** ОТНОШЕНИЯ

*Рассматриваемые вопросы*

Способы задания отношений. Операции над отношениями, композиция отношений. Свойства отношений. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение частичного порядка. Диаграммы *Хассе*.

*Задание 1*

На множестве $A = \{a, b, c\}$ перечислением пар задано отношение. Построить матрицу и орграф отношения $R = \{(a, b), (a, a), (b, c), (b, b), (c, c), (c, a)\}$.

*Решение:*

Как мы знаем, в матрице отношения строкам и столбцам взаимнооднозначно соответствуют элементы множества $A$, записанные в одном и том же порядке.

Элемент матрицы $R_{ij} = 1$, если пара $(a_i, b_j) \in R$ и равен *0* в противном случае.

Вершинам орграфа соответствуют элементы множества, от вершины $a$ к вершине $b$ ведет дуга, если $(a, b) \in R$, если $(a, b) \notin R$ дуга между $a$ и $b$ отсутствует, если пара $(a, a) \in R$, то у вершины $a$ есть петля.

Построим матрицу отношения $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и изобразим орграф отношения $R$ (рисунок 2.1).

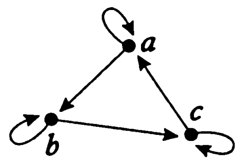



**Рисунок 2.1 – Орграф отношения *R***

*Задание 2.*

На множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$ заданы отношения:

$R = \{(a, b), (a, a), (b, c), (b, d), (c, c), (c, a), (e, d)\}$ и

$S = \{(a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (e, e), (d, e), (c, b)\}$.

Найти результаты операций над отношениями $R \cap S$, $R - S$ и обратное отношение $R^{-1}$.

*Решение:*

Выполним указанные операции над отношениями, поскольку отношения являются *множествами*, элементами которых являются упорядоченные пары.

1. $R \cap S = \{(a, b), (b, c), (b, d)\}$;
2. $R - S = \{(a, a), (c, c), (c, a), (e, d)\}$;
3. $R^{-1} = \{(b, a), (a, a), (c, b), (d, b), (c, c), (a, c), (d, e)\}$. Обратное отношение есть отношение на том же множестве и $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$ (связывает те же элементы в паре, но в *обратном* порядке).

*Задание 3*

На множестве действительных чисел $R$ заданы отношения:

$U = \{(x, y): y = x^2 + 5\}, V = \{(x, y): y = 3x\}$.

Найти следующие отношения: $U \circ V$, $V \circ U$, $U^{-1}$, $V^{-1}$.

*Решение:*

Как мы знаем, композиция отношений выполняется *справа налево* и определяется следующим образом: $(R \circ S)(a) = R(S(a))$. Обратное отношение по определению: $R^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in R\}$.

Найдем указанные отношения:

1. $U \circ V = \{(x, y): y = (3x)^2 + 5\} = \{(x, y): y = 9x^2 + 5\}$.
2. $V \circ U = \{(x, y): y = 3(x^2 + 5)\} = \{(x, y): y = 3x^2 + 15\}$.
3. $U^{-1} = \{(y, x): y = x^2 + 5\} = \left\{(y, x): x = \pm\sqrt{y - 5}\right\}$. Поменяем местами обозначения $x$ и $y$, получим: $U^{-1} = \left\{(x, y): y = \pm\sqrt{x - 5}\right\}$.
4. $V^{-1} = \{(y, x): y = 3x\} = \left\{(y, x): x = \frac{y}{3}\right\} = \{(x, y): y = \frac{x}{3}\}$.

*Задание 4*

На множестве $A = \{1,2,3\}$ заданы отношения:

$R = \{(a, b): (a + b) - \text{нечетное число}\}$ и $S = \{(a, b): a < b\}$.

Найти композицию $R \circ S$ через перечисление пар и булево произведение матриц отношений. Построить матрицы обратных отношений $R^{-1}, S^{-1}$ и дополнений к отношениям $\bar{R}, \bar{S}$.

*Решение:*

Отношениям принадлежат пары:

$R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$, $S = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.

Найдем их композицию: $R \circ S = \{(1,1), (1,3), (1,2), (2,2)\}$.

Запишем матрицы отношений и найдем их булево произведение.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R \circ S = M_s \times M_R = N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что композиция отношений выполняется *справа налево*, в композиции $R \circ S$ мы сначала выполняем отношение $S$, затем $R$ и поэтому в произведении матриц мы записываем сначала матрицу $M_s$, а потом матрицу $M_R$.

Поясним, как мы нашли первую строку матрицы композиции.

$N_{11} = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 1;$

$N_{12} = (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1;$

$N_{13} = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 1.$

Булево произведение получаем из стандартного алгоритма произведения матриц заменой операции умножения на операцию конъюнкции, сложения – на операцию дизъюнкции.

Отношение $R$ является *симметричным* (матрица отношения симметрична относительно главной диагонали), поэтому $R = R^{-1}$ и матрицы обоих отношений совпадают. Построим матрицы отношений $S^{-1}$, $\bar{R}$, $\bar{S}$.

$$M_{S^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\bar{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В общем случае матрица обратного отношения $R^{-1}$ является *транспонированной* матрицей матрицы отношения $R$.

*Дополнение* отношения определяется как $\bar{R} = U - R$, где $U$ – *универсальное отношение*, $U = A \times B$ или $U = A \times A$ (если отношение задано на одном множестве). Матрица *универсального* отношения состоит из одних единиц. Матрица дополнения $\bar{R}$ получается из матрицы отношения $R$ путем *инвертирования* каждого элемента матрицы $R$, нули меняем на единицы и наоборот.

Опишем *предикатом* полученные новые отношения: $S^{-1} = \{(a,b): a > b\}$, $\bar{R} = \{(a,b): (a+b) - \text{четное число}\}$, $\bar{S} = \{(a,b): a \geq b\}$.

*Задание 5*

На множестве целых чисел $Z$ задано отношение $R$.

$R = \{(a,b): (a+b) - \text{нечетное число}\}$. Определить его свойства.

*Решение:*

1. Отношение *не рефлексивно*, поскольку число $a + a = 2a$ всегда четно. Выполнение свойства рефлексивности требует присутствия пар вида $(a,a)$ для всех элементов $a \in Z$.

2. По этой же причине отношение *антирефлексивно*, ни для какого целого числа $a$ в отношении нет пары вида $(a,a)$.

3. Отношение *симметрично*, поскольку $a + b = b + a$ и для каждой пары вида $(a,b)$ есть пара $(b,a)$.

