УДК 519.615.62

В.И. ГЛАДКОВСКИЙ

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши определения функции $y(x)$ на отрезке

$$[x_o, x] \tag{1}$$

с начальным условием

$$y_o = y(x_o) \tag{2}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f[x, y(x)]. \tag{3}$$

Эту задачу можно привести к нахождению решения $y(x)$ интегрального уравнения

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f[t, y(t)]dt\,. \tag{4}$$

Функция $y(x)$ не может быть вычислена непосредственно из уравнения (4). Тем не менее, с помощью метода последовательных приближений можно показать, что решение этого уравнения, а, следовательно, и задачи Коши (1)–(3) существует и оно единственно, за исключением, быть может, особых начальных точек ветвления, при условии, что они существуют [1, с. 84–88].

Для нахождения приближенного численного решения уравнения (4) численными методами, например, методом конечных разностей интервал (1) разбивают на N одинаковых частей. В этом случае (4) трансформируется в

$$y(x) = y_o + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[t, y(t)]dt\,, \tag{5}$$

где $x_{i+1} - x_i = h = \dfrac{x - x_o}{N}$ – шаг регулярной сетки в интервале (1).

Используя квадратуры различного порядка точности для аппроксимации интегралов в (5), можно получать целое семейство различных разностных схем. Априори очевидно, что чем выше порядок точности соответствующей квадратуры, тем выше точность численного решения уравнения (5).

Известно, что определенный интеграл $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f[t, y(t)]dt$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $f[x, y(x)]$, осью OX, а также вертикальными прямыми $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$.

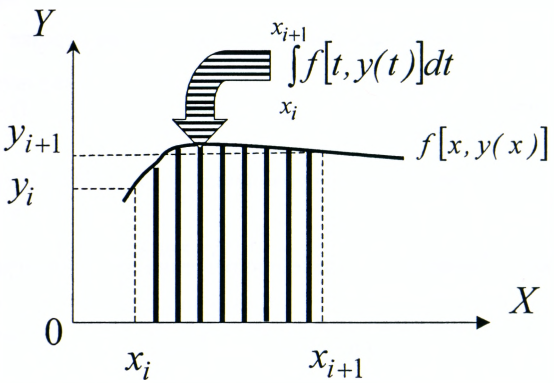

Рисунок 1 – Графическое представление определенного интеграла

Если рассматриваемую площадь приближенно вычислить по формуле прямоугольников с ординатой y_i, то получим разностную схему, называемую явной схемой Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \tag{6}$$

Приближенное вычисление рассматриваемой площади по формуле трапеций дает возможность получить следующее выражение:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \tag{7}$$

Такая разностная схема называется неявной схемой Эйлера. Обычно такую схему решают либо методом последовательных приближений по схеме Ньютона, либо методом прогонки. Тем не менее, схему можно сделать явной, разделив ее вычисление на два этапа – прогноз

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{8}$$

и коррекцию:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right]. \qquad (9)$$

В таблице 1 приведены результаты численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{2} + x \qquad (10)$$

в интервале $[0,2]$ с начальным условием $y_o = y(0) = 0$ по схемам (6) и (8)–(9) с шагом h=0,001; 0,005; 0,25. В таблице для сравнения приведены также значения аналитического решения $y(x) = -2(x+2) + 4e^{\frac{1}{2}x}$.

Таблица 1 – Сравнение результатов вычислений по явной и неявной схеме Эйлера

		Явная схема Эйлера			Неявная схема Эйлера (метод прогноза и коррекции)		
x	y(x)	h=0,01	h=0,05	h=0,25	h=0,01	h=0,05	h=0,25
0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,03259381	0,03383821	0,038774	0,0625	0,032673	0,032745	0,035156
0,5	0,13610167	0,13856778	0,148347	0,1953125	0,136414	0,136923	0,143311
0,75	0,31996566	0,32360275	0,338022	0,4072266	0,320662	0,321884	0,333969
1	0,59488508	0,59960734	0,618327	0,7081299	0,596106	0,598333	0,61785
1,25	0,97298383	0,9786619	1,001171	1,1091461	0,974859	0,978387	1,007038
1,5	1,46800007	1,47445102	1,500027	1,6227894	1,470637	1,475761	1,515152
1,75	2,09550118	2,10247653	2,130141	2,2631381	2,098983	2,105979	2,157545
2	2,87312731	2,88029883	2,908762	3,0460303	2,8775	2,886612	2,951518

Разность между численным и аналитическим решением называется невязкой. В таблице 2 показаны максимальные значения невязки в обоих случаях.

Таблица 2 – Максимальная невязка при вычислениях по явной и неявной схеме Эйлера

Явная схема Эйлера			Неявная схема Эйлера (метод прогноза и коррекции)		
h=0,01	h=0,05	h=0,25	h=0,01	h=0,05	h=0,25
0,00717152	0,035634	0,172903	0,007172	0,035634	0,172903

Неявную схему можно модифицировать, если использовать метод последовательных приближений [1, с. 88–89]. Подставив нулевое приближение $y = 0$ для уравнения (10) в формулу (4), получим первое приближение

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f[t, y(t)]dt = 0 + \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}. \qquad (11)$$

Первое приближение было использовано для модификации схемы (8)-(9) посредством замены вычисления $\tilde{y}_{i+1}$ на первом шаге. В дальнейшем вычисления проводились аналогично предыдущим. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Сравнение аналитического решения задачи Коши для уравнения (9) с вычислениями по модифицированной неявной схеме Эйлера

		Неявная схема Эйлера, модифицированная на основе метода последовательных приближений		
x	y(x)	h=0,01	h=0,05	h=0,25
0	0	0	0	0
0,25	0,03259381	0,03261649	0,032774	0,0332031
0,5	0,13610167	0,13622479	0,136859	0,1390381
0,75	0,31996566	0,32026998	0,321708	0,3269577
1	0,59488508	0,59545176	0,598024	0,6076198
1,25	0,97298383	0,97389191	0,97792	0,9930391
1,5	1,46800007	1,46932314	1,475107	1,4967588
1,75	2,09550118	2,09730312	2,105107	2,1340428
2	2,87312731	2,87545692	2,885484	2,9220929

В таблице 4 показаны максимальные значения невязки для неявной схемы Эйлера, модифицированной на основе метода последовательных приближений.

Таблица 4 – Максимальная невязка для модифицированной неявной схемы Эйлера

h=0,01	h=0,05	h=0,25
0,002329608	0,012357	0,04896556

Сравнение данных таблиц 2 и 4 позволяет сделать вывод о повышении точности разностного решения задачи Коши на основе метода последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гутер, Р.С. Дифференциальные уравнения. Учеб. пособие для втузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. – М. : Высш. школа, 1976. – 304 с.