УДК 517.956.3
Наумовец Светлана Николаевна
Брестский государственный технический университет, г. Брест
e-cveta@tut.by

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПОЛИНОМОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с дифференциальным полиномом второго порядка в граничных условиях. В данной работе рассмотрена первая смешанная задача для одномерного волнового уравнения, найдено ее классическое решение, когда в качестве одного из граничных условий задан дифференциальный полином второго порядка с постоянными коэффициентами. Аналитическое решение находится методом характеристик. Доказываются необходимые и достаточные условия согласования для заданных функций, входящих в правую часть уравнения, условия Коши и граничные условия, позволяющие утверждать, что классическое решение существует.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; гиперболические уравнения; частные производные; граничные условия; условия Коши; условия согласования; классическое решение.

Наумовець С. М. Класичне рішення першої змішаної задачі одновимірного хвильового рівняння з диференціальним поліномом другого порядку в граничних умовах. У даній роботі розглянута перша змішана задача для одновимірного хвильового рівняння, знайдено її класичне рішення, коли в якості однієї з граничних умов заданий диференційний поліном другого порядку з постійними коефіцієнтами. Аналітичне рішення знаходиться методом характеристик. Доводяться необхідні і достатні умови узгодження для заданих функцій, що входять в праву частину рівняння, умови Коші і граничні умови, що дозволяють стверджувати, що класичне рішення існує.

Ключові слова: диференційне рівняння; гіперболічні рівняння; приватні похідні; граничні умови; умови Коші; умови узгодження; класичне рішення.

Naumovec Svetlana. Classical solution of the first mixed problem of one-dimensional wave equation with a differential polynom of the second order in border conditions. In this paper we consider the first mixed problem for a one-dimensional wave equation, and find its classical solution when one of the boundary conditions is given a second-order differential polynomial with constant coefficients. The analytical solution is the method of characteristics. We prove necessary and sufficient conditions for matching for given functions that appear on the right-hand side of the equation, the Cauchy conditions and boundary conditions, which make it possible to assert that a classical solution exists.

Keywords: differential equations; hyperbolic equations; partial derivatives; boundary conditions; Cauchy conditions; agreement conditions; classical solution.

ВВЕДЕНИЕ. Классическим решениям смешанных задач для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе двумерной плоскости, посвящены многие статьи [1-5]. В них изучаются классические решения. Следует отметить, что численные методы в виде разностных схем, конечных элементов при решении граничных задач для дифференциальных уравнений основываются на предположениях существования классических решений этих задач. Однако при одних и тех же заданных граничных условиях без правильного выбора функций в этих условиях, удовлетворяющих так называемым условиям согласования, не будет существовать классическое решение рассматриваемой задачи: решение не будет иметь ту гладкость во всей области своего определения, которую требует применяемый в данном случае численный метод.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. В замыкании $\bar{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\bar{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u-a^2\partial_{x_1}^2 u=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2$, $\partial_{x_1}^2$ - частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\ \partial_{x_0}u(0,x_1)=\varphi(x_1),\ x_1\in[0,l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered} u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0), \\ \partial_{x_1}^2 u(x_0,l)+\beta\partial_{x_1}u(x_0,l)+\gamma u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\ x_0\in[0,\infty), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Здесь $f:\bar{Q}\ni \boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})$, заданная на $\bar{Q}$ функция, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)\in\mathbb{R}$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)\in\mathbb{R}$, заданные на отрезке $[0,l]$ функции, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni x_0\to\mu^{(j)}(x0)\in\mathbb{R}$, $j=1,2,$ – заданные на полупрямой $[0,\infty)$ функции, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1). Классическое решение уравнения (1) представимо в виде суммы

$$u(\boldsymbol{x})=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0)+v_p(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

где $g^{(j)}\in C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$, $j=1,2$, v_p – частное решение уравнения (1). $a>0$, $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$, где $\boldsymbol{x}\in\bar{Q}$.

