А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина; БрГТУ

О НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ОБЛАДАЮТ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{p_{i1},p_{i2},p_{i3}} P^{(i)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{q_{i1},q_{i2},q_{i3}} Q^{(i)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}} \quad (i=1,2,3), \tag{1}$$

где $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; p_{ik} ,q_{ik} $(i,\ k=1,2,3)$ – целые неотрицательные числа, причем $p_{i1}+p_{i2}+p_{i3}=p^{(i)}$, $q_{i1}+q_{i2}+q_{i3}=q^{(i)}$.

Будем полагать, что одно из уравнений системы (1) (пусть это будет первое уравнение) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=p^{(1)}-p_{11}} P^{(1)}_{\tau_2,\tau_3} x_1^{p_{11}}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=q^{(1)}-q_{11}} Q^{(1)}_{\tau_2,\tau_3} x_1^{q_{11}}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}}.$$

Для системы (1) ищутся решения $x_i=x_i(z)$, $(i=1,2,3)$, обладающие бесконечными предельными свойствами

$x_i\to\infty$ $(i=1,2,3)$ при $z\to z_0$. (2)

Применим следующий метод отыскания решений системы (1), которые удовлетворяют условиям (2). Введем замену

$$x_1=\frac{1}{u^3},\ x_2=\frac{V_2}{u},\ x_3=\frac{V_2}{u}. \tag{3}$$

Замена (2) сведет систему (1) к системе вида

$$\frac{dz}{du}=-3\cdot\frac{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{p^{(1)}} Q^{(1)}_{\tau}(1,V_2,V_3)u^{\gamma_1-(3\tau_1+\tau_2+\tau_3)}}{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{q^{(1)}} P^{(1)}_{\tau}(1,V_2,V_3)u^{\delta_1-(3\tau_1+\tau_2+\tau_3)}}u^{\delta_1-\gamma_1-4}, \tag{4}$$

$$u\frac{dV_j}{du}=V_j-3\frac{\sum Q_\tau^{(1)}(1,V_2,V_3)u^{\gamma_1-(3\tau_1+\tau_2+\tau_3)}}{\sum P_\tau^{(1)}(1,V_2,V_3)u^{\delta_1-(3\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n)}}\cdot\frac{\sum P_\tau^{(j)}(1,V_2,V_3)u^{\delta_1-(3\tau_1+\tau_2+\tau_3)}}{\sum Q_\tau^{(1)}(1,V_2,V_3)u^{\gamma_1-(3\tau_1+\tau_2+\tau_3)}}u^{\delta_1-\gamma_1+\gamma_j-\delta_j-2} \quad (5)$$

$(j=2,3)$; $\delta_i=3p_{i1}+(p^{(i)}-p_{i1})$, $\gamma_i=3q_{i1}+(q^{(i)}-q_{i1})$ $(i=1,2,3)$.

Уравнение (4) определяет z как функцию u. Правые части уравнений (4) и (5) представляют собой голоморфные функции переменных z, u, V_2, V_3 в окрестности точки $z=z_0$, $u=0$, $V_2=\beta_2$, $V_3=\beta_3$, если выполнены неравенства

$$P_{p^{(1)}}^{(1)}(1,\beta_2,\beta_3)\cdot\prod_{j=2}^{3}Q_{q^{(j)}}^{(j)}(1,\beta_2,\beta_3)\neq 0,\ w_1-\gamma_1\geq\max\{4,w_j-\gamma_j+2\}. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение следующие полиномы переменных

$$S_j(V_1,V_3)=V_jP_{p^{(1)}}^{(1)}(1,V_2,V_3)Q_{q^{(j)}}^{(j)}(1,V_2,V_3)-3P_{p^{(j)}}^{(j)}(1,V_2,V_3)Q_{q^{(1)}}^{(1)}(1,V_2,V_3)\ (j=2,3). \quad (7)$$

