

**О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвисевич**

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**Допущено Министерством образования Республики  
Беларусь в качестве учебного пособия для студентов  
строительных специальностей высших учебных  
заведений.**

**Брест 2001**

УДК 539.3  
ББК 30.121

**О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвисевич, Основы теории упругости.** Учебное пособие для студентов строительных специальностей высших учебных заведений.- Брест: изд. БГТУ, 2001.- 150 с.: ил.

ISBN 985-6584-20-5

В книге изложены общие положения теории упругости, основные соотношения, постановка и методы решения задач. Рассмотрены прикладные вопросы: основы теории тонких оболочек, тонких пластин.

Рецензенты:

зав. кафедрой сопротивления материалов и теории упругости Белорусской Государственной политехнической академии, профессор Балыкин М.К.  
директор научно-технического центра Министерства строительства и архитектуры Республики Беларусь, к.т.н. Найчук А.Я.

ISBN 985-6584-20-5

- © **О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвисевич, 2001**
- © Брестский государственный технический университет, 2001

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии обобщен многолетний опыт преподавания курса "Теория упругости и пластичности" в Брестском политехническом институте. В книге изложены только вопросы теории упругости, по теории пластичности планируется написание дополнительного пособия.

При составлении учебного пособия принималось во внимание, что после изучения курса "Сопротивление материалов" студентам известны основные положения теории напряженно-деформированного состояния.

В первых двух главах книги рассмотрены общие вопросы теории упругости, основные соотношения - дифференциальные уравнения равновесия, зависимости Коши, формулы закона Гука, уравнения совместности деформаций Сен-Венана, постановка и методы решения задач при объемном и плоском напряженном состоянии; рассмотрено решение плоских задач с помощью различных методов, в том числе и метода конечных разностей. Широко распространенный в инженерной практике метод конечных элементов (МКЭ) не рассматривается в пособии, т.к. его основы детально излагаются в курсе «Численные методы», который читается студентам технических специальностей. Использование вариационных методов продемонстрировано для расчета пластин.

В третью главу включены прикладные вопросы теории упругости. Рассматриваются особенности напряженно-деформированного состояния призматических стержней при кручении, уравнения теории тонких пластин и некоторые распространенные методы их расчета, основы расчета тонких безмоментных и пологих оболочек.

В приложении приведены учебные примеры: "Расчет неразрезной балки-стенки", "Расчет прямоугольной в плане пластины на поперечную нагрузку", "Расчет купола (оболочки вращения)".

Учебное пособие предназначено для студентов вузов строительных и других специальностей и может быть использовано сотрудниками проектных и научно-исследовательских организаций в их практической работе.

Авторы выражают благодарность профессору М.К. Балыкину, доцентам В.П. Бриксе, Л.И. Шевчуку, коллективу Научно-технического центра Министерства строительства и архитектуры в г. Бресте (директор к.т.н. А.Я. Найчук), за сделанные ими замечания, дополнения, которые способствовали улучшению содержания учебного пособия.

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов, строительная механика, теория упругости являются основными разделами механики деформируемого твердого тела (МДТТ) - науки о движении и равновесии реальных твердых тел. Ее основная задача состоит в определении деформаций и напряжений, возникающих в теле при действии внешних сил, изучение вопросов прочности и разрушения материалов.

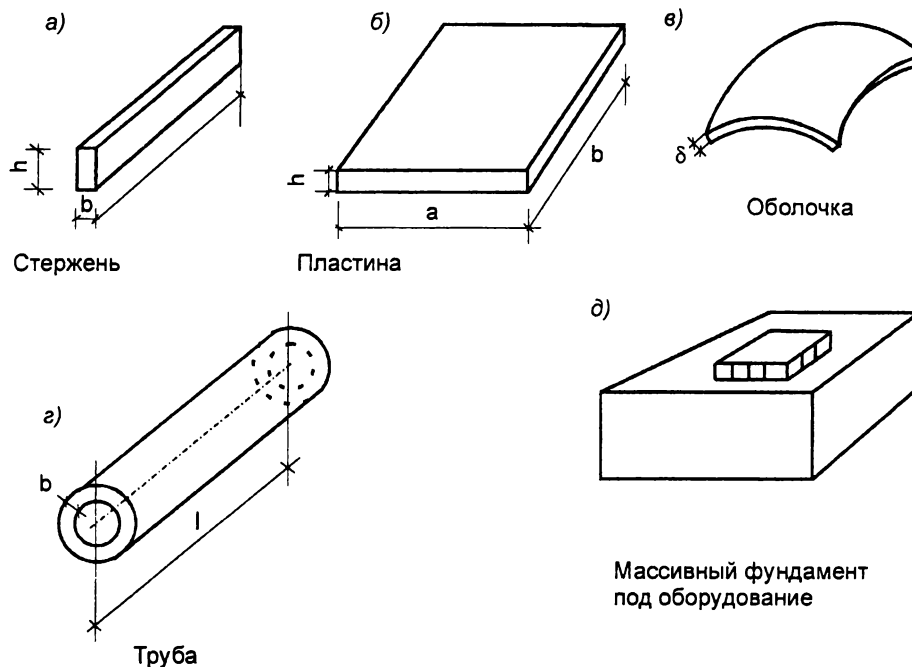


Рис. В.1

В сопротивлении материалов главный объект изучения - стержень (брус) (рис. В.1), являющийся характерным конструктивным элементом зданий и сооружений, где он применяется в виде колонн, балок, раскосов ферм и арок и т.д. Напряженно-деформированное состояние стержней, геометрическая форма которых отличается тем, что длина значительно превосходит размеры поперечного сечения, может быть установлено приближенными теоретическими методами, использующими кинематические или статические гипотезы (например, гипотеза плоских сечений). Но в инженерной практике находят применение конструктивные элементы сложного очертания, к ним относятся пластины, оболочки, трубы, массивы и др. (рис. В.1). В большинстве случаев классические методы сопротивления материалов для определения напряжений, деформаций и перемещений в таких телах не применимы. Но существуют некоторые общие пути решения задач, основанные на уравнениях, описывающих деформацию упругой среды под нагрузкой. Их использование дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций любой формы. Эти уравнения и способы их решения изучаются в курсе теории упругости. Методы теории упругости позволяют получить более точные решения по сравнению с методами, применяемыми в других разделах МДТТ (сопротивлении материалов, строительной механике). Необходимо отметить, что теория упругости во многом обеспечивает развитие смежных дисциплин за счет расширения круга рассматриваемых в этих дисциплинах задач.

Нередко при решении задач методами теории упругости используются рабочие гипотезы, причем заранее известно, что ошибка от их введения невелика, по сути при этом пренебрегают величинами весьма малыми по сравнению с теми, которые играют решающую роль. Например, при расчете тонких плит и оболочек принимают гипотезу прямых нормалей, которая позволяет рассматривать

лишь срединную поверхность этих тел. В этом случае из-за небольшой толщины плит и оболочек ошибка, получающаяся от введения этой гипотезы, практически не отражается на окончательных результатах.

В теории упругости широко применяют принцип Сен-Венана, который можно отнести к рабочим гипотезам. Согласно этому принципу система взаимно уравновешенных нагрузок, действующих на малую часть тела, вызывает лишь местные напряжения, быстро убывающие от места приложения нагрузок. Таким образом, такую систему нагрузок в необходимых случаях можно заменить статически эквивалентной сосредоточенной силой. Такая замена существенно отражается только на местных напряжениях.

Теория упругости все свои выводы основывает на некоторой модели твердого деформируемого тела. Такой моделью является идеально упругое тело. Под упругостью понимается способность твердого тела полностью восстанавливать свою первоначальную форму и первоначальные размеры после удаления внешних сил, которые вызвали деформацию. Все выводы теории упругости основываются на законе Гука о прямой пропорциональности между напряжениями и деформациями.