4. Отношение *не антисимметрично*, поскольку пары $(1,2)$ и $(2,1)$ принадлежат нашему отношению, но $1 \neq 2$.

5. Отношение *не транзитивно*, поскольку, например, пары $(1,2)$ и $(2,3)$ принадлежат нашему отношению и выполнение свойства транзитивности требует присутствия пары $(1,3)$, а ее в нашем отношении нет.

*Задание 6*

На множестве целых чисел $Z$ задано отношение $R$.

$R = \{(a,b): (a \cdot b) - \text{нечетное число}\}$. Определить его свойства.

*Решение:*

1. Отношение *не рефлексивно*, поскольку $a^2$ не для *всех* целых чисел является нечетным числом. Для четных чисел пар вида $(a,a)$ в отношении нет.

2. По этой же причине наше отношение не *антирефлексивно*.

3. Отношение *симметрично*, поскольку если, $a \cdot b - \text{нечетное число}$, то и $b \cdot a - \text{нечетное число}$.

4. Наше отношение *не антисимметрично*, поскольку из присутствия пар $(a,b)$ и $(b,a)$ в нашем отношении нельзя заключить, что $a = b$;

5. Отношение обладает свойством *транзитивности*, так как, если есть пары $(a, b)$ и $(b, \text{c})$, то всегда есть пара $(a, \text{c})$ (произведение двух чисел нечетно, если оба числа нечетны).

*Задание 7*

На множестве людей $A$ задано отношение $aRb$: $a -$ брат $b$. Определить его свойства.

*Решение:*

Для наглядности рассмотрим семью с *тремя* детьми: братьями $a$, $b$ и сестрой $c$.

1. *Рефлексивность* означала бы, что верно утверждение $a -$ брат $a$, т. е. каждый человек самому себе является братом. А это ложь и отношение *не рефлексивно*.

*2.* Поскольку, как мы заметили, нет *ни одной* пары вида $(a, a)$, наше отношение *антирефлексивно*.

3. Отношение *не симметрично*, поскольку есть пара $(a, c)$, но нет пары $(c, a)$, $c$ – сестра $a$, а не брат.

4. Наше отношение *не антисимметрично*, поскольку из наличия пар $(a, b)$ и $(b, a)$ не следует, что $a = b$.

5. Отношение *не транзитивно,* поскольку у нас есть пары $(a, b)$ и $(b, a)$ и по свойству транзитивности отсюда следует наличие пары $(a, a)$, а у нас ее нет.

*Задание 8*

Пусть $A$ – множество студентов некоторого вуза. Является ли бинарное отношение $R$ на множестве $A$ отношением *эквивалентности*?

Если *«да»*, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности:

*а)* $R$ – множество пар студентов из одной группы;

*б)* $R$ – множество пар студентов из разных групп.

*Решение:*

Чтобы определить, является ли бинарное отношение $R$ на множестве $A$ отношением эквивалентности, необходимо проверить выполнение трёх свойств: *рефлексивности*, *симметричности* и *транзитивности*.

*1. $R$ – множество пар студентов из одной группы.*

Отношение $R$ будет *рефлексивным*, *симметричным* и *транзитивным*.

*Рефлексивность.* Пара вида $(a, a)$ есть для *каждого* студента, поскольку сам с собой он в одной группе.

*Симметричность.* Для каждой присутствующей в отношении пары вида $(a, b)$ есть пара $(b, a)$. Если *Влад* и *Максим* учатся в одной группе, то мы можем расположить их в обратном порядке в паре.

*Транзитивность.* Если в отношении есть пары $(a, b)$ и $(b, c)$, то будет и пара $(a, c)$, поскольку все *три* студента учатся в одной группе.

Поэтому отношение $R$ является отношением *эквивалентности*.

Построим какой-нибудь *класс эквивалентности* по данному отношению.

Например, $[ИИ - 25] = \{ А, Б, \dots \}$ – множество студентов конкретной учебной группы: , где $А, Б, \dots$ – студенты группы.

*Фактор-множество* по этому отношению эквивалентности будет состоять из классов эквивалентности, представляющих собой учебные группы студентов: $[A]_{\equiv} = \{[ИИ - 25], [ИИ - 26], \dots\}$.

2. $R$ *– множество пар студентов из разных групп*.

В этом случае $R$ не является *рефлексивным*, так как пары из одного и того же студента не будут входить в отношение. Следовательно, $R$ не является отношением эквивалентности.

Отношение $R$ не является также *транзитивным*, поскольку, например, в каждой из пар «*Андрей – Дима*», «*Дима – Саша*» будут студенты из разных групп, но может оказаться, что *Андрей* и *Саша* учатся в одной группе.

*Задание 9*

На множестве $A = \{1,2,3\}$ перечислением пар задано отношение $R$. Построить для него *транзитивное замыкание*, если оно не является *транзитивным*.

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3)\}$.

*Решение:*

Отношение не является транзитивным, поскольку есть пары $(3,1)$ и $(1,2)$, но нет пары $(3,2)$ (для выполнения свойства транзитивности). Добавим эту пару. Пары $(2,3)$ и $(3,1)$ дадут нам пару $(2,1)$ , а пары $(3,1)$ и $(1,3)$ дадут пару $(3,3)$. Добавим сначала эти пары и проверим свойство транзитивности вновь.

$R^* \supset \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (2,1), (3,3)\}$.

Полученное отношение все ещё не транзитивно, пары $(2,1)$ и $(1,2)$ дают нам пару $(2,2)$. Добавим эту пару к $R^*$ и вновь проверим свойство транзитивности по всем парам.

Полученное отношение транзитивно, мы построили транзитивное замыкание $R^*$.

$R^* = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (2,1), (3,3), (2,2)\}$.

*Задание 10*

Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ – множество жильцов одного дома (рисунок 2.2). На множестве $A$ задано отношение: $R = \{(a, b): a \text{ имеет общую стену с } b\}$.

Определить свойства отношения. Построить транзитивное замыкание, если отношение не обладает свойством транзитивности. Охарактеризовать и описать отношение.

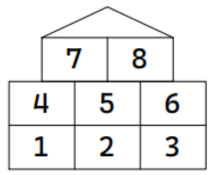



**Рисунок 2.2 – Вид дома**

*Решение:*

Нашему отношению принадлежат пары:

$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6), (7,7), (7,8), (8,7), (8,8)\}$.

Отношение $R$ *рефлексивно*, *симметрично* и *не транзитивно*.

Построим транзитивное замыкание.

