И. В. Тузик
Брест, БрГТУ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ ФАЗОЙ

Решение задач с малым параметром при помощи асимптотических разложений – хорошо развитый раздел математики. Наиболее известный подход к решению задач в этой области – метод усреднения [1].

В работе предлагается способ получения приближенного решения таких задач с достаточно крупным шагом, соответствующим промежутку времени, за который решение совершает одно или несколько быстрых колебаний. Выведены формулы для получения такого решения.

Рассматривается система ОДУ с быстровращающейся фазой

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \varepsilon \mathbf{X}_o(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum\limits_{|k|=1}^{s} \mathbf{X}_k(\mathbf{x}) e^{ik\psi}, \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = \omega(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum\limits_{|p|=1}^{r} A_p(\mathbf{x}) e^{ip\psi} \end{cases} \tag{1}$$

на промежутке $0 \le \tau \le \mathrm{L}/\varepsilon$ и с начальными условиями

$$\mathbf{x}\big|_{\tau=o} = \mathbf{x}_o, \quad \psi\big|_{\tau=o} = \psi_o. \tag{2}$$

Для упрощения дальнейших записей аргумент функции будем опускать, полагая, например, $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k(\mathbf{x})$ и т.п.

В системе (1) ε - малый параметр, L – конечное число, $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ – m-мерные вектор-функции, ψ, ω, A_p – скаляры, $\mathbf{X}_{-k} = \bar{\mathbf{X}}_k$, $A_{-p} = \bar{A}_p$.

Из двух последних равенств следует, что
$\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) = \mathrm{Re}(\mathbf{X}_{-k})$, $\mathrm{Im}(\mathbf{X}_{-k}) = -\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)$, $\mathrm{Re}(A_{-p}) = \mathrm{Re}(A_p)$, $\mathrm{Im}(A_{-p}) = -\mathrm{Im}(A_p)$.

На основании этого покажем, что исходная система на самом деле не содержит комплексных величин, и использование мнимой единицы нужно только для сокращения записи.

Для первого уравнения системы (1) имеем:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \varepsilon\mathbf{X}_0 + \varepsilon\sum_{|k|=1}^{s}\mathbf{X}_k e^{ik\psi} = \varepsilon\mathbf{X}_0 + \varepsilon\sum_{k=1}^{s}[(\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k))(\cos k\psi + i\sin k\psi) +$$

$$+ (\mathrm{Re}(\mathbf{X}_{-k}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{X}_{-k}))(\cos(-k\psi) + i\sin(-k\psi))] = \varepsilon\mathbf{X}_0 + \varepsilon\sum_{k=1}^{s}[(\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\cos k\psi -$$

$$- \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\sin k\psi + \mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\cos k\psi - \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\sin k\psi) + i(\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\cos k\psi +$$

$$+ \mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\sin k\psi - \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\cos k\psi - \mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\sin k\psi)] =$$

$$= \varepsilon \mathbf{X}_0 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{s} (\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\cos k\psi - \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\sin k\psi).$$

Аналогично, для второго уравнения системы (1) можно показать, что

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega + \varepsilon \sum_{|p|=1}^{r} A_p e^{ip\psi} = \omega + 2\varepsilon \sum_{p=1}^{r} (\mathrm{Re}(A_p)\cos p\psi - \mathrm{Im}(A_p)\sin p\psi).$$

Т.е. исходная система может быть записана в менее компактной, но вещественной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + 2\varepsilon \sum\limits_{k=1}^{s} (\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k(\mathbf{x}))\cos k\psi - \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k(\mathbf{x}))\sin k\psi), \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = \omega(\mathbf{x}) + 2\varepsilon \sum\limits_{p=1}^{r} (\mathrm{Re}(A_p(\mathbf{x}))\cos p\psi - \mathrm{Im}(A_p(\mathbf{x}))\sin p\psi). \end{cases} \tag{3}$$

Для задачи (1) – (2) в работе [4] выведены формулы, позволяющие приближенно получить значение функции на большом промежутке с крупным шагом $\Delta\tau_n = \tau_{n+1} - \tau_n$:

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_n + \varepsilon \Delta\tau_n \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\eta}_n) + \varepsilon^2 \frac{\Delta\tau_n^2}{2} \left[\frac{d\mathbf{X}_0}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}_0 \right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}_n} + \varepsilon^2 \Delta\tau_n G(\boldsymbol{\eta}_n; \psi_0),$$

где $\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{x}(\tau_n) + O(\varepsilon^2)$ при $\tau_n \sim \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Покажем, какой вид будут иметь слагаемые в этих формулах в зависимости от вида функций $\mathbf{X}_k$, A_p.