В [6] доказана теорема: Пусть правая часть уравнения (1) f из класса $C^2(\bar{Q})$. Тогда функция v_p, определяемая формулами

$$v_p^{(m)}(\boldsymbol{x})=\tilde{g}^{(1)}(x_1-ax_0)+\tilde{g}^{(2)}(x_1+ax_0)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{ml}^{x_1+ax_0}dz\int\limits_{l-ml}^{x_1-ax_0}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy,$$

$$v_p(\boldsymbol{x})=v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(m)}}$$

при соответствующем выборе функций $\tilde{g}^{(j,m)}$, $j=1,2$, $m\in\mathbb{N}$, принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям

$$v_p^{(1)}(0,x_1)=\tilde{g}^{(1,1)}(x_1)+\tilde{g}^{(2,1)}(x_1)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{l}^{x_1}dz\int\limits_{0}^{x_1}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy=0,$$

$$\partial_{x_0}v_p^{(1)}(0,x_1)=-ad\tilde{g}^{(1,1)}(x_1)+ad\tilde{g}^{(2,1)}(x_1)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{l}^{x_1}f\left(\frac{x_1+ax_0-y}{2a},\frac{x_1+ax_0+y}{2}\right)dy+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{l}^{x_1}f\left(\frac{z-x_1+ax_0}{2a},\frac{z+x_1-ax_0}{2}\right)dy=0,$$

$$\partial_{x_0}^2 v_p^{(1)}(0,x_1)=f(0,x_1).$$

ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО УРАВНЕНИЮ (1). Решение задачи (1)-(3) сводится к решению $u^{(0)}=u-v$ однородного уравнения

$$\partial_{x_0}^2 u-a^2\partial_{x_1}^2 u=0, \tag{5}$$

удовлетворяющего условиям Коши (2), граничным условиям (3)

$$u^{(0)}(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0)-v(x_0,0)=\tilde{\mu}^{(1)}(x_0),\ x_0\in[0,\infty), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \partial_{x_0}^2 u^{(0)}(x_0,l)+\beta\partial_{x_0}u^{(0)}(x_0,l)+\gamma u^{(0)}(x_0,l)= \\ =\partial_{x_0}^2 u(x_0,l)+\beta\partial_{x_0}u(x_0,l)+\gamma u(x_0,l)- \\ -\left(\partial_{x_0}^2 v(x_0,l)+\beta\partial_{x_0}v(x_0,l)+\gamma v(x_0,l)\right)= \\ =\mu^{(2)}(x_0)-\left(\partial_{x_0}^2 v(x_0,l)+\beta\partial_{x_0}v(x_0,l)+\gamma v(x_0,l)\right)=\tilde{\mu}^{(2)}(x_0),x_0\in[0,\infty). \end{gathered} \tag{7}$$

Общее решение уравнения (5) представляется в виде суммы двух произвольно выбранных функций

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}\left(x_1 - ax_0\right) + g^{(2)}\left(x_1 + ax_0\right), \tag{8}$$

где функции $g^{(j)}\left(j=1,2\right)$ из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$. $D\left(g^{(1)}\right) = \left(-\infty, l\right]$, $D\left(g^{(2)}\right) = \left[0, \infty\right)$. Функции $g^{(j)}$ выбираем такими, чтобы их сумма (8) удовлетворяла условиям Коши (2) и граничным условиям (6) и (7).

Из условий Коши (2) имеем их значения

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + (-1)^j \frac{1}{2a}\int_0^z \psi(\xi)\,d\xi + (-1)^j C \tag{9}$$

для $z \in \left[0, l\right]$, где C – произвольная постоянная из поля действительных чисел.

Для других $z \in D\left(g^{(j)}\right) \setminus \left[0, l\right]$ значения $g^{(j)}(z)$ функций $g^{(j)}\left(j=1,2\right)$ определяем из граничных условий (6), (7), продвигаясь по отрезкам, используя при этом определенные значения $g^{(j,0)}(z)$ для $z \in \left[0, l\right]$. Получим

$$g^{(1)}\left(-ax_0\right) + g^{(2)}\left(ax_0\right) = \tilde{\mu}^{(1)}\left(x_0\right),\ x_0 \geq 0, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} g^{(1)\prime\prime}\left(l - ax_0\right) + g^{(2)\prime\prime}\left(l + ax_0\right) + \beta g^{(1)\prime}\left(l - ax_0\right) + \beta g^{(2)\prime}\left(l + ax_0\right) + \\ + \gamma g^{(1)}\left(l - ax_0\right) + \gamma g^{(2)}\left(l + ax_0\right) = \tilde{\mu}^{(2)}\left(x_0\right),\ x_0 \geq 0 \end{gathered} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что для $x_0 > 0$ в уравнении (10) значения функции $g^{(1)}$ определены для отрицательного аргумента через значения функции $g^{(2)}$ от положительного аргумента для одних и тех же значений $x_0 \in \left[0, \infty\right)$. В связи с этим делаем в (10) замену независимого переменного x_0 по формуле $-ax_0 = z$. Тогда

$$g^{(1)}(z) = \tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - g^{(2)}(-z), \tag{12}$$

где $z \in \left(-\infty, 0\right]$ для $x_0 \in \left[0, \infty\right)$.

