МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

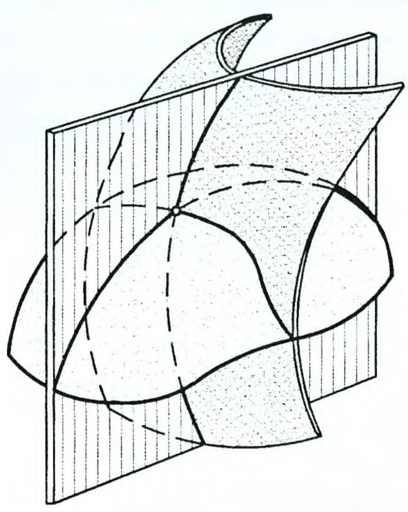
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра начертательной геометрии и инженерной графики

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

Методическое пособие по архитектурному черчению и начертательной геометрии

для студентов специальностей:
69 01 01 – архитектура,
70 04 03 – водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов,
74 05 01 – мелиорация и водное хозяйство



БРЕСТ 2006

УДК 515 (076.8)

Методическое пособие разработано в соответствии с учебной и рабочей программами курсов «Архитектурное черчение» и «Начертательная геометрия и инженерная графика» и предназначено для самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям, экзаменам и при выполнении графических работ.

Составители: Яромич А. И. – доцент
Шумская Л. П. – доцент
Яромич Н. Н. – ассистент

Под редакцией Яромич А. И.

Рецензент: В. Е. Ковальчук - доцент кафедры архитектурного проектирования и рисунка, член Союза художников Республики Беларусь

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

В результате графического решения задач на пересекаемость двух геометрических образов определяется общий для них элемент.

Пересекающиеся геометрические образы	Общий элемент
• прямая – плоскость	одна точка
• прямая – поверхность	две и более точек
• плоскость – плоскость	прямая
• плоскость – поверхность	плоская ломаная или кривая линия
• поверхность - поверхность	пространственная ломаная или кривая линия

Применяемый алгоритм будет общим независимо от характера пересекающихся геометрических образов.

1. ОДИН ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБРАЗ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Если один из двух геометрических образов занимает частное положение, то одна проекция определяемого общего элемента будет известна, так как совпадет с вырожденной проекцией геометрического образа, занимающего частное положение. По ней строится вторая его проекция.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Прямая l (l_1, l_2) пересекается с горизонтально проецирующей плоскостью α, заданной на рис. 1 *а* следами α_1 и α_2, а на рис. 1 *б* параллельными прямыми $m(m_1, m_2)$ *и* $n(n_1, n_2)$. Горизонтальная проекция K_1 точки пересечения K будет известна, так как в первом случае будет лежать на главном следе плоскости α_1, а во втором случае лежать на вырожденной в прямую линию горизонтальной проекции плоскости. По ней строим фронтальную проекцию K_2, проведя линию проекционной связи до пересечения с l_2.

Пример 2. Прямая l (l_1, l_2) пересекается с плоскостью общего положения (рис.2), заданной отсеком ABC $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$. Так как прямая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций и проецируется на нее в виде точки, то и горизонтальная проекция K_1 точки пересечения будет совпадать с l_1. Достраиваем фронтальную проекцию, для чего в плоскости проводим линию $A1$ (A_11_1, A_21_2).

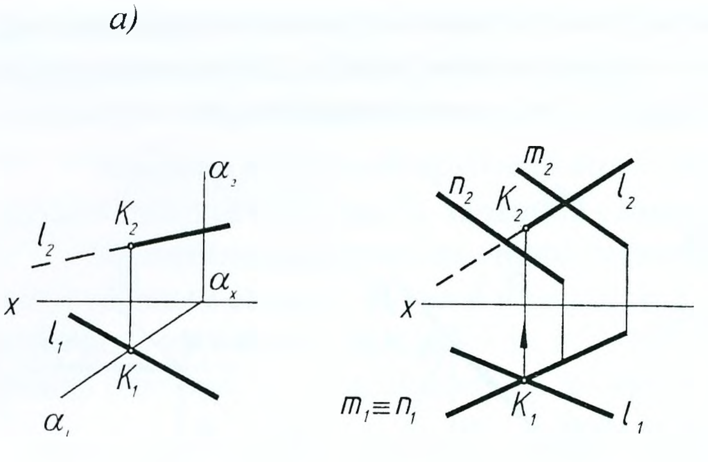


Рис. 1

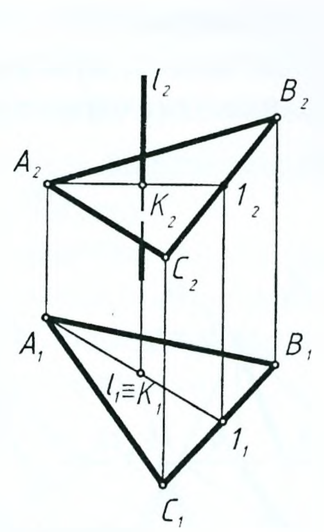


Рис.2

Пример 3. Прямая трехгранная призма пересекается плоскостью β общего положения, заданной следами (рис.3*а*). Так как ребра, а следовательно, и грани призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция линии пересечения $(1_1 2_1 3_1)$ известна и совпадает с вырожденной горизонтальной проекцией призмы $(A_1B_1C_1)$. Чтобы построить фронтальную проекцию точек *1, 2* и *3* проводим в плоскости β горизонтали h, h', h''.

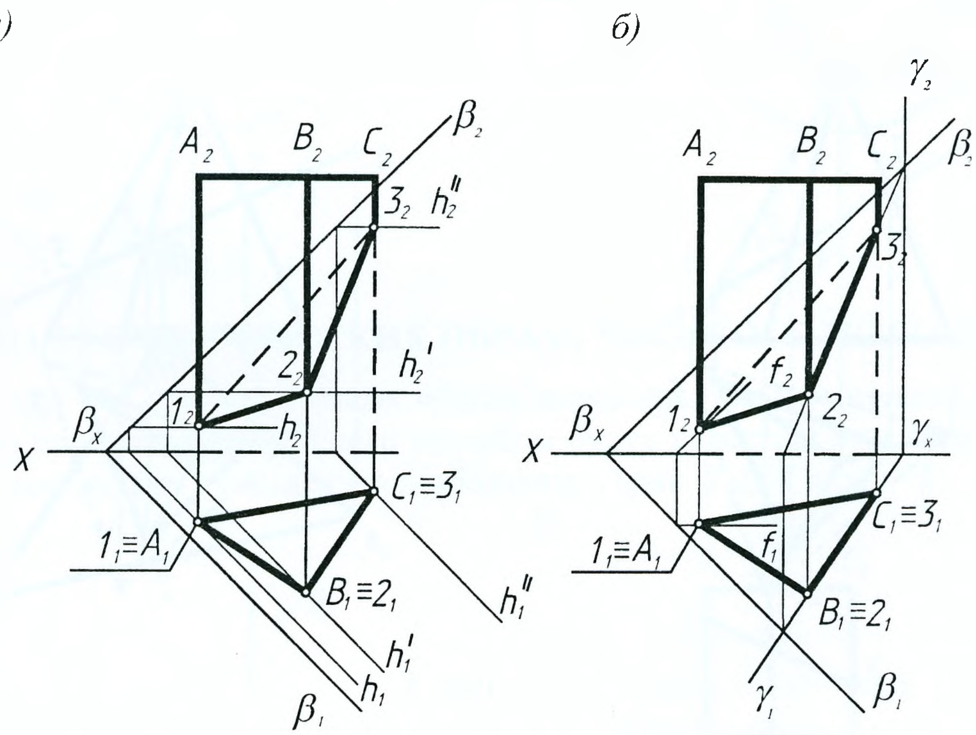


Рис. 3

Задачу можно решить вторым способом (рис. 3 *б*), *на основе алгоритма пересечения двух плоскостей, заданных следами.*

Если две плоскости заданы следами, пересекающимися в пределах чертежа (рис. 4 *а, б, в, г*), то определить линию их пересечения достаточно просто, так как она проходит через точки пересечения одноименных следов.

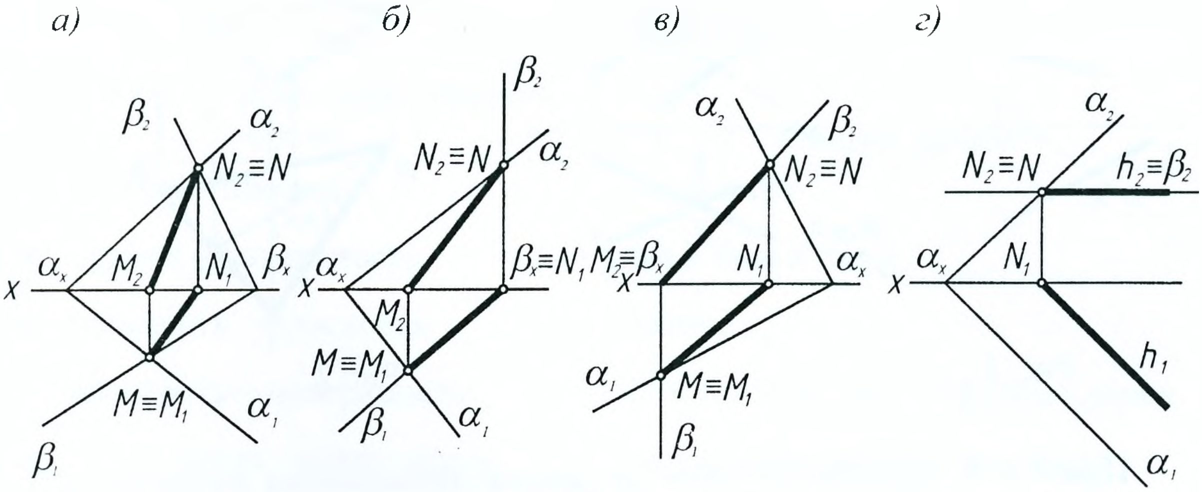


Рис. 4

Пример 4. Трехгранная пирамида пересечена фронтально проецирующей плоскостью. На рис. 5 *а* плоскость задана главным следом, а на рис. 5 *б* - отсеком. В данном примере известна фронтальная проекция линии пересечения.

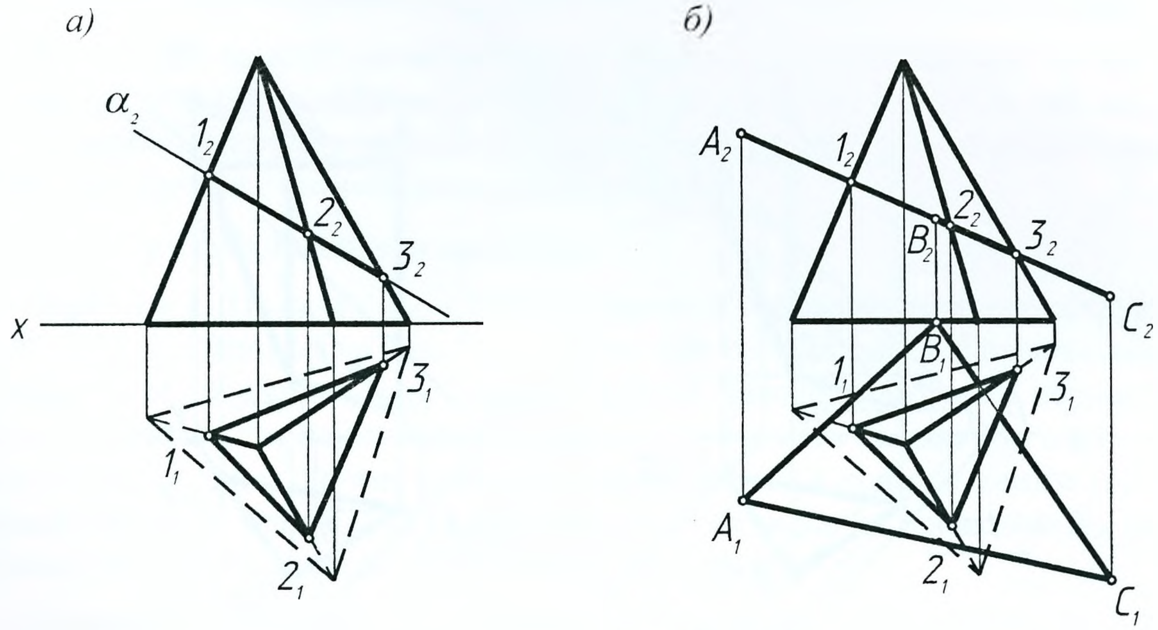


Рис. 5

Пример 5. Прямой круговой цилиндр пересекается плоскостью общего положения, заданной следами (рис 6).

Построения выполняются аналогично примеру 3. Так как боковая поверхность цилиндра перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций ($П_1$), то горизонтальная проекция линии пересечения известна и необходимо достроить ее фронтальную проекцию. На поверхности цилиндра выбирается ряд образующих (8, 12 обр.), определяются точки их пересечения с плоскостью и соединяют их последовательно плоской кривой линией.

Пример 6. Прямой круговой конус пересекается фронтально проецирующей плоскостью (рис 7), заданной главным следом (α_2).

Фронтальная проекция линии пересечения известна, так как она совпадает с главным следом секущей плоскости. Горизонтальную проекцию можно построить, проведя на поверхности конуса ряд образующих или параллелей. Можно одновременно использовать и образующие и параллели.

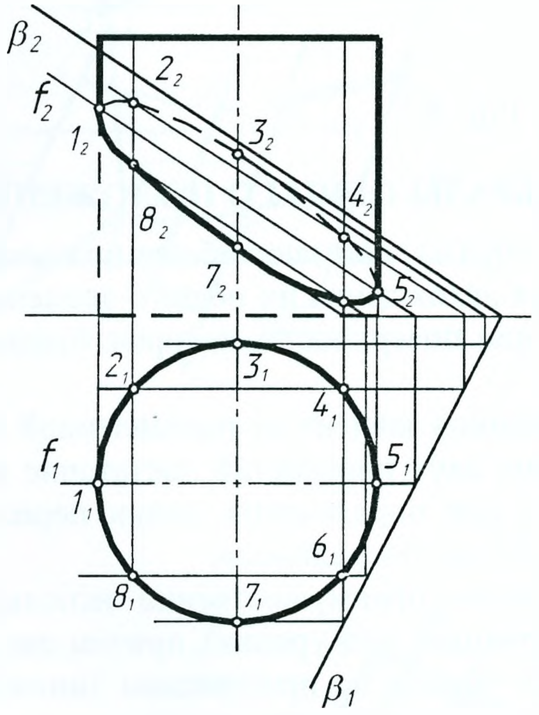


Рис. 6

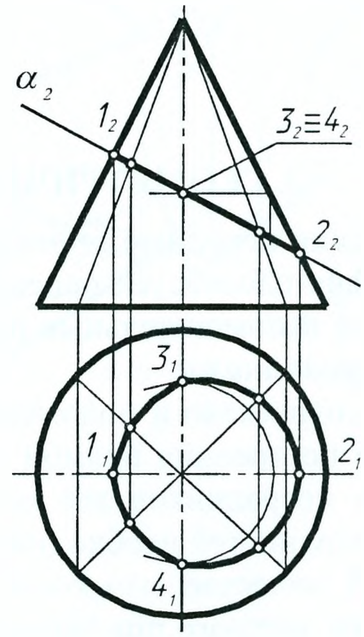


Рис. 7

2. ДВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗА ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Если оба геометрических образа занимают частное положение, то обе проекции определяемого общего элемента будут известны или легко строятся. Необходимо только их выделить и обозначить (рис. 8 *а, б, в, г*).

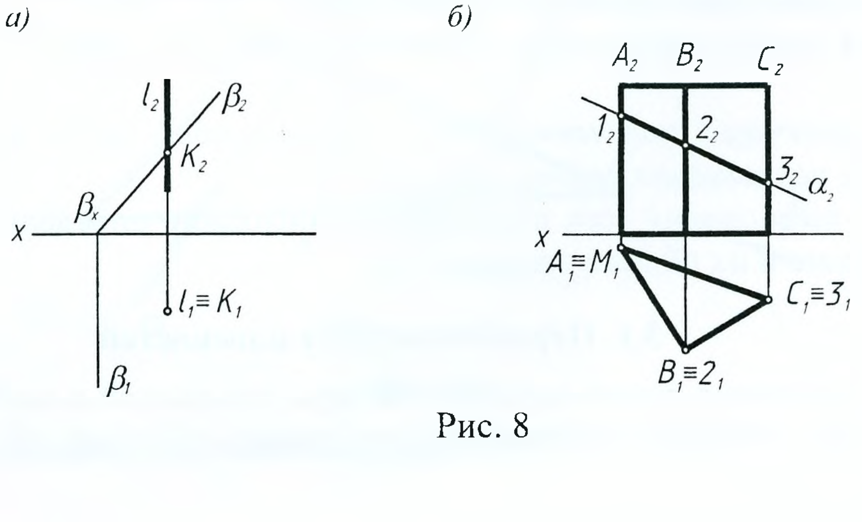


Рис. 8

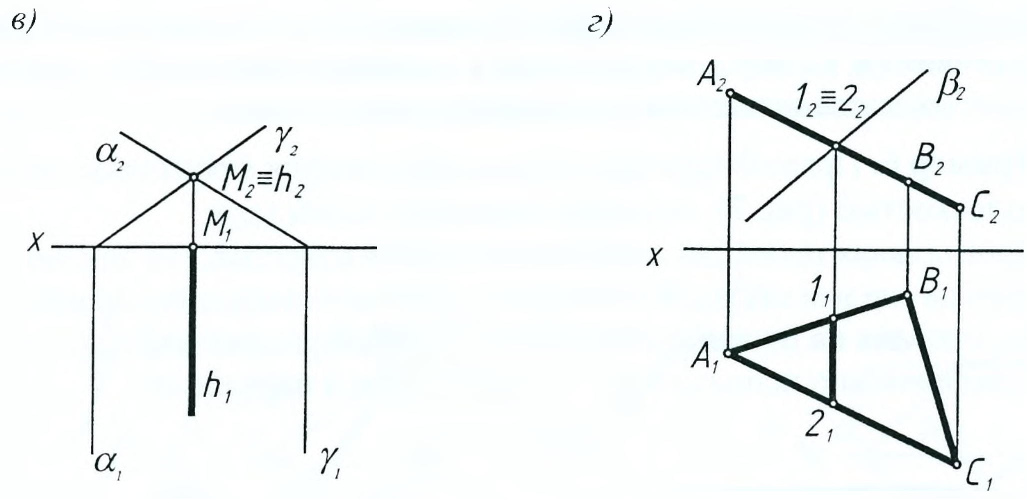


Рис. 8

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Если исходные геометрические образы занимают общее положение относительно плоскостей проекций, то для нахождения их общего элемента применяются вспомогательные плоскости или поверхности, которые будем называть ***посредниками***.

Количество и положение посредников зависит от поставленной задачи. Так, для построения прямой пересечения двух плоскостей достаточно взять в качестве посредников две плоскости, а для определения линии пересечения двух поверхностей необходимо уже несколько посредников.

В качестве *плоскостей-посредников* преимущественно используются плоскости частного положения (проецирующие или уровня), причем они должны пересекать заданные геометрические образы по простейшим линиям: прямым или окружностям. В то же время окружности должны проецироваться в окружности или прямые линии. При проецировании окружности в эллипс построения затрудняются.

Если одним из данных образов будет прямая, то посредник всегда совпадает с этой прямой.

Алгоритм решения для общего случая будет следующий:

а) данные образы пересекаются посредниками;

б) строятся линии пересечения посредника с каждым образом в отдельности;

в) точки пересечения полученных линий между собой будут принадлежать искомой линии пересечения данных образов.

После выполнения всех построений необходимо определить видимость заданных образов и их общего элемента.