Материал идеально упругого тела предполагается сплошным, т.е. тело, непрерывное до деформации, остается непрерывным и после деформации. Свойство непрерывности относится к любому сколь угодно малому объему тела. Это допущение позволяет утверждать, что напряжения, деформации, перемещения являются непрерывными функциями координат точек тела.

В настоящем пособии рассматриваются вопросы теории упругости однородных тел, т.е. физические характеристики тел (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность) не зависят от координат точек тела.

Материал упругого тела считается изотропным, т.е. его физические свойства в каждой точке одинаковы по всем направлениям. В тех случаях, когда физико-механические свойства тела неодинаковы по разным направлениям, тело считают анизотропным (в последующем изложении рассматриваются только изотропные упругие тела).

В теории упругости принимают, что перемещения точек тела при его деформации очень малы по сравнению с размерами самого тела. Это обстоятельство позволяет не учитывать влияние перемещений на взаимное расположение нагрузок и расстояния от них до любых точек тела, в связи с этим уравнения равновесия относятся к недеформированному телу. Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет применить принцип независимости действия сил.

Задача теории упругости в целом может быть сформулирована следующим образом: имеется тело заданной формы, механические свойства материала известны, на него действуют заданные нагрузки и наложены некоторые связи; требуется определить в теле напряжения, деформации и перемещения.

Наука "Теория упругости" прошла сложный путь развития. Основополагающими для её становления явились труды Навье, Коши, Ляме, Клапейрона, Сен-Венана, Жермен, важную роль сыграли работы М.В. Остроградского, И.Г. Бубнова, С.П. Тимошенко, Б.Г. Галеркина, П.Ф. Папковича, В.З. Власова, А.А. Ильюшина. Биографические данные видных ученых и инженеров, их научные интересы изложены в приложении.

Теории упругости однородных тел посвящено много учебников и учебных пособий, например [1,3-10].

Основной целью данного пособия является на простом, доступном математическом уровне дать постановку задач теории упругости, продемонстрировать приёмы и методы их решения.

## ГЛАВА 1.

### **Объёмное напряжённое состояние. Основные соотношения. Постановка задач.**

#### **1.1 Нагрузки и напряжения.**

Внешние силы, действующие на тело, можно объединить в две группы: поверхностные и объёмные (массовые). Если силы являются результатом контактного взаимодействия данного тела с другими телами, то они приложены только к поверхности тела в месте контакта и называются поверхностными силами. Объёмные силы действуют в каждой точке тела, к ним относятся собственный вес, силы инерции.

Поверхностные и объёмные силы характеризуются интенсивностями, которые в общем случае зависят от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и выражаются соответственно в  $\text{Н/м}^2$  (Па) и  $\text{Н/м}^3$ . Если размеры площади, на которой действует поверхностная сила, мала в сравнении с размерами тела, то этой площадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке.

Под действием заданных сил в теле возникают напряжения. Напряжения представляют собой усилие, приходящееся на единицу площади сечения (интенсивность внутренних усилий). Для исследования напряженного состояния в точке "К" тела "вырежем" около этой точки элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям, а их длина равна  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 1.1). На гранях этого параллелепипеда действуют напряжения, которые можно разложить на нормальную составляющую к грани (нормальное напряжение) и касательную составляющую (касательное напряжение). Касательное напряжение следует выразить через две составляющие, параллельные координатным осям. В результате на каждой грани параллелепипеда действуют три напряжения. Нормальные напряжения в дальнейшем будем обозначать  $\sigma$ , касательные  $\tau$  (следует иметь в виду, что существуют различные системы обозначений напряжений, деформаций и перемещений). Индекс при  $\sigma$  показывает, какой оси параллельно это напряжение. У касательных напряжений ставятся два индекса, один указывает, какой оси параллельно напряжение, второй - какой оси перпендикулярна площадка, в плоскости которой действует напряжение.

Правило знаков для напряжений примем следующее: если внешняя нормаль к площадке имеет положительное (отрицательное) направление, то напряжение положительно, если его направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением соответствующей координатной оси. Таким образом, совокупность напряжений на гранях параллелепипеда образует тензор напряжений.

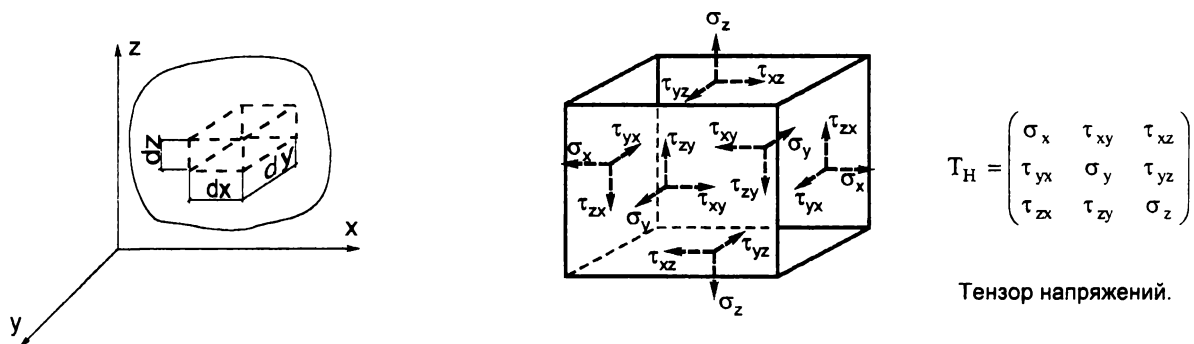


Рис.1.1 Схема напряженного состояния в точке

В соответствии с этими правилами растягивающим нормальным напряжения присваивается знак "плюс", сжимающим - "минус".

На рис. 1.1 показаны положительные направления напряжений. На гранях элементарного параллелепипеда действуют три нормальных напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и шесть касательных напряжений  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz}$ .

В курсе "Сопротивление материалов" доказан закон парности касательных напряжений для плоского напряженного состояния. В соответствии с ним касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по величине, т.е.  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ .

Таким образом, с учетом парности касательных напряжений напряженное состояние в точке тела характеризуется шестью компонентами напряжения. Эти составляющие являются функциями координат

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned}$$

## 1.2 Дифференциальные уравнения равновесия.

Выделим из упругого тела бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с размерами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 1.2). Напряжения, действующие по противоположным граням элемента, в общем случае не равны между собой. Принятое допущение о сплошности и однородности материала позволяет считать, что напряжения внутри тела при переходе от одной точки к другой будут изменяться непрерывно. При переходе от левой грани к правой напряжения зависят только от координаты  $x$ , от задней грани к передней - от координаты  $y$  от нижней к верхней - от координаты  $z$ .

Для полноты исследования учтем объемные силы, к которым относятся собственный вес, инерционные силы. Проекции объемных сил, приходящиеся на единицу объема, обозначим через  $X, Y, Z$ .

Для твердого тела можно записать шесть уравнений равновесия: суммы проекций сил, действующих по граням выделенного элемента, на координатные оси равны нулю  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum Z = 0$ , суммы моментов всех усилий относительно этих осей равны нулю  $\sum M_x = 0$ ,  $\sum M_y = 0$ ,  $\sum M_z = 0$ .