Аналогично в уравнении (11) делаем замену независимого переменного x_0 по формуле $l + ax_0 = z$ $x_0 \in \left[0, \infty\right)$. Тогда из (11) имеем

$$\begin{gathered} g^{(2)\prime\prime}(z) + \beta g^{(2)\prime}(z) + \gamma g^{(2)}(z) = \\ = \tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z - l}{a}\right) - \left(g^{(1)\prime\prime}(2l - z) + \beta g^{(1)\prime}(2l - z) + \gamma g^{(1)}(2l - z)\right), \end{gathered} \tag{13}$$

где для $x_0 \in \left[0, \infty\right)$ $z \in \left[l, \infty\right)$.

Если в уравнениях (12) и (13) проанализировать связь изменения аргументов, то можно заметить следующее. Если z в (13) меняется в пределах интервала длиной l, принадлежащего множеству $\left(-\infty, 0\right]$, то $-z$ не принадлежит этому интервалу. Аналогично, если z в равенстве (13) принадлежит интервалу длиной l из множества $\left[l, \infty\right)$, то множество $\left\{2l - z\right\}$ для тех же z не принадлежит этому интервалу и значения $2l\text{-}z$ являются отрицательными. В силу этого функции $g^{(j)}$ $\left(j=1,2\right)$ можно определить через уже известные, определенные ранее значения. Такими являются функции $g^{(j,k)}(z)$ $\left(j=1,2\right)$, которые вычисляются по формулам (9) через заданные значения функций φ и ψ на отрезке $\left[0, l\right]$.

В связи с последними проведенными рассуждениями полупрямую $(-\infty, l]$ разбиваем на отрезки

$$\mathcal{A}^{(k)}=\left\{z: z\in\left[-kl,-(k-1)l\right]\right\},\ \text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Аналогично, полупрямую $[0,\infty)$ разбиваем на множества

$$\mathcal{B}^{(k)}=\left\{z: z\in\left[kl,(k+1)l\right]\right\},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Очевидно, что $\mathcal{A}^{(0)}=\mathcal{B}^{(0)}$. Для других $k = 1,\ 2,\ \ldots$ пересечение множеств $\mathcal{A}^{(k)}$ и $\mathcal{B}^{(k)}$ является пустым множеством, то есть $\mathcal{A}^{(k)}\cap\mathcal{B}^{(k)}=\emptyset$. Поскольку значения $g^{(j)}(z)$ на $\mathcal{A}^{(0)}=\mathcal{B}^{(0)}$ определяются формулами (9), то все остальные значения находим с помощью соотношений (12) и (13), которые запишем с учетом множеств $\mathcal{A}^{(k)}$ и $\mathcal{B}^{(k)}$ для каждого $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, а именно:

$$g^{(1)}(z)=g^{(1,k)}(z)=\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right)-g^{(2,k-1)}(-z),\ z\in A^{(k)}, \tag{14}$$

$$g^{(2)}(z)=g^{(2,k)}(z)=C_1^{(k)}e^{\lambda_1 z}+C_2^{(k)}e^{\lambda_2 z}+\frac{e^{\lambda_2 z}}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^z T^{(k-1)}(\xi)e^{-\lambda_2\xi}d\xi-$$

$$-\frac{e^{\lambda_1 z}}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^z T^{(k-1)}(\xi)e^{-\lambda_1\xi}d\xi,\ z\in B^{(k)}, \tag{15}$$

$$\text{если } \beta^2-4\gamma>0,\ \text{а } \lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2};$$

$$g^{(2)}(z)=g^{(2,k)}(z)=C_1^{(k)}ze^{\lambda z}+C_2^{(k)}e^{\lambda z}+$$

$$+e^{\lambda z}\left(z\int_0^z T^{(k-1)}(\xi)e^{-\lambda\xi}d\xi-\int_0^z \xi T^{(k-1)}(\xi)e^{-\lambda\xi}d\xi\right),\ z\in B^{(k)}, \tag{16}$$

$$\text{если } \beta^2-4\gamma=0,\ \text{а } \lambda=\frac{-\beta}{2};$$

$$g^{(2)}(z)=g^{(2,k)}(z)=C_1^{(k)}e^{\lambda_1 z}\cos\lambda_2 z+C_2^{(k)}e^{\lambda_1 z}\sin\lambda_2 z-$$

