Н. В. Еличева, А. В. Чичурин
Пинск, ПФ БГЭУ, Брест, БрГУ им. А. С. Пушкина

ПРИЛОЖЕНИЕ СКА *MATHEMATICA* К ИССЛЕДОВАНИЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

При решении задачи об отыскании необходимых и достаточных условий отсутствия подвижных критических особых точек у решений системы

$$v=-\frac{a_1(z)u'-a_3(z)u^2-a_5(z)u-a_7(z)}{a_0(z)u'-a_2(z)u^2-a_4(z)u-a_6(z)},\qquad u=-\frac{b_1(z)v'-b_3(z)v^2-b_5(z)v-b_7(z)}{b_0(z)v'-b_2(z)v^2-b_4(z)v-b_6(z)} \tag{1}$$

($v(z)$, $u(z)$ – неизвестные функции) Н.А. Лукашевич высказал гипотезу [1,с.44] о том, что используя дробно-линейную замену искомой функции «при надлежащем выборе коэффициентов $A_j(z),C_j(z)$ $(j=\overline{0,3})$, $B_0(z),B_1(z)$, $D_i(z)$ $(i=\overline{0,5})$ в уравнении

$$(A_0u^3+A_1u^2+A_2u+A_3)u''=(2A_0u^2+B_0u+B_1)u'^2+(C_0u^3+C_1u^2+C_2u+C_3)u'+ \tag{2}$$

$$+D_0u^5+D_1u^4+D_2u^3+D_3u^2+D_4u+D_5$$

можно получить любое из списка пятидесяти уравнений Пенлеве [2], за исключением двух последних (шестое уравнение Пенлеве)».

Используя СКА Mathematica [3], опишем алгоритм проверки этой гипотезы на примере первого канонического уравнения Пенлеве. Для этого, как и в общем случае, предварительно введем дробно-линейную замену

$$u=\frac{\alpha(z)w+\beta(z)}{\gamma(z)w+\delta(z)}. \tag{3}$$

Подставим (3) в уравнение (2). Получившееся уравнение должно совпасть с первым каноническим уравнением Пенлеве

$$w''=6w^2+z. \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при w'' находим, что $\gamma(z)=0$. Поэтому далее будем рассматривать вместо замены (3) линейную замену

$$u=\alpha(z)w+\beta(z). \tag{5}$$

Подставим (5) в уравнение (2) и обозначим получившееся уравнение (А) (явный вид этого уравнения не приводим из-за громоздкости). Приравнивая коэффициенты при w'' у уравнений (А) и (4), получим алгебраическое уравнение третьей степени относительно w. Приравнивая коэффициенты этого уравнения нулю, найдем условия, которым должны удовлетворять коэффициенты a_i $(i=\overline{0,3})$

$$a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=\alpha^{-1}. \tag{6}$$

Приравнивая коэффициенты при w'^2 у уравнений (А) и (4), получим алгебраическое уравнение второй степени относительно w. Приравнивая коэффициенты этого уравнения нулю, найдем условия, которым должны удовлетворять коэффициенты b_0, b_1

$$b_0=0,\ b_1=0. \tag{7}$$

Аналогичным образом (из сравнения коэффициентов при w'), находим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты c_i $(i=\overline{0,3})$

$$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=0,\ c_3=\frac{2\alpha'}{\alpha^2}. \tag{8}$$

Наконец приравнивая коэффициенты у выражений, не содержащих w'' и w', получим алгебраическое уравнение пятой степени относительно w. Приравнивая коэффициенты этого уравнения нулю, найдем условия, которым должны удовлетворять коэффициенты d_i $(i=\overline{0,5})$

$$d_0=0,\ d_1=0,\ d_2=0,\ d_3=\frac{6}{\alpha^2},\quad d_4=\frac{\alpha\alpha''-2\alpha'^2-12\alpha\beta}{\alpha^3}, \tag{9}$$

$$d_5=\frac{\alpha^2\beta''-\alpha\beta\alpha''-2\alpha\alpha'\beta'+2\alpha'^2\beta+6\alpha\beta^2+z\alpha^3}{\alpha^3}.$$

Таким образом, действительно, уравнение (2) с помощью замены (5) и коэффициентами (6)-(9) преобразуется в певое каноническое уравнение Пенлеве.

1 Лукашевич Н.А. Специальная система двух уравнений Р-свойства // Использование системы Mathematica в научных исследованиях и образовании: Труды международного семинара, Седльце, РП, 28-30 янв. 1999г./. – Брест: БрГУ. – 1999. – С.40-44. 2 Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГНКТП, 1939. – 719 с. 3 Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: БГУ, 1999. –265 с.