Спроектируем все силы на ось  $x$ , учтем, что для нахождения усилий надо напряжение умножить на площади граней,

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) * \\ & * dx dy - \sigma_x dy dz - \tau_{xy} dx dz - \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

После сокращения и деления слагаемых уравнения на  $dx dy dz$  получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично составим и два другие уравнения равновесия. В итоге получим систему дифференциальных уравнений равновесия, которые часто называют уравнениями Навье,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Условия  $\sum M_x = 0$ ,  $\sum M_y = 0$ ,  $\sum M_z = 0$  для элементарного прямоугольного параллелепипеда приводят к соотношениям  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  т.е. к подтверждению закона парности касательных напряжений. Согласно данному закону уравнения (1.1) содержат не девять, а шесть неизвестных составляющих, характеризующих напряженное состояние в точке тела

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned}$$

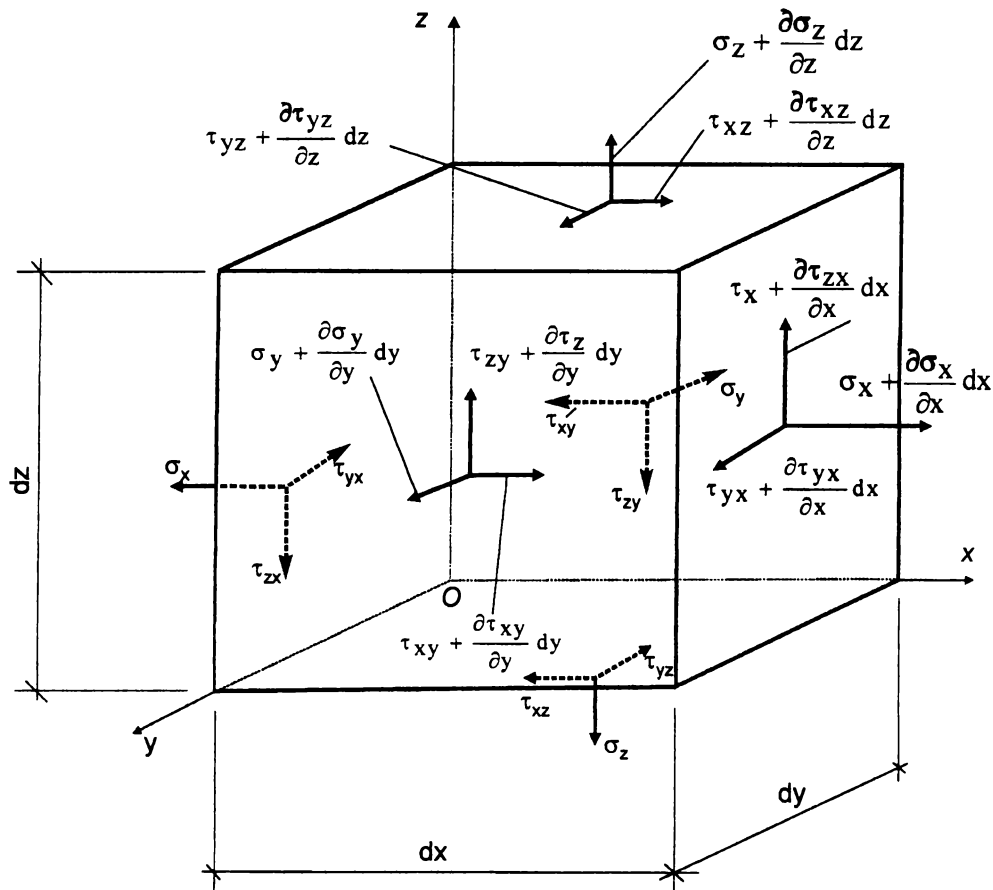


Рис. 1.2 Схема параллелепипеда с действующими напряжениями

Уравнений равновесия (1.1) недостаточно для определения шести неизвестных составляющих полного напряжения в точке. Задача является статически неопределимой, и для ее решения, помимо соотношений (1.1), необходимо иметь дополнительные уравнения, определяющие зависимость между деформациями.

### 1.3 Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности.

Вырежем из упругого тела бесконечно малый тетраэдр тремя координатными плоскостями и наклонной плоскостью (рис. 1.3). Положение площадки ABC определяется нормалью  $\nu$ , направляющие косинусы которой  $\cos(x, \nu)=l$ ,  $\cos(y, \nu)=m$ ,  $\cos(z, \nu)=n$ .

В курсе аналитической геометрии доказано соотношение между направляющими косинусами:  $l^2+m^2+n^2=1$ .

Пусть известны составляющие напряжений, действующих по координатным площадкам. Найдем полное напряжение  $P_\nu$  на наклонной грани ABC. Напряжение  $P_\nu$  (на рис. 1.3 оно не показано) разложим на составляющие  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$ , параллельные координатным осям.

Обозначим площадь грани ABC через  $dA$ , тогда площади граней BOC, AOC, BOA будут соответственно равны  $dA \cdot l$ ,  $dA \cdot m$ ,  $dA \cdot n$ . Так как рассматривается бесконечно малый тетраэдр, то при составлении условий его равновесия объемной силой, как бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем силы, действующие по граням, можно пренебречь.

Спроектируем на ось  $x$  все силы, действующие на тетраэдр,  $X_\nu dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{xy} dA \cdot m - \tau_{xz} dA \cdot n = 0$ .

Деля все слагаемые на  $dA$ , находим

$$X_\nu = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n.$$



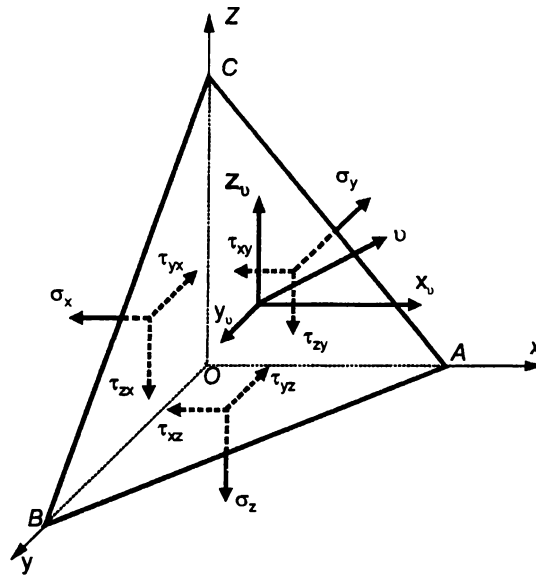


Рис. 1.3 Схема тетраэдра для определения напряжений по наклонным площадкам

Составляя уравнения проекций всех сил на оси  $y$  и  $z$ , получим ещё два уравнения.

Таким образом, уравнения равновесия элементарного тетраэдра имеют вид

$$\left. \begin{aligned} X_u &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n, \\ Y_u &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n, \\ Z_u &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Соотношения (1.2) позволяют вычислить составляющие полного напряжения  $P_u$  на наклонной площадке с нормалью  $u$  по известным составляющим напряжений по площадкам, параллельным координатным плоскостям.

Если площадка ABC совпадает с поверхностью тела, то  $X_u, Y_u, Z_u$  являются составляющими внешних сил. Уравнения (1.2) в этом случае называются *условиями на поверхности тела*, они связывают внешние силы с внутренними напряжениями.

#### 1.4 Исследование напряженного состояния в точке тела.

Равнодействующая составляющих напряжения на наклонной площадке  $X_u, Y_u, Z_u$  (полное напряжение) определяется как их геометрическая сумма

$$P_u = \sqrt{X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2}. \quad (1.3)$$

Величину  $P_u$  обычно раскладывают на составляющие по нормали к площадке (нормальное напряжение) и составляющую в плоскости площадки (касательное напряжение).

Нормальное напряжение можно выразить через  $X_u, Y_u, Z_u$ , спроектировав их на направление нормали  $u$   $\sigma_u = X_u \cdot l + Y_u \cdot m + Z_u \cdot n$ , либо через шесть составляющих напряжений на трех площадках, параллельных координатным плоскостям, используя уравнения (1.2),

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m + \\ &+ 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l. \end{aligned}$$

Касательное напряжение на наклонной площадке  $\tau_u$  находится из равенства

$$\tau_u^2 = P_u^2 - \sigma_u^2. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) позволяет вычислить величину касательного напряжения, но направление его действия в плоскости площадки пока остается неизвестным.