У нас есть пары $(1,2)$ и $(2,3)$, но нет пары $(1,3)$, добавим эту пару, $(3,2)$ и $(2,1)$ дают нам пару $(3,1)$. Есть пары $(4,5)$ и $(5,6)$, но для выполнения свойства транзитивности, нет пары $(4,6)$. Добавим и эту пару, а также пару $(6,4)$.

Получим транзитивное замыкание:

$R^* = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6), (7,7), (7,8), (8,7), (8,8), (1,3), (3,1), (4,6), (6,4)\}$.

Отношение $R^*$ *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно.* Это отношение *эквивалентности*, его можно описать так:

$R^* = \{(a, b): a$ живет на одном этаже с $b\}$.

Построим *классы эквивалентности* по отношению $R^*$:

$[\text{первый}] = \{1,2,3\}$.

Смотрим, какие элементы находятся в паре, например, с *1* и записываем их в этот класс. Как мы знаем, каждый элемент класса эквивалентности порождает этот же класс эквивалентности, поэтому для элементов *2* и *3* мы получим этот же класс.

Построим класс эквивалентности для элемента *4*: $[\text{второй}] = \{4,5,6\}$. Для элемента 7: $[\text{третий}] = \{7,8\}$. В каждом классе находятся жильцы, живущие на одном этаже. Построим *фактор-множество* по нашему отношению $R^*$:

$[A]_{\equiv} = \{[\text{первый}], [\text{второй}], [\text{третий}]\}$.

*Задание 11*

Установите, является ли каждое из приведенных ниже отношений на множестве $A$ отношением *эквивалентности*. Для каждого из заданных отношений *эквивалентности* постройте *классы эквивалентности*.

Множество $A$ – множество прямых на плоскости.

*1.* Отношение $R$ определяется следующим образом: $lRm$, если прямые $l$ и $m$ перпендикулярны друг другу.

*2.* Отношение $R$ определяется следующим образом: $lRm$, если прямые $l$ и $m$ параллельны.

*Решение:*

*1.* Отношение не *рефлексивно*, прямая на плоскости не перпендикулярна самой себе, нет ни одной пары вида $(l, l)$. Отношение также *не транзитивно*: прямые $l$ и $m$ могут быть перпендикулярны друг другу, $m$ и $s$ также, но $l$ и $s$ могут быть параллельны друг другу. Это не отношение *эквивалентности*.

*2.* Отношение параллельности прямых *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*, это отношение *эквивалентности*. Для каждой прямой плоскости можно построить *класс эквивалентности*, куда входит и сама прямая и все параллельные ей прямые: $[l] = \{m: m$ параллельна $l\}$.

*Задание 12*

Пусть $A$ – множество месяцев года. Являются ли бинарные отношения $R$, $S$ на множестве $A$ *частичным порядком*? Если *«да»*, является ли этот порядок *линейным*? Какое из этих отношений является отношением *эквивалентности*?

Для отношения *эквивалентности* построить *классы эквивалентности* и *фактор-множество*.

*1.* $R$ – множество пар месяцев, первый из которых идет в календаре не позже второго.

*2.* $S$ – множество пар месяцев одного времени года.

*Решение:*

*1.* Отношение $R$ *рефлексивно*, для всех месяцев есть пара вида $(a, a)$.

Отношение *антисимметрично*: если месяц $a$ идет в календаре не позже месяца $b$ и месяц $b$ идет в календаре не позже месяца $a$, то отсюда и следует, что $a = b$.

Наше отношение *транзитивно*: есть пары «*март – апрель*», «*апрель – май*» и, соответственно, есть пара «*март – май*». Отношение $R$ *рефлексивно, антисимметрично* и *транзитивно*. Это отношение *частичного порядка* и поскольку любые два элемента множества $A$ сравнимы между собой по отношению $R$, это *линейный порядок*.

*2.* Отношение $S$ *рефлексивно*. Оно также *симметрично*: есть, к примеру, пары «*декабрь – январь*» и «*январь – декабрь*», месяцы записаны в разном порядке. Отношение $S$ *транзитивно*: присутствуют пары «*декабрь – январь*», «*январь – февраль»* и, соответственно, «*декабрь – февраль*». Отношение $S$ *рефлексивно, симметрично* и *транзитивно* – это отношение *эквивалентности*.

Построим *класс эквивалентности* для *декабря*:

$[\text{декабрь}] = \{\text{декабрь}, \text{январь}, \text{февраль}\}$.

В этот класс входят все месяцы одного времени года с *декабрем*, назовем этот класс $[\text{зима}]$. По тому же принципу строятся классы $[\text{весна}]$, $[\text{лето}]$, $[\text{осень}]$. Всего имеем *4 класса эквивалентности*. *Фактор-множество* по отношению *эквивалентности* $S$ состоит из этих *4 классов:*

$[A]_{\equiv} = \{[\text{зима}], [\text{весна}], [\text{лето}], [\text{осень}]\}$.

*Задание 13*

Пусть $A$ – множество точек на прямой с заданным направлением. Является ли бинарные отношения $R$, $S$ на множестве $A$ частичным порядком? Если *«да»*, является ли этот порядок *линейным*?

*1.* $R$ – множество пар точек, вторая из которых расположена на прямой правее первой или совпадает с ней.

*2.* $S$ – множество пар точек, расстояние между которыми равно единичному отрезку.

*Решение:*

*1.* Отношение $R$ *рефлексивно*, поскольку есть слово в описании *«совпадает»*, т. е. для любой точки есть пара вида $(a, a)$. Оно также *антисимметрично*:

если каждая из двух точек расположена правее другой, значит эти точки совпадают. $R$ также *транзитивно* и является отношением *частичного порядка* на множестве $A$, а само множество $(A, \leq)$ является *частично упорядоченным множеством*.

Отношение $R$ задает *линейный* порядок, поскольку две любые точки сравнимы между собой по отношению $R$. Мы всегда можем сказать, совпадают ли две точки или какая то из них расположена правее другой на прямой.

*2.* Отношение $S$ *не рефлексивно*, расстояние между двумя совпадающими точками равно *0*, в отношении нет ни одной пары вида $(a, a)$. Этого утверждения достаточно, чтобы сказать, что отношение $S$ не является отношением частичного порядка.

Оно также *не антисимметрично* и *не транзитивно*, но обладает свойством *симметричности.*

*Задание 14*

На множестве $A = \{1{,}2{,}3{,}6{,}12{,}18\}$ задано отношение *частичного порядка*: $R = \{(a, b): a - \text{делитель } b\}$. Построить диаграмму *Хассе* для этого *ЧУ-множества*, *указать сравнимые и не сравнимые элементы, наименьший* и *наибольший* элемент (если они существуют), *минимальные* и *максимальные* элементы. Определить тип структуры.