3.1. Пересечение двух плоскостей

Для построения линии пересечения двух плоскостей в качестве посредников взяты две плоскости горизонтального уровня α и β (рис. 9). Определены прямые *4-5*, *7-3* и *AB*, *CD* их пересечения с заданными плоскостями. Точки *K* и *K'* пересечения этих прямых, определили искомую линию пересечения.

Решение значительно упростится, если посредники взять через какие-либо линии заданных плоскостей (рис. 10). Здесь через прямые *AC* и *BC* проведены горизонтально проецирующие плоскости, найдены точки *K* и *K'* линии пересечения.

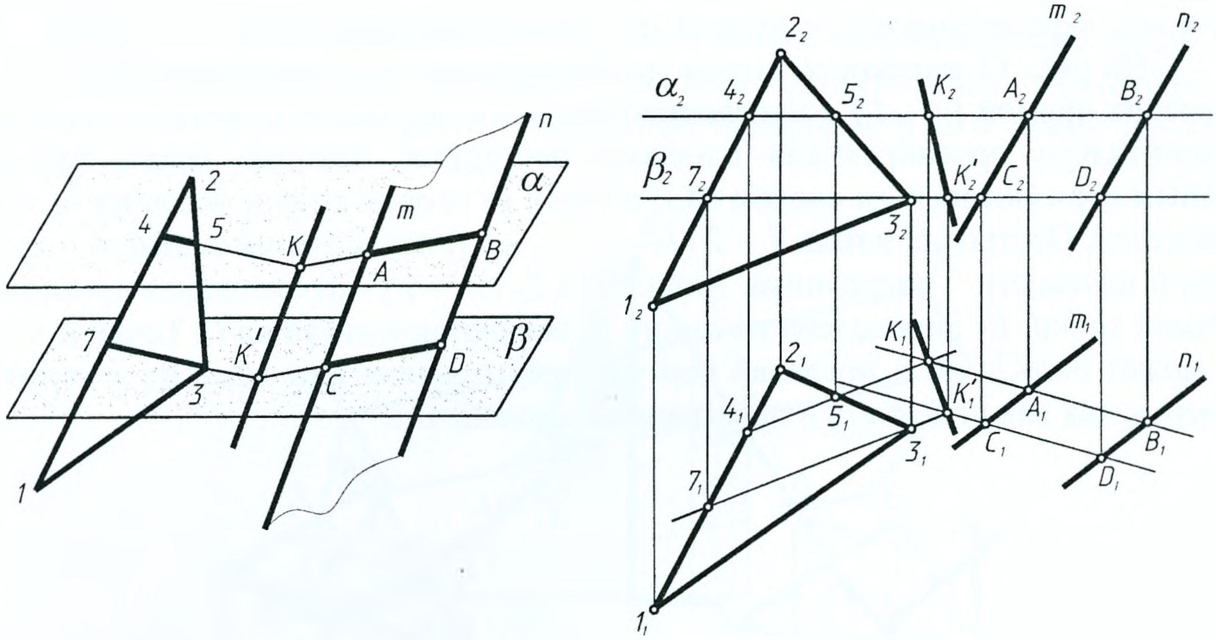


Рис. 9

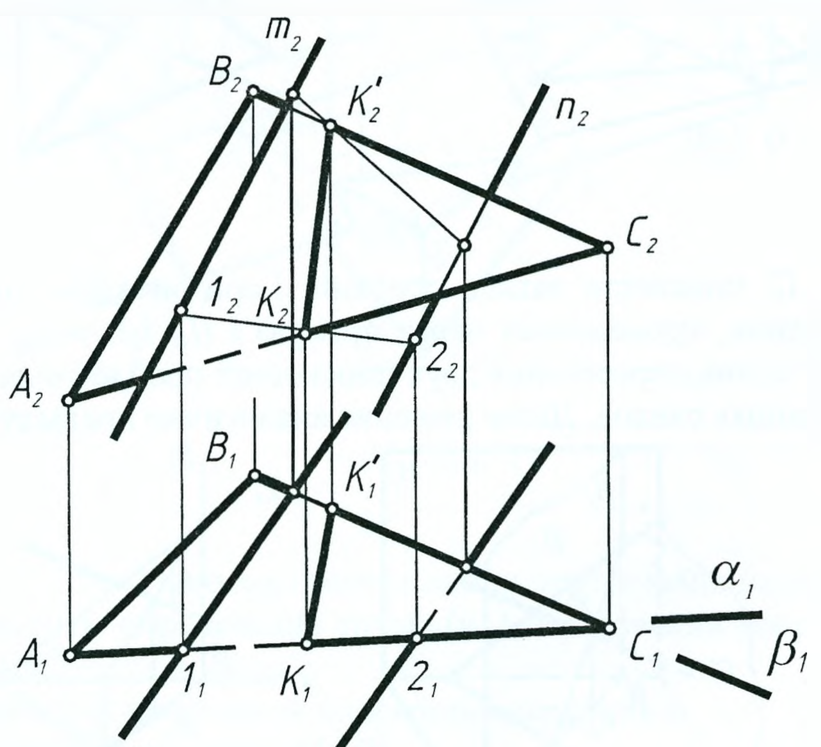


Рис. 10

Примечание: Построения см. в пункте 3.2.

3.2. Пересечение прямой с плоскостью

Так как плоскость-посредник всегда проводится через прямую, то алгоритм решения примет следующий вид:

а) через прямую проводится вспомогательная плоскость (посредник) частного положения;

б) определяется линия пересечения плоскости - посредника с данной плоскостью;

в) точка пересечения полученной линии с данной прямой и будет искомой.

На рис. 11 плоскость задана треугольником. Для построения точки пересечения прямой l (l_1, l_2) с плоскостью треугольника через прямую проведена горизонтально проецирующая плоскость-посредник, которая задана только главным горизонтальным следом (β_1), так как ее второй след в решении не используется. Построена линия $1 - 2$ ($1_1 - 2_1$; $1_2 - 2_2$) пересечения заданной плоскости и плоскости – посредника. Линия $1_2 - 2_2 \cap l_2 = K_2$ – фронтальная проекция искомой точки. K_1 определена по линии проекционной связи на l_1. Точка K (K_1, K_2) может быть и не в пределах контура треугольника или даже не в первой четверти, так как плоскость в пространстве бесконечна.

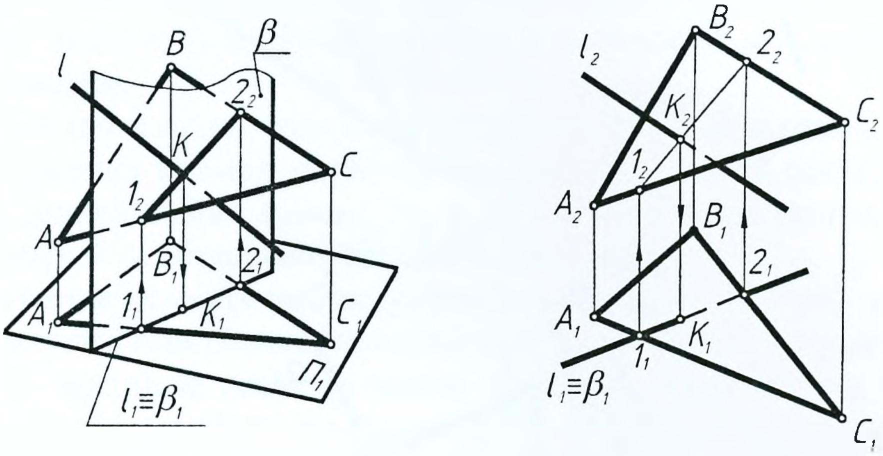


Рис. 11

На рис. 12 плоскость задана следами. Горизонтально проецирующая плоскость-посредник, проведенная через прямую l (l_1, l_2), тоже задана двумя следами, так как линия пересечения двух плоскостей пройдет через точки пересечения одноименных следов. Далее решение аналогично предыдущему.

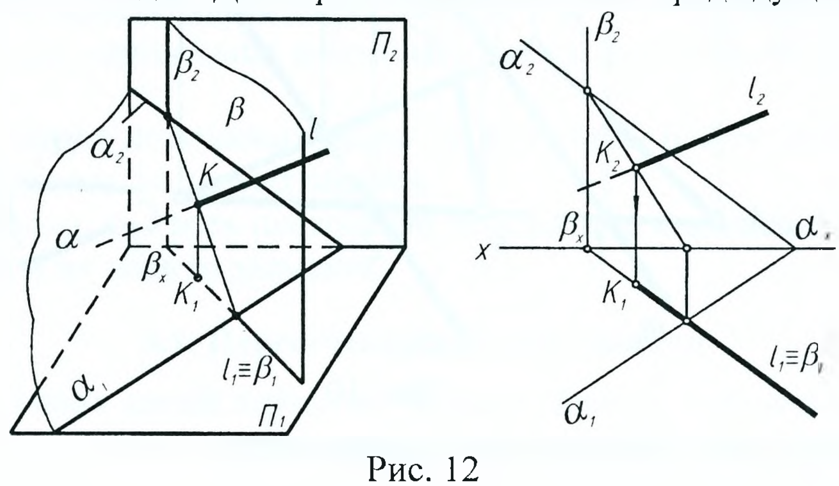


Рис. 12

3.3. Пересечение гранных поверхностей

Линия пересечения двух гранных поверхностей может быть определена по одной из двух рассмотренных выше задач: 1) на основе алгоритма пересечения двух плоскостей (граней); 2) на основе алгоритма пересечения прямой (ребра) с плоскостью (гранью). Преимущественно применяется вторая схема.

По второй схеме вначале определяются точки пересечения ребер первой поверхности с гранями второй, а затем – точки пересечения ребер второй поверхности с гранями первой. Полученные точки, принадлежащие одним граням, соответственно соединяются. Видимыми частями линии пересечения будут линии, принадлежащие одновременно видимым граням обеих поверхностей.

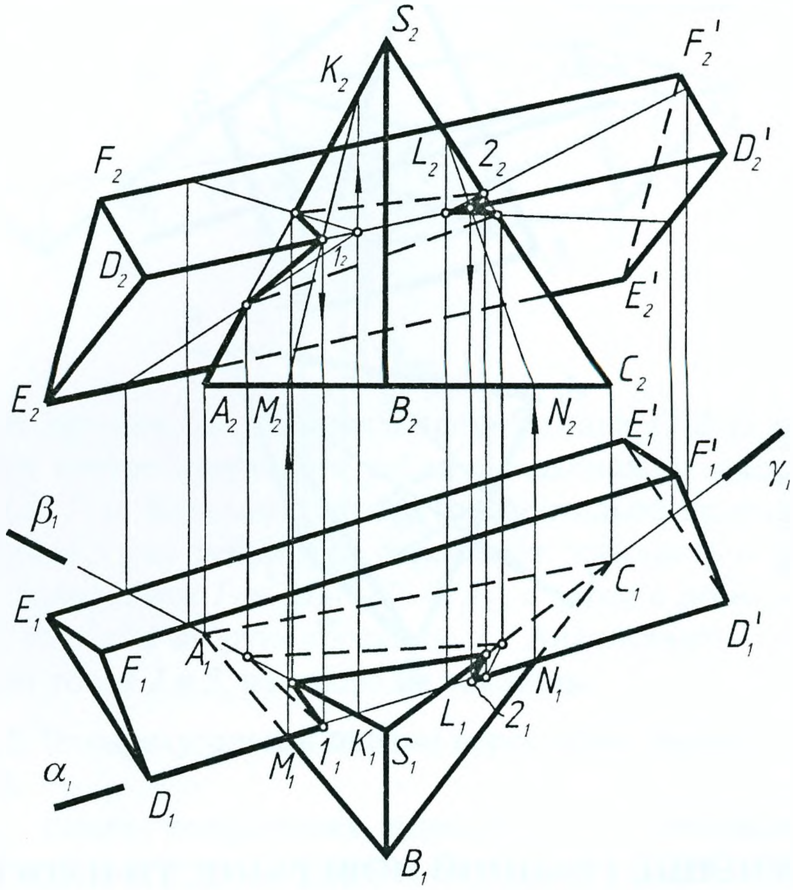


Рис. 13

На рис. 13 показано построение линии пересечения пирамиды и призмы. Приведем алгоритм определения точек *1* и *2* пересечения ребра DD' призмы с пирамидой $SABC$:

1. Через DD' проводится плоскость-посредник α.
2. $\alpha \cap SABC$ = сечение $KLMN$.
3. Точки 1 и 2 = $DD' \cap KLMN$.

Последовательно выполняя те же графические операции, можно найти точки пересечения ребер SA и SC пирамиды с призмой. Для этой цели были применены горизонтально проецирующие плоскости β и γ.

3.4. Пересечение прямой с гранной поверхностью

Для построения точек пересечения прямой с гранной поверхностью необходимо, как было сказано ранее, провести через прямую вспомогательную проецирующую плоскость (в данном примере – фронтально проецирующая плоскость α), которая пересечет многогранник по плоской ломаной линии. Полученная линия пересечет заданную прямую в искомых точках K и L (рис 14).

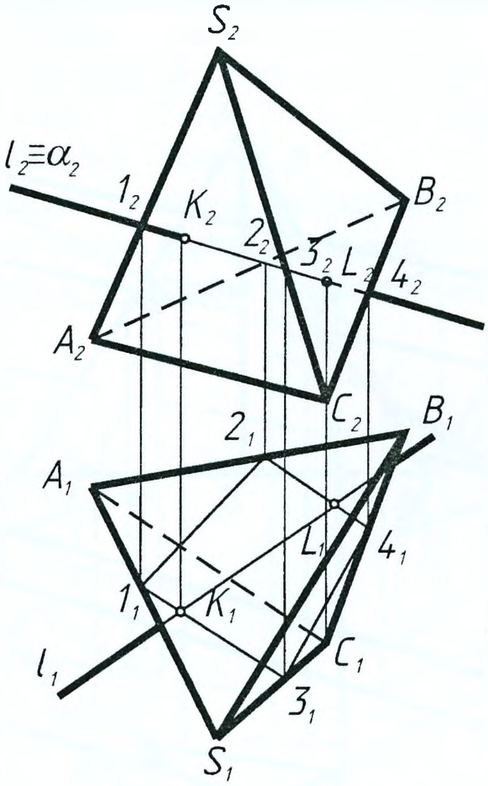


Рис. 14

4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

4.1. Пересечение гранной поверхности плоскостью частного положения

Пересечение гранной поверхности плоскостью частного положения было показано в примере 4 (см. рис. 5 *а, б*) и использовалось в рассматриваемых выше задачах (см. рис. 13 и 14).

4.2. Пересечение гранной поверхности плоскостью общего положения

Построение сечения многогранника плоскостью общего положения требует многократного решения задачи на пересечение прямой с плоскостью. Точки, в которых ребра многогранника пересекаются с заданной плоскостью, будут вершинами искомого сечения. Тот же результат можно получить, сведя задачу к построению прямых пересечения плоскости с гранями тела.

Рассмотрим несколько примеров по определению фигуры сечения.

Пример 1. Треугольная призма пересечена плоскостью α, заданной пересекающимися прямыми a и b (рис. 15).

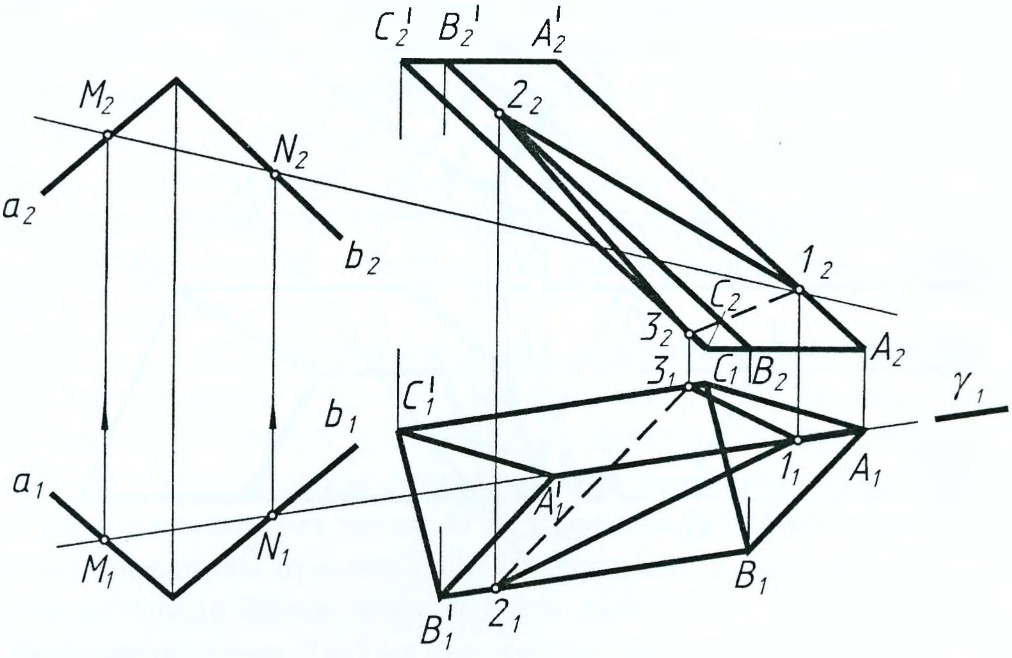


Рис. 15

Каждая из вершин построенного треугольника *(1-2-3)* определена как точка пересечения соответствующего ребра с заданной плоскостью α. Например, точка $1 = AA' \cap \alpha$. Вспомогательная горизонтально проецирующая плоскость γ, проведенная через ребро AA', пересекает плоскость α по прямой MN. Построив $M_2 N_2$, определяем $1_2 = M_2 N_2 \cap A_2 A_2'$, а затем с помощью линии проекционной связи находим вторую проекцию 1_1. Аналогичные построения, связанные с поисками точек *2* и *3*, на эпюре не показаны.

Пример 2. Четырехугольная призма пересечена плоскостью θ, заданной следами (рис. 16).

Вершины линии пересечения определены с помощью плоскостей-посредников фронтального уровня, проходящих через ребра призмы и пересекающих данную плоскость по фронталям.

Например, плоскость-посредник α, проходящая через ребро AA', пересекает плоскость θ по фронтали f (f_1, f_2). Фронтальная проекция фронтали $f_2 \cap A_2A_2' = 1_2$. По линии проекционной связи находим вторую проекцию 1_1. Аналогично определяются точки пересечения других ребер призмы. Так как грань $BB'CC'$ параллельна фронтальной плоскости проекций, то при данном решении одновременно определяются точки пересечения (*2* и *3*) ее обоих ребер, т.е. сразу же определяется линия пересечения грани с плоскостью θ.