$$-\frac{1}{\lambda_2}e^{\lambda_1 z}\cos\lambda_2 z\int_0^z T^{(k-1)}(\xi)e^{-\lambda_1\xi}d\xi+$$

$$+\frac{1}{\lambda_2}e^{\lambda_1 z}\sin\lambda_2 z\int_0^z T^{(k-1)}(\xi)e^{-\lambda_1\xi}\cos\lambda_2\xi d\xi,\ z\in B^{(k)}, \tag{17}$$

$$\text{если } \beta^2-4\gamma<0,\ \text{а } \lambda_1=\frac{-\beta}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2}\sqrt{4\gamma-\beta^2}.$$

Здесь $T^{(k)}=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\dfrac{z-l}{a}\right)-\left(g^{(1,k)\prime\prime}(2l-z)+\beta g^{(1,k)\prime}(2l-z)+\gamma g^{(1,k)}(2l-z)\right),\ k=1,2,3,\ldots$.

Обозначение произвольных постоянных $C_j^{(k)}$, $j=1,2$ для каждого множества $B^{(k)}$ отдельно, в связи с тем, что равенства (15)-(17) на каждом $B^{(k)}$ определяются из дифференциального уравнения (13).

Исследуем систему (14), (15). Решение (8) должно принадлежать $C^2(\bar{Q})$. Поэтому функции φ, ψ и $\mu^{(j)}$ $(j=1,2)$ должны быть достаточно гладкими и аналитические выражения $g^{(j,k)}(z)$, $j=1,2$, $k=0,1,2$, и их производные должны совпадать в общих точках соприкосновения, то есть должны выполняться равенства

$$d^p g^{(1,k)}(z)|_{z=-kl}=d^p g^{(1,k+1)}(z)|_{z=-kl},\ k=0,1,\ldots,\ p=0,1,2, \tag{18}$$

$$d^p g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl} = d^p g^{(2,k)}(z)|_{z=kl},\ k=1,2,\ldots,\ p=0,1,2, \tag{19}$$

где $d^p = d^p / dz^p$.

Для *k = 0* из равенства (18) получим

$$\begin{gathered} \varphi(0) - \tilde{\mu}^{(1)}(0) = 0, \\ \varphi'(0) - \frac{1}{a}\tilde{\mu}^{(1)\prime}(0) = 0, \\ \varphi''(0) - \frac{1}{a^2}\tilde{\mu}^{(1)\prime\prime}(0) = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Для *k = 1* из равенства (19) получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\varphi(l) + \int_0^l \psi(\xi)d\xi + C = C_1^{(1)}e^{\lambda_1 l} + C_2^{(1)}e^{\lambda_2 l} + S^{(0)}(l), \\ \frac{1}{2}\varphi'(l) + \psi(l) = \lambda_1 C_1^{(1)}e^{\lambda_1 l} + \lambda_2 C_2^{(1)}e^{\lambda_2 l} + S^{(0)\prime}(l), \\ \frac{1}{2}\varphi(l) + \psi'(l) = \lambda_1^2 C_1^{(1)}e^{\lambda_1 l} + \lambda_2^2 C_2^{(1)}e^{\lambda_2 l} + S^{(0)\prime\prime}(l), \end{gathered} \tag{21}$$

где $S^{(k)}(z) = \dfrac{e^{\lambda_2 z}}{\lambda_2 - \lambda_1}\displaystyle\int_0^z T^{(k)}(\xi)e^{-\lambda_2\xi}d\xi - \dfrac{e^{\lambda_1 z}}{\lambda_2 - \lambda_1}\displaystyle\int_0^z T^{(k)}(\xi)e^{-\lambda_1\xi}d\xi$.

Из второго и третьего уравнения системы (21) определим константы $C_j^{(1)},\ j=1,2$.

$$\begin{gathered} C_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}e^{-\lambda_1 l}\left(\frac{\lambda_2}{2}\varphi'(l) + \lambda_2\psi(l) - \lambda_2 S'(l) - \frac{1}{2}\varphi''(l) - \psi'(l) + S''(l)\right), \\ C_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}e^{-\lambda_2 l}\left(\frac{1}{2}\varphi''(l) + \psi'(l) - S''(l) - \frac{\lambda_1}{2}\varphi'(l) - \lambda_1\psi(l) + \lambda_1 S'(l)\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, число *C* определяется из первого уравнения системы (21) через константы $C_j^{(1)},\ j=1,2$.