*Решение:*

Построим диаграмму *Хассе* для нашего *ЧУ-множества* (рисунок 2.3). Элемент *1* делит *все* элементы множества, поэтому от него есть путь ко всем остальным элементам множества $A$. Элементы *2* и *3* не делят друг друга нацело, они являются *не сравнимыми* элементами по отношению $R$ и между ними нет пути.

Элемент *6* делится и на *1*, и на *2*, и на *3*, поэтому есть путь из этих элементов к *6*. Элемент *6* делит *12*, соединяем их ребром, *6* делит также *18*, соединяем также их ребром. Элементы *12* и *18* не делят друг друга нацело и между ними нет пути. Петли, соответствующие парам вида $(a, a)$ на диаграмме не указываются.

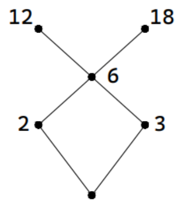



**Рисунок 2.3 – Диаграмма *Хассе***

*Сравнимые* пары элементов: *2* и *6*, *3* и *18*, между элементами пар есть путь.

Последовательность элементов *1, 2, 6, 12* образует *цепь*.

Любые два элемента из *цепи* сравнимы между собой (между любыми элементами *цепи* есть путь).

*Несравнимые* пары элементов: *2* и *3*, *12* и *18*. Как видим, между *несравнимыми* элементами нет пути, они не являются делителями друг друга.

*Наименьший* элемент – *1* (он делит *все* элементы множества, от него есть путь ко *всем* элементам).

*Наибольшего* элемента нет (нет элемента, которого бы делили *все* элементы множества).

*Минимальный* элемент – *1* (*не существует* элемента, который бы его делил).

*Максимальные* элементы – *12* и *18* (*не существует* элементов, делителями которых они бы являлись.

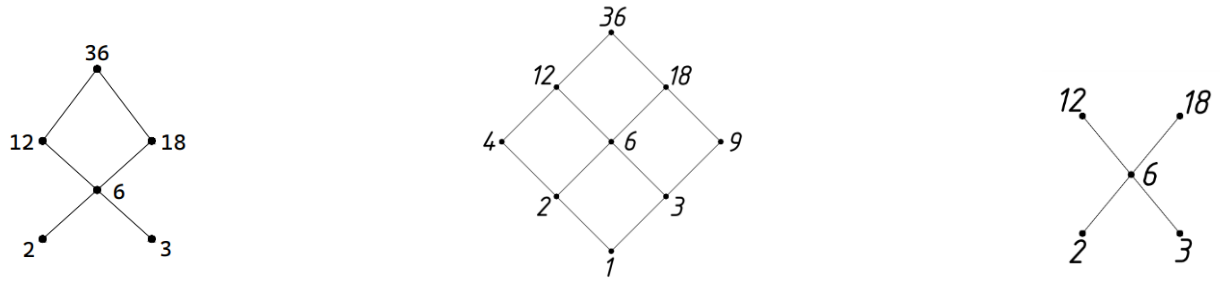
Тип структуры – *нижняя полурешетка*.

*Задание 15*

На множествах $A = \{2,3,6,12,18,36\}$, $B = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ и $C = \{2,3,6,12,18\}$ задано отношение *частичного порядка*: $R = \{(a, b): a - \text{делитель } b\}$. Построить диаграммы *Хассе* для этих *ЧУ-множеств*, *указать наименьший* и *наибольший* элемент (если они существуют) и *минимальные* и *максимальные* элементы. Определить *тип* структуры.

*Решение:*

Диаграммы *Хассе* для множеств приведены ниже на рисунке 2.4.




а) б) в)

**Рисунок 2.4 – Диаграммы *Хассе* для множеств**

Для множества $A$:

*Наименьшего* элемента нет, *наибольший* элемент – *36*. *Минимальные* элементы – 2, 3. *Максимальный* элемент – *36*. Тип структуры – *верхняя полурешетка*. Диаграмма *Хассе* для множества $A$ приведена на рисунке 2.4а.

Для множества $B$:

*Наименьший* элемент – *1*, *наибольший* элемент – *36*. *Минимальный* элемент – *1*. *Максимальный* элемент – *36*. Тип структуры – *решетка*. Диаграмма *Хассе* для множества $B$ приведена на рисунке 2.4б.

Для множества $C$ :

*Наименьшего* элемента нет, *наибольшего* элемента нет.

*Минимальные* элементы – *2*, *3*. *Максимальные* элементы – *12*, *18*.

Тип структуры – *ЧУ*-множество. Диаграмма *Хассе* для множества $C$ приведена на рисунке 2.4в.

## ТЕМА № 3. **БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ**

*Рассматриваемые вопросы*

Равносильность логических формул. Тавтологии. Эквивалентные преобразования логических формул. Построение *СДНФ*, *СКНФ*, полинома *Жегалкина*. Минимизация булевых функций методом *Квайна* и *Карно-Вейча*.

*Задание 1*

Показать, используя таблицу истинности, что две логические формулы $F$ и $H$ *равносильны* (*эквивалентны*):

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

*Решение:*

Напомним определение равносильности.

Две логические формулы $F(X_1, \dots, X_n)$ и $H(X_1, \dots, X_n)$ называются *равносильными*, если при любых логических значениях переменных $X_1, \dots, X_n$ (во всех интерпретациях формулы) логические значения формул $F$ и $H$ совпадают: $F \equiv H$.

Построим таблицы истинности для обеих формул.

| $A$ | $B$ | $C$ | $(B \wedge C)$ | $(A \vee B)$ | $(A \vee C)$ | $A \vee (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| *0* | *0* | *1* | *0* | *0* | *1* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *0* | *0* | *1* | *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* |

Как мы видим из таблицы истинности, значения *2* последних столбцов полностью совпадают, а это и означает, что данные логические формулы *равносильны*.

Данные формулы раскрывают *дистрибутивный* (*распределительный*) закон. Операции конъюнкции и дизъюнкции дистрибутивны относительно друг друга.

*Задание 2*

Показать, используя таблицу истинности, что логическая формула $(A \wedge B) \rightarrow A$ является *тавтологией.*

*Решение:*

Логическая формула $F(X_1, \dots, X_n)$ называется *общезначимой* (*тождественно истиной*, *тавтологией*), если ее значение истинности равно *«Истина»* (*1*) при любых значениях для $X_1, \dots, X_n$ (во всех своих интерпретациях она принимает значение *И*). Например, формула $X \vee \bar{X}$ – *тавтология*.