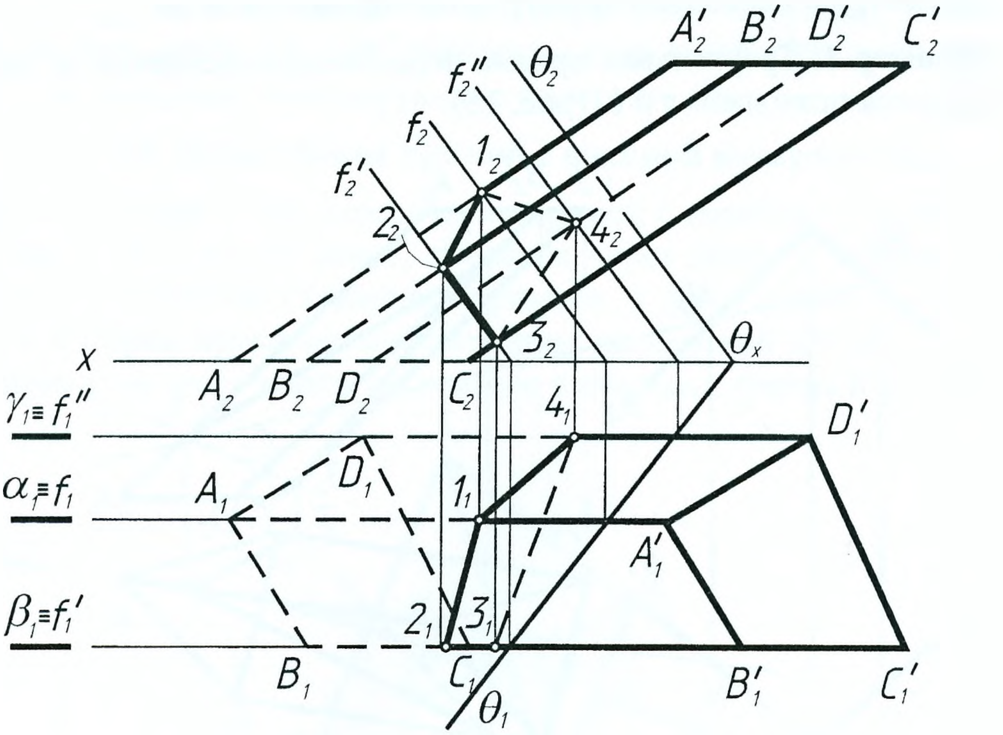


Рис. 16

Пример 3. Трехгранная пирамида пересечена плоскостью θ, заданной следами (рис. 17 *а*) и заданной параллельными прямыми k и l (рис. 17 *б*).

а) *б)*

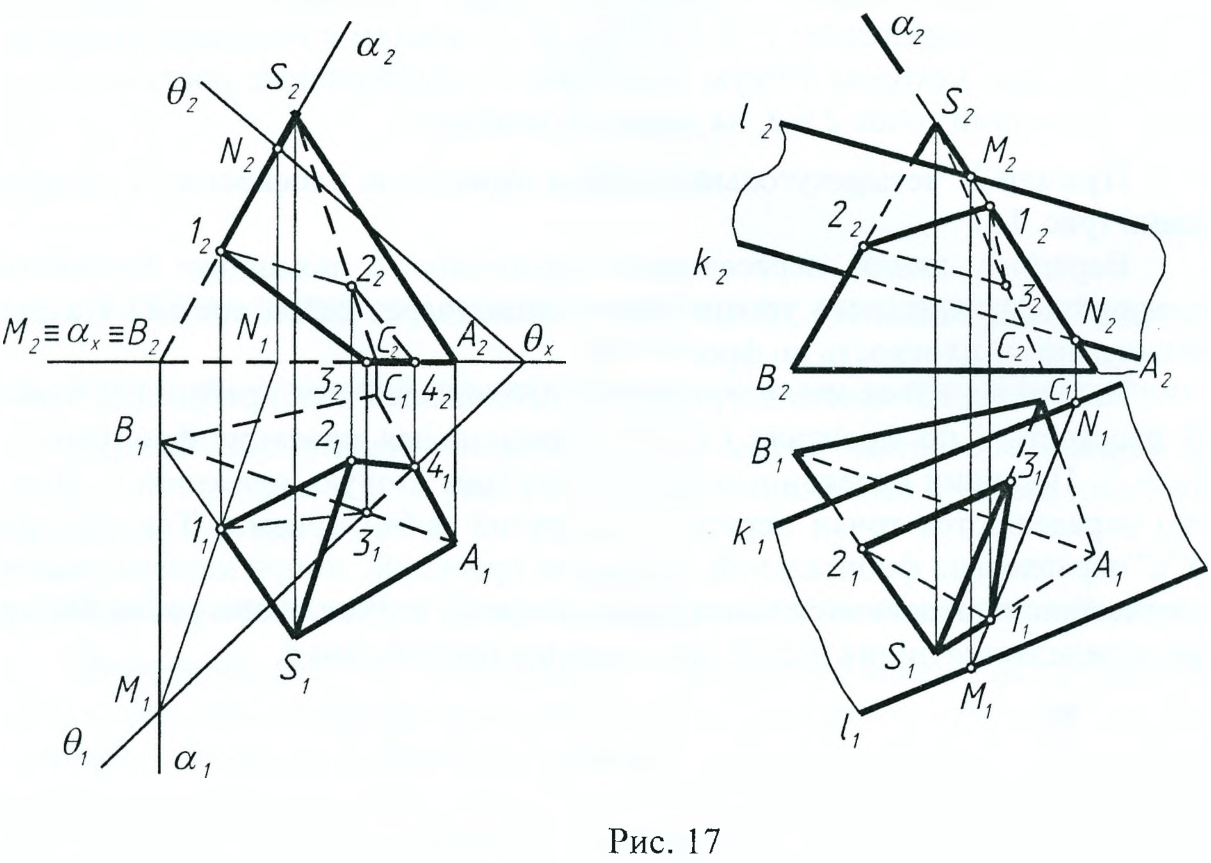


Рис. 17

Точки (вершины) линии пересечения определены с помощью фронтально проецирующих плоскостей, проходящих через ребра пирамиды.

Например, на рис. 17*а* через ребро *BS* проведена плоскость-посредник α, которая пересекает плоскость θ по линии *MN*. Горизонтальная проекция M_1N_1 пересекается с горизонтальной проекций B_1S_1 в искомой точке 1_1, фронтальную проекцию 1_2 которой определяем с помощью линии проекционной связи. Аналогично определяется точка пересечения ребра *CS* с плоскостью θ (на эпюре не показано). Ребро *AS* пересекается с плоскостью θ на своем продолжении, поэтому строить точку его пересечения нет необходимости. Нужно взять две точки 3_1 и 4_1 на пересечении горизонтального следа плоскости θ_1 и горизонтальной проекции $A_1B_1C_1$ основания пирамиды, так как пирамида стоит на горизонтальной плоскости проекций.

На рис. 17*б* плоскости-посредники задаются только своими главными (фронтальными) следами, так как горизонтальные следы не участвуют в решении. Например, через ребро *AS* проведена фронтально проецирующая плоскость α, заданная фронтальным следом α_2. Она пересекает заданную плоскость по линии, проходящей через точки *M N*, проекции которых принадлежат соответствующим проекциям прямых *k* и *l*. Построив M_1N_1, определяем $1_1 = M_1N_1 \cap A_1S_1$, а затем по линии проекционной связи находим 1_2. Аналогичные построения по определению точек *2* и *3* на чертеже не показаны.

5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

Линия пересечения кривой поверхности секущей плоскостью в общем случае – *плоская кривая линия*. Для ее построения необходимо, прежде всего, найти *опорные точки*. К ним относятся: *очерковые* точки, лежащие на линиях очертания проекций поверхности (они делят проекцию линии пересечения на видимые и невидимые части), *высшая* и *низшая*, *передняя* и *задняя* и др. Остальные точки линии пересечения называются *промежуточными*.

Способ построения линии пересечения кривой поверхности плоскостью основан на отыскании точек пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью, или любых других линий поверхности – параллелей, меридианов и т.п. с секущей плоскостью. Найденные точки пересечения соединяются плавной кривой линией.

Способы построения линии пересечения многогранных и кривых поверхностей плоскостью в принципе одинаковы, так как многогранная поверхность является прототипом кривой.

Из всего многообразия кривых поверхностей рассмотрим пресечение плоскостью следующих поверхностей: цилиндра (прямого и наклонного), конуса (прямого и наклонного), сферы, тора, поверхности вращения случайного вида.

5.1. Пересечение кривой поверхности плоскостью частного положения

Как уже было сказано ранее, одна из проекций искомой линии пересечения будет совпадать с одноименной вырожденной в прямую линию проекцией секущей плоскости или ее главным следом, и будет находиться в пределах поверхности. Точки второй проекции строятся с использованием линий поверхности (образующих, параллелей, меридианов и др.).

Кроме того, при пересечении таких поверхностей вращения, как цилиндр, конус, сфера, необходимо знать форму линии сечения, которая зависит от положения секущей плоскости.

При пересечении прямого кругового цилиндра плоскостью δ (рис. 18):

1) δ перпендикулярна оси - линия сечения окружность;
2) δ не перпендикулярна оси - линия сечения эллипс;
3) δ параллельна оси - две образующие (прямоугольник).

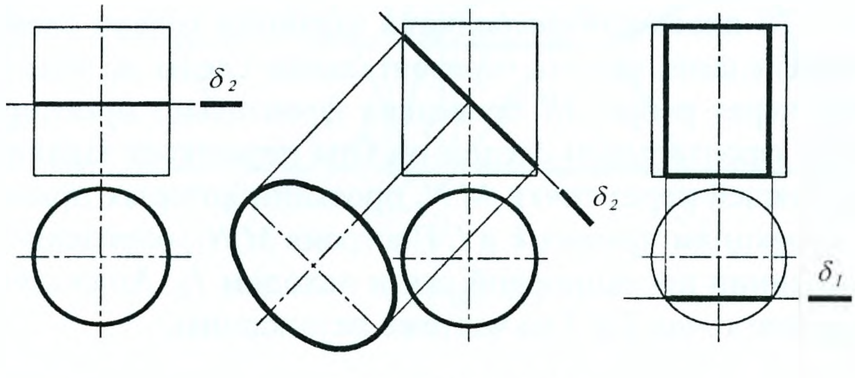


Рис. 18

При пересечении прямого кругового конуса плоскостью β (рис. 19):

1) β перпендикулярна оси - линия сечения окружность;
2) β не перпендикулярна оси и пересекает все образующие конуса - линия сечения эллипс;
3) β параллельна одной образующей - линия сечения парабола;
4) β проходит через вершину конуса - две образующие;
5) β параллельна двум образующим - линия сечения гипербола.

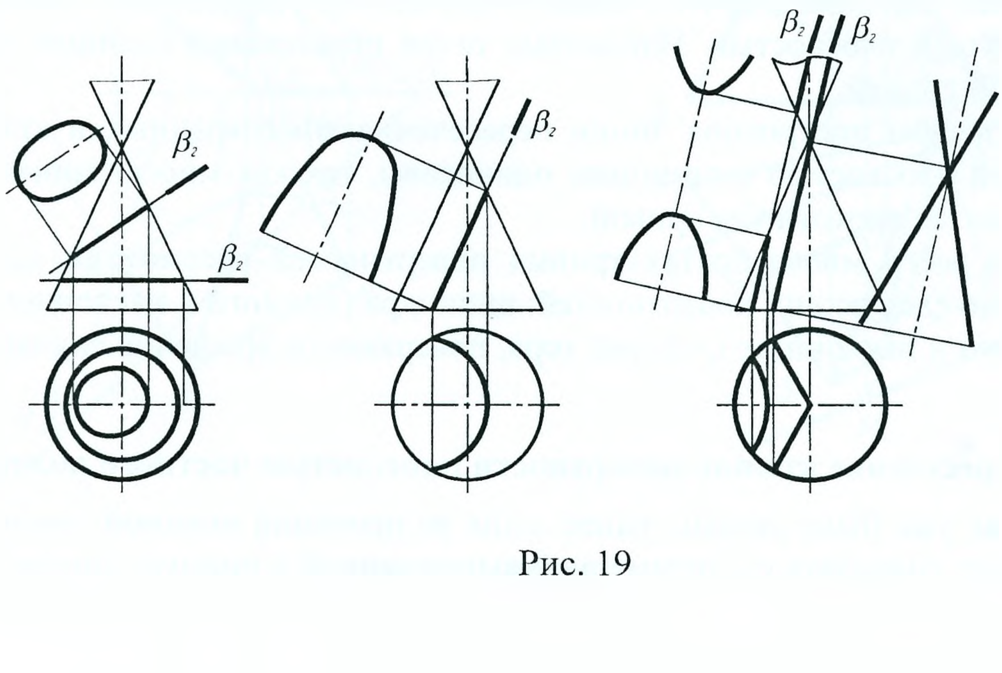


Рис. 19

При пересечении сферы любой плоскостью линией сечения будет окружность, которая может проецироваться в окружность, прямую линию или эллипс.

Рассмотрим несколько примеров на построение проекций линии пересечения кривой поверхности плоскостью частного положения.

Пример 1. Прямой круговой цилиндр пересекает фронтально проецирующая плоскость δ, заданная главным следом δ_2 (см. рис. 18).

Так как и плоскость, и поверхность занимают частное положение, то обе проекции линии пересечения известны: фронтальная проекция совпадает с главным следом секущей плоскости, а горизонтальная – с вырожденной в окружность горизонтальной проекцией цилиндра.

Пример 2 Наклонный цилиндр пересекает фронтально проецирующая плоскость α (рис 20).

Фронтальная проекция линии пересечения известна. Она совпадает с фронтальным следом секущей плоскости и находится в пределах поверхности. Построение горизонтальной проекции линии пересечения (эллипса) выполняем с помощью ряда образующих цилиндра, начиная с определения точек пересечения фронтальных очерковых образующих (точки *1* и *2*), горизонтальных очерковых образующих (точки *3* и *4*), передней и задней образующих (точки *5* и *6*).

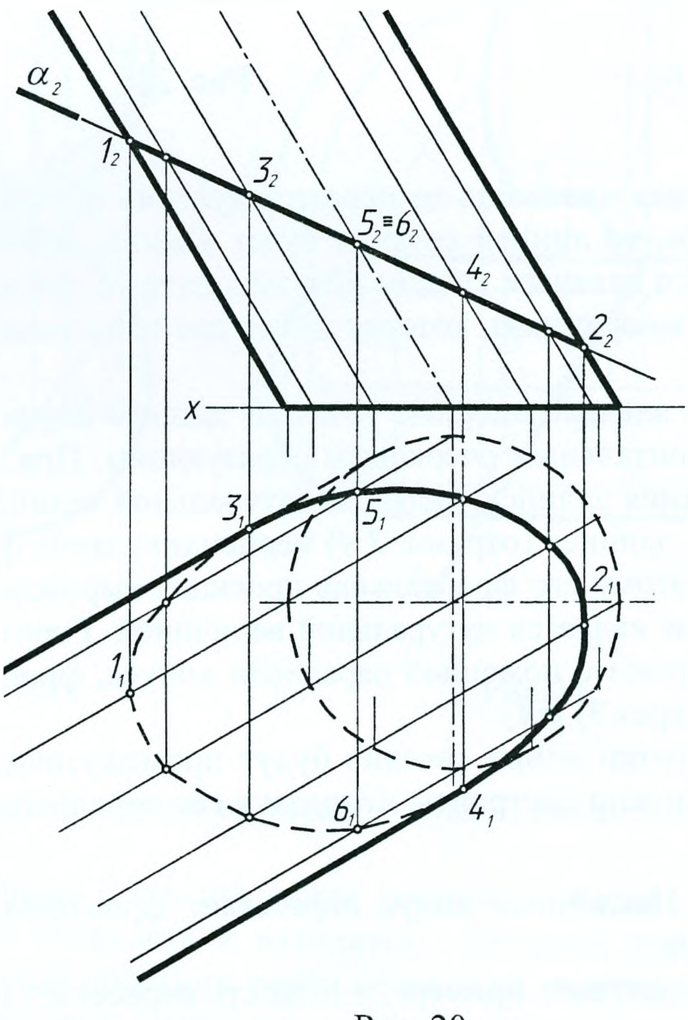


Рис. 20

Пример 3. Прямой круговой конус пересекает фронтально проецирующая плоскость β, заданная главным следом β_2 (рис.21).

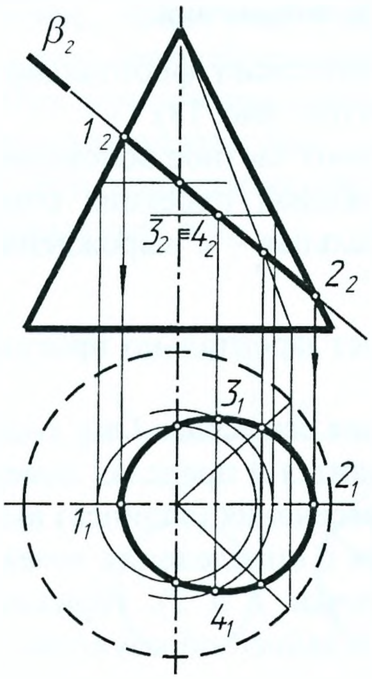


Рис. 21

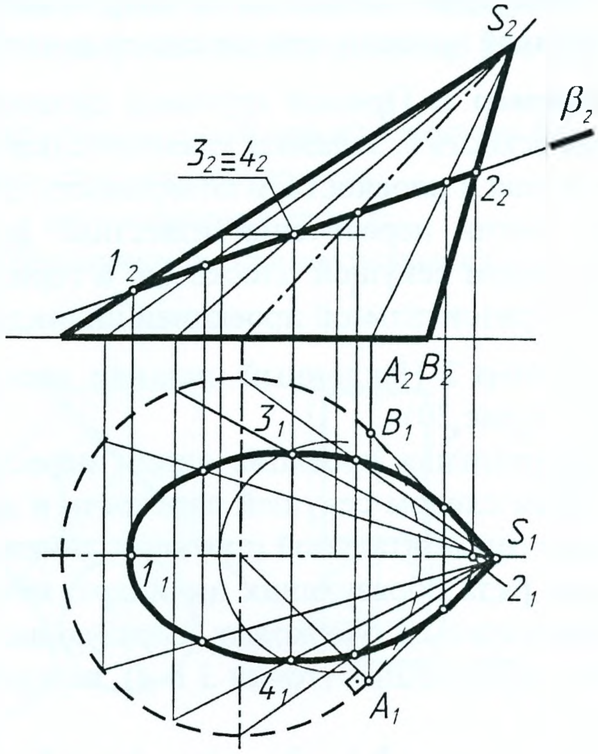


Рис. 22

Так как данная плоскость не перпендикулярна оси конуса и пересекает все его образующие, то линией сечения будет эллипс, фронтальная проекция которого совпадает с главным следом β_2 и находится в пределах поверхности. Эллипс – это лекальная кривая, которая имеет две оси симметрии (большую и малую).

Определяем вначале опорные точки. В данном случае это точки *1* и *2*, принадлежащие фронтальным очерковым образующим. При этом отрезок $1_2 2_2$ (фронтальная проекция эллипса) является натуральной величиной большой оси эллипса. Малая ось эллипса (отрезок *3 4*) перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, поэтому его фронтальная проекция вырождается в точку ($3_2 \equiv 4_2$), а горизонтальная является натуральной величиной. Горизонтальные проекции точек *3* и *4* строим с помощью параллели конуса, фронтальная проекция которой проходит через $3_2 \equiv 4_2$.

Остальные точки линии сечения будут промежуточными. Их горизонтальные проекции можно построить, используя как параллели конуса, так и его образующие.

Пример 4. Наклонный конус пересекает фронтально проецирующая плоскость β (рис. 22).

Как и в предыдущем примере, плоскость пересекает конус по эллипсу, фронтальная проекция которого известна. Построение горизонтальной проекции аналогично. Отличие заключается в том, что необходимо определять точки пересечения горизонтальных очерковых образующих *(AS* и *BS)* и видимость горизонтальной проекции линии пересечения.

Пример 5. Сфера пересечена горизонтально проецирующей плоскостью δ, заданной главным следом δ_1 (рис. 23).

Горизонтальной проекцией фигуры сечения (окружности) будет отрезок прямой линии, совпадающий со следом δ_1 секущей плоскости и находящийся в пределах сферы (1_1 2_1). Отрезок 1_1 2_1 является также натуральной величиной диаметра окружности сечения. Горизонтальная проекция центра O_1 этой окружности находится на перпендикуляре, проведенном через центр сферы к следу секущей плоскости. С точкой O_1 будет совпадать горизонтальная проекция вертикального диаметра ($3_1 \equiv 4_1 \equiv O_1$).

Фронтальной проекцией окружности сечения будет эллипс с осями 1_2 2_2 и 3_2 4_2. Точки 5_2 и 6_2, лежащие на фронтальном очерке сферы, являются точками видимости. Недостающие проекции всех искомых точек определены с помощью параллелей сферы.

