И.Н. Мельникова, И.В. Савлук
Беларусь, Брест, БРГУ имени А.С. Пушкина

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие случайного процесса представляет собой обобщение понятия случайной величины. Случайным процессом (с. п.) *X(t)* называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной *X(t)*.

Предположим, что опыт, в ходе которого с. п. протекает так или иначе уже произведён, т.е. произошло элементарное событие. Это значит, что с. п. уже не случаен, и зависимость его от *t* приняла определённый вид: это уже обычная, неслучайная функция аргумента *t*. Эта функция называется реализация случайного процесса *X(t)*.

Реализацией случайного процесса *X(t)* называется неслучайная функция x(t), в которую превращается случайный процесс *X(t)* в результате опыта; другими словами, конкретный вид, принятый с. п. *X(t)* который наблюдался на каком-то отрезке времени от 0 до τ.

Если произведён не один опыт, а несколько, в результате каждого из которых наблюдена какая-то реализация с. п. $x_1(t)$ (*i* — номер опыта), то получим несколько реализаций процесса: $x_1(t)$, $x_2(t)$ …, $x_n(t)$, … или семейство реализаций.

Семейство реализаций случайного процесса — основной экспериментальный материал, на основе которого можно получить характеристики, с. п. — какие, мы увидим в дальнейшем.

Случайный процесс *X(t)* называется процессом с дискретным временем, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты $t_1, t_2 ..., t_j, ...$, число которых конечно или счётно. Множество Т является дискретным.

Случайный процесс *X(t)* называется процессом с непрерывным временем, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода τ.

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется процессом с дискретными состояниями, если в любой момент времени *t* множество его состояний конечно или счетно; другими словами, если его сечение в любой момент *t* характеризуется дискретной случайной величиной *X(t)* (в многомерном случае — несколькими дискретными случайными величинами).

Таким образом, в зависимости от характера множества *T* значений аргумента *t*, в которые возможны переходы системы из состояния в состояние, а также множества самих состояний все случайные процессы можно разделить на четыре класса:

1) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;

2) процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем;

3) Процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем;

4) Процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Полной, исчерпывающей характеристикой случайной величины является её закон распределения. Для дискретной с. в. он может быть задан рядом распределения, для непрерывной с. в. — плотностью распределения (п. р.). Универсальной исчерпывающей характеристикой любой с. в. X — дискретной, непрерывной или смешанной — является ее функция распределения (ф. р.) $F(x) = P\{X < x\}$, т. е вероятность того, что с. в. примет значение, меньшее заданного x.

Пусть имеется с. п. *X(t)*. Сечение с. п. *X(t)* при любом фиксированном значении аргумента представляет собой случайную величину, которая имеет закон распределения $F(t, x) = P\{X(t) < x\}$.

Эта функция называется одномерным законом распределения с. п. *X(t)*. Эта функция зависит от двух аргументов: во-первых, от значения *t*, для которого берется сечение; во-вторых от значения *x*, меньше которого должна быть.

Одномерный закон распределения не может служить полной, исчерпывающей характеристикой с. п. X(t). Более полной (но все еще не исчерпывающей) характеристикой будет двумерный закон распределения, представленный совместной функцией распределения двух сечений с. п., взятых соответственно для моментов t_1 и t_2:

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}.$$

Это функция уже не двух, а четырех аргументов: моментов времени, для которых берутся сечения двух значений x_1 и x_2. Однако и двумерный закон распределения не является исчерпывающей характеристикой с. п. X(t); ещё более полной характеристикой будет трёхмерный закон:

$$F(t_1, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, X(t_3) < x_3\}$$ и т. д.

Теоретически можно неограниченно увеличивать число сечений и получать при этом более полную характеристику с. п. При исследовании случайных процессов для практических целей отказываются от законов распределения с. п., а пользуются его основными характеристиками, описывающими с. п. не полностью, а частично.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венцель, Е.С. Прикладные задачи теории вероятности / Венцель, Е.С., Овчаров Л.А. – Радио и связь, 1983. – 416 с.

2. Карлин С. Основы теории случайных процессов / Карлин С. – Мир, 1971. – 535 с.

Е.И. Мирская
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МОМЕНТОВ СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Спектральный анализ временных рядов – один из методов обработки результатов различных экспериментов. В настоящее время методы спектрального анализа широко применяются в различных областях знаний: в физике, астрономии, биологии, медицине. Часто данные являются многомерными. Такая ситуация особенно характерна для экономических данных.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\},\ t \in Z,\ c\ \ MX(t) = 0,$ неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda), a, b = \overline{1,r}, \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$.

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности многомерного случайного процесса в работе исследована статистика вида

$$\bar{f}_{ab}(\lambda) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_{ab}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_{ab}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \tag{1}$$

где $W_{ab}(x), x \in R, a, b = \overline{1,r}$ – спектральное окно, $I_{ab}(\lambda, s)$ – модифицированная периодограмма, заданная соотношением

$$I_{ab}(\lambda, s) = \frac{1}{2\pi T} H_a(\lambda, s)\overline{H_b(\lambda, s)}, \tag{2}$$

$$H_a(\lambda, s) = \sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) X_a\big(p + (s-1)(N-Q)\big) e^{-i\lambda\left(p+(s-1)(N-Q)\right)}, \tag{3}$$

$s = \overline{1,S}, \lambda \in \Pi, a = \overline{1,r},$ причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a^N(p), p \in Z$.

В работе [1] оценка (1) исследована для одномерных стационарных случайных процессов. В данной работе оценка (1) исследована для многомерных случайных процессов.

Показано, что предложенная оценка является асимптотически несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн. : БГУ, 1999. – 218 с.