Построим таблицу истинности для нашей формулы.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $(A \wedge B) \to A$ |
|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *0* | *1* |
| *1* | *0* | *0* | *1* |
| *1* | *1* | *1* | *1* |

Логическая формула называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если во всех своих интерпретациях она принимает значение *Л (0)*. Например, формула $X \wedge \bar{X}$ является противоречием.

Имея тавтологию, легко можно построить противоречие. Для этого достаточно взять отрицание тождественно истинного высказывания.

*Задание 3*

Доказать, используя эквивалентные преобразования, что логическая формула $(x \to y)\bar{y} \to \bar{x}$ является *тождественно истинной*.

*Решение:*

При доказательстве будем использовать соотношение: $x \to y = \bar{x} \vee y$ (*СКНФ* операции импликации).

Раскроем первую импликацию и дистрибутивный закон и поскольку $y\bar{y} = 0$ и $x \vee 0 = x$, получим:

$(x \to y)\bar{y} \to \bar{x} = (\bar{x} \vee y)\bar{y} \to \bar{x} = (\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y}) \to \bar{x} = \bar{x}\bar{y} \to \bar{x}$.

Теперь раскроем вторую импликацию и применим закон *де Моргана*:

$\bar{x}\bar{y} \to \bar{x} = \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \bar{x} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{x} = x \vee y \vee \bar{x} = (x \vee \bar{x}) \vee y = 1 \vee y = 1, (\bar{\bar{x}} = x)$.

И поскольку $x \vee \bar{x} = 1$ и $1 \vee x = 1$, получаем, что наша формула является *тождественно истинной* (тавтологией).

Мы могли бы и доказать это утверждение, построив таблицу истинности для формулы и получив на всех наборах переменных значение формулы равное *1*.

*Задание 4*

Доказать, используя, эквивалентные преобразования, что логическая формула $\overline{x \to (y \to xy)} \equiv 0$ , т. е. является *тождественно ложной (противоречием)*.

*Решение:*

Поскольку отрицание стоит над всей формулой, то доказав, что логическое выражение $x \to (y \to xy)$ тождественно равно *1*, мы тем самым докажем и наше утверждение.

Раскроем операции импликации, вновь используя формулу $x \to y = \bar{x} \vee y$, затем раскроем закон *де Моргана* $\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{xy}$:

$x \to (y \to xy) = \bar{x} \vee (\bar{y} \vee xy) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee xy = \overline{xy} \vee xy \equiv 1$.

Отрицание *1* в булевой алгебре дает *0*.

*Задание 5*

Представить функцию $f = (x \to y) \to (\overline{z \to x})$ в виде *ДНФ, СДНФ*, используя равносильные формулы:

$x \to y = \bar{x} \lor y,\ \overline{x \lor y} = \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x}\bar{y}.$

*Решение:*

Раскроем сначала *2* импликации в скобках, затем импликацию между полученными выражениями, применим закон *де Моргана* и закон двойного отрицания ($\bar{\bar{x}} = x$).

В результате получим:

$(x \to y) \to (\overline{z \to x}) = (\bar{x} \lor y) \to (\overline{\bar{z} \lor x}) = (\overline{\bar{x} \lor y}) \lor (\overline{\bar{z} \lor x}) = \bar{\bar{x}}\bar{y} \lor \bar{\bar{z}}\bar{x} = x\bar{y} \lor$
$\lor z\bar{x}.$

При аналитическом приведении *ДНФ* булевой функции к ее *СДНФ*, элементарные конъюнкции $U$, не содержащие, например, переменную $x$, заменяются *равносильными* формулами вида: $U = U \cdot 1 = U \cdot (x \lor \bar{x}) = Ux \lor U\bar{x}$ (раскрываем дистрибутивный закон для конъюнкции).

Воспользуемся этими правилами.

$f(x, y, z) = x\bar{y} \lor z\bar{x} = x\bar{y}(z \lor \bar{z}) \lor z\bar{x}(y \lor \bar{y}) = x\bar{y}z \lor x\bar{y}\bar{z} \lor z\bar{x}y \lor z\bar{x}\bar{y}.$

*Задание 6*

Построить *КНФ* и *СКНФ* булевой функции, используя ее *ДНФ*.

*Решение:*

Рассмотрим ранее полученную *ДНФ*: $f(x, y, z) = x\bar{y} \lor z\bar{x}.$

Воспользуемся эквивалентными формулами: $x \cdot \bar{x} = 0$ и $x \lor 0 = x.$

Раскроем дистрибутивный закон для дизъюнкции:

$x \lor (\ y \cdot z) = (x \lor y) \cdot (x \lor z).$

$f(x, y, z) = x\bar{y} \lor z\bar{x} = x\bar{y} \lor (z \cdot \bar{x}) = (x\bar{y} \lor z) \cdot (x\bar{y} \lor \bar{x}) = ((x \cdot \bar{y})\ \lor z)\ \cdot$
$\cdot \big((x \cdot \bar{y}) \lor \bar{x}\big) = (x \lor z) \cdot (\bar{y} \lor z) \cdot (x \lor \bar{x}) \cdot (\bar{y} \lor \bar{x}) = (x \lor z) \cdot (\bar{y} \lor z) \cdot (\bar{y} \lor \bar{x}).$

Приведем теперь *КНФ* к *СКНФ*.

При аналитическом приведении *КНФ* булевой функции к ее *СКНФ*, элементарные дизъюнкции, не содержащие, например, переменную $x$, заменяются *равносильными* формулами вида: $d = d \lor 0 = d \lor (x \cdot \bar{x}) = (d \lor x) \cdot\cdot (d \lor \bar{x}).$

Воспользовались эквивалентными формулами $x \cdot \bar{x} = 0$ и $x \lor 0 = x$, затем раскрыли дистрибутивный закон для дизъюнкции.

Имеем:

$f(x, y, z) = (x \lor z) \cdot (\bar{y} \lor z) \cdot (\bar{y} \lor \bar{x}) = (x \lor z \lor 0) \cdot (\bar{y} \lor z \lor 0) \cdot (\bar{y} \lor \bar{x} \lor 0) =$
$= \big(x \lor z \lor (y \cdot \bar{y})\big) \cdot \big(\bar{y} \lor z \lor (x \cdot \bar{x})\big) \cdot \big(\bar{y} \lor \bar{x} \lor (z \cdot \bar{z})\big) = (x \lor z \lor y) \cdot (x \lor z \lor \bar{y}) \cdot$
$\cdot (\bar{y} \lor z \lor x) \cdot (\bar{y} \lor z \lor \bar{x}) \cdot (\ \bar{y} \lor \bar{x} \lor\ z) \cdot (\ \bar{y} \lor \bar{x} \lor\ \bar{z}) = (x \lor z \lor y) \cdot (x \lor z \lor \bar{y}) \cdot$
$\cdot (\ \bar{y} \lor \bar{x} \lor\ z) \cdot (\ \bar{y} \lor \bar{x} \lor\ \bar{z}).$

Использовали также закон идемпотентности: $x \cdot x = x.$

*Задание 7*

Булева функция задана *МДНФ* и *МКНФ*. Восстановить ее *СДНФ* и *СКНФ*.