Будем считать, что касательное напряжение в плоскости площадки с нормалью  $\nu$  действует по направлению  $\eta$  с направляющими косинусами  $l_1; m_1; n_1$ . Обозначим его  $\tau_{\nu\eta}$ , так как направление  $\nu$  и  $\eta$  взаимно перпендикулярны, то  $l \cdot l_1 + m \cdot m_1 + n \cdot n_1 = 0$ .

Тогда величина  $\tau_{\nu\eta}$  представляет собой сумму проекций составляющих напряжений  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ , действующих на площадке с нормалью  $\nu$  на направление  $\eta$

$$\tau_{\nu\eta} = X_\nu l_1 + Y_\nu m_1 + Z_\nu n_1. \quad (1.5)$$

Используя зависимость (1.2) выражение (1.5) может быть записано с помощью шести составляющих напряжений на трех площадках, параллельных координатным плоскостям.

$$\begin{aligned} \tau_{\nu\eta} = & (\sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n) \cdot l_1 + (\tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n) \cdot m_1 + \\ & + (\tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n) \cdot n_1 = \sigma_x \cdot l \cdot l_1 + \sigma_y \cdot m \cdot m_1 + \sigma_z \cdot n \cdot n_1 + \\ & + \tau_{xy} (l \cdot m_1 + l_1 \cdot m) + \tau_{yz} (m \cdot n_1 + m_1 \cdot n) + \tau_{zx} (n \cdot l_1 + n_1 \cdot l). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из курса "Сопротивление материалов" известно, что площадка, где касательные напряжения равны нулю, называется главной. На главной площадке, так как  $\tau_\nu = 0$ ,  $\sigma_\nu = P_\nu$  направление действия нормального и полного напряжений совпадают.

Определение величины главных напряжений через напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям, и положения главных площадок может быть выполнено в следующей последовательности.

Проектируя главное напряжение на координатные оси, устанавливаем его составляющие

$$\sigma \cdot l = X_\nu; \quad \sigma \cdot m = Y_\nu; \quad \sigma \cdot n = Z_\nu. \quad (1.7)$$

Из выражений (1.2) и (1.7) следует

$$\left. \begin{aligned} \sigma \cdot l &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n, \\ \sigma \cdot m &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n, \\ \sigma \cdot n &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n; \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

или

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= 0, \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= 0, \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Система линейных алгебраических уравнений (1.9) относительно неизвестных  $l, m, n$  является однородной.

Условием нетривиальности решения системы является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $l, m, n$ , т.е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (1.10)$$

Раскрывая определитель (1.10), получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma^2 + \\ & + (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \cdot \sigma - \\ & - (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad \sigma^3 - J_1 \cdot \sigma^2 + J_2 \cdot \sigma - J_3 = 0, \quad (1.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Кубическое уравнение имеет три корня. Нумерация главных напряжений осуществляется в порядке убывания  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Три главные площадки в каждой точке напряженного тела расположены перпендикулярно друг другу.

Коэффициенты  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  не меняют своего значения при изменении системы координат; они являются соответственно первым ( $J_1$ ), вторым ( $J_2$ ) и третьим ( $J_3$ ) инвариантами напряженного состояния. Их можно выразить через главные напряжения, для этого в формулах (1.12) касательные напряжения необходимо принять равными нулю

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Инварианты являются основными характеристиками напряженного состояния в точке.

### 1.5 Составляющие перемещений и составляющие деформаций. Зависимость между ними.

В курсе теории упругости изучаются перемещения, связанные с деформацией тела\*. Для исследования этого вопроса из упругого тела условно вырезается бесконечно малый параллелепипед, ребра которого равны  $dx, dy, dz$ . В результате различных перемещений его точек произойдет изменение длины ребер и искажение первоначально прямых углов между ребрами.

На рис. 1.4 показаны два ребра параллелепипеда, а также величины перемещений, которые получают точки А, В и С. Отметим, что составляющие перемещений точек А и С будут отличаться от составляющих перемещения точки В на бесконечно малые величины ввиду изменения соответствующих координат.

Из рис. 1.4 следует, что проявившаяся после деформации длина проекции ребра ВС на ось  $x$  равна

$$B'C'' = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = dx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Абсолютное удлинение проекции составит

$$\Delta B'C'' = B'C'' - BC = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительная линейная деформация в направлении оси  $x$  ( $\epsilon_x$ ) равна отношению приращения

$$\text{длины проекции ребра } \frac{\partial u}{\partial x} dx \text{ к его первоначальной длине } \epsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Выражения для линейных деформаций по направлениям координатных осей  $y$  и  $z$  получается аналогично

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (1.14)$$

(в последней зависимости  $w$  - линейное перемещение в направлении оси  $z$ ).

\*В теоретической механике рассматриваются перемещения абсолютно твердых тел.

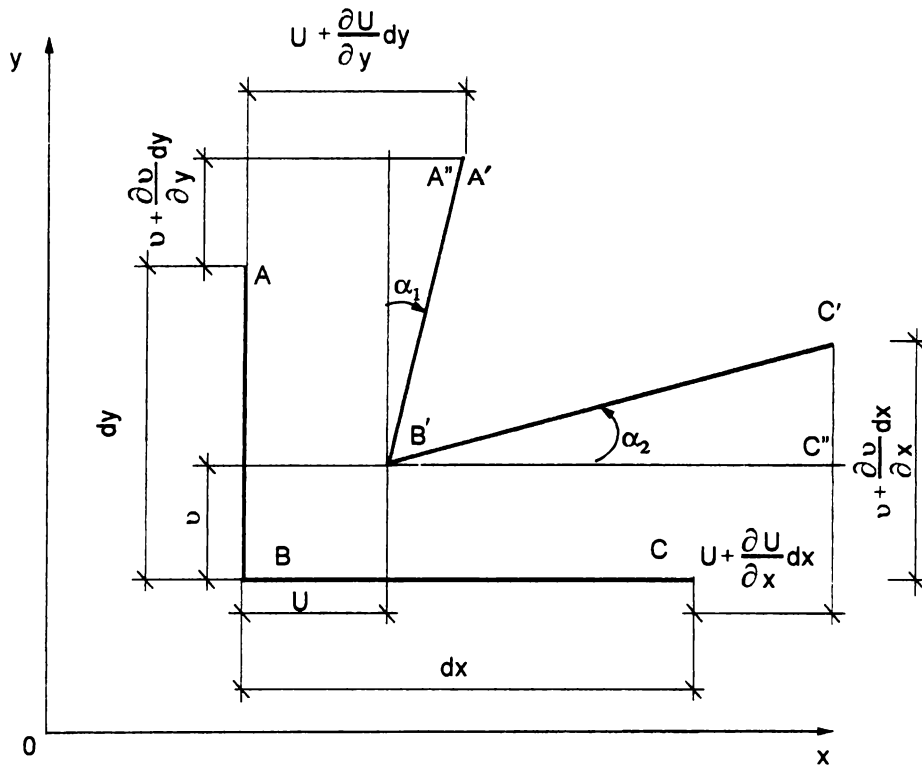


Рис. 1.4 Схема деформаций ребер параллелепипеда

Угловой деформацией (углом сдвига) называется величина искажения первоначально прямого угла. В плоскости  $xOy$  (рис. 1.4) угловая деформация определится суммой

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (1.15)$$

Выразим значение углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  через перемещения. Из рис. 1.4 следует

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{C'C''}{B'C''} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} x\right) - v}{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \epsilon_x};$$

Так как рассматривается область небольших деформаций, величина  $\epsilon_x$  может быть принята равной нулю  $1 \gg \epsilon_x$ , а тангенс угла - значению угла в радианах,  $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ .

