Ю. В. Кожокарь, А. А. Крощенко
Брест, БрГУ им. А. С. Пушкина

ОБЗОР НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются две модели нелинейных задач, так называемая комбинированная система (1) и функция Вуда (2).

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j = n+1, \quad i = \overline{1, n-3} \\ \prod_{k=1}^{n} x_k = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1, \\ arctgx_1 + arctgx_n = 2arctg1. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2 + \\ &+ 90(x_3^2 + x_4)^2 + (1-x_3)^2 + \\ &+ 10{,}1((1-x_1)^2 + (1-x_4)^2) + \\ &+ 19{,}8(1-x_2)(1-x_4) \end{aligned} \qquad (2)$$

В группу рассмотренных квазиньютоновских процессов решения нелинейных уравнений входят нелокальные сверхлинейные одношаговые и многошаговые итерационные методы [1]. Рассмотрим некоторые из этих методов поподробнее.

Одношаговый метод неполного прогноза: нерегуляризованный случай

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n:

$$f'(x)\Delta x_n = -f(x_n), \ \text{n=0,1,2,...} \qquad (3)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n: $x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n$, n=0,1,2,...,

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \qquad (4)$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$. иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|}, \ n=0,1,2,\ldots, \ \gamma_0 = \beta_0^2$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Частично регуляризованный случай. Формула (3) на 1-м шаге заменяется на формулу

$$\left(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E + f'(x)\right)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0,1,2,\ldots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1 \qquad (5)$$

Регуляризованный случай. Формула (3) на 1 шаге заменяется на формулу

$$\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 E + \overline{f}'(x_n)f'(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f}'(x_n)f(x_n), \qquad (6)$$

(здесь $\overline{f}'(x_n)$ – оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$).

Многошаговый метод неполного прогноза. Используются формулы (3 – 6), изменяются только формулы для просчета β_{n+1} на 4-м шаге:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1,\ \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\beta_n\left(\|f(x_n)\|+\|f(x_{n+1})\|\right)}\right);\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\left(\|f(x_{n+1})\|+\|f(x_{n+2})\|\right)}{2\|f(x_{n+1})\|\|f(x_{n+2})\|};\gamma_0 = \frac{\beta_0^2\left(\|f(x_0)\|+\|f(x_1)\|\right)}{\|f(x_1)\|}$$

Другие эффективные методы можно найти в книге [1].

Как показывает практика, наиболее эффективными являются регуляризованные процессы, так как данные процессы обладают высокой скоростью и широкой областью сходимости, а так же применимы к любым нелинейным комбинированным системам. Важной особенностью является и то, что чем шире область начальных приближений, тем хуже сходятся процессы, число итераций сильно увеличивается.

Размерность нелинейной системы оказывает большое влияние на эффективность в особенности нерегуляризованных процессов. Если нерегуляризованный одношаговый метод является достаточно эффективным применительно к (2), то применительно к (1) мы получаем, что число итераций неоправданно увеличивается; достаточно часто выполнение нерегуляризованных одношаговых и многошаговых методов на ЭВМ приводит к ошибке в реализации метода Гаусса (арифметическое переполнение или деление на ноль).

Одношаговые методы являются менее громоздкими, чем многошаговые, но это вовсе не означает, что одношаговые методы лучше многошаговых. Одношаговые методы используют для расчета новой шаговой длины лишь один, найденный на предыдущем шаге вектор x_n, многошаговые же методы – и другие. В силу этого многошаговые методы имеют часто более высокую скорость сходимости, чем одношаговые.

Таким образом, можно сформулировать ряд важных выводов:

1. Нерегуляризованными методами довольно трудно решаются комбинированные системы;

2. Регуляризованные процессы быстрее и лучше сходятся по сравнению с нерегуляризованными. Однако при одинаковых условиях (в случае задания разумных начальных приближений для нерегуляризованного процесса) регуляризованный процесс более ресурсоемок;

3. Чем произвольнее взята область начальных приближений, тем хуже сходится любой процесс (и регуляризованный, и нерегуляризованный);

4. Для нерегуляризованных методов зачастую слишком большая точность, заданная пользователем, приводит к «разболтке» процесса и невозможности достижения заданной точности.

1 Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. – Брест: Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.