$f(x, y, z) = z \lor \bar{x}\bar{y}\ ,\ f(x, y, z) = (\bar{x} \lor \bar{z}) \cdot (\bar{y} \lor z).$

*МДНФ* состоит из *2* элементарных конъюнкций, первая состоит из одной переменной $z$, восстановить надо будет две переменные, поэтому добавляем в $z$ конъюнкцию (умножение) *2* единиц, поскольку $z \cdot 1 \cdot 1 = z$. Заменяем единицы эквивалентными соотношениями, например, для первой единицы $\bar{x} \vee x = 1$ и затем раскрываем дистрибутивный закон для конъюнкции. Аналогично поступаем и для второй элементарной конъюнкции из *ДНФ*.

$f(x, y, z) = z \vee \bar{x}\bar{y} = z \cdot 1 \cdot 1 \vee \bar{x}\bar{y} \cdot 1 = z \cdot (\bar{x} \vee x) \cdot 1 \vee \bar{x}\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) = ((z\bar{x} \vee zx) \cdot$
$\cdot (y \vee \bar{y})) \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = z\bar{x}y \vee z\bar{x}\bar{y} \vee zxy \vee zx\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee$
$\vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ( поскольку $x \vee x = x$).

Перейдем к восстановлению *СКНФ*.

$f(x, y, z) = (\bar{x} \vee z) \cdot (\bar{y} \vee z) = (\bar{x} \vee z \vee 0) \cdot (\bar{y} \vee z \vee 0) = \left(\bar{x} \vee z \vee (y \cdot \bar{y})\right) \cdot$
$\cdot \left(\bar{y} \vee z \vee (x \cdot \bar{x})\right) = (\bar{x} \vee z \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z \vee \bar{y}) \cdot (\bar{y} \vee z \vee x) \cdot (\bar{y} \vee z \vee \bar{x}) =$
$= (\bar{x} \vee z \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z \vee \bar{y}) \cdot (\bar{y} \vee z \vee x)$.

*МКНФ* состоит из *2* элементарных дизъюнкций, для каждой из них восстановлению подлежит *1* переменная, поскольку $x \vee 0 = x$, добавляем в каждую из них дизъюнкцию с *0*, затем *0* заменяем на эквивалентное соотношение для соответствующей переменной, например $x \cdot \bar{x} = 0$. Раскрываем дистрибутивный закон для дизъюнкции и записываем результат, учитывая что $x \cdot x = x$.

*Задание 8*

Построить к заданной булевой функции *двойственную* ей функцию.

*Решение:*

Пусть задана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функция $f^*$ называется *двойственной* к функции $f$, если выполняется соотношение:

$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

Можно записать и так:

$\overline{f^*}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

Это означает, что функции $f$ и $f^*$ на противоположенных наборах имеют противоположенные значения.

Построим *двойственную* функцию к функции, заданной таблицей истинности:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x, y, z)$ | $f^*(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Первая функция $f$ на наборе *000* имеет значенме *0*, значит двойственная к ней функция $f^*$ на наборе *111* должна иметь значение *1,* на наборе *001* функция $f$ имеет значение *0*, значит двойственная к ней $f^*$ на наборе *110* должна иметь значение *1*. По такому алгоритму строим по всем наборам.

*Задание 9*

Вычислить значение логической формулы $f(x,y) = x \leftrightarrow (\bar{y} \to x)$ при конкретных значениях ее переменных, про которые известно что: $x \oplus y = 1$ и $x \to y = 1$.

*Решение:*

Найдем, чему равны значения переменных в наборе. Для первого соотношения у нас *2* варианта значений переменных в наборе: или $x = 0, y = 1$ или $x = 1, y = 0$. Для второго соотношения у нас *3* варианта: или $x = 0, y = 0$, или $x = 0, y = 1$, или $x = 1, y = 1$. Одновременное выполнение этих двух соотношений дает нам значения переменных в наборе: $x = 0, y = 1$. Подставим эти значения переменных в нашу формулу для функции.

Имеем: $f(0,1) = 0 \leftrightarrow (\bar{1} \to 0) = 0 \leftrightarrow (0 \to 0) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$.

*Задание 10*

Указать, для каких из приведенных ниже булевых функций достаточно приведенных сведений о значении переменной для определения значения функции. Если достаточно, укажите это значение функции.

1. $f_1(x,y,z) = (x \to y) \to z,\ z = 1$;

2 $f_2(x,y) = \overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y},\ \ y = 1$;

3. $f_3(x,y) = (x \to y) \to (y \to \bar{x}),\ y = 1$.

*Решение:*

1. Значение функции $f_1(x,y,1) = 1$ при $z = 1$, при этом значения $x, y$ могут быть любыми, поскольку результат импликации $x \to 1 = 1$.

2. Значение функции $f_2(x,1) = \overline{x \vee 1} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{1} = \bar{1} \leftrightarrow 0 = 0 \leftrightarrow 0 = 1$. Функция $f_2$ является *тавтологией*, поскольку операция эквивалентности связывает обе части закона *де Моргана*.

3. Рассмотрим значение функции $f_3(x,1) = (x \to 1) \to (1 \to \bar{x}) = 1 \to (1 \to \bar{x})$ Значение функции зависит от значения переменной $x$: $f_3(0,1) = 1$, $f_3(1,1) = 0$.

*Задание 11*

Найти для функции, заданной таблицей истинности, *существенные* и *мнимые* переменные.

| *x* | *y* | *z* | *f(x, y, z)* |
|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* |
| *0* | *0* | *1* | *1* |
| *0* | *1* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *0* | *1* |
| *1* | *0* | *1* | *0* |
| *1* | *1* | *0* | *1* |
| *1* | *1* | *1* | *0* |

*Решение:*

Булева функция $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *существенно зависит* от переменной $x_i$, если существует такой набор значений $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, что выполняется соотношение:

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

В этом случае $x_i$ называют *существенной переменной*. В противном случае говорят, что от переменной $x_i$ функция зависит несущественно и $x_i$ является ее *фиктивной* переменной.