Тогда 
$$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (a)$$

Таким же образом выражается через перемещение угол  $\alpha_2$ : 
$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (б)$$

Подставляя (а), (б) в (1.15), получаем формулу для угловой деформации в плоскости  $xOy$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.16)$$

Аналогичный вывод формул для угловых деформаций (углов сдвига) в двух других координатных плоскостях

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

В целом зависимости для шести составляющих относительных, линейных и угловых деформаций, которые образуют тензор деформаций

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \text{примут вид} \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

Дифференциальные уравнения (1.18) были получены Коши (и носят название формул Коши).

В пределе, когда длина ребер параллелепипеда стремится к нулю, выражения (1.18) определяют линейные и угловые деформации в точке.

Полезно знать текстуальную формулировку [9] уравнений Коши.

- Линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.

- Угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещений в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.

В расчетной практике обычно придерживаются следующих правил знаков. Линейным деформациям удлинения присваивается знак "плюс", укорочения - "минус"; угловой деформации, соответствующей уменьшению углов между положительными направлениями координатных осей, - "плюс", увеличению тех же углов - "минус".

### 1.6. Уравнения совместности деформаций Сен-Венана.

Шесть составляющих деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , согласно формулам Коши (1.18), зависят от трех составляющих перемещений  $u, v, w$ .

Если заданы функции перемещений  $u, v, w$ , все шесть компонент деформаций уравнениями (1.18) определяются однозначно. Однако, если произвольно заданы шесть функций деформаций, то при определении функций перемещений решения не могут быть получены однозначными. Действительно, пусть заданы шесть произвольных функций  $\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z)$ .

Интегрируя первые три уравнения Коши (1.18), установим функции  $u, v, w$ .

Если найденные функции подставить в последние уравнения (1.18), то в общем случае найдем функции  $\gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z)$  не совпадающие с заданными. Поэтому функции составляющих деформаций должны удовлетворять дополнительным зависимостям между ними. Сен-Венаном получено шесть таких уравнений, первые три - устанавливают связь между линейными и угловыми деформациями, проявляющимися в одной плоскости, остальные - связь между деформациями в разных плоскостях.

Первое уравнение Коши продифференцируем дважды по  $y$  
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2},$$

второе дважды по  $x$  
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2},$$

полученные результаты сложим 
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}.$$

Правую часть полученного равенства представим в таком виде

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Выражение в скобках, согласно четвертой формуле Коши, представляет угловую деформацию,

$$\gamma_{xy}, \text{ тогда } \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.19)$$

Аналогично получены две последующие зависимости Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.19), (1.20) свидетельствуют, что если заданы функции двух линейных деформаций в перпендикулярных направлениях, то функцию угловой деформации в плоскости этих линейных деформаций нельзя принять произвольно.

Вывод трех остальных зависимостей Сен-Венана осуществляется в такой последовательности. Четвертая, пятая и шестая формулы Коши дифференцируются следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

Полученные первые два уравнения сложим, третье вычтем

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}.$$

Продифференцируем это выражение по  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x \partial y}.$$

Правую часть равенства представим так

$$\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.$$

Согласно второй формуле Коши

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y,$$

окончательно

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.$$

Аналогично выведены еще два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Полученные уравнения свидетельствуют о том, что если заданы функции трех угловых деформаций в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, то функции линейных деформаций не могут быть приняты произвольно.

Представим сводку всех шести зависимостей Сен-Венана

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Уравнения (1.21) носят ещё название “уравнения неразрывности”, “уравнения сплошности”.

Физический смысл формул (1.21) заключается в том, что при их выполнении упругое тело, сплошное до деформации, остается сплошным или непрерывным и после деформации.

### 1.7 Обобщенный закон Гука.

Закон Гука устанавливает для многих конструкционных материалов линейную зависимость между напряжениями и деформациями.

Для анизотропного тела каждая составляющая напряжения может зависеть от всех составляющих деформаций

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yz} + a_{16}\tau_{zx}; \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{xy} + a_{25}\tau_{yz} + a_{26}\tau_{zx}; \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{xy} + a_{35}\tau_{yz} + a_{36}\tau_{zx}; \\ \gamma_{xy} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{xy} + a_{45}\tau_{yz} + a_{46}\tau_{zx}; \\ \gamma_{yz} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{xy} + a_{55}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{zx}; \\ \gamma_{zx} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{xy} + a_{65}\tau_{yz} + a_{66}\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Коэффициенты  $a_{mn}$  в системе уравнений (1.22) называются упругими постоянными, они характеризуют податливость упругого тела. Из 36 упругих постоянных  $a_{mn}$  независимым являются только 21, так как рассматриваются только обратимые процессы деформирования, в этом случае  $a_{mn} = a_{nm}$ .

Для изотропного тела, поскольку оно обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии упругих свойств, число упругих постоянных уменьшается до двух. Это - известные из курса “Сопротивление материалов” модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , третья упругая постоянная - модуль сдвига  $G$ , не является независимой, так как выражается через  $E$  и  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Линейные деформации ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ) определяются только нормальными напряжениями ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) и не зависят от касательных напряжений ( $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ); угловые деформации ( $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ) пропорциональны соответствующим касательным напряжениям ( $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ) и не зависят от величин нормальных напряжений.

Учитывая вышеизложенное, уравнения обобщенного закона Гука для изотропного тела могут

быть записаны

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z; \\ \gamma_{xy} &= a_{44}\tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= a_{55}\tau_{yz}; \\ \gamma_{zx} &= a_{66}\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Упругие коэффициенты равны

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}; \\ a_{12} &= a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -\frac{\nu}{E}; \\ a_{44} &= a_{55} = a_{66} = \frac{1}{G}. \end{aligned}$$

С учетом значений коэффициентов формулы обобщенного закона Гука имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Три последние формулы закона Гука можно также записать через модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  учитывая, что  $G=E/2(1-\nu)$ .

Еще раз подчеркиваем, что выражения (1.24) определяют линейную зависимость между составляющими деформациями и составляющими напряжений в изотропном упругом теле.

При решении задач бывает удобным использовать формулы закона Гука в другой (обратной) форме.

Предварительно получим некоторые соотношения для объемной деформации. Определим изменение объема бесконечно малого параллелепипеда с размерами ребер до деформирования  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и, следовательно, объем которого  $dV=dx \cdot dy \cdot dz$ .

Можно считать, с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка, что изменение объема связано только с изменением длин ребер, и не определяется угловыми деформациями.

Длины ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  до деформации, после деформации будут соответственно равны

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad dy_1 = dy \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad dz_1 = dz \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad \text{или} \\ dx_1 &= dx(1 + \varepsilon_x); \quad dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y); \quad dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z). \end{aligned}$$

Объем параллелепипеда после деформирования составит

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z).$$

Раскроем скобки:  $dV_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z)$ .

Пренебрежём величинами второго и третьего порядка малости и учтем, что

$$dV = dx dy dz, \quad \text{тогда } dV_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$



Относительная объемная деформация, которую обозначим  $\Theta$ , равна

$$\Theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (1.25)$$

Обратимся к формулам закона Гука. Сложим почленно первые три зависимости (1.24)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = & \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \\ & + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned}$$

Раскроем скобки

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.26)$$

Обозначим  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S_1$  и учтем (1.25), тогда

$$\Theta = \frac{1-2\nu}{E} S_1. \quad (1.27)$$

Таким образом, эта зависимость закона Гука, свидетельствует, что относительная объемная деформация  $\Theta$  пропорциональна первому инварианту напряженного состояния.