Обозначим через $V_2=\beta_2$, $V_3=\beta_3$ решения системы (7). Далее будем рассматривать случай, когда

$$\beta_2\cdot\beta_3\neq 0 \text{ и } w_1-\gamma_1-4=w_j-\gamma_j+2\geq 0\ (j=2,3). \quad (8)$$

Введем замену $V_j=\varphi_j+\beta_j$, $(j=2\ 3)$ и разложим правые части уравнений (4) и (5) в ряды Тейлора по степеням u, φ_2, φ_3 в окрестности точки $(0,0,0)$. В результате получим систему

$$\frac{dz}{du}=-\frac{Q_{q^{(1)}}^{(1)}(1,\beta_2,\beta_3)}{P_{p^{(1)}}^{(1)}(1,\beta_2,\beta_3)}\cdot u^{w_1-\gamma_1-4}\cdot\{1+\Phi(u,\varphi_2,\varphi_3)\}, \quad (9)$$

$$u\frac{d\varphi_j}{du}=a_{j2}\varphi_2+a_{j3}\varphi_2+F(u,\varphi_2,\varphi_3)\quad (j=2,3), \quad (10)$$

где F_j – голоморфные функции от u, φ_2,φ_3, в окрестности точки $(0,0,0)$; $\Phi(u,\varphi_2,\varphi_3)$ – трехкратный степенной ряд, сходящийся в окрестности точки $(0,0,0)$. Два уравнения системы (10) образуют систему Брио и Буке с искомыми функциями $\varphi_j=\varphi_j(u)$ $(j=2,3)$. Далее решение системы (9), (10) ищем с помощью метода, рассмотренного в работах [1, 2]. Решения системы (1) запишем в виде

$$x_1=\eta^{-3}(1+N_1),\quad x_j=\eta^{-1}(1+N_j)\ (j=2,3), \quad (11)$$

где N_j $(j=2,3)$ m – кратные степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки $(0,0,0)$. Найденные решения будут обладать свойством (2). Точный вид рядов N_j приведен в работах [1, 2]. Таким образом, имеет место

Теорема 1. Если для системы (4) – (5) выполнены условия (6) и (8), то данная система (1) имеет решение $x_i=x_i(z)$, $(i=1,2,3)$, опрсделяемое функциями (11) и обладающее свойством (2).

Пример. Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{x_1^2}{x_2^2},\quad \frac{dx_2}{dz}=\frac{1}{3}x_2^2+x_2,\quad \frac{dx_3}{dz}=\frac{x_2^3+x_2}{12x_3}. \tag{12}$$

Введем замену (3). Система (12) тогда примет вид

$$\frac{dz}{du}=-3V_2^2,\quad u\frac{dV_2}{du}=V_2+3V_2^3u^2-V_2^4,\quad u\frac{dV_3}{du}=V_3-3V_2^3\frac{V_2^3+V_2u^2}{12V_3}. \tag{13}$$

Рассмотрим соответствующие многочлены вида (7)

$S_2(V_1,V_3)=V_2-V_2^4$, $S_3(V_1,V_3)=4V_3^2-V_2^5$. Действительными решениями системы $S_j(V_2,V_3)=0$ $(j=2,3)$ являются пары чисел: $(1,-\frac{1}{2})$, $(1,\frac{1}{2})$, $(0,0)$.