Проверим переменную $x$. В каждом рассмотренном ниже наборе $y$ и $z$ имеют *конкретные* значения, а $x$ меняется с *0* на *1*. Посмотрим при этом, как меняется значение функции:

| *y* | *z* | *f (0,y,z)* | *f (1,y,z)* |
|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* | *1* |
| *1* | *1* | *1* | *0* |

Как видим, к примеру, $f(0,0,0) \neq f(1,0,0)$, следовательно, переменная $x$ *существенная.*

Проверим переменную *y*. В каждом рассмотренном ниже наборе *x* и *z* имеют *конкретные* значения, а *y* меняется с *0* на *1*.

| *x* | *z* | *f (x,0,z)* | *f (x,1,z)* |
|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *0* |

Как видим из таблицы выше, на каждом наборе меняется только значение переменной *y* и при этом значение функции не меняется, следовательно, переменная *y мнимая.*

В таблице *3* и *4* столбец равны.

Проверим переменную *z:*

| *y* | *z* | *f (x,y,0)* | *f (x,y,1)* |
|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *0* | *1* |
| *1* | *0* | *1* | *0* |
| *1* | *1* | *1* | *0* |

Как видим, к примеру, $f(0,0,0) \neq f(0,0,1)$, следовательно, переменная *z* *существенная.*

Наша функция в аналитическом виде имеет вид: $f(x,y,z) = x\oplus z$ и от переменной $y$ действительно не зависит.

*Задание 12*

Показать, используя теорему *Поста*, что заданная система булевых функций, штрих *Шеффера* ($x|y = \overline{x \wedge y}$), является *ФПС*.

*Решение:*

Согласно теореме *Поста* нам надо показать, что заданная система содержит хотя бы одну нелинейную функцию, хотя бы одну немонотонную, хотя бы одну несамодвойственную, хотя бы одну несохраняющую константу *0* и хотя бы одну несохраняющую константу *1*. В данном случае показываем это для одной функции.

Построим таблицу истинности для штриха *Шеффера*:

| $x$ | $y$ | $x\|y$ |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *1* |
| *1* | *1* | *0* |

На нулевом наборе *00* значение функции равно *1*, следовательно, функция не сохраняет константу *0* и не принадлежит классу $T_0$.

На единичном наборе *11* значение функции равно *0*, функция не сохраняет константу *1*, значит, она не принадлежит классу $T_1$.

Проверим функцию на линейность, для этого построим полином *Жегалкина* методом *эквивалентных преобразований*:

$$f(x,y) = x|y = (1\oplus x)(1\oplus y)\oplus(1\oplus x)y\oplus x(1\oplus y) = 1\oplus y\oplus x\oplus xy\oplus y\oplus xy\oplus x\oplus$$
$$\oplus xy = 1\oplus xy.$$

Получили полином *второй* степени, значит, функция не принадлежит классу $L$ (*не линейная*).

Полином можно также строить *методом треугольника, методом неопределенных коэффициентов* или просто воспользоваться формулой:

$\overline{x} = 1 \oplus x$, отсюда $\overline{xy} = 1 \oplus xy$.

Построим полином *Жегалкина*, используя *метод неопределенных коэффициентов.*

Полином *Жегалкина* для функции *2-х* переменных в общем случае имеет вид:

$f(x,y) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3xy.$ *(1)*

Будем подставлять в *(1)* значения переменных на каждом наборе и приравнивать полученное выражение к значению функции на этом наборе и так находить неизвестные коэффициенты $a_i$.

$x = 0, y = 0, f(0,0) = 1$, отсюда следует, что $a_0 = 1$.

$x = 0, y = 1, f(0,1) = 1$, $a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2 = 1$, отсюда $a_2 = 0$.

$x = 1, y = 0, f(1,0) = 1$, $a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1 = 1$, отсюда $a_1 = 0$.

$x = 1, y = 1, f(1{,}1) = 0$, $a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3 = 0$,, отсюда следует, что, $a_3 = 1$.

Подставив полученные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3$ в *(1)*, получим тот же результат:

$f(x, y) = 1 \oplus xy$.

Функция не является *монотонной*, так как $f(1{,}0) > f(1{,}1)$ и функция не принадлежит классу $M$ (набор больше, значение функции меньше).

Функция не является *самодвойственной*, так как $f(1{,}0) = f(0{,}1)$, функция не принадлежит классу $S$.

*Самодвойственные* функции на *всех* противоположенных наборах имеют противоположенные значения.

Составим таблицу *Поста*:

| *f(x,y)* | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $S$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x\|y$ | - | - | - | - | - |

Как видим, функция не принадлежит ни одному из классов *Поста*, следовательно, по теореме *Поста* штрих *Шеффера* является *ФПС*.

*Задание 13.*

Выразить функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания через штрих *Шеффера* , показав тем самым, что штрих *Шеффера* является *ФПС*.

*Решение:*

Поскольку система функций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания является *ФПС*, то выразив указанные функции через штрих *Шеффера*, мы тем самым покажем, что наша функция $x|y$ также является *ФПС.*

Напомним, что: $x|y = \overline{x \wedge y}$.

Имеем для *отрицания*: $x = x \wedge x$, отсюда $\overline{x} = \overline{x \wedge x} = x|x$.

Для *конъюнкции*:

$x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} =$ (закон двойного отрицания) $= \overline{x|y} = (x|y)|(x|y)$ (раскрыли отрицание).

Для *дизъюнкции*:

$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} =$ (правило де Моргана) $= \overline{x}|\overline{y} = (x|x)|(y|y)$ (раскрываем отрицание).

*Задание 14*

Представить булеву функцию $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_4 \vee x_3)$, заданную в виде *КНФ* в базисе *Пирса*.

Функцию $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_4)$, заданную в виде *ДНФ* в базисе *Шеффера.*

*Решение:*

Функция *стрелка Пирса* для двух переменных имеет вид:

$f(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$.

Выполним эквивалентные преобразования для нашей функции $f_1$.

Двойное отрицание.

$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_4 \vee x_3) = \overline{\overline{(x_1 \vee x_2) \cdot (x_4 \vee x_3)}}$.

Раскроем закон *де Моргана*.

$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2) \cdot (x_4 \vee x_3)}} = \overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(x_4 \vee x_3)}}$.

Учитывая, что $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$, имеем:

$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(x_4 \vee x_3)}} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_4 \downarrow x_3)$.

Итак, наша функция в базисе *Пирса* (*ИЛИ-НЕ*) имеет вид:

$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_4 \downarrow x_3)$.

Представим функцию $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_4)$ в базисе *Шеффера (И-НЕ)*.

Выполним эквивалентные преобразования для нашей функции.