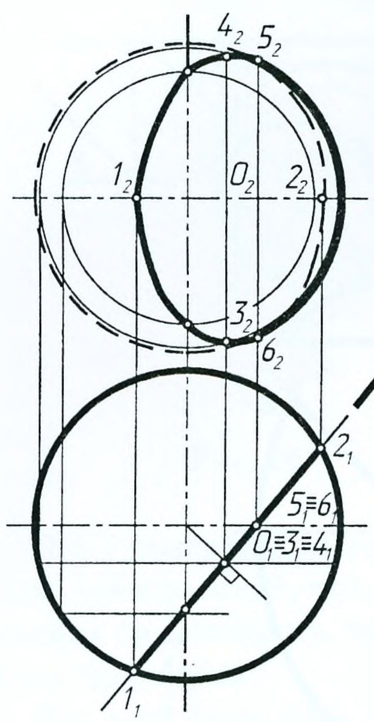


Рис. 23

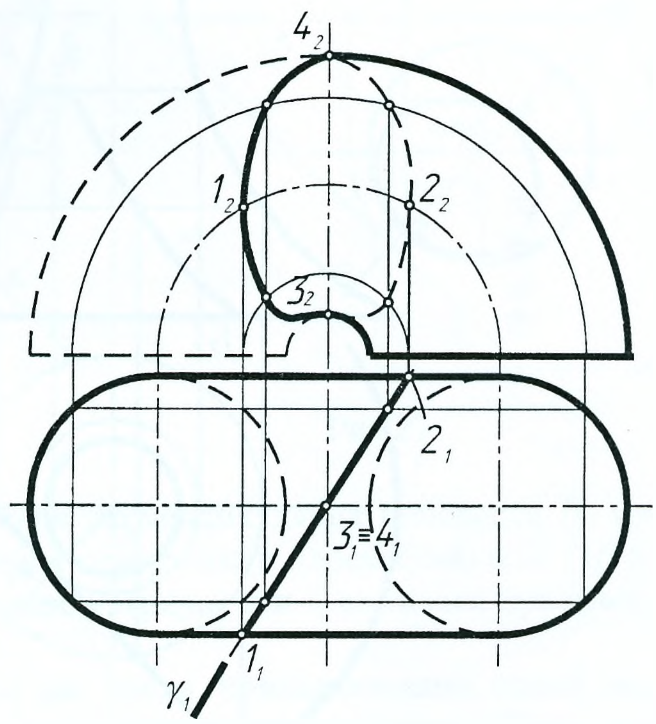


Рис.24

Пример 6. Тор пересечен горизонтально проецирующей плоскостью γ (рис. 24).

Горизонтальная проекция линии сечения совпадает с горизонтальным следом γ_1 секущей плоскости и находится в пределах поверхности. Для построения фронтальной проекции линии сечения на поверхности тора проводим ряд линий – окружностей. Горизонтальными проекциями этих окружностей являются прямые линии, параллельные горизонтальной проекции оси тора, фронтальные проекции – окружности.

Опорными точками являются точки *1*и *2*, принадлежащие горизонтальному очерку тора и точки *3* и *4*, принадлежащие фронтальному очерку тора.

Пример 7. Поверхность вращения пересечена горизонтально проецирующей плоскостью α (рис. 25).

Как и в рассмотренных ранее примерах горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с главным следом плоскости α_1. Фронтальная проекция определена с помощью ряда параллелей поверхности. К опорным точкам относятся точки: *1* и *2* – на нижнем основании поверхности вращения; точка *3* – на фронтальной очерке (главном меридиане); точка *4* – высшая точка линии сечения. Чтобы построить точку *4*, следует на горизонтальной проекции определить параллель, которая коснулась бы секущей плоскости (4_1 – точка касания). Фронтальная проекция точки 4 – 4_2 находится на фронтальной проекции этой параллели.

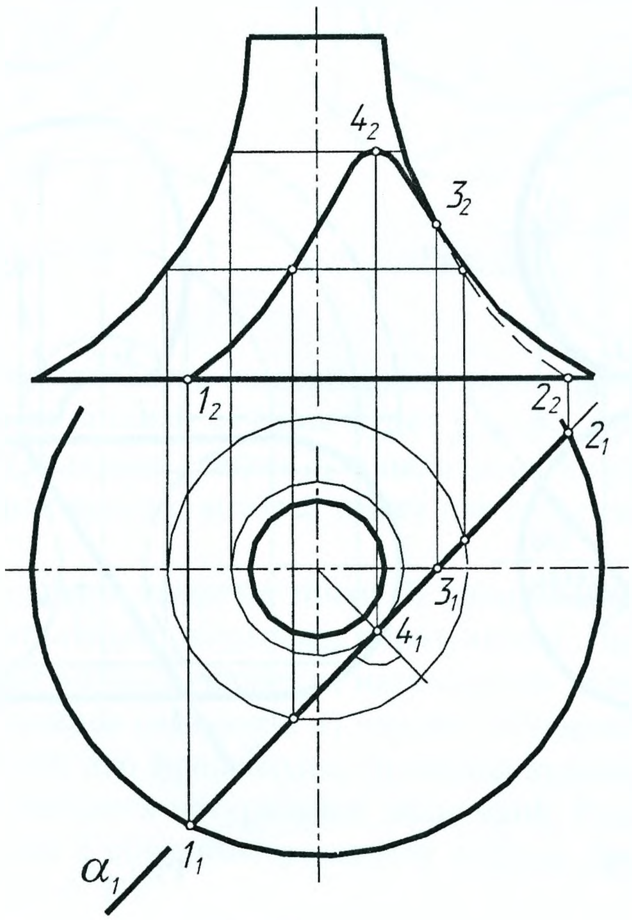


Рис. 25

5.2. Пересечение кривой поверхности плоскостью общего положения

Как было сказано ранее, построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью заключается в отыскании точек пересечения линий поверхности (образующих, параллелей, меридианов и др.) с секущей плоскостью и последовательном соединении их плавной кривой.

Рассмотрим несколько примеров построения линии пересечения. Прежде всего, рассмотрим примеры, когда плоскость пересекает поверхность вращения.

Пример 1. Поверхность вращения общего вида пересечена плоскостью α общего положения, заданной горизонталью h (h_1, h_2) и фронталью f (f_1, f_2).

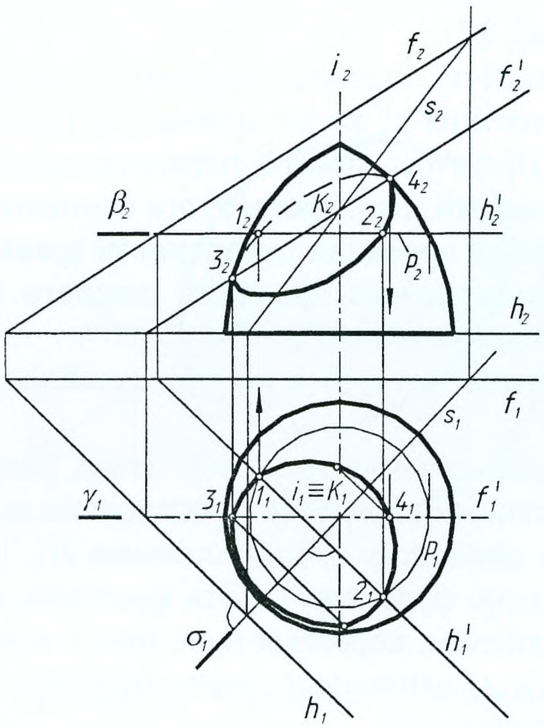


Рис. 26

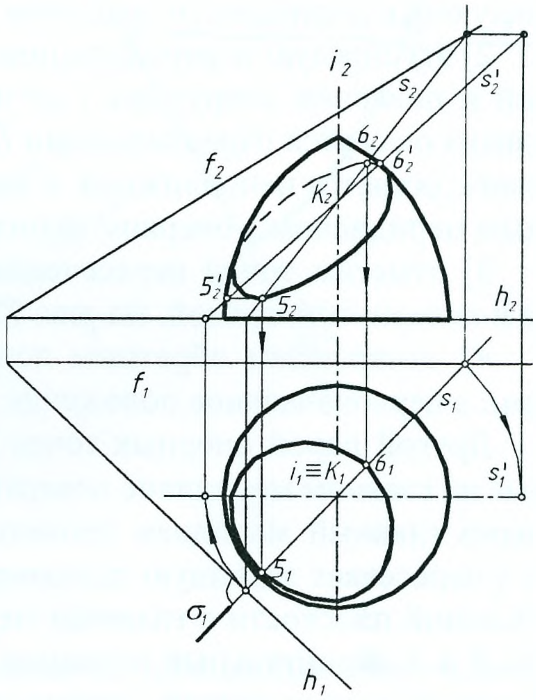


Рис.27

Ось i поверхности вращения перпендикулярна плоскости Π_1 (рис. 26). Покажем, прежде всего, что сечение поверхности плоскостью α $(h \cap f)$ и проекция сечения на плоскость, перпендикулярную оси i, являются кривыми, имеющими ось симметрии.

Для этой цели определим две точки, принадлежащие одной параллели поверхности вращения. Пересечем заданные геометрические образы вспомогательной плоскостью β, перпендикулярной оси поверхности и параллельной плоскости проекций Π_1. Вспомогательная плоскость пересечет поверхность по параллели p $(p_1\ p_2)$, а плоскость-по горизонтали h' (h_1', h_2'). Полученные параллель и горизонталь пересекаются в точках 1 $(1_1, 1_2)$ и 2 $(2_1, 2_2)$, которые принадлежат искомой линии. Полученные точки симметричны друг другу относительно плоскости σ, перпендикулярной хорде 1-2 и проходящей через ее середину. Заметим, что плоскость σ пройдет через ось поверхности вращения.

Очевидно, что для любой другой пары точек, на концах хорд других окружностей (но параллельных хорде 1-2), плоскость σ будет также являться плоскостью симметрии. Следовательно, *кривая сечения поверхности вращения* *плоскостью* α представляет *собой симметричную кривую*, осью симметрии которой служит линия пересечения плоскостей σ и α – прямая s. Эта *ось симметрии является также линией наибольшего ската плоскости* α.

Свойством симметрии обладает и проекция кривой сечения на плоскость, перпендикулярную оси i, так как отрезки, соединяющие симметричные друг другу точки сечения, параллельны той же плоскости.

Высшая и низшая точки находятся на оси симметрии кривой сечения. Определить их можно следующим путем:

1) проведем в плоскости α линию наибольшего ската – прямую s, пересекающую ось поверхности вращения (рис. 27);

2) эту прямую и меридиан поверхности, плоскость которого совпадает с прямой s, повернем вокруг оси i до положения s', когда прямая s и плоскость меридиана окажутся параллельными Π_2. При этом, точка К пересечения прямой s с осью i остается неподвижной, а вращаемый меридиан в итоге совместится с главным меридианом – очерком фронтальной проекции поверхности вращения;

3) отметим точки пересечения фронтальных проекций главного меридиана и повернутой прямой. На рис. 27 это точки $5'$ и $6'$;

4) возвращаем обратным поворотом прямую s вместе с найденными точками в первоначальное положение.

Другой парой опорных точек линии сечения являются точки, расположенные на главном меридиане поверхности. Их построение показано на рис. 26, где через главный меридиан проведена плоскость γ, параллельная Π_2. Плоскость γ пересекает заданную плоскость α по фронтали f^1. Эта фронталь, находясь в одной плоскости с главным меридианом, пересекается с ним в искомых точках 3 и 4. Фронтальные проекции 3_2 и 4_2 найденных точек отделяют видимую часть проекции кривой сечения от невидимой.

Ту же задачу можно решить, например, с использованием способа замены плоскостей проекций (рис. 28), когда плоскость $\alpha\ (h \cap f)$ общего положения преобразована в проецирующую. Ее след α_4 на плоскости Π_4 является вместе с тем и вырожденной проекцией сечения заданной поверхности вращения (см. пункт 5.1).

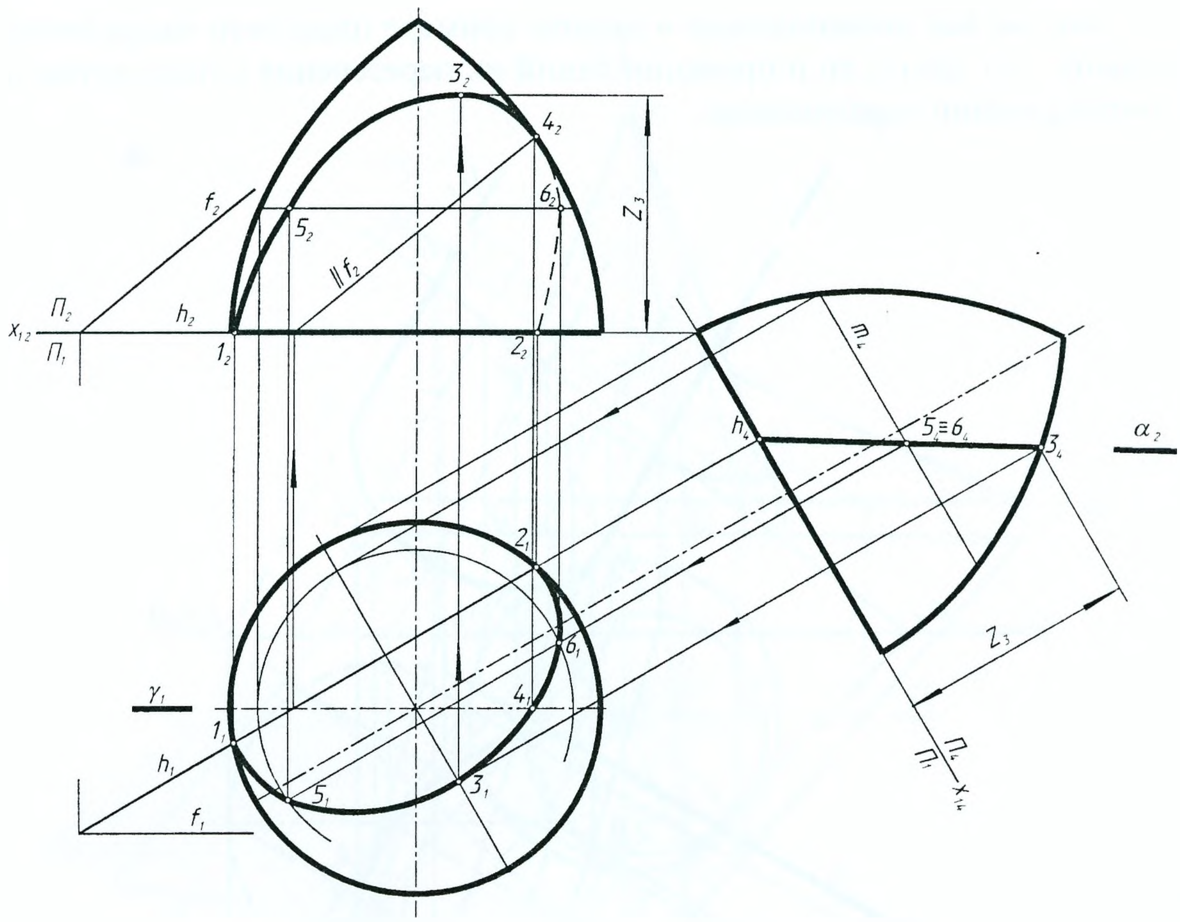


Рис. 28

Пример 2. Наклонный цилиндр пересечен плоскостью общего положения α, заданной следами (рис. 29).

Построение линии сечения начинается с определения опорных точек A и B, принадлежащих фронтальным очерковым образующим цилиндра, точек C и D, принадлежащих горизонтальным очерковым образующим, и точек E и L, лежащих на передней и задней образующих. Фронтальные проекции A2, B2 и горизонтальные проекции C1, D1 найденных точек являются точками видимости соответственно на фронтальной и горизонтальной проекциях линии сечения.

Построение опорных и промежуточных точек пересечения наклонного цилиндра плоскостью общего положения сводится к построению точек пересечения прямых (образующих цилиндра) с плоскостью (см. пункт 3.2, рис. 12). Все они определены с помощью фронтально проецирующих плоскостей-посредников.

Например, для построения точки пересечения A (A_1, A_2) правой фронтальной очерковой образующей использована фронтально проецирующая плоскость β, которая пересекает заданную плоскость по линии 1-2 $(1_1$-2_1; 1_2-$2_2)$. На пересечении горизонтальной проекции 1_1-2_1 и горизонтальной проекции рассматриваемой образующей определится горизонтальная проекция A_1 искомой точки A.

Так как все используемые в данном примере плоскости-посредники параллельны друг другу, то и проекции линий их пересечения с плоскостью α тоже соответственно параллельны.

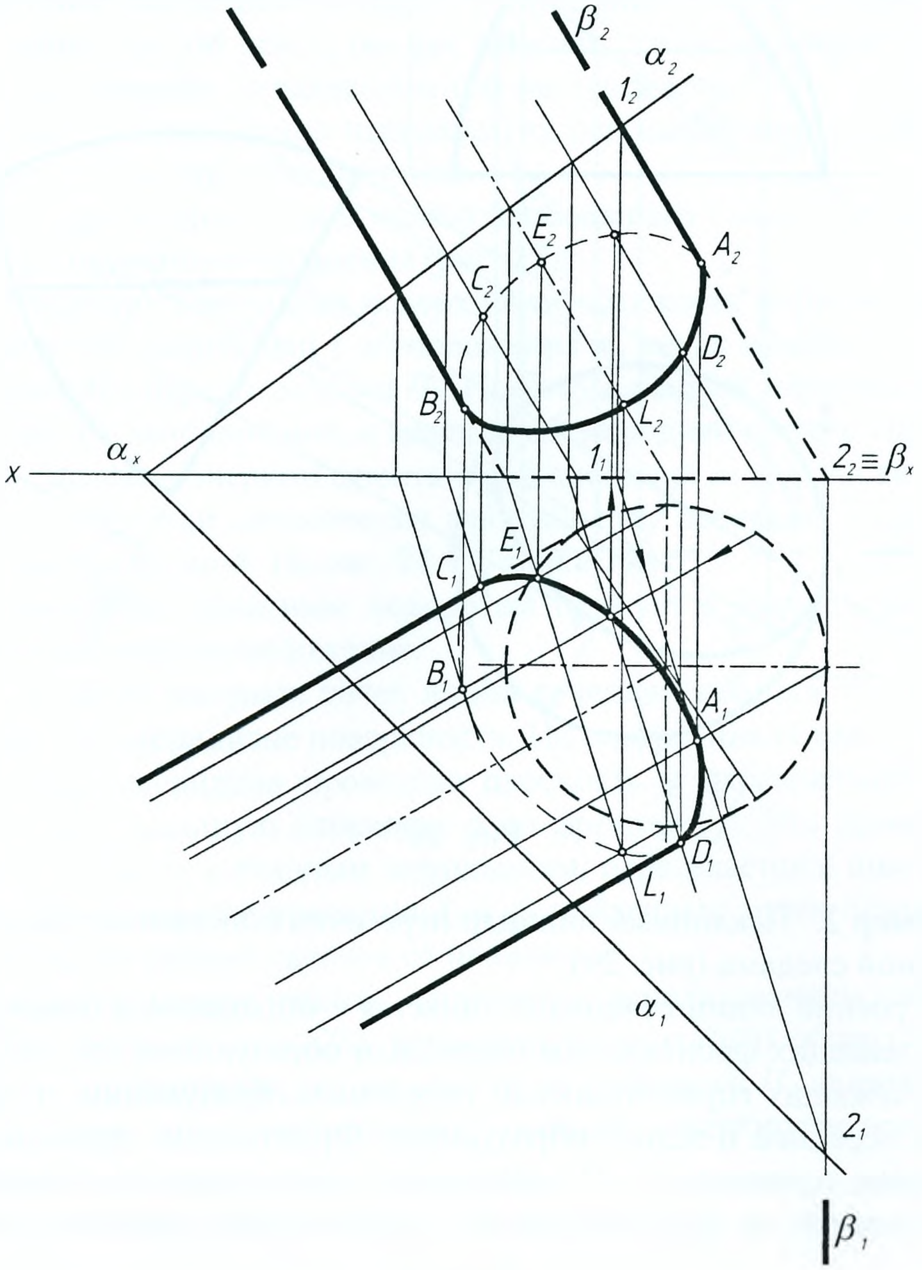


Рис. 29

Пример 3. Прямой круговой конус пересечен плоскостью α общего положения, заданной горизонталью h и фронталью f (рис. 30).