Выразим составляющие напряжения через составляющие деформации. В квадратной скобке первой формулы закона Гука (1.24) прибавим и вычтем величину  $\nu\sigma_x$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

С учетом обозначения

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu S_1]. \quad (1.28)$$

Подставляя (1.27) в (1.28), получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ (1+\nu)\sigma_x - \frac{E\nu}{1-2\nu} \Theta \right].$$

Отсюда выражение для напряжений  $\sigma_x$

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Theta + \frac{E\nu}{1+\nu} \varepsilon_x. \quad (1.29)$$

Обозначим  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ;  $\mu = \frac{E\nu}{1+\nu}$ .

Тогда формула (1.29) может быть записана в виде

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x. \quad (1.30)$$

Упругие постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  называются коэффициентами Ляме; отметим, что коэффициент  $\mu$  представляет собой модуль сдвига  $G$ .

Аналогично получаем формулы для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , зависимости же между касательными напряжениями и угловыми деформациями не претерпевают изменений.

Таким образом получена обратная форма обобщенного закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_y; \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_z; \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

### 1.8. Потенциальная энергия деформаций.

Выделим из упругого тела бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , по граням которого действуют внутренние усилия  $\sigma_x dydz$ ,  $\sigma_y dx dz$ ,  $\sigma_z dy dx$ ;  $\tau_{xy} dy dz$ ,  $\tau_{yz} dz dx$ ,  $\tau_{zx} dx dy$  (рис.1.1). Изменением величин напряжений, которое имеет место при переходе от одной площадки к противоположной, в данном случае можно пренебречь.

При рассмотрении данного вопроса используем известную из курса “Сопротивление материалов” формулу Клапейрона, согласно которой удельная потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле ( $W$ ), равна половине суммы произведений составляющих напряжений на соответствующие им составляющие деформации.

Таким образом

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}), \quad (1.32)$$

Эту зависимость можно записать через одни составляющие напряжений или только через составляющие деформаций.

Используя формулы закона Гука в форме (1.24), представим выражение для  $W$  через напряжение

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (1.33)$$

Если взять частные производные от выражений для  $W$  (1.33) по напряжениям, получим соответствующие деформации.

Например, 
$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\nu}{E} (\sigma_y - \sigma_z) = \varepsilon_x.$$

Аналогично можно выразить и остальные деформации

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z; \\ \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Зависимости (1.34) называются формулами Кастильяно.

Запишем потенциальную энергию  $W$  через деформации. Для этого воспользуемся формулами закона Гука в форме (1.31) и подставим их в (1.33). Опустив промежуточные алгебраические преобразования, получим

$$W = \frac{1}{2} \left[ (2\mu\varepsilon_x^2 + \lambda\Theta\varepsilon_x) + (2\mu\varepsilon_y^2 + \lambda\Theta\varepsilon_y) + (2\mu\varepsilon_z^2 + \lambda\Theta\varepsilon_z) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]. \quad (1.35)$$

Определив частные производные от выражения (1.35) по деформациям, получим соответствующие напряжения.

Например, установим частную производную  $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \frac{1}{2} [4\mu\varepsilon_x + \lambda(2\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z] = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Так как  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Theta$ , то правая часть полученного равенства, как следует из (1.31), равна  $\sigma_x$ , таким образом  $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$

Аналогично могут быть определены и другие частные производные от  $W$  по составляющим деформаций  $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

В целом

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x; \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y; \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z;$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}; \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}; \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}.$$

Полученные выражения носят название - "формулы Грина".

Следует отметить, что потенциальная энергия всегда является величиной положительной.

Потенциальная энергия для всего упругого тела подсчитывается путем интегрирования выражений (1.33) или (1.35) по всему объему тела

$$U = \iiint_V W dx dy dz. \tag{1.36}$$

Используя формулу Клапейрона (1.32) получим

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \tag{1.37}$$

### 1.9 Системы основных уравнений теории упругости.

Выше были получены основных уравнения теории упругости для объемного напряженного состояния. Приведем их сводку.

#### Статические уравнения.

Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье), устанавливающие связь между составляющими полного напряжения в точке

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1.38}$$

Условия на поверхности, связывающие внешние силы и внутренние напряжения,

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{1.39}$$

#### Геометрические соотношения.

Уравнения Коши, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана, выполнение которых свидетельствует, что упругое тело, будучи до деформации сплошным, остается таким же и после деформации.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Физические уравнения, которые включают формулы закона Гука в прямой записи

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

в обратной записи (в форме Ляме)

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}; \\
 \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y; \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}; \\
 \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z; \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Приведенные уравнения, а основных из них 15, содержат 15 неизвестных функций; шесть составляющих напряжений

$$\begin{aligned}
 &\sigma_x(x, y, z); \sigma_y(x, y, z); \sigma_z(x, y, z); \\
 &\tau_{xy}(x, y, z); \tau_{yz}(x, y, z); \tau_{zx}(x, y, z);
 \end{aligned}$$

шесть составляющих деформаций

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon_x(x, y, z); \varepsilon_y(x, y, z); \varepsilon_z(x, y, z); \\
 &\gamma_{xy}(x, y, z); \gamma_{yz}(x, y, z); \gamma_{zx}(x, y, z);
 \end{aligned}$$

три составляющих перемещений

$$u(x, y, z); \quad v(x, y, z); \quad w(x, y, z).$$

С математических позиций любая задача теории упругости может быть решена и сводиться к интегрированию этих уравнений, при соблюдении условий на поверхности (1.39).

В зависимости от того, какие цели ставятся в задаче о напряженно-деформированном состоянии упругого тела, определяется способ решения уравнений (1.38) + (1.43).

Решение в перемещениях, если неизвестными являются составляющие перемещения  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ .

Решение в напряжениях, когда определяются составляющие напряжений

$$\begin{aligned} &\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \\ &\tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned}$$

Смешанное решение, если устанавливаются некоторые составляющие перемещений и часть напряжений.

### 1.10 Решение задач теории упругости в перемещениях.

В качестве основных неизвестных, как отмечалось выше, являются составляющие перемещения  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ . В этом случае необходимо располагать тремя уравнениями, содержащими  $u, v, w$ . Их можно получить, выразив в дифференциальных соотношениях равновесия (1.38) напряжения через перемещения. Рассмотрим последовательность этих преобразований.

В первое уравнение равновесия подставим напряжение из формул закона Гука в записи (1.43).

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \\ &= \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0. \end{aligned}$$

В полученном уравнении, используя формулы Коши, заменим деформации на перемещения

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0.$$

Выполним группировку

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Выражение в первых скобках представляет собой оператор Лапласа над функцией  $u(x, y, z)$  (читается “набла два u”)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u$$

Выражение во вторых скобках преобразуем следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \text{ так как } \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Theta, \text{ то}$$

тогда уравнение (1.44) может быть записано

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0.$$

Аналогично можно преобразовать два другие соотношения равновесия и в итоге получена система уравнений, которые называются уравнениями Ляме,

$$\left. \begin{aligned} &(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0; \\ &(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0; \\ &(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

В перемещениях должны быть представлены и условия на поверхности. В первом уравнении (1.39) выражаем напряжения через деформации

$$X_v = (\lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x)l + \mu\gamma_{xy}m + \mu\gamma_{xz}n.$$

Далее сюда подставляем значения деформаций из формул Коши

$$\begin{aligned} X_v &= \lambda\Theta l + 2\mu l \frac{\partial u}{\partial x} + \mu m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu n \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &= \lambda\Theta l + 2\mu l \frac{\partial u}{\partial x} + \mu m \frac{\partial u}{\partial y} + \mu m \frac{\partial v}{\partial x} + \mu n \frac{\partial u}{\partial z} + \mu n \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Группируем полученное выражение следующим образом

$$X_v = \lambda\Theta l + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial x} n \right). \quad (1.46)$$

Первая скобка содержит производную от функции  $u(x,y,z)$  по направлению нормали  $v$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Следует иметь в виду, что производные координат по  $v$  представляют собой направляющие косинусы нормали

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = m, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = n$$

Тогда уравнение (1.46) записывается в виде

$$X_v = \lambda\Theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial x} n \right).$$

Выполнив аналогичные преобразования с двумя другими формулами (1.39) получаем уравнения на поверхности, выраженные через перемещения

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda\Theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial x} n \right); \\ Y_v &= \lambda\Theta m + \mu \frac{\partial v}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right); \\ Z_v &= \lambda\Theta n + \mu \frac{\partial w}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

В результате интегрирования уравнений Ляме определяются перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  как функции координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Полученные функции перемещений должны удовлетворять условиям на поверхности (1.39). При решении задач теории упругости в перемещениях условия совместности деформаций (1.41) тождественно удовлетворяются.

