

О поиске новых классов решений дифференциальных уравнений четвертого порядка с помощью производной Шварца

Г.П. Степанюк, А.В. Чичурин

Для отыскания условий интегрирования линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4} + p(x)\frac{d^3y}{dx^3} + q(x)\frac{d^2y}{dx^2} + r(x)\frac{dy}{dx} + s(x)y = 0 \quad (1)$$

используется метод [1], содержащий преобразования с производной Шварца. Интересным для исследования представляется класс уравнений (1), коэффициенты которого удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2}{3}q - \frac{1}{4}p^2, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{3}{2}r - \frac{1}{4}pq, \quad \frac{dr}{dx} = 4s - \frac{1}{4}pr. \quad (2)$$

Для уравнений (1),(2) согласно рассматриваемому методу [1], строится нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$20(8y^3 - 15y'^2 + 12yy'')y'''' - 280yy''''^2 + 20(42y'y'' - 56y^2y''')y'''' - 504y''^3 + \\ + 192y^2y''^2 + (448y^4 + 2040yy'^2)y'' - 1275y'^4 - 560y^3y'^2 + 64y^6 = 0. \quad (3)$$

Отыскание решений уравнения (1) тесно связано с интегрированием уравнений (1),(2). В [1, 2] было доказано существование у уравнения (3) одно- и двухпараметрических семейств решений вида $y = \frac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{(b_0x^2 + b_1x + b_2)^2}$, где a_i, b_i ($i = 0, 1, 2$) – постоянные.

В данной работе, используя методы изложенные в работах [3, 4], доказывается существование решений вида

$$y = \frac{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}{(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)^2}, \quad a_i, b_i \ (i = 0, 1, 2, 3, 4) - const. \quad (4)$$

Например, однопараметрическим семейством решений вида (4) у уравнения (3) является семейство (c_1 – произвольная постоянная) $y = -\frac{1323}{2} \times$

$$\times \frac{194481x^4 - 129654c_1x^3 + 64827c_1^2x^2 - 210(326\sqrt{29} - 1411)c_1^3x - 25(1196\sqrt{29} - 7405)c_1^4}{(9261x^3 + 9261c_1x^2 - 3087c_1^2x + 10(13\sqrt{29} - 293)c_1^3)^2}.$$

1. Чичурин А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография. 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Изд-во РУДН, 2003. - 163 с.
2. Чичурин А.В. Об одном нелинейном уравнении четвертого порядка с постоянными коэффициентами // Веснік Брэсцкага універсітэта - 2000. - № 4. - Р. 33-38.
3. Abell Martha L., Braselton James P. Differential Equations with Mathematica. Third ed. - Elsevier Academic Press, 2004. - 876 p.
4. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. - Мн.: БГУ, 1999. -265 с.