Прежде всего определяются высшая *1* и низшая *2* точки линии пересечения. Для этой цели через ось конуса проведена плоскость σ, перпендикулярная горизонтали h, а значит, и секущей плоскости $\alpha\,(h \cap f)$.

Плоскость σ, являясь общей плоскостью симметрии и для конуса и для секущей плоскости α, пересекает α по прямой m - оси симметрии искомого сечения. Высшая и низшая точки фигуры сечения определяются пересечением прямой m с образующими SA и SB, по которым плоскость σ пересекает конус.

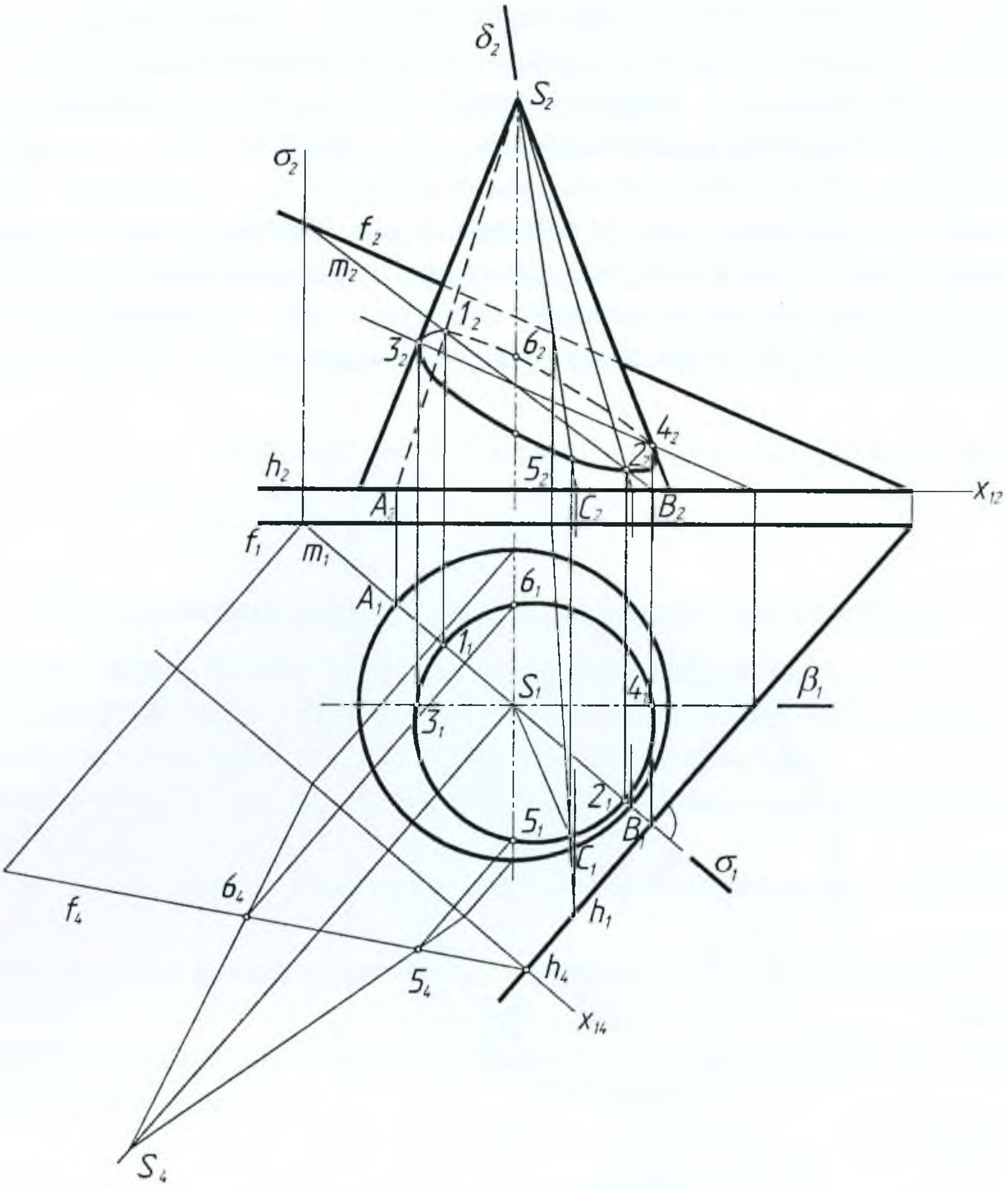


Рис. 30

Затем с помощью плоскости $\beta \parallel \Pi_2$ построены точки *3* и *4*, расположенные на фронтальных очерковых образующих и являющиеся точками видимости на фронтальной проекции фигуры сечения. Точки 5 и 6, принадлежащие передней и задней образующей конуса, определены заменой плоскостей проекций, для чего плоскость α общего положения преобразована в проецирующую плоскость.

Далее определяются промежуточные точки, для построения которых можно использовать или плоскости-посредники горизонтального уровня, или фронтально проецирующие, проходящие через образующие конуса (см. образующую SC).

Пример 4. Сфера пересечена плоскостью β общего положения, заданной следами (рис. 31).

Находим высшую *A* (A_1, A_2) и низшую *B* (B_1, B_2) точки линии пересечения с помощью горизонтально проецирующей плоскости σ. Плоскость-посредник σ пересекает заданную плоскость β по линии *1-2* ($1_1 2_1$; $1_2 2_2$), а сферу по окружности, горизонтальная проекция которой – прямая линия, а фронтальная – эллипс. Чтобы не строить эллипс на фронтальной плоскости проекций, совмещаем плоскость σ с горизонтальной плоскостью проекций и находим предварительно эти точки в совмещенном положении (A_0, B_0).

Промежуточные точки линии пересечения построены с помощью плоскостей-посредников, проведенных между точками A и B и параллельных горизонтальной плоскости проекций. Например, плоскость γ пересекает сферу по окружности, горизонтальная проекция которой – окружность, а плоскость β - по горизонтали h (h_1, h_2). На их пересечении получаем две точки M (M_1, M_2) и N (N_1, N_2).

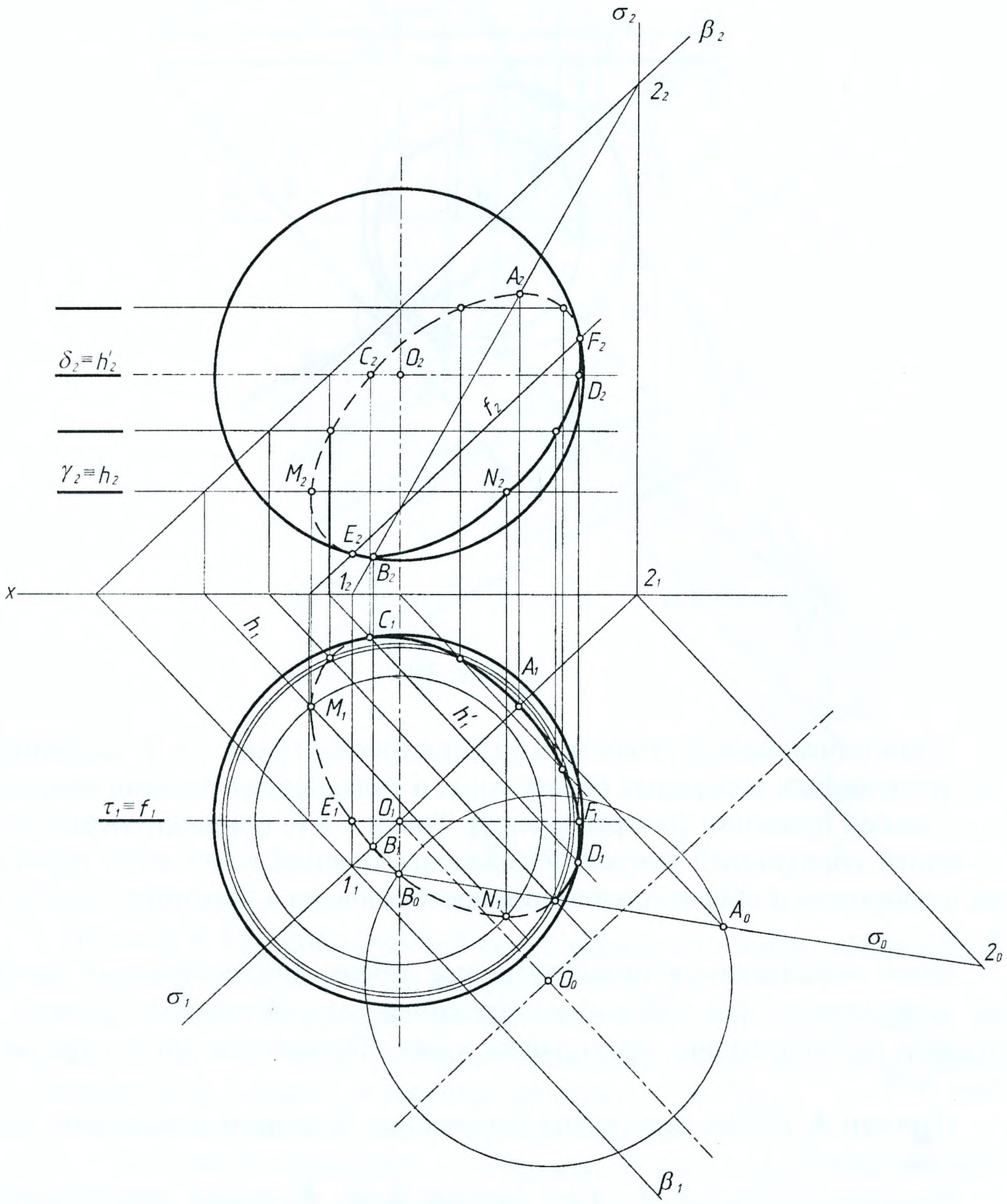


Рис. 31

Для того, чтобы на горизонтальной проекции кривой отделить видимую ее часть от невидимой, необходимо плоскость-посредник провести через центр сферы (плоскость δ). Эта плоскость пересечет сферу по экватору, а плоскость β - по горизонтали h' (h'_1, h'_2). На их пересечении получаем точки C (C_1, C_2) и D (D_1, D_2).

Чтобы на фронтальной проекции кривой отделить видимую ее часть от невидимой, проводим через центр сферы плоскость τ, параллельную фронтальной плоскости проекций. Эта плоскость пересекает сферу по главному меридиану, а плоскость β - по фронтали f (f_1, f_2). На их пересечении получаем точки E (E_1, E_2) и F (F_1, F_2).

Одноименные проекции всех найденных точек соединяем плавными кривыми – эллипсами.

5.3. Пересечение прямой линии с кривой поверхностью

Прямая линия может пересекать поверхность в двух и более точках. Этапы решения этой задачи аналогичны описанному ранее построению пересечения прямой с плоскостью или многогранной поверхностью.

Чтобы найти точки пересечения прямой линии с кривой поверхностью, следует (рис. 32):

а) провести через данную прямую вспомогательную секущую плоскость;

б) построить линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью;

в) точки пересечения заданной прямой с построенной линией сечения и будут искомыми точками.

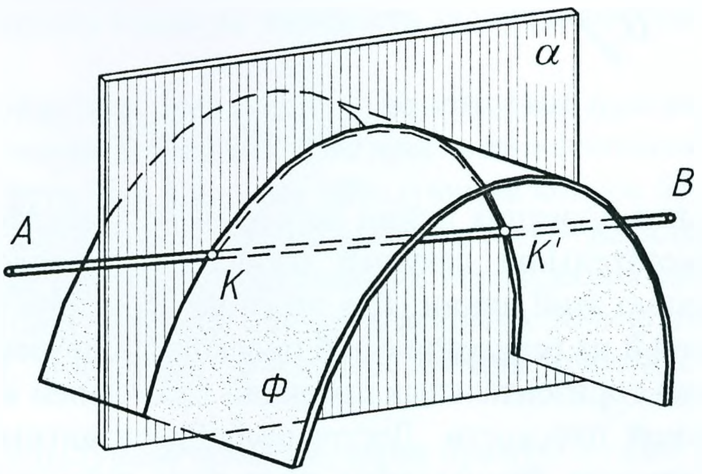


Рис. 32

При построении точек пересечения кривой поверхности с прямой линией вспомогательную секущую плоскость выбирают так, чтобы она пересекала кривую поверхность по линии, легко определяемой на чертеже. Наиболее желательно получить сечение, имеющее вид *прямых линий или окружности*.

Пример 1. Построить точки пересечения прямой с нелинейчатой поверхностью вращения (рис. 33).

Построить простое по форме сечение в этой задаче нельзя. Поэтому через прямую проведена вспомогательная горизонтально проецирующая плоскость α и построено сечение с помощью нескольких параллелей поверхности.

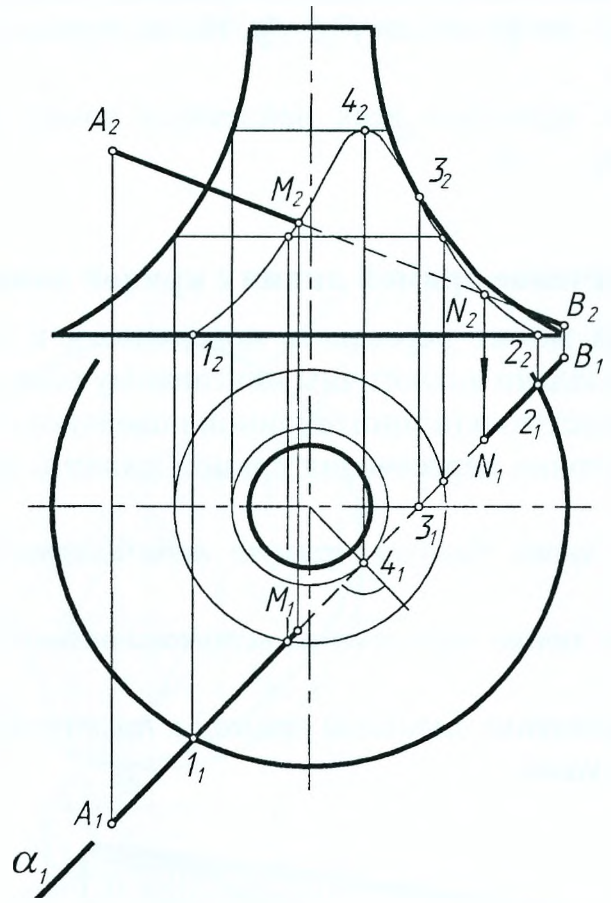


Рис. 33

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальным следом вспомогательной секущей плоскости. Необходимо построить фронтальную проекцию этой линии. Для этого на поверхности вращения проводим ряд параллелей и на горизонтальной проекции отмечаем ряд точек (1_1, 2_1 ..., 6_1) на пересечении горизонтальных проекций параллелей и горизонтального следа вспомогательной плоскости. Достраиваем фронтальные проекции этих точек на соответствующих фронтальных проекциях параллелей и соединяем полученные точки плавной кривой линией.

На пересечении фронтальной проекции построенной кривой и фронтальной проекции A_2B_2 определятся фронтальные проекции M_2 и N_2 искомых точек. Затем по линиям проекционной связи строятся их горизонтальные проекции. Между точками M и N прямая находится внутри поверхности.

Пример 2. Построить точки пересечения прямой с конической поверхностью (рис. 34).

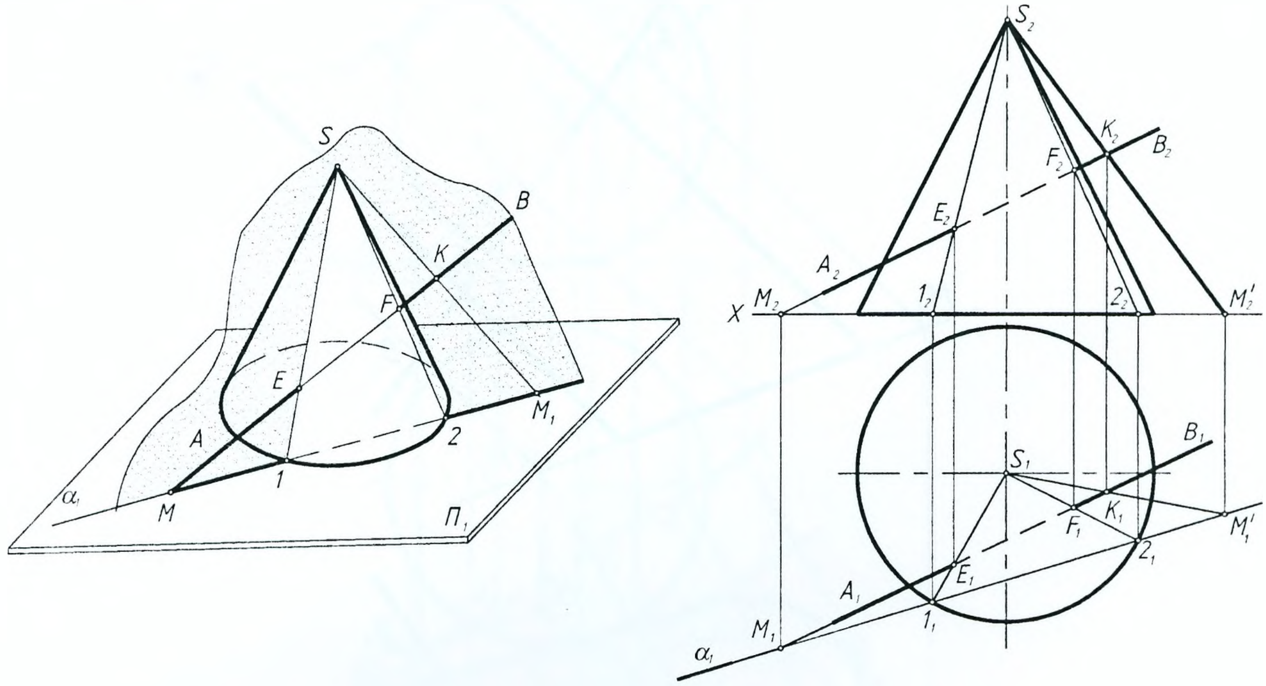


Рис. 34

Если выбирать в качестве вспомогательных плоскостей проецирующие плоскости, то сечениями поверхности будут кривые линии – гипербола или эллипс. Поэтому для определения точек пересечения прямой с поверхностью конуса через данную прямую следует провести вспомогательную плоскость общего положения, которая пересекла бы поверхность конуса по образующим. Такая плоскость должна быть проведена через прямую и вершину конуса. В нашем примере вспомогательная плоскость задана пересекающимися прямыми *AB* и *SK*.

Чтобы определить образующие, по которым плоскость пересекает конус, строим след секущей плоскости *на плоскости основания конуса* (в данном случае – на плоскости Π_1). Искомые образующие конуса *S1* и *S2* определены в пересечении горизонтального следа плоскости с окружностью основания конуса. Горизонтальные проекции построенных образующих пересекаются с горизонтальной проекцией заданной прямой в искомых точках *E* и *F* (E_1, F_1).