### 1.11. Решение задач теории упругости в напряжениях.

Основными неизвестными являются, как отмечалось выше, шесть составляющих напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$ . Для их отыскания трех уравнений равновесия (1.38) недостаточно и необходимо использовать формулы совместности, выразив их через напряжения. Для получения этих уравнений, которые называются уравнениями Бельтрами-Митчела, следует в формулы совместности (1.41) подставить деформации из формул закона Гука (1.42).

Рассмотрим последовательность такого преобразования на примере первого уравнения (1.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Исключим из (1.48) касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (1.38) по  $x$ , второе - по  $y$ , третье - по  $z$  (составляющие объемных сил не учитываем),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0; & \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Далее, сложим почленно два первых уравнения и вычтем третье

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = -2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.49)$$

Подставим (1.49) в (1.48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) + \\ + (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Упрощая (1.50), получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) = 0;$$

выражение в скобках

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \nabla^2 \sigma_z,$$

тогда (1.50)

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \nu \nabla^2 \sigma_z = 0.$$

Прибавим и вычтем в этом уравнении  $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}; \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}; \nabla^2 \sigma_z$ ,

и в окончательной записи первое уравнение совместности в напряжениях

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0.$$

Выполнив аналогичные преобразования, получим остальные уравнения Бельтрами-Митчела, их сводка приведена ниже

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} &= 0; & (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} &= 0; \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} &= 0; & (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} &= 0; & (1+\nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z \partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Обращаем внимание на то, что при выводе формул (1.51) составляющие объёмных сил приняты равными нулю. Когда объёмные силы не постоянны, в первой части уравнений (1.51) будут стоять производные от функции объёмных сил.

Таким образом, при решении задач теории упругости в напряжениях необходимо проинтегрировать систему девяти уравнений: шести уравнений Бельтрами-Митчела (1.51) и трех дифференциальных уравнений равновесия (1.38). Полученные функции должны удовлетворять условиям на поверхности (1.39). Далее, можно, используя формулы закона Гука (1.42), определить деформации, а затем интегрированием - функций деформаций, и установить функции перемещений.

Изложенная последовательность решения задач теории упругости (в перемещениях и в напряжениях) достаточно четкая, однако их реализация трудна.

Ещё раз отметим, что решение задач теории упругости должно удовлетворять полной системе уравнений (1.38)+(1.42) и граничным условиям. Существует теорема о единственности решения задачи, которая позволяет быть уверенным, что решение, удовлетворяющее указанным выше соотношениям, единственное.

### 1.12 Теорема о единственности решения.

Теорему о единственности решения можно сформулировать следующим образом: "для тела, находящегося в естественном состоянии, решение задачи теории упругости единственно, если справедлив принцип независимости действия сил" [1]. Приведем доказательство этой теории, которое было получено Кирхгофом (доказательство осуществляется от обратного).

Пусть упругое тело находится под действием заданных поверхностных  $X_v, Y_v, Z_v$  и объёмных  $X, Y, Z$  сил; найдена такая система напряжений  $(\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx})$ , деформаций  $(\epsilon'_x, \epsilon'_y, \epsilon'_z, \gamma'_{xy}, \gamma'_{yz}, \gamma'_{zx})$ , перемещений  $(u', v', w')$ , которая удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

и условиям на поверхности

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma'_x l + \tau'_{xy} m + \tau'_{xz} n, \\ Y_v &= \tau'_{yx} l + \sigma'_y m + \tau'_{yz} n, \\ Z_v &= \tau'_{zx} l + \tau'_{zy} m + \sigma'_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Допустим, что при заданных силах имеется еще одно решение

$$(\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{xy}, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}), \quad (\epsilon''_x, \epsilon''_y, \epsilon''_z, \gamma''_{xy}, \gamma''_{yz}, \gamma''_{zx}), \quad (u'', v'', w'').$$

Уравнение равновесия и условия на поверхности имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau''_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau''_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma''_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$



$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma'_x l + \tau'_{xy} m + \tau'_{xz} n, \\ Y_v &= \tau'_{yx} l + \sigma'_y m + \tau'_{yz} n, \\ Z_v &= \tau'_{zx} l + \tau'_{zy} m + \sigma'_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Согласно принципа независимости действия сил имеется третье решение, как разность первого и второго

$$\left[ \begin{aligned} &(\sigma'_x - \sigma''_x), (\sigma'_y - \sigma''_y), (\sigma'_z - \sigma''_z), (\tau'_{xy} - \tau''_{xy}), (\tau'_{yz} - \tau''_{yz}), (\tau'_{zx} - \tau''_{zx}); \\ &(\varepsilon'_x - \varepsilon''_x), (\varepsilon'_y - \varepsilon''_y), (\varepsilon'_z - \varepsilon''_z), (\gamma'_{xy} - \gamma''_{xy}), (\gamma'_{yz} - \gamma''_{yz}), (\gamma'_{zx} - \gamma''_{zx}); \\ &[(u' - u''), (v' - v''), (w' - w'')]. \end{aligned} \right]$$

Дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности для этого решения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\tau'_{yx} - \tau''_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma'_y - \sigma''_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{yz} - \tau''_{yz})}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\tau'_{zx} - \tau''_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{zy} - \tau''_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma'_z - \sigma''_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\sigma'_x - \sigma''_x)l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})n, \\ 0 &= (\tau'_{yx} - \tau''_{yx})l + (\sigma'_y - \sigma''_y)m + (\tau'_{yz} - \tau''_{yz})n, \\ 0 &= (\tau'_{zx} - \tau''_{zx})l + (\tau'_{zy} - \tau''_{zy})m + (\sigma'_z - \sigma''_z)n. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

В уравнениях (1.56) и (1.57) поверхностные и объемные силы равны нулю, следовательно, напряжения также должны быть равны нулю

$$\begin{aligned} \sigma'_x - \sigma''_x &= 0; \quad \sigma'_y - \sigma''_y = 0; \quad \sigma'_z - \sigma''_z = 0; \\ \tau'_{xy} - \tau''_{xy} &= 0; \quad \tau'_{yz} - \tau''_{yz} = 0; \quad \tau'_{zx} - \tau''_{zx} = 0; \\ \sigma'_x &= \sigma''_x; \quad \sigma'_y = \sigma''_y; \quad \sigma'_z = \sigma''_z; \\ \tau'_{xy} &= \tau''_{xy}; \quad \tau'_{yz} = \tau''_{yz}; \quad \tau'_{zx} = \tau''_{zx}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи теории упругости при заданных поверхностных и объемных силах единственно.