Рассмотрим случай, когда $\beta_2=1$, $\beta_3=\frac{1}{2}$. Сделаем замену $V_j=\varphi_j+\beta_j$ $(j=2,3)$ и разложим правые части уравнений (13) в ряды Тейлора, по степеням u, φ_2, φ_3 в окрестности точки $(0,0,0)$. Получим

$$\begin{aligned} &u\frac{d\varphi_2}{du}=-3\varphi_2-3u^2-9u^2\varphi_2+\dots,\\ &u\frac{d\varphi_3}{du}=-\frac{5}{2}\varphi_2+2\varphi_3-\frac{u^2}{2}-\frac{3u^2}{2}\varphi_2+\dots\ . \end{aligned} \tag{14}$$

Система (14) является системой Брио и Буке. Корни характеристического уравнения этой системы есть $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$. Справедливо следующее утверждение [3]. Пусть $\lambda_3\le 0<\lambda_2$ – целое. Тогда система (14) имеет однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством $\varphi_j(u)\to 0$ $(j=2,3)$ при $u\to 0$,где

$$\varphi_j=\sum_{m+m_1=1}^{\infty}C_j^{(mm_1)}u^m(u^{\lambda_2}\ln(u))^{m_1}\quad (j=2,3), \tag{15}$$

$C_3^{(\lambda_2 0)}=C$ – произвольная постоянная. Подставим (15) в (14) и получим следующие ряды

$$\varphi_2=-\frac{3}{5}u^2+\frac{3}{5}u\cdot u_1-\frac{2}{5}u_1^2+\dots,\quad \varphi_3=Cu^2+(4C+\frac{3}{2})u\cdot u_1+(4C+2)u_1^2+\dots, \tag{16}$$

где $u_1=u^2\ln u$; $C_3^{(20)}=C$, все остальные коэффициенты рядов (16) $C_j^{(mm_1)}$ $(j=2,3)$ определяются однозначно через параметр C. Первое уравнение системы (13) примет вид $-\frac{1}{3}\int\limits_{z_0}^{z}dz=\int\limits_0^u(\varphi_2+1)^2du$. (17)

Обозначим $\eta = -\frac{1}{3}(z - z_0)$ и $\eta_1 = \eta^2 \ln\eta$. Подставим (16) в (17), после чего обратим ряд (17). Для этого составим и решим следующую систему относительно переменных *u* и u_1: $\eta = u(1 + \mathrm{B}(u,u_1))$, $\eta_1 = \mathrm{B}^2(u,u_1)\cdot\ln\mathrm{B}(u,u_1)$, где $\mathrm{B}(u,u_1)$ – двукратный степенной ряд. Таким образом, получим решение уравнения (17) со свойством $u(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$, которое можно определить в системе компьютерной алгебры *Mathematica* как Root-объект [4]. Подставляя найденную функцию $u = u(\eta,\eta_1)$ в (16) и учитывая замену (3), получим решение системы (12), удовлетворяющее свойству (2).

Систему (12) можно проинтегрировать классическими методами и записать общее решение в виде

$$x_1(z) = \frac{18e^{z+6C_1}}{1 - 4e^{z+3C_1} - 2e^{2z+6C_1}\cdot(z + 9C_2)}, \qquad x_2(z) = \frac{3e^{z+3C_1}}{1 - e^{z+3C1}},$$

$$x_3(z) = \left(\frac{9(4e^{z+3C_1} - 3)}{4(e^{z+3C_1} - 1)} - 5\ln(e^{z+3C_1} - 1) + 2C_3\right)^{1/2}, \tag{18}$$

где C_i *(i=1,2,3)* – произвольные постоянные. Решение (18) содержит три вещественные функции, которые в точке $z_0 = 0$ обладают заданными предельными свойствами (2) при $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{6}$; $C_3 = C$ – произвольная постоянная. Графики полученных решений в окрестности точки $z_0 = 0$ можно построить и убедиться, что эти решения обладают требуемыми предельными свойствами.

1 Будько Т. С., Яблонский А. И. Об одном общем методе отыскания решений с бесконечными предельными значениями у автономных дифференциальных систем с рациональными правыми частями // Дифференц. уравнения. – 1989, Т. 25. – № 11. – С. 1852-1856.

2 Чичурин, А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1992. – №2 – С. 62-66.

3 Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1982. – 336 с.

4 Прокопеня, А. Н. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Прокопеня, А. В. Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – 265 с.