Во всех выражениях, приведенных ниже, значения функций и их производных вычисляются при $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_n$.

1. Если $\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) = 0, \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \neq 0, \mathrm{Im}(A_p) = 0$, то

$$G(\boldsymbol{\eta}_n; \psi_0) = \frac{2}{\omega^2} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\cos k\psi_0}{k} \left[\frac{d\,\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}_0 - \frac{d\mathbf{X}_0}{d\mathbf{x}} \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) - \frac{1}{\omega} \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \frac{d\omega}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}_0 \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{d\,\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}} \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}_n}.$$

При этом $\mathrm{Re}(A_p)$ может быть как равной, так и не равной нулю.

2. Если $\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) = 0, \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \neq 0, \mathrm{Im}(A_p) \neq 0$, то

$$G(\boldsymbol{\eta}_n; \psi_0) = \frac{2}{\omega^2} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\cos k\psi_0}{k} \left[\frac{d\,\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}_0 - \frac{d\mathbf{X}_0}{d\mathbf{x}} \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) - \frac{1}{\omega} \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \frac{d\omega}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}_0 \right] - \right.$$
$$\left. - \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\mathrm{Im}(A_k) - \frac{d\,\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}} \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}_n}.$$

При этом $\mathrm{Re}(A_p)$, как и в пункте 1, может быть произвольной.

3. Если $\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) \neq 0, \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) = 0, \mathrm{Re}(A_p) = 0$, то

$$G(\boldsymbol{\eta}_n;\psi_0) = \frac{2}{\omega^2}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\sin k\psi_0}{k}\left[\frac{d\,\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}}\mathbf{X}_0 - \frac{d\mathbf{X}_0}{d\mathbf{x}}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) - \frac{1}{\omega}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\frac{d\omega}{d\mathbf{x}}\mathbf{X}_0\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{d\,\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}_n}.$$

При этом $\mathrm{Im}(A_p)$ может равняться либо не равняться нулю.

4. Если $\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) \neq 0, \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) = 0, \mathrm{Re}(A_p) \neq 0$, то

$$G(\boldsymbol{\eta}_n;\psi_0) = \frac{2}{\omega^2}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\sin k\psi_0}{k}\left[\frac{d\,\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}}\mathbf{X}_0 - \frac{d\mathbf{X}_0}{d\mathbf{x}}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) - \frac{1}{\omega}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\frac{d\omega}{d\mathbf{x}}\mathbf{X}_0\right] - \right.$$
$$\left. - \mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\mathrm{Re}(A_k) - \frac{d\,\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)}{d\mathbf{x}}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}_n}.$$

Эта формула справедлива и при $\mathrm{Im}(A_p) = 0$, и при $\mathrm{Im}(A_p) \neq 0$.

Представление $G(\boldsymbol{\eta}_n;\psi_0)$ в вещественной форме для случая, когда $\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k) \neq 0, \mathrm{Im}(\mathbf{X}_k) \neq 0$, приводится в [5].

1 Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М. : Наука, 1974.

2 Гребенников, Е.А. Введение в резонансную аналитическую динамику / Е.А. Гребенников, Ю.А. Митропольский, Ю.А. Рябов. – М. : Янус-К, 1999.

3 Афонин, В.Г. О приближенном решении систем дифференциальных уравнений в стандартной форме специального вида / В.Г. Афонин, И.В. Тузик // Вестник БГТУ. – № 5(29), 2004. – сер. Физика, математика, информатика. – Брест, 2004. С. 2 – 4.

4 Тузик, И.В. Об одном способе получения «усредненных» дифференциальных уравнений для систем с быстровращающейся фазой / И.В. Тузик // Сб. матер. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры», Брест, 5 – 8 октября 2005 г. – В 2 ч. Ч.1. – Мн : БГПУ, 2005. – С. 198 – 201.

5 Тузик, И.В. О численном интегрировании одного класса систем с быстровращающейся фазой / И.В. Тузик // Труды 4-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE-2006). – Т. 2. – Мн. – С. 138 – 143.