Л. Гадомский, А.В. Чичурин
Седльце, Академия Подляска; Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHEMATICA ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОСМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Стремительное развитие информационных технологий подготовило основу для устранения естественного разрыва между фундаментальными знаниями и их применением на практике. Этому в немалой степени способствовал прогресс в наращивании ресурсов и увеличении быстродействия компьютеров, который привел к существенным изменениям в методах
проведения исследований в области теоретической и прикладной математики. Такой основой стали современные системы компьютерной математики.

Приведем пример эффективного использования системы компьютерной алгебры *Mathematica* в задачах, возникающих при исследовании новых моделей космической динамики. Эти модели были предложены московским профессором Е.А. Гребениковым [1,2] и парижским профессором Б. Эльмабсутом [3] на основе применения компьютерных систем *Mathematica* и Maple к уравнениям гамильтоновой космической динамики. По аналогии с классической проблемой гамильтоновой космической динамики, названной К. Якоби и А. Пуанкаре [4], "ограниченная задача трех тел", такие модели получили название "ограниченных задач многих ($n>3$) тел" [5]. В таких моделях гравитационное поле создается телами, образующими правильные многоугольники, вращающимися вокруг центрального тела, и в таком гравитационном поле исследуется движение пассивно гравитирующей массы. Описывающие такие модели, системы дифференциальных уравнений являются существенно нелинейными и поэтому их интегрирование "в квадратурах" абсолютно бесперспективно. В таких случаях А.Пуанкаре рекомендовал [6] исследовать проблему существования стационарных решений (точек равновесия). Эта проблема, как показали современные авторы [5, 7] сводится к решению весьма сложных систем *нелинейных алгебраических уравнений*, которые раньше не были известны в математической литературе. Найти точное решение этих алгебраических систем в аналитической форме невозможно из-за их существенной нелинейности. Используя же современные Системы Компьютерной Алгебры (авторы используют систему *Mathematica* [8]) можно найти координаты точек равновесия с произвольной точностью. Кроме того, система *Mathematica* позволяет изучать визуально динамические процессы, то есть позволяет осуществлять процессы визуализации и анимации [8, 9]. При этом под анимацией мы понимаем программную реализацию движения космических тел в реальном масштабе времени, позволяющую непосредственно видеть перемещение этих тел на мониторе компьютера.

Рассмотрим ограниченную задачу $(n+1)$-тел. Такой задачей [5] называется задача, когда для одного из тел не выполняется третий закон динамики Ньютона ("действие равно противодействию"). Это означает, что одна из масс (обозначим ее μ) бесконечно мала и не оказывает никакого гравитационного воздействия на массы $m_1, m_2, ..., m_n$, которые притягивают ее. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \frac{x_k - x_i}{\Delta_{ki}^3}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \frac{y_k - y_i}{\Delta_{ki}^3},$$

$$\frac{d^2z_i}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ki}^3} \quad (i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где $\Delta_{ki} \equiv \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}$, (x_i, y_i, z_i) – координаты гравитирующих тел, f – постоянная гравитации, знак $'$ у знака суммы означает, что $k \neq i$. Система (1) определяет движение в общей ньютоновой задаче n тел.

Предположим, что нам известно частное решение системы (1)

$$x_k(t) = g_k(t), \quad y_k(t) = \varphi_k(t), \quad z_k(t) = \psi_k(t), \quad (k = \overline{1,n}). \tag{2}$$

В качестве таких известных частных решений можно взять гомографические и гомотетические решения Лагранжа-Винтнера [10] или решения, найденные Е.А. Гребениковым [1, 2] и Б. Эльмабсутом [3] (эти решения геометрически изображаются правильными плоскими многоугольниками, вращающимися или около центра масс динамической системы, или около одной из притягивающих масс). Тогда движение бесконечно малой массы μ с координатами (x_0, y_0, z_0) в поле тяготения, создаваемом телами с массами $m_1, m_2, ..., m_n$ и движущимися согласно решения (2), описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{g_k(t) - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \frac{\varphi_k(t) - y_0}{\Delta_{k0}^3},$$

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\psi_k(t) - z_0}{\Delta_{k0}^3} \quad . \tag{3}$$

Если рассматривать плоский вариант этой модели, то есть считать, что движение тел происходит в плоскости Oxy ($z_0 = z_1 = z_2 = ... = z_n \equiv 0$), и тогда вместо системы (3) имеем систему четвертого порядка

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{g_k(t) - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = f\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\varphi_k(t) - y_0}{\Delta_{k0}^3}. \tag{4}$$

В связи с найденными решениями Гребеникова-Эльмабсута целесообразно ввести понятие ограниченной симметричной задачи ($n+2$)-тел.

Определение. Ограниченной симметричной задачей ($n+2$)-тел называется задача о движении тела P с бесконечно малой массой в гравитационном пространстве P_0xyz, создаваемом взаимным притяжением тел $P_0, P_1, ..., P_n$ с массами $m_0, m_1, m_2, ..., m_n$, находящихся в вершинах правильного n-угольника и вращающегося с однозначно определяемой угловой скоростью, зависящей от радиуса многоугольника и указанных масс.

