УДК 517

М.Н. БОЖКО, В.Т. ДАЦЫК

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Найдены условия существования и единственности задачи Коши и получена оценка приближения решения для дифференциального уравнения нецелого порядка.

$$y^{(\alpha)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где $n-1<\alpha<n,\ \ n\in N$.

Пусть функция f – абсолютно интегрируема на параллелепипеде:

$$\Pi_{\mathrm{lhj}}=\left\{(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\in R^{n+1}\,\middle|\,\begin{array}{ll}\alpha\le x\le l, & l\in R_+,\\ y_0^{(j)}-h_j\le y^{(j)}\le y_0^{(j)}+h_j, & y_0^{(j)}\in R,\\ h_j\in R_+, & j=\overline{0,n-1}\end{array}\right\}.$$

Решение уравнения (1) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $(n-1)$, $n\in N$, функций $y=y(x)$ на отрезке $[\alpha,l]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y^{(n-1)}(x)$. Причем, для любых указанных функций $y=y(x)$ функция $\mu(x)=f(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n-1)}(x))$ должна быть также абсолютно непрерывной на отрезке $[\alpha,l]$ (условие (*)). Норма для функций $y=y(x)$ вводится по формуле:

$$\|y(x)\|=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\alpha}^{l}\left|y^{(j)}(x)\right|dx \tag{2}$$

Указанный класс функций $y=y(x)$ обозначим через $L^{(j)}(\alpha,l)$.

Теорема 1. Если для уравнения (1) функция f – абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj} и для любых точек

$M_1\ (x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)})$ и

$M_2\ (x,y_2,y_2',\dots,y_2^{(n-1)})$ из Π_{lhj} будет

$$\left|f(M_1)-f(M_2)\right| \le A\sum_{j=0}^{n-1}\left|y_1^{(j)}-y_2^{(j)}\right|, \tag{3}$$

где A – некоторая положительная константа, а также выполняется условие (*), то уравнение (1) при выполнении неравенства:

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(j-1))\cdot l^{\alpha-j}\right)<1 \tag{4}$$

имеет в классе $L^{(j)}(\alpha,l)$ единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} &D_{a+}^{-(1-\alpha)}y(\mathrm{a})=y_0^{(n-1)}=D_{a+}^{-(2-\alpha)}y(\mathrm{a})=y_0^{(n-2)}=\ldots=\\ &=D_{a+}^{-(n-\alpha)}y(\mathrm{a})=y_0=b \end{aligned} \tag{5}$$

где Г – гамма-функция, $D_{a+}^{-\beta}$ – дробный интеграл порядка $\beta > 0$, D_{a+}^{β} - дробная производная порядка $\beta > 0$.

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1, то справедлива оценка

$$\left\|y(x)-y_{\lambda}(x)\right\|_{L^{(j)}(0,1)} \le \frac{B\left\|y(x)-Y_{\lambda}(y;x)\right\|_{L^{(j)}(0,1)}}{1-A\varepsilon(Y_{\lambda},\Omega_{K_\alpha}^{\omega L^{(j)}})} \tag{6}$$

где Y_λ – линейный регулярный метод суммирования интегралов;

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}(Y_\lambda,\Omega_{K_\alpha}^{\omega L^{(j)}})=0$; $\Omega_{K_\alpha}^{\omega L^{(j)}}$ – класс всех измеримых функций $\varphi \in L^{(j)}(0, l)$ и таких, что для любых $x', x'' \in [0, l]$ будет

$$\left\|\varphi(x'')-\varphi(x')\right\|_{L^{(j)}(0;1)} \le \omega_L(K_\alpha,|x''-x'|),$$

$$K_\alpha(x;t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\begin{matrix}(x-t)^{\alpha-1}, & t\le x, & \\ 0, & t>x, & x\in(0;1)\end{matrix}\right\} \tag{7}$$

$y_\lambda(x)$ – решение операторного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенчук, Н.П. Об одном классе дифференциальных уравнений нецелого порядка / Н.П. Семенчук // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. XVIII, № 10. – С. 1831–1833.