Пример 3. Построить точки пересечения прямой с поверхностью цилиндра (рис. 35).

Как и в предыдущем примере, через прямую нужно провести вспомогательную плоскость, которая пересечет боковую поверхность цилиндра по образующим. Такой плоскостью будет плоскость общего положения, проходящая через заданную прямую и две вспомогательные прямые *AM* и *BM'*, параллельные образующим цилиндра.

Дальнейшие построения аналогичны предыдущему примеру.

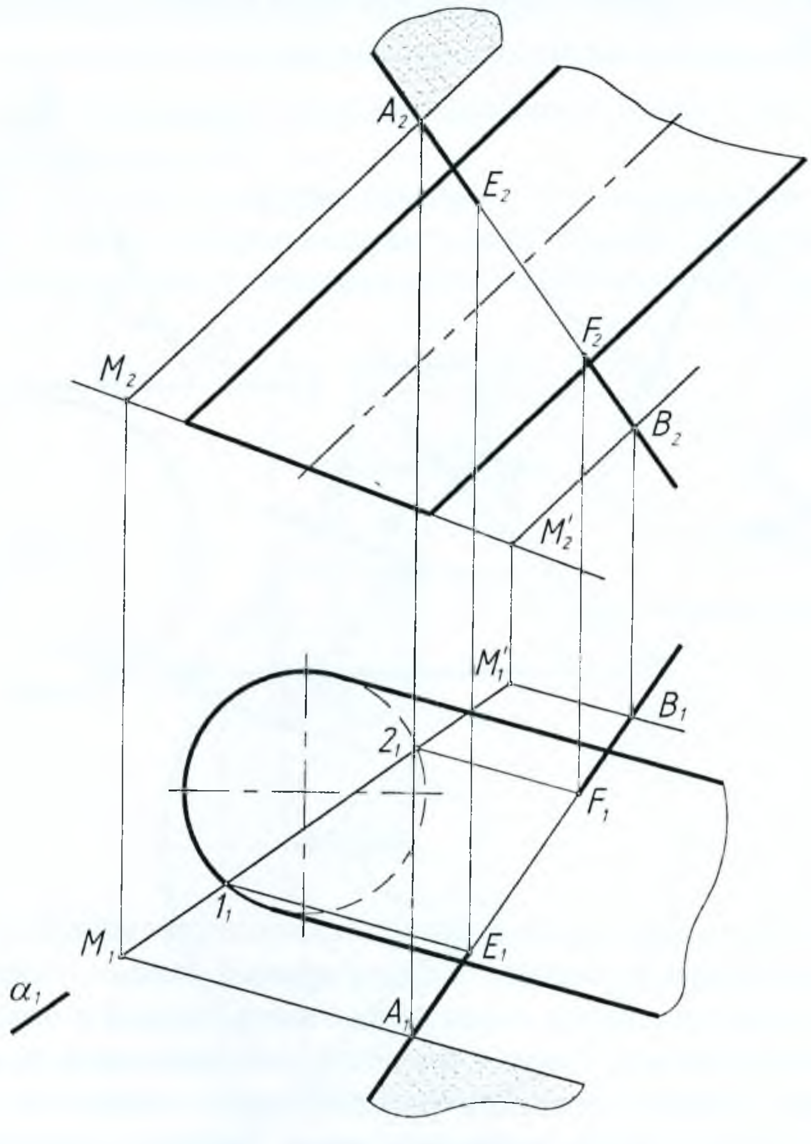


Рис. 35

Пример 4. Построить точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис. 36).

Через прямую проведена горизонтально проецирующая плоскость α. Она пересекает сферу по окружности, фронтальная проекция которой будет эллипс. Чтобы избежать построения эллипса, применим способ замены плоскостей проекций и примем новую плоскость проекций Π_4, параллельную секущей плоскости α. Построим на плоскости Π_4 проекцию заданной прямой и окружность сечения сферы. Полученные точки пересечения проекции прямой с окружностью сечения 1_4, 2_4 будут искомыми. Они переносятся на исходные проекции.

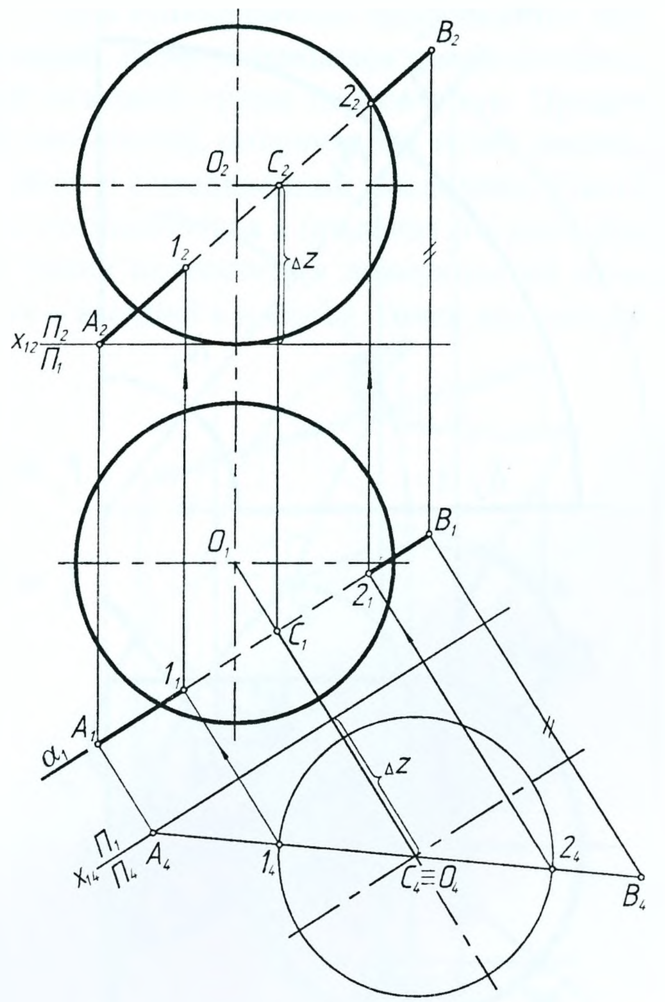


Рис. 36

Пример 5. Построить точки пересечения прямой с поверхностью тора (рис. 37).

Заданная прямая m (m_1, m_2) пересекает в точке 1 (1_1, 1_2) ось тора. В этом случае вспомогательная фронтально проецирующая плоскость β, проходит через данную прямую и ось тора. Сечение тора такой плоскостью будет представлять собой окружность l. Чтобы не строить горизонтальной проекции этой окружности, имеющей вид эллипса, секущая плоскость β и лежащие в ней окружность l и заданная прямая m повернуты вокруг оси тора до горизонтального положения. Тогда окружность l совпадет с окружностью основания k, а прямая m займет положение $m'(1_1'$-$2_1')$. Полученные при этом точки M_1', $N_1' = l_1' \cap m_1'$ будут искомыми.

Произведя обратное преобразование, найдем проекции M_1, N_1 и M_2, N_2 этих точек.

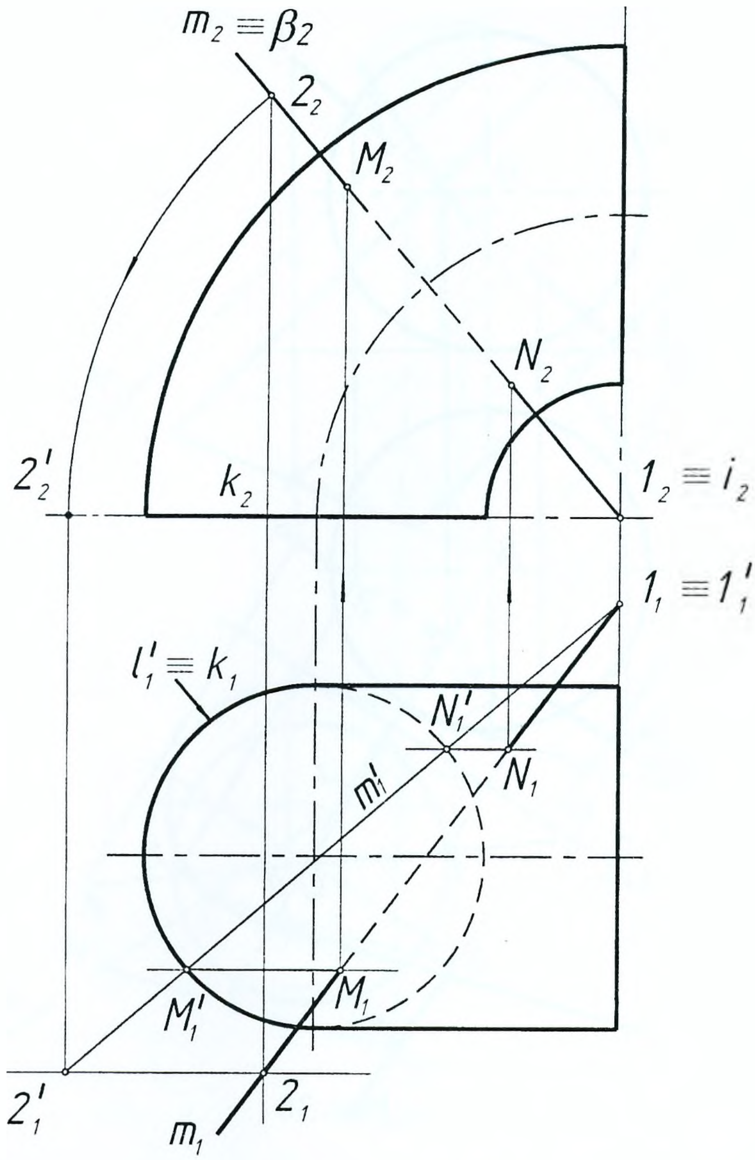


Рис. 37

6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение линии пересечения поверхностей сводится к построению ряда точек, принадлежащих обеим поверхностям. Для чего используются посредники: плоскости или поверхности. Посредники выбирают так, чтобы они пересекали заданные поверхности по графически простым линиям прямым или окружностям, и проекции окружности были в виде окружности или отрезка прямой.

Рассмотрим использование общего алгоритма с использованием плоскостей-посредников (рис. 38).

а) проводят вспомогательную секущую плоскость α*, пересекающую заданные поверхности;*

б) строят линии 1-2 и 3-4 пересечения вспомогательной плоскости с заданными поверхностями Σ *и* Φ*;*

в) определяют точку К пересечения вспомогательных линий 1-2 и 3-4.

Поскольку точка K одновременно принадлежит обеим вспомогательным линиям и, следовательно, пересекающимся поверхностям, то она является точкой, принадлежащей искомой линии пересечения. Проведя несколько вспомогательных секущих плоскостей, получим ряд точек линии пересечения. Они соединяются между собой в определенной последовательности. Проекции линии пересечения должны располагаться в пределах очерков обеих поверхностей.

Построение линии пересечения поверхностей начинают с определения характерных ее точек – высшей и низшей, точек видимости и др.

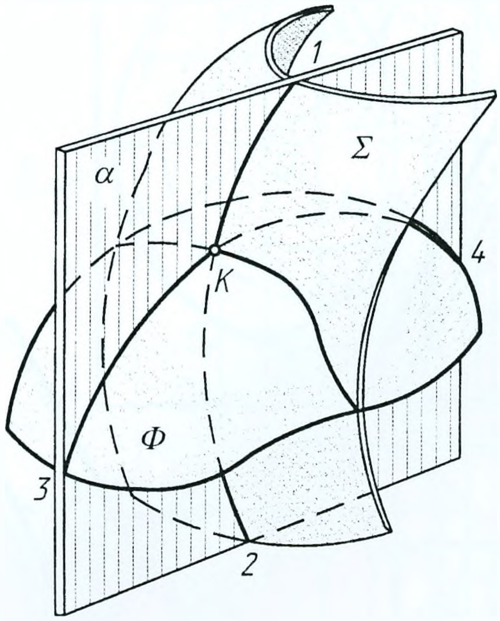


Рис. 38

6.1. Применение вспомогательных секущих плоскостей

6.1.1. Пересечение кривой поверхности с поверхностью многогранника

Построение линии пересечения кривой поверхности с поверхностью многогранника сводится к построению ряда плоских кривых – линий пересечения отдельных граней (плоскостей) многогранника с кривой поверхностью, и к определению точек пересечения его ребер (прямых) с этой поверхностью, т.е. решению рассмотренных выше задач.

Новым в решении этих задач является наряду с определением видимости линии пересечения определение видимости очерков заданных поверхностей.

Пример 1. Построить линию пересечение трехгранной призмы с конусом вращения (рис. 39).

Три грани призмы являются фронтально проецирующими плоскостями, следовательно, построение линии пересечения сводится к решению ранее рассмотренной задачи на пересечения конуса проецирующей плоскостью и прямой линией. Линия пересечения данных поверхностей представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. Грани призмы пересекают поверхность конуса по окружности, неполному эллипсу и неполной параболе. В данном случае вспомогательными плоскостями можно не пользоваться, так как фронтальные проекции точек линии пересечения известны.

Горизонтальные проекции точек линии пересечения строим с помощью трех параллелей конуса, проведенных через характерные точки линии пересечения. Точка 4 $(4_2, 4_1)$ выбрана посередине отрезка AB $(A_2 B_2, A_1 B_1)$, который является большой осью эллипса.

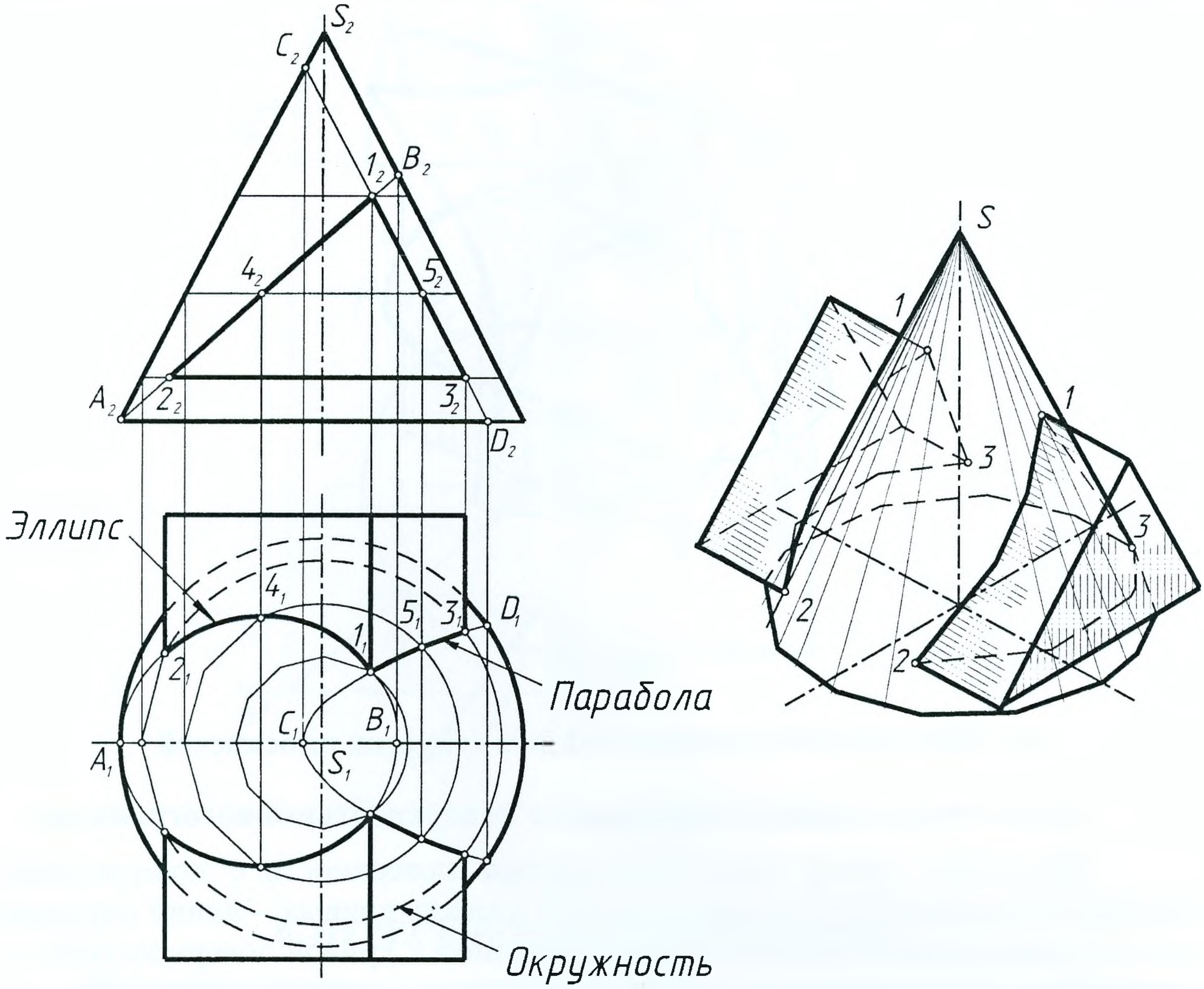


Рис. 39

Пример 2. Построить линию пересечения трехгранной призмы с поверхностью сферы (рис. 40).

Линия пересечения заданных поверхностей состоит из трех окружностей, две из которых неполные. Они лежат в гранях AB и BC и ограничены точками на ребре B.

Горизонтальными проекциями окружностей будут отрезки прямых линий, совпадающие с горизонтальными проекциями граней, в которых лежат окружности, а фронтальными – окружность в плоскости CA и два эллипса.

Построение фронтальных проекций окружностей можно выполнить как с использованием вспомогательных секущих плоскостей, так и с использованием параллелей сферы (см. рис. 23).

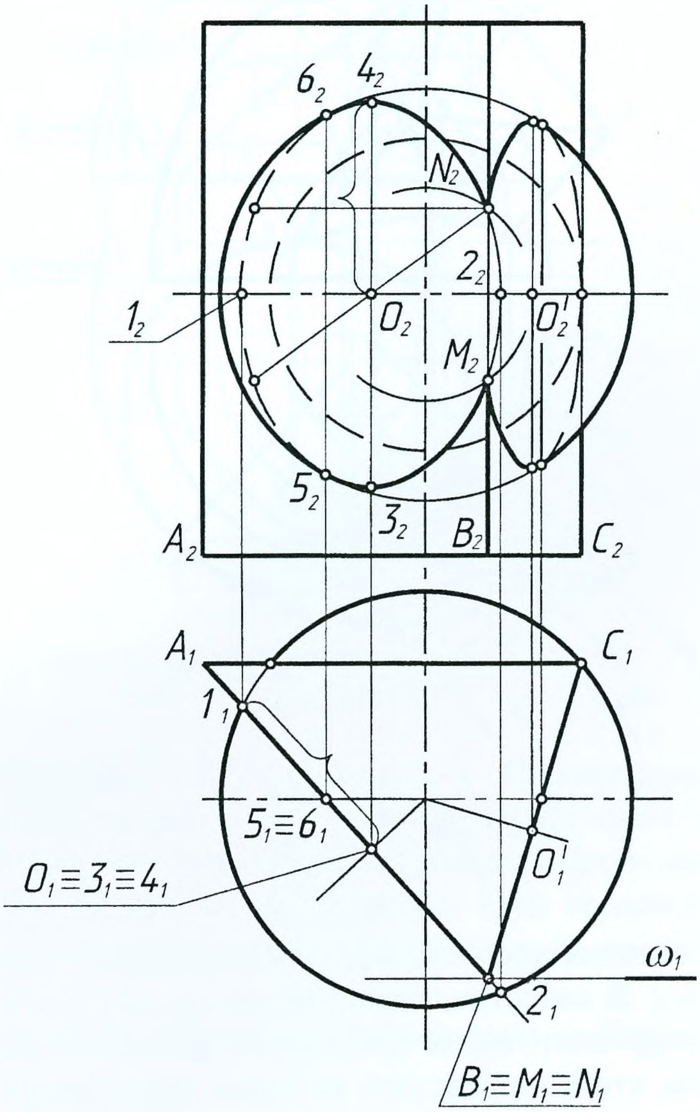


Рис. 40

На рис. 40 показано построение характерных точек фронтальной проекции эллипса грани *AB*. Центр его O_2 является фронтальной проекцией основания перпендикуляра, опущенного из центра сферы на плоскость грани. Большая ось $3_2 4_2$ вертикальна и равна диаметру окружности $(1_1 2_1)$. Точки 3_2 и 4_2 являются также высшей и низшей точками. Малая ось $1_2 2_2$ совпадает с фронтальной проекцией экватора. Точки 5_2 и 6_2 лежат на главном меридиане и являются точками видимости.