Двойное отрицание.

$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_4) = \overline{\overline{(x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_4)}}$.

Раскроем закон *де Моргана*.

$\overline{\overline{(x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_4)}} = \overline{\overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot \overline{(x_2 \cdot x_4)}}$.

Учитывая, что $x_1 | x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}$, имеем:

$\overline{\overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot \overline{(x_2 \cdot x_4)}} = (x_1 | x_3) | (x_2 | x_4)$

Наша функция в базисе *Шеффера* (*И-НЕ*) имеет вид:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_4) = (x_1 | x_3) | (x_2 | x_4)$.

*Задание 15*

Булева функция задана вектором своих значений:

$f(x, y, z) = (1,0,1,1,1,0,0,0)$.

Проминимизировать заданную функцию в базисе *ДНФ* и *КНФ* методами *Квайна* и *Карно-Вейча*.

*Решение:*

Вектор значений функции записывается по таблице истинности сверху вниз и слева направо, начиная с набора *000*, на котором значение нашей функции равно *1*, на наборе *001* оно равно *0*.

Составим таблицу истинности функции по нашему вектору значений:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Составим для функции *СДНФ*.

$f_{\text{СДНФ}}(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$.

Проведем в *СДНФ операции неполного склеивания*.

$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}\bar{z}$.

$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} = \bar{y}\bar{z}$.

$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}y$.

Все конституенты единицы из *СДНФ* участвовали в склеивании, поэтому у нас нет операций поглощения, полученные *импликанты* не склеиваются между собой, мы получили *простые импликанты*.

*Сокращенная ДНФ* функции имеет вид:

$f(x,y,z)_{\text{Сокр.ДНФ}} = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y$.

Найдем *МДНФ* нашей функции.

Для этого построим *таблицу покрытия* и выберем *существенные* импликанты. В таблице ставим + (или *1*), если простая импликанта является собственной частью конституенты единицы , входящей в *СДНФ* функции (каждая переменная импликанты, с отрицанием или без присутствует в том же виде и в конституенте единицы).

| | $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{x}yz$ | $x\bar{y}\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}\bar{z}$ | + | + | – | – |
| $\bar{y}\bar{z}$ | + | – | – | + |
| $\bar{x}y$ | – | + | + | – |

Мы должны выбрать *минимальное количество* простых импликант таким образом, чтобы в каждом столбце был бы хотя бы один +. Как видим из таблицы, мы должны обязательно взять простую импликанту $\bar{x}y$, поскольку она одна дает нам + в четвертом столбце и к ней возьмем $\bar{y}\bar{z}$, дающую единственный + в пятом столбце. Во всех столбцах получили +. Простая импликанта $\bar{x}\bar{z}$ – лишняя.

$f(x,y,z)_{\text{МДНФ}} = \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y$.

Построим *МДНФ* методом *Карно-Вейча.*

| x\yz | *00* | *01* | *11* | *10* |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *1* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *0* | *0* |

Поскольку это базис *ДНФ*, объединяем *единицы*. Записываем только те переменные, значения которых не меняются в выделенной группе. И поскольку это базис *ДНФ*, то если значение переменной в наборе равно *1*, берем ее без отрицания, если *0* – с отрицанием.

Имеем тот же результат:

$f(x,y,z)_{\text{МДНФ}} = \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y$, $R_{\text{МДНФ}} = 4$.

Проминимизируем нашу функцию в базисе *КНФ*, алгоритмы переносятся с базиса *ДНФ*.

Составим *СКНФ* нашей функции.

$f_{\text{СКНФ}}(x,y,z) = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Склеиваем *конституенты нуля (элементарные дизъюнкции)* из *СКНФ* нашей функции.

$(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = (y \vee \bar{z})$.

$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{x} \vee \bar{z})$.

$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{x} \vee \bar{y})$.

Все элементарные дизъюнкции участвовали в склеивании, следовательно у нас нет операции поглощения, дизъюнкции больше не склеиваются между собой.

Строим таблицу покрытия:

| | $(x \vee y \vee \bar{z})$ | $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$ | $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$ | $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ |
|---|---|---|---|---|
| $(y \vee \bar{z})$ | + | + | – | – |
| $(\bar{x} \vee \bar{z})$ | – | + | – | + |
| $(\bar{x} \vee \bar{y})$ | – | – | + | + |

Мы должны выбрать *минимальное количество* дизъюнкций таким образом, чтобы в каждом столбце был бы хотя бы один +.

Как видим, дизъюнкция $(\bar{x} \vee \bar{z})$ у нас лишняя.

Составим *МКНФ*:

$f_{\text{МКНФ}}(x, y, z) = (y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y}), \quad R_{\text{МКНФ}} = 4.$

Минимизируем нашу функцию методом *Карно-Вейча* в базисе *КНФ*.

Выделяем группы и берем их минимальное количество, чтобы были включены все *0*.

При обработке групп записываем только те переменные, значения которых не меняются в группе, и поскольку это базис *КНФ*, то если переменная в наборе равна *0* – берем ее без отрицания, если *1* – с отрицанием. Из переменных составляем дизъюнкции. Между полученными таким образом дизъюнкциями берем конъюнкцию.

| *x\yz* | *00* | *01* | *11* | *10* |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *1* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *0* | *0* |

Имеем для темно-серой группы – $(y \vee \bar{z})$, для светло-серой – $(\bar{x} \vee \bar{y})$.

$f_{\text{МКНФ}}(x, y, z) = (y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – 2-е изд., исправленное. – М. : Техносфера, 2016. – 400 с.

2. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика / Д. Андерсон. – СПб : Вильямс, 2003. – 960 с.

3. Селезнева, С. Н. Основы дискретной математики: учебное пособие. – М. : Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. А. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010. – 60 с.

4. Нефедов, В. Н. Курс дискретной математики: учеб. пособие / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

5. Кук, Д. Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

Учебное издание

***Составители:***
*Глущенко Татьяна Александровна*
*Швецова Елена Владимировна*
*Шуть Василий Николаевич*
*Хацкевич Мария Викторовна*
*Кот Александр Александрович*

# *Дискретная математика в задачах и упражнениях*

Методические указания к изучению курса
***«Дискретная математика»***

для студентов специальностей
***6-05-0612-01 «Программная инженерия» и 6-05-0611-03 «Искусственный интеллект»***

Ответственный за выпуск: Глущенко Т. А.
Редактор: Митлошук М. А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А. П.
Корректор: Дударук С. А.

---

Подписано в печать 28.12.2023 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,09. Уч. изд. л. 2,25. Заказ № 1417. Тираж 22 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.