Для *k=2, p=0* из (19) получим соотношение

$$g^{(2,1)}(2l) - g^{(2,2)}(2l) = e^{\lambda_1\cdot 2l}\left(C_1^{(1)} - C_1^{(2)}\right) + e^{\lambda_2\cdot 2l}\left(C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\right) +$$

$$+\frac{e^{\lambda_2\cdot 2l}}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^{2l}\left[T^{(0)}(\xi) - T^{(1)}(\xi)\right]e^{-\lambda_2\xi}d\xi - \frac{e^{\lambda_1\cdot 2l}}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^{2l}\left[T^{(0)}(\xi) - T^{(1)}(\xi)\right]e^{-\lambda_1\xi}d\xi.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{gathered} T^{(0)}(2l) - T^{(1)}(2l) = \left[g^{(1,1)\prime\prime}(0) - g^{(1,0)\prime\prime}(0)\right] + \\ +\beta\left[g^{(1,1)\prime}(0) - g^{(1,0)\prime}(0)\right] + \gamma\left[g^{(1,1)}(0) - g^{(1,0)}(0)\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

Очевидно, что $T^{(0)}(2l) - T^{(1)}(2l) = 0$, если выполняются условия (20). То есть можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функции* $\varphi, \psi \in C[0,l]$, $\mu^{(j)} \in C[0,\infty)$, $j=1,2$, $f \in C(\bar{Q})$. *Тогда функция* $u^{(0)}$, *определяемая формулой* (8), *принадлежит классу* $C(\bar{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются соотношения* (20), *а константы C,* $C_j^{(1)}$, $j=1,2$, *определяются из системы (21) и* $C_j^{(k)} = C_j^{(k+1)}$, $k=1,2,\ldots$.

Доказательство. Пусть справедливы соотношения (20). Тогда разность (23) равна нулю. Значит функции $g^{(2,1)}$ и $g^{(2,2)}$ совпадают в точке $z=2l$, если $C_1^{(1)} = C_1^{(2)}$ и $C_2^{(1)} = C_2^{(2)}$.

По индукции не трудно доказать, что равенства (18), (19) выполняются тогда и только тогда, когда $C_j^{(k)} = C_j^{(k+1)},\ k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, функция $u^{(0)}$, определенная суммой значений функций $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, формулой (8), принадлежит классу $C\left(\bar{Q}\right)$. Лемма 1 доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции* $\varphi \in C^2\left(\left[0, l\right]\right)$, $\psi \in C^1\left(\left[0, l\right]\right)$, $f \in C^{0,1}\left(\bar{Q}\right)$, $\mu^{(j)} \in C^2\left(\left[0, \infty\right)\right)$, *$j = 1, 2$. Выполняются условия леммы 1. Тогда функция* $u = u^{(0)} + v$ *является единственным классическим решением из класса* $C^2\left(\bar{Q}\right)$ *задачи* (1)-(3).

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ. Метод характеристик, предложенный в данной работе, позволяет записать решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны в явном аналитическом виде. Поскольку решение смешанной задачи можно записать с помощью формул, то это, в принципе, дает возможность решать задачи управления смещениями на концах струны.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В данной статье получены формулы классического решения первой смешанной задачи для волнового уравнения с дифференциальным полиномом второго порядка в граничном условии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма // Доклады НАН Беларуси. – 2009.– Т. 53, №1. –С. 45-49.
2. Корзюк, В. И. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма // Труды Ин-та математики НАН Беларуси.–2009.– Т.17, №2. –С.23-34.
3. Ляжетич, Н. Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка / Н. Л. Ляжетич// Дифференциальные уравнения. –2006,– Т. 42, №8. – С. 1072-1077.
4. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2015. – №1. – С. 17-20.
5. Корзюк, В. И. Классические решения в теории дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Studia i materiały EUIE w Warszawie. – 2015. – Nr 1(9) – s. 55-78.
6. Корзюк, В. И. Классические решения для гиперболических уравнений. В десяти частях. Часть 2 / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – 52с.
7. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Доклады НАН Беларуси.–2011.– Т.55, №5.– С.9-13.
8. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференциальные уравнения.–2012.– Т.48, №5.– С.700-709.
9. Моисеев, Е. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения / Е. И. Моисеев, В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференциальные уравнения. –2014,– Т.50, №10. – С.1373-1385.
10. Корзюк, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011. – 433 с.
11. Самарский, А.А. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 735 с.
12. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, 1966. – 444 с.