Точки *M* и *N*, пересечения ребра *B* призмы со сферой, найдены с помощью плоскости ω, пересекающей сферу по окружности. Отрезок эллипса $M_2 2_2 N_2$ находится за пределами грани *AB*, поэтому показан тонкой линией.

Аналогично строится эллипс грани *BC*. Построение окружности грани *CA* очевидно.

Пример 3. Построить линию пересечения трехгранной призмы с поверхностью эллипсоида вращения (рис. 41).

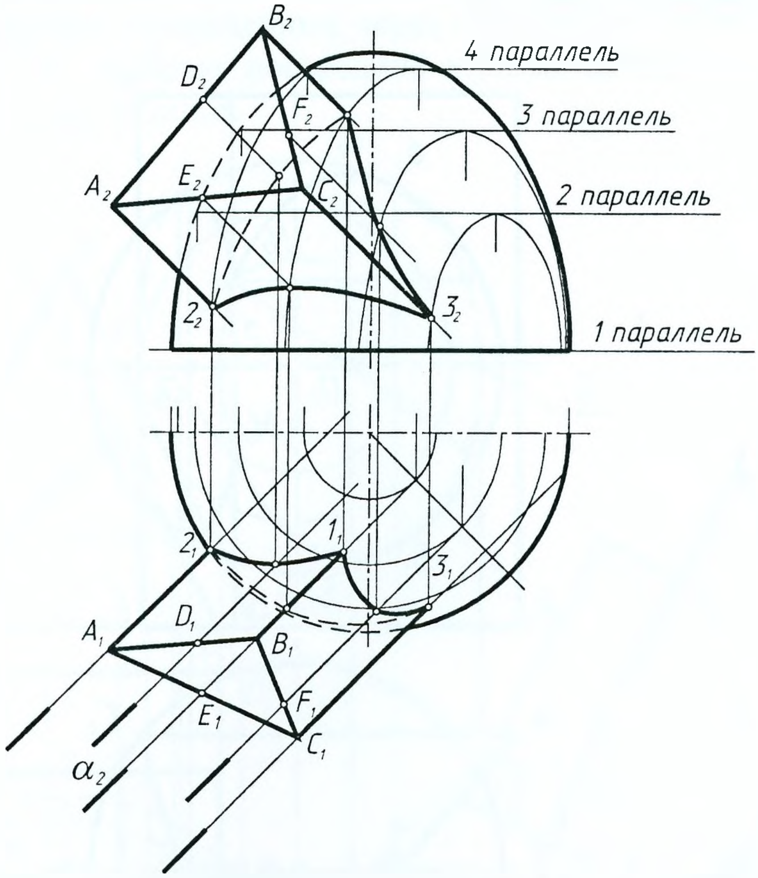


Рис. 41

Линия пересечения представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. В качестве вспомогательных плоскостей следует принимать горизонтально проецирующие плоскости, проводя их через ребра призмы и между ними, с тем, чтобы определить не менее трех точек для каждого отрезка линии пересечения. Например, плоскость α, проходящая через ребро B, пересекает и нижерасположенную грань AC призмы. Решение задачи сводится к многократному построению точки пересечения прямой с поверхностью (см. рис. 32). Вспомогательные сечения эллипсоида горизонтально проецирующими плоскостями строятся с помощью каркаса линий, состоящего из четырех параллелей.

6.1.2. Пересечение двух кривых поверхностей

Линия пересечения в общем случае представляют собой пространственную кривую. Точки этой линии строятся с помощью вспомогательных секущих плоскостей, выбор которых описан выше.

Пример 1. Построить линию пересечения прямого кругового цилиндра и сферы (рис.42).

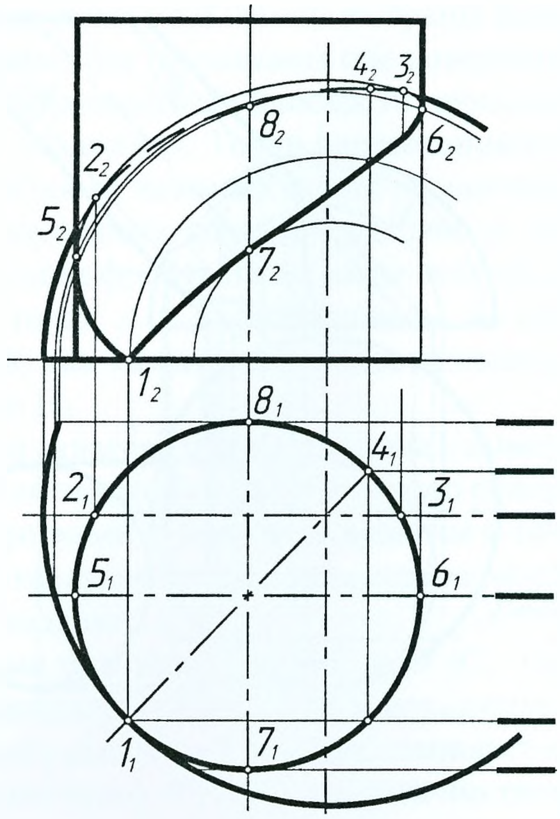


Рис. 42

Боковая поверхность цилиндра является горизонтально проецирующей, следовательно, горизонтальная проекция линии пересечения известна. Она совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра. Проведем несколько вспомогательных плоскостей фронтального уровня. Они пересекут цилиндр по образующим, а сферу – по окружностям, параллельным фронтальной плоскости проекций.

Характерными или опорными точками (они выбираются на плане) являются:

а) точка *1* – на горизонтальном очерке сферы;

б) токи *2* и *3* – на фронтальном очерке сферы;

в) точка *4* – высшая точка линии пересечения, лежит на меридиане сферы, проходящем через ось цилиндра;

г) точки *5* и *6* – на фронтальном очерке цилиндра (точки видимости фронтальной проекции линии пересечения);

г) точки *7* и *8* – на передней и задней образующих цилиндра.

Пример 2. Построить линию пересечения сферы и наклонного цилиндра (рис. 43).

Построение линии пересечения аналогично, как в примере 1. Вспомогательные плоскости фронтального уровня пересекают сферу по окружностям, а цилиндр-по образующим, в пересечении которых находятся искомые точки. На рисунке показана одна из таких плоскостей: плоскость α (α_1), и линии ее пересечения с заданными поверхностями l (l_1, l_2), m (m_1, m_2) и n (n_1, n_2). Точки $1 = l \cap m$ и $2 = l \cap n$ принадлежат искомой кривой.

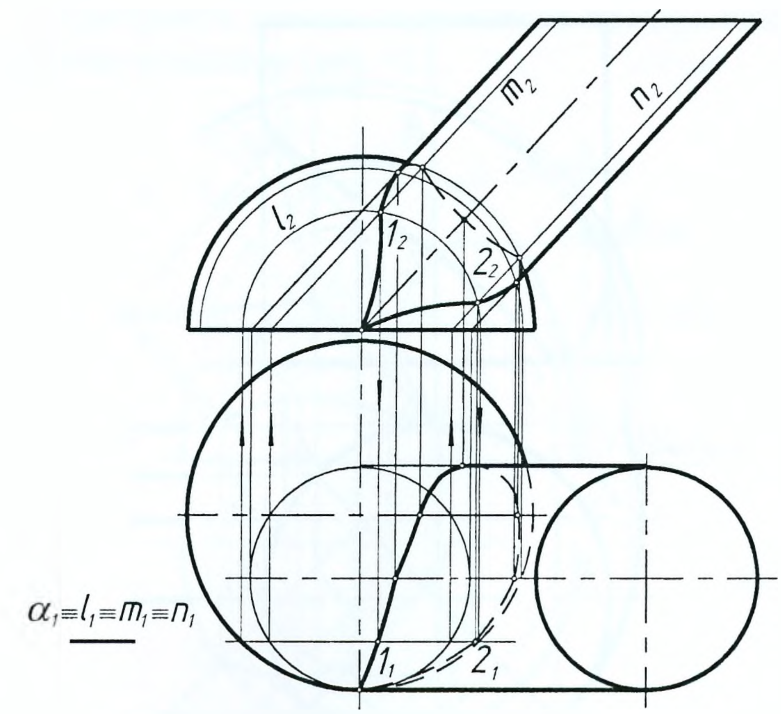


Рис. 43

Пример 3. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и сферы (рис. 44).

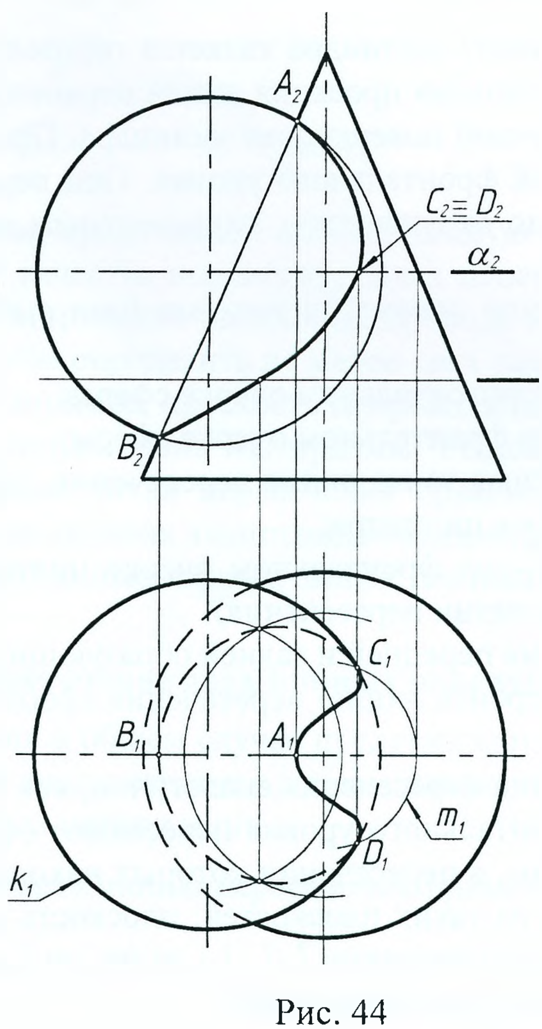


Рис. 44

Для построения точек этой линии выбраны вспомогательные плоскости горизонтального уровня. Они пересекают обе поверхности по окружностям, которые параллельны горизонтальной плоскости проекций и, следовательно, проецируются на нее без искажения. Точки пересечения окружностей являются горизонтальными проекциями искомых точек пересечения поверхностей. Фронтальные проекции полученных точек определяются по линиям проекционной связи на соответствующем фронтальном следе вспомогательной плоскости.

Характерные точки A и B расположены на пересечении фронтальных очерков поверхностей, так как эти поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную Π_2.

Точки C и D на экваторе сферы найдены с помощью плоскости α, которая пересекает сферу по экватору k, а коническую поверхность – по окружности m. Горизонтальные проекции k_1 и m_1 пересекаются в точках C_1, D_1, расположенных на общей вертикальной линии проекционной связи. Поэтому их фронтальные проекции совпадают.

Горизонтальные проекции точек C и D (C_1, D_1) делят горизонтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части. На фронтальной проекции видимая часть линии пересечения совпадает с невидимой частью.

Промежуточные точки строятся аналогично точкам C и D.

Пример 4. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и сферы (рис. 45).

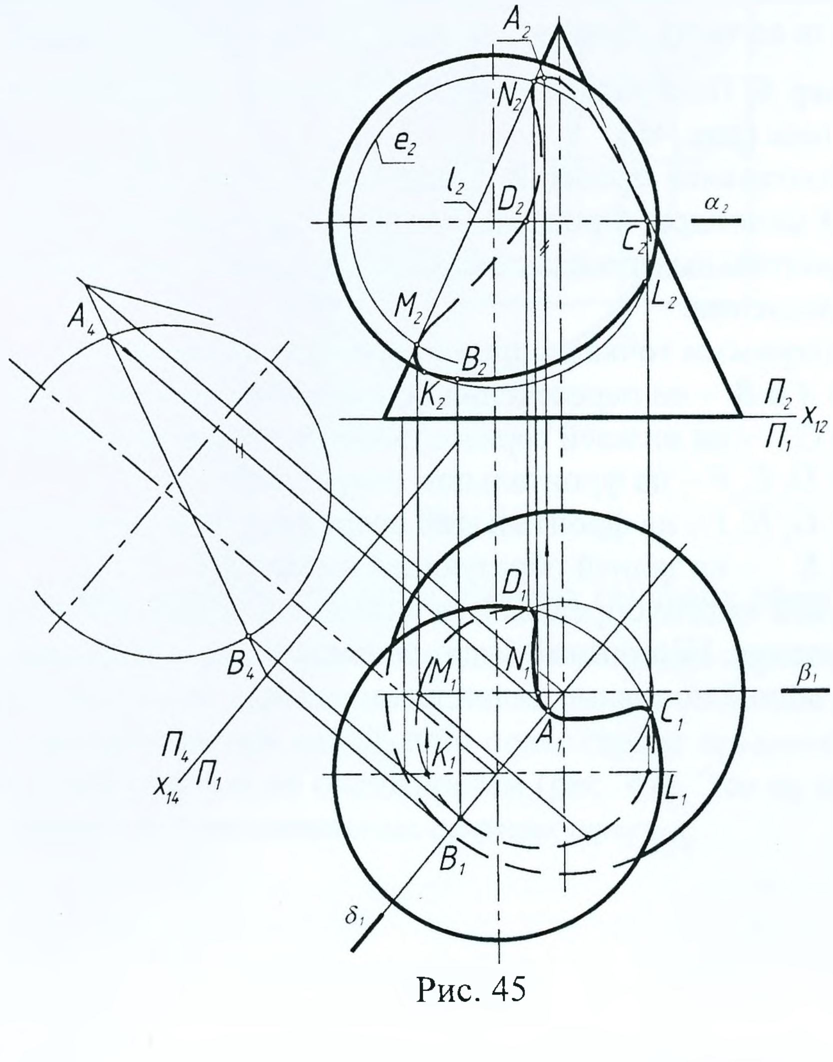


Рис. 45

При том же взаимном положении, как в примере 3, поверхности по-другому расположены относительно плоскостей проекций. Для построения линии пересечения вновь используются вспомогательные горизонтальные плоскости. Однако для определения некоторых характерных точек возникает необходимость преобразовать чертеж, например, ввести дополнительную плоскость проекций Π_4. Плоскость проекций Π_4 располагается параллельно общей плоскости симметрии поверхностей – плоскости δ, в которой находятся высшая A и низшая B точки кривой. На плоскости Π_4 проекции очерков поверхностей пересекаются в точках A_4, B_4. Затем по линиям проекционной связи определяются горизонтальные и фронтальные проекции этих точек. (Вместо дополнительного проецирования можно применять преобразование вращением.)

Для определения точек M и N на фронтальной очерковой образующей конуса введена вспомогательная фронтальная плоскость β, проходящая через образующую l и пересекающая сферу по окружности e $(M, N = e \cap l)$.

Точки C и D, лежащие на экваторе сферы, как и в предыдущем примере, определяются с помощью плоскости горизонтального уровня α.

Промежуточные точки определяются также с помощью плоскостей горизонтального уровня (на чертеже не показано).

Точки K и L на главном меридиане сферы определены после того, как была построена горизонтальная проекция искомой кривой.

Большая часть фронтальной проекции кривой не видна, так как находится на невидимой (задней) стороне сферы. На горизонтальной проекции кривой не видна та ее часть, которая расположена на нижней стороне сферы.

Пример 5. Построить линию пересечения прямого кругового цилиндра и открытого тора (рис. 46).

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекций цилиндра. Фронтальная проекция построена с помощью вспомогательных фронтальных плоскостей. Они пересекают цилиндр по образующим, а тор – по параллелям.

Характерными точками линии пересечения являются:

точки A и B – на пересечении оснований цилиндра и тора;

точка C - на нижней горизонтальной очерковой линии тора;

точки D, E, F – на фронтальном очерке тора;

точки G, H, I – на фронтальных очерковых образующих цилиндра;

точка K - на задней образующей цилиндра.

В данной задаче определяется видимость только фронтальной проекции линии пересечения. Невидимой будет та часть линии пересечения, которая расположена на задней половине цилиндра.

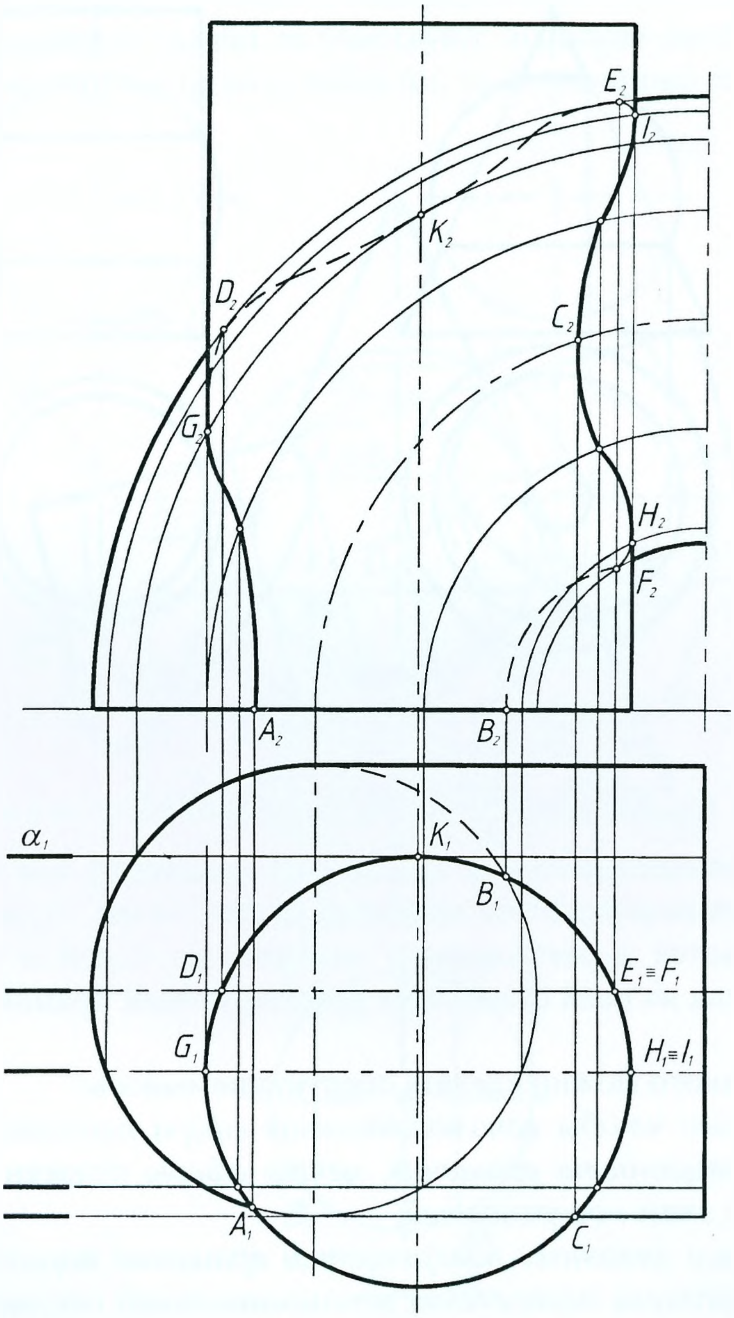


Рис. 46

6.2. Применение вспомогательных секущих сфер

Любые две поверхности вращения с общей осью пересекаются по окружностям, являющимся их параллелями.

