УДК 624.072:045

В.П.Уласевич, канд.техн.наук,
М.И.Гончаров (БИСИ)

К ВЕСОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ БАЛОК ЗАДАННОЙ НАДЕЖНОСТИ

Одним из главных направлений научных исследований в области теории расчета сооружений на XI пятилетку является дальнейшее развитие прикладной теории надежности строительных конструкций, включая установление принципов оптимальности и долговечности [I]. Это позволит проектировщикам и конструкторам разрабатывать новые контруктивные формы или их элементы минимальной материалоемкости.

В статье рассматривается задача весовой оптимизации балок заданной надежности. Эта задача была поставлена в [2] как задача нелинейного программирования, в которой целевой функцией служит вес, а ограничения по надежности описывают область изменения искомых конструктивных параметров. Для решения поставленной задачи авторы работы [2] используют метод штрафных функций и метод случайного поиска, численная реализация которых на ЭВМ требует значительных затрат машинного времени. Нами показана возможность решения поставленной задачи в аналитическом виде на примере весовой оптимизации балки прямоугольного сечения, загруженного произвольной поперечной нагрузкой $g(x,t)$.

Данная задача нелинейного программирования может быть сформулирована так: определить конфигурацию балки, сообщающую для заданной надежности минимальное значение функционалу

$$G = \gamma \cdot b \int_0^l h(x)\,dx \longrightarrow min \qquad (I)$$

при услоии, что [2]

$$P(T^*) = I - \nu_+ (\sigma_{доп}) \cdot T^* \geq P_{зад}, \qquad (2)$$

где γ - плотность материала; b - ширина балки; l - длина балки; $h(x)$ - варьируемая высота балки; $P(T^*)$ - надежность системы в течение срока эксплуатации T^* ; $P_{зад}$ - заданная надежность.

Определение надежности балки в течение срока эксплуатации T^* сводится к решению задачи о выбросах некоторого процесса за допустимый фиксированный уровень [3] . В качестве такого процесса приняты напряжения σ , возникающие в сечениях балки. Тогда для процесса σ среднее число положительных пересечений ν_+ допустимого уровня $\sigma_{доп}$ находится по формуле [3]

$$\nu_+(\sigma_{доп}) = \frac{\sigma_{\dot{\sigma}}}{2\pi\sigma_\sigma} \cdot exp\left[-\frac{(\sigma_{доп} - m_\sigma)^2}{2\sigma_\sigma^2}\right], \qquad (3)$$

в которой σ_σ^2 и $\sigma_{\dot{\sigma}}^2$ - дисперсии σ и $\dot{\sigma}$; m_σ - математическое ожидание процесса σ .

Произвольную поперечную нагрузку можно предсталить в виде

$$g(x,t) = g(x) \cdot f(t). \qquad (4)$$

Перейдем от неизвестных математических характеристик случайной величины σ к математическим характеристикам функции $f(t)$.

С учетом (4) изгибающий момент в произвольном сечении равен

$$\bar{M}(x\,t) = M(x) \cdot f(t).$$

Так как напряжения, возникающие в сечениях балки, можно записать в виде

$$\sigma = Z(x) \cdot f(t),$$

где

$$z(x)=\frac{6M(x)}{bh^2(x)},$$

то математические характеристики σ_σ^2, $\sigma_{\dot\sigma}^2$ и m_σ могут быть представлены так:

$$\sigma_\sigma = z(x)\cdot\sigma_f;\ \sigma_{\dot\sigma} = z(x)\cdot\sigma_{\dot f};\ m_\sigma = z(x)\cdot m_f. \quad (5)$$

Тогда (3), с учетом известных характеристик (5), имеет вид

$$\nu_+(\sigma_{доп})=\frac{\sigma_{\dot f}}{2\pi\sigma_f}\cdot\exp\left[-\frac{(\sigma_{доп}-z(x)\cdot m_f)^2}{2z^2(x)\cdot\sigma_f^2}\right]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2) и преобразуя, получаем:

$$\left(\frac{bh^2(x)\sigma_{доп}}{6M(x)}-m_f\right)^2 \geq 2C\cdot\sigma_f^2, \quad (7)$$

где

$$C=\ln\left[\frac{2\pi\sigma_f}{\sigma_{\dot f}T^*}(1-P_{зад})\right].$$

Используя естественное условие минимума, определяем условие оптимальности для данной задачи оптимизации. Легко заметить, что для удовлетворения этому условию $h(x)$ должны принимать граничные значения из области (7). Поэтому из (7), учитывая, что $h(x)\to min$, находим:

$$h(x)=\sqrt{\frac{6(\sigma_f\sqrt{2C}+m_f)}{b\cdot\sigma_{доп}}}\cdot\sqrt{M(x)}. \quad (8)$$

После подстановки (8) в (I) получим

$$G_{min}=\gamma\cdot\sqrt{\frac{6b(\sigma_f\sqrt{2C}+m_f)}{\sigma_{доп}}}\int_0^l\sqrt{M(x)}\,dx. \quad (9)$$

Применим предложенный метод к решению задачи по оптимизации профиля балки, нагруженной сосредоточенной силой P_t на конце консоли [2].

$$P(t)=m_p\cdot f(t) \quad при\ m_f=1.$$

Тогда по аналогии с (5)

$$\sigma_p=m_p\cdot\sigma_f;\ \sigma_{\dot p}=m_p\cdot\sigma_{\dot f};\ m(x)=m_p\cdot x. \quad (10)$$

С учетом соотношений (I0) выражение (9) имеет вид

$$G_{min} = \gamma \cdot \sqrt{\frac{6 \beta (\sigma_p \sqrt{2c} + m_p}{\sigma_{доп}}} \cdot \int_0^z \sqrt{x}\, dx .$$

Принимая $P_{зад} = 0{,}99$, получим;

для $T^* = 20$ лет $G = 0{,}895I \int_0^{100} \sqrt{x}\, dx ;$

для $T^* = 40$ лет $G = 0{,}8997 \int_0^{100} \sqrt{x}\, dx ;$

для $T^* = 50$ лет $G = 0{,}90I2 \int_0^{100} \sqrt{x}\, dx .$

Результаты расчетов веса балки G оптимального сечения, полученные по аналитическому решению и численными методами [2], приведены в таблице.

Таблица

Срок эксплуатации T^*, лет	Метод оптимизации	Вес балки, G, H
20	градиентный	I44,I5
	случайного поиска	I43,40
	аналитическое решение	I40,53
40	градиентный	I46,99
	случайного поиска	I43,97
	аналитическое решение	I4I,24
60	градиентный	I47,32
	случайного поиска	I44,II
	аналитическое решение	I4I,47

Выводы

а) доказана возможность аналитического решения поставленной задачи;

б) аналитическое решение более точно и эффективно в сравнении с численным;

в) полученное решение удобно для использования в проектной практике.

Литература

I. Смирнов А.Ф. Об основных направлениях исследований в области теории и методов расчета сооружений на XI пятилетку.- Строительная механика и расчет сооружений, 1981, № 1, с. 4-9. 2. Почтман Ю.М. и Харитон А.Е. Весовая оптимизация балок заданной надежности.- Изв.вузов. Строительство и архитектура, 1977, № 4, с. 42-45. 3. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.- М., 1971, 256 с.