Согласно этому определению, с геометрической точки зрения получаем, что гравитационный многоугольник вращается всегда в плоскости P_0xy вокруг оси P_0z с угловой скоростью ω_n. В работе [1] показано, что угловая скорость вращения многоугольника однозначно определяется по формуле

$$\omega_m^{\ 2} = \frac{1}{a_0^2}\left(m_0 + \frac{m}{4}\sum_{k=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi(k-1)}{n}\right)^{-1}\right), \tag{5}$$

где a_0 – радиус, описанной около многоугольника окружности; m- масса каждого из тел $P_1, P_2, ..., P_n$, находящихся в его вершинах; m_0 – масса тела в центре многоугольника. Координаты гравитирующих тел при $a_0 = 1$ они равны [11]

$$x_k = \cos\left(\omega_n t + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right), \quad y_k = \sin\left(\omega_n t + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right), \quad z_k = 0 \ \ (k = \overline{1,n}). \tag{6}$$

Таким образом, задача состоит в исследовании движения пассивно гравитирующей массы $\mu = 0$ в поле тяготения, создаваемого каждой из двух моделей (в одной модели отсутствует масса m_0 в центре гравитирующего правильного многоугольника, во второй модели присутствует масса m_0 в центре правильного многоугольника).

Приведем *результаты вычислений для ограниченной задачи тринадцати тел.* Условие, устанавливающее зависимость между массами m, m_0 тел модели и угловой скоростью вращения ω для ньютоновой проблемы 13-ти тел с полной симметрией, при которой действительно существует точное решение проблемы 13-ти тел имеет вид

$$\omega^2 = \left(\frac{5}{4} + \sqrt{6} + \sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)m + m_0 \qquad (7)$$

и геометрически изображается гомографическим решением Банка-Эльмабсута (рисунок 1)

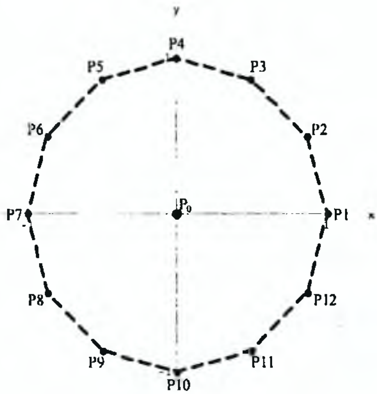
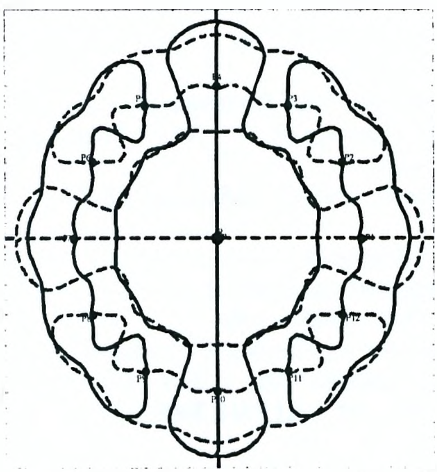


Рисунок 1 – Модель тринадцати тел с полной симметрией.



Приведем график положений равновесия ограниченной задачи четырнадцати тел с полной симметрией, используя соотношения (4), соотношение (6), (7) и значения параметров $m_0 = 1, m = 0.1$ (рисунок 2)

В качестве примера анимации при исследовании задач космической динамики рассмотрим движение точки P с бесконечно малой массой ($m=0$) в симметричном гравитационном поле материальных точек P_0, P_1, … , P_n, которое описано выше.

Записав соответствующие уравнения движения тела бесконечно малой массы [2, 5, 7] при *n=12* и используя функцию *AnimatedZeroMassSol[m0_,m_,f_,a_,n_,tk_,pn_,x0_,y0_,vx0_,vy0_,opts_]* [12], которая позволит осуществить анимацию движения точки P с нулевой массой в плоскости P_0xy. Например, функция *AnimatedZeroMassSol [1,0.02,1,1,5,8, 4,0.6,0.0,0.7,0.9]* с конкретными значениями параметров позволит изобразить движение точки P в интервале времени (0;8).

1 Grebenicov E. Two New Dynamical Models in Celestial Mechanics // Rom. Astron. J., Vol. 8, № 1, 1998, P. 13-19.

2 Гребеников, Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел / Е.А. Гребеников // Матем. моделирование, Т. 10, № 8, 1998, С. 74-80.

3 Elmabsout B. Sur l'existence de certaines configurations d'equillibre relatif dans le probleme des *n* corps // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 4, №1, 1998, P. 131-151.

4 Себехей, В. Теория орбит / В.Себехей. – М.: Наука, 1982. – 656 с.

5 Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. кубяк. – М.: РУДН, 2002. – 209 с.

6 Пуанкаре А. Избранные труды. – М.: Наука, Т.1, 1971. – 776 с., Т. 2, 1972. – 356 с., Т. 3, 1974. – 773 с.

7 Ихсанов, Е.В. Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики / Е.В. Ихсанов. – М.: РУДН, 2004. – 132 с.

8 Wolfram S. The *Mathematica* Book, 4th ed. – Wolfram Media/ Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.

9 Прокопеня, А.Н. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – 256 с.

10 Уинтнер, А. Аналитические основы небесной механики / А. Уинтнер. – М. : Наука, 1967. – 512 с.

11 Козак-Сковородкина, Д. Применение компьютерной системы *Mathematica* в качественных исследованиях ньютоновой проблемы многих тел / Д. Козак-Сковородкина. – М. : РУДН, 2005. – 146с.

12 Гребеников, Е.А. Анимация графической информации в ограниченных ньютоновых задачах многих тел / Е.А. Гребеников, Л. Гадомский, Н.И. Земцова, М. Якубяк. – М. : ВЦ РАН, 2006, – 44 с.