Сфера с центром на оси какой-либо поверхности вращения также пересекается с этой поверхностью по окружностям (рис. 47). Это ее свойство положено в основу *метода вспомогательных секущих сфер*.

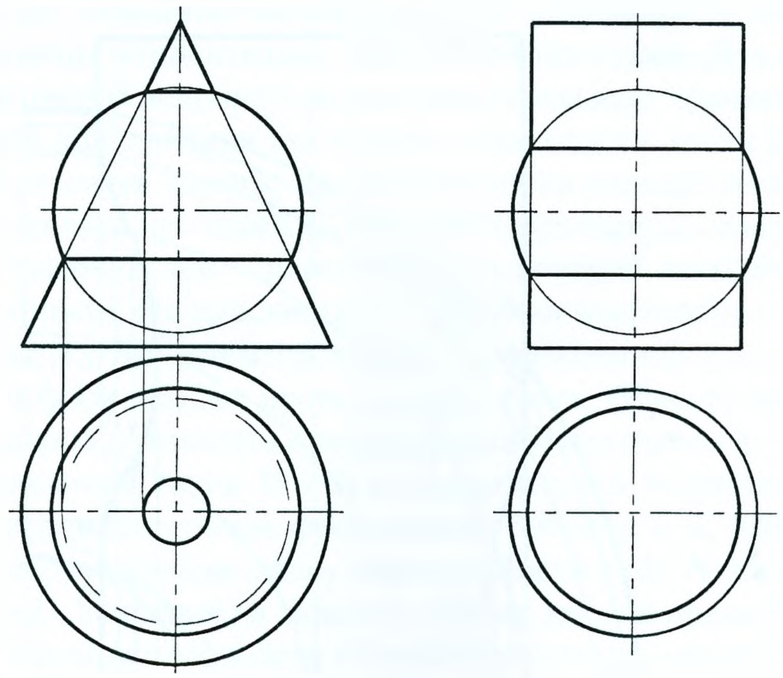


Рис. 47

6.2.1. Способ вспомогательных концентрических сфер

Способ концентрических сфер можно применять для построения линии пересечения двух поверхностей вращения в том случае, если оси этих поверхностей пересекаются и расположены параллельно одной и той же плоскости проекций или одна из осей становится проецирующей прямой, а вторая – линией уровня.

Из сказанного можно сделать следующие *выводы*:

1. *Для того чтобы вспомогательная сфера пересекала по параллелям две заданные поверхности вращения, центр сферы должен лежать в точке пересечения осей этих поверхностей.*

2. *Если оси заданных поверхностей вращения параллельны плоскости проекций, то параллели пересечения вспомогательной секущей сферы с этими поверхностями проецируются на эту плоскость в прямые линии.*

Рассмотрим использование данного способа на нескольких примерах.

Пример 1. Построить линию пересечения поверхностей конуса и цилиндра. На рис. 48 даны фронтальные проекции поверхностей.

Прежде чем приступить к построениям отметим четыре общие точки 1_2, 2_2, 3_2, 4_2 цилиндра и конуса в пересечении очерковых образующих - главных меридианов поверхностей.

Точку пересечения фронтальных проекций осей вращения O_2 примем за центр концентрических сфер. Проведем вспомогательную секущую сферу 1 произвольного радиуса. Она пересечет каждую из поверхностей по двум окружностям (параллелям) фронтальные проекции которых m_2 и m_2', n_2 и n_2' – прямые линии. Эти окружности, пересекаются между собой в искомых точках, принадлежащих линии пересечения поверхностей. Из чертежа видно, что окружность m не пересекается в области поверхностей с полученными окружностями, поэтому в решении задачи не участвуют. Выбирая иной радиус вспомогательной сферы, можно построить любое число точек линии пересечения.

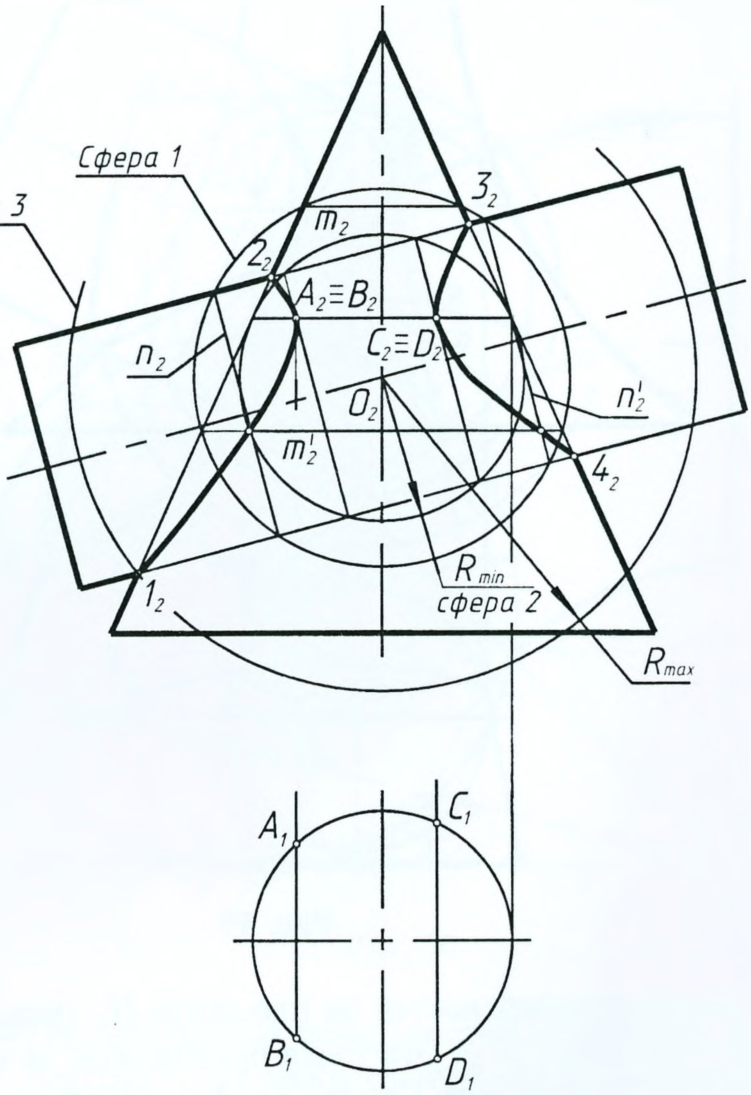


Рис. 48

Для определения интервала, в пределах которого следует брать значение величин радиусов сферических поверхностей, а также для определения характерных точек, принадлежащих линии пересечения, необходимо использовать сферу минимального радиуса. Такая сфера должна касаться одной поверхности, а другую пересекать. В нашем примере это сфера 2, пересекающая цилиндр по двум окружностям и касающаяся конуса. Это сечение определяет четыре характерные точки A_2, B_2, C_2, D_2 противоположных частей линии пересечения, наиболее близко расположенные. Расстояние от точки O_2 до наиболее удаленной точки 1_2 пересечения фронтальных очерков поверхностей укажет величину максимального радиуса вспомогательной сферы (сфера 3).

Горизонтальные проекции точек пересечения строятся с помощью горизонтальных проекций параллелей конуса (см. горизонтальные проекции точек A, B, C, D).

Пример 2. Построить линию пересечения тора и цилиндра (рис. 49).

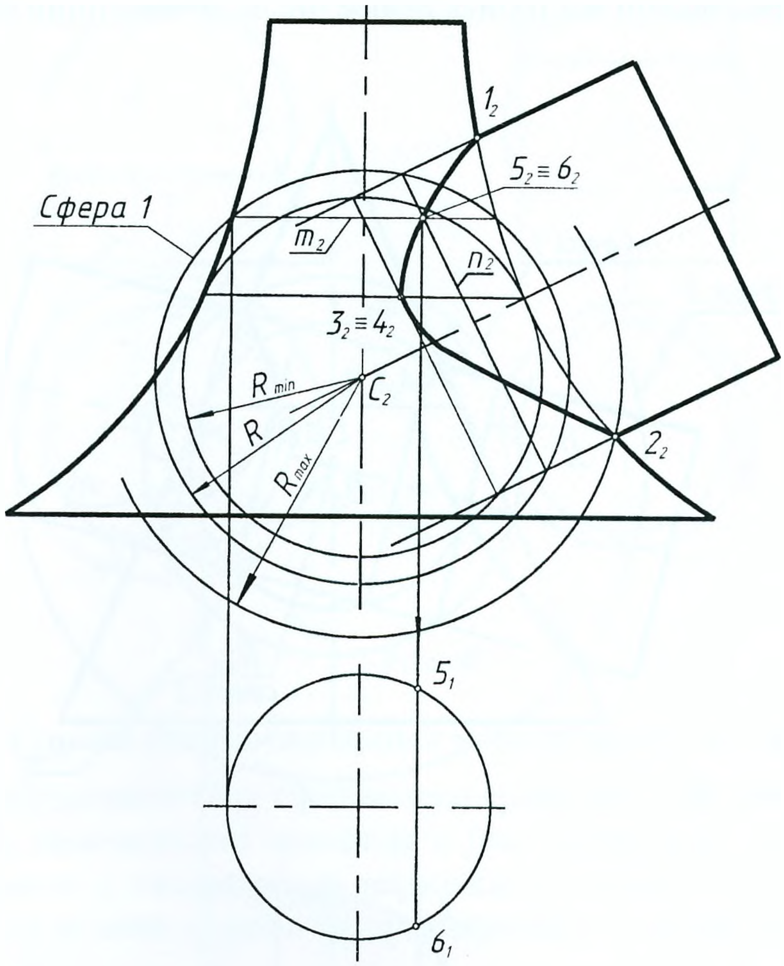


Рис. 49

Даны проекции поверхностей на плоскость $П_2$, параллельную их осям, пересекающимся в точке *C* (C_2). Эта точка принимается за центр всех вспомогательных концентрических сфер. Каждая из сфер, например, сфера 1 пересечет заданные поверхности по окружностям (параллелям), фронтальные проекции которых m_2 и n_2 – прямые линии. Точки пересечения *5* и *6* ($5_2 \equiv 6_2$) этих параллелей принадлежат искомой линии.

Точки *1* (1_2) и *2* (2_2) находятся на пересечении фронтальных очерков поверхностей (главных меридианов). Точки *3* и *4* ($3_2 \equiv 4_2$) построены с помощью сферы минимального радиуса и являются крайними левыми точками линии пересечения поверхностей. Величина максимального радиуса сферы равна отрезку $O_2 2_2$.

Горизонтальные проекции точек линии пересечения можно построить с помощью горизонтальных проекций параллелей тора (см. горизонтальные проекции точек *5* и *6*).

6.2.2. Способ вспомогательных эксцентрических сфер

Используется для построения линии пересечения поверхностей вращения, имеющих общую плоскость симметрии.

Пример 1. Построить линию пересечения конуса вращения и тора (рис. 50).

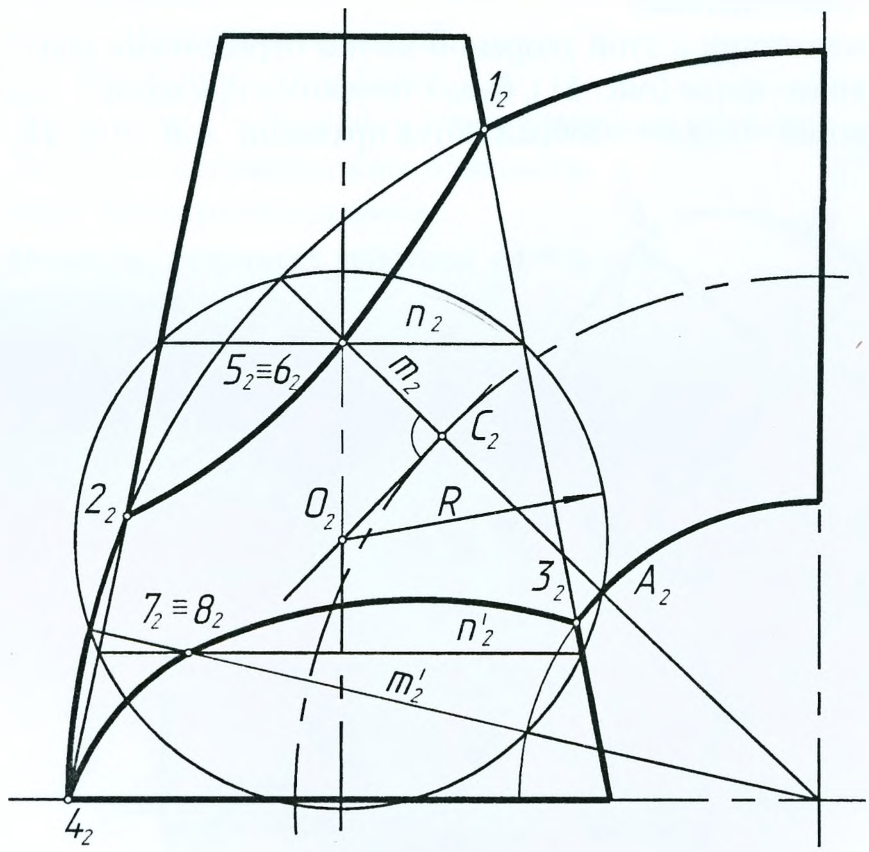


Рис. 50

Фронтальные очерки данных поверхностей пересекаются в точках 1_2, 2_2, 3_2, 4_2. Необходимо построить вспомогательную сферу, которая пересечет обе поверхности по окружностям. Проведена фронтальная проекция m_2 окружности тора, которую можно принять за линию пересечения тора вспомогательной сферой. Затем через середину ее проекции проведена прямая C_2O_2, перпендикулярная к ней до пересечения с осью конуса в точке O_2.

Из точки O_2 проводится вспомогательная сфера радиуса O_2A_2, которая пересечет тор еще и по второй окружности m'_2, а конус по двум окружностям n_2 и n'_2. Каждая пара окружностей пересекается в двух общих точках $5_2 \equiv 6_2$ и $7_2 \equiv 8_2$, принадлежащих линиям пересечения поверхностей конуса и тора. Взяв другое сечение тора,можно найти новые точки.

Таким образом, при частном взаимном расположении поверхностей вращения применение способа сферических сечений позволяет достаточно просто построить линию их пересечения по одной проекции.

6.2.3. Частный случай пересечения поверхностей вращения (теорема Монжа)

Если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

В соответствии с этой теоремой линии пересечения конуса и цилиндра, описанных около сферы (рис. 51), будут плоскими кривыми – эллипсами, фронтальные проекции которых изображаются прямыми A_2B_2 и C_2D_2.

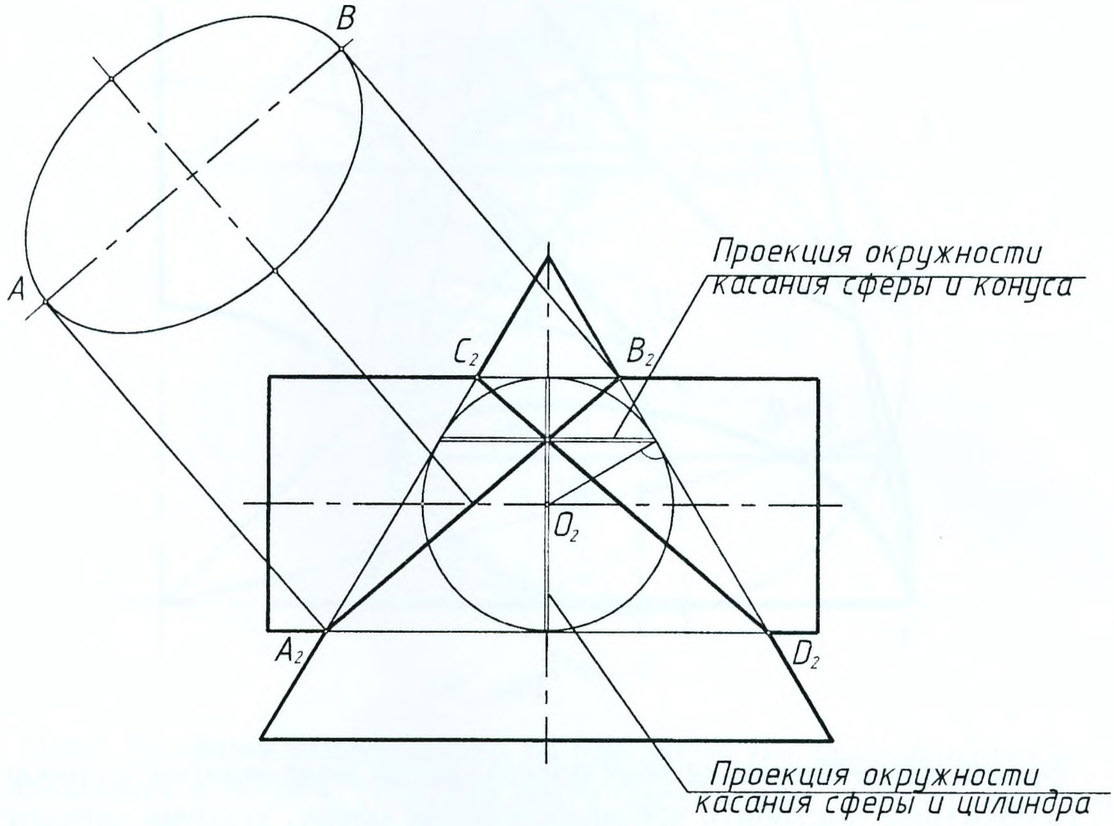


Рис. 51

Теорема Монжа находит эффективное применение при конструировании трубопроводов, при проектировании различных архитектурных форм и пространственных конструкций, так как упрощает выполнение сопряжений поверхностей.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A, B, C, K, M, 1, 2, 3$ - точки
$a, b, c, d, h, f, l, m, n, t$ - линии (прямые, кривые)
$\Theta, \Phi, \Psi, \Sigma, \Delta, \alpha, \beta, \gamma$ - поверхности, плоскости
i, j - ось вращения
Π_1, Π_2, Π_3 - плоскости проекций
x, y, z - оси системы координат
$A_1, A_2, A_3, a_1, a_2, a_3$ - проекции геометрических образов
$\Sigma_1, \Theta_2, \alpha_1, \beta_2$ - проецирующие плоскости
$\equiv$ - тождественные совпадения
$=$ - равенство, результат действия $(A = a \cap b)$
$\cap$ - пересечение
$\perp$ - перпендикулярность
$\|$ - параллельность
$\in$ - принадлежность
$\supset$ - включает в себя, проходит через

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н.Н. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1990. - 240 с.
2. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. – М.: Стройиздат, 1987. – 319 с.
3. Климухин А.Г. Начертательная геометрия. - М.: Стройиздат, 1978. – 334 с.
4. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1999. – 136 с.
5. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1978. – 445 с.

Учебное издание

Составители: Яромич Алла Ивановна
Шумская Людмила Павловна
Яромич Наталья Николаевна

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

Методическое пособие по архитектурному черчению и начертательной геометрии

для студентов специальностей:

69 01 01 – архитектура,

70 04 03 – водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов,

74 05 01 – мелиорация и водное хозяйство

Ответственный за выпуск: Яромич Н. Н.
Редактор: Строкач Т. В.
Корректор: Никитчик Е. В.

Подписано к печати 30.01.2006 г. Формат 60x84 1/8. Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 1,56. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 150 экз. Заказ № 128. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.