## ГЛАВА 2.

### Плоское напряженное состояние. Основные соотношения. Постановка задач, их решение.

#### 2.1 Плоская задача в прямоугольной системе координат.

Существует обширный класс задач, для которых путем введения некоторых допущений основная система дифференциальных уравнений существенно упрощается. Этот класс задач объединяется одним общим названием - плоская задача теории упругости. Различают два основных вида плоской задачи - плоскую деформацию (ПД) и плоское напряженное состояние (ПНС).

##### 2.1.1 Плоская деформация.

Упругое тело находится в условиях плоской деформации, если перемещения всех его точек параллельны одной и той же плоскости (плоскости деформации) и не зависят от координаты в направлении по нормали к плоскости деформации. Если за плоскость деформации принять  $XOY$ , то при плоской деформации перемещения  $u, v$  зависят только от координат  $x, y$ , а перемещение  $w$  любой точки упругого тела равно нулю

$$u=u(X, Y), v=v(X, Y), w=0. \quad (2.1)$$

Такие перемещения имеют место в длинном призматическом теле, ось которого параллельна оси  $OZ$ ; внешние силы, приложенные к боковой поверхности тела, направлены нормально к оси  $OZ$  и равномерно распределены по длине тела.

В качестве некоторых практических примеров плоской деформации можно привести следующие сооружения и конструкции (рис.2.1): подпорная стенка или плотина; длинная толстостенная труба, находящаяся под действием радиального давления, не изменяющегося по длине; тоннель метрополитена; длинный цилиндрический каток и др.

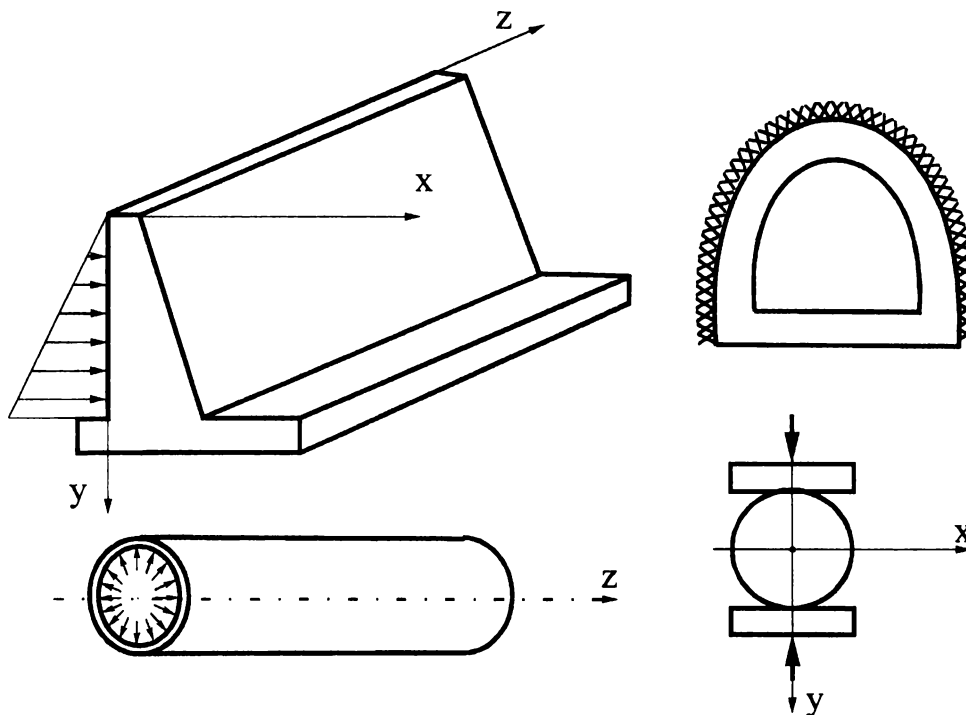


Рис. 2.1 Схемы некоторых элементов в условиях плоской деформации

В соответствии с (2.1) общие уравнения теории упругости упрощаются следующим образом.

Из шести формул Коши остаются три

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Три деформации обращаются в нуль  $\varepsilon_z = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0.$  (2.3)

Соответственно нулю оказываются равными напряжения  $\tau_{yz}=0, \tau_{zx}=0.$

Что же касается нормального напряжения  $\sigma_z$  то оно определяется из равенства

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

отсюда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.24), получим, что закон Гука приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Эти зависимости можно записать более удобно, если обозначить

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

В третьем уравнении (2.5) выражение коэффициента пропорциональности не изменяется

$$\frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}.$$

С учетом этих обозначений формулы (2.5) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Обратные соотношения Гука

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \sigma \gamma_{xy}. \quad (2.7)$$

Из трех дифференциальных уравнений остаются два

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций (1.4) остается одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.9)$$

остальные тождественно удовлетворяются.

Так как во всех точках боковой поверхности  $u = \cos(\nu, z) = 0$ , то условий на поверхности остаются два

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \\ Y_\nu &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

### 2.1.2 Плоское напряженное состояние.

Аналогичные упрощения при решении общей задачи теории упругости можно выполнить, когда упругое цилиндрическое или призматическое тело имеет не большую, а малую длину, т.е. представляет собой тонкую пластинку (рис. 2.2). Этот случай называется плоским напряженным состоянием. Так как толщина  $h$  пластины мала, то с незначительной погрешностью можно принять, что при любом симметрическом нагружении контура пластинки относительно срединной плоскости нагружения напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  равномерно распределены по толщине пластинки, т.к. не зависят от координаты  $Z$ , а напряжения  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  равны 0. Таким образом, в тонкой пластине возникает приблизительно следующее напряженное состояние

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Следовательно, плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации лишь условием  $\sigma_z = 0$ .

При изложенных выше предположениях уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнение неразрывности деформаций и статические граничные условия для плоского напряженного состояния не отличаются от соответствующих уравнений плоской деформации.

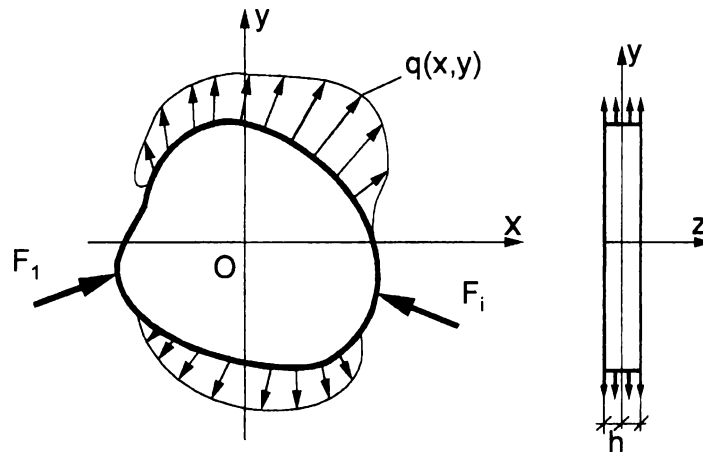


Рис. 2.2 Схема плоского напряженного состояния

Формулы закона Гука в прямой записи с учетом (2.11) запишутся в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

обратные соотношения 
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

Таким образом, в плоской задаче теории упругости неизвестными являются восемь функций: три составляющие напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  три составляющие деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy}$  две составляющие перемещений  $u$  и  $\nu$ .

Полная система уравнений также состоит из восьми уравнений: двух дифференциальных уравнений равновесия, трех геометрических соотношений Коши и трех формул закона Гука.

### 2.1.3 Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений Эри.

Решение плоской задачи теории упругости сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений равновесия (2.8) и неразрывности деформаций (2.9), которое необходимо предста-

вить в напряжениях. Воспользовавшись, например, формулами закона Гука для плоского состояния, получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

Исключим из этого уравнения касательное напряжение. Продифференцируем первое уравнение равновесия (2.8) по  $x$ , второе - по  $y$  (считаем объемные силы  $X$  и  $Y$  постоянными) и сложим почленно

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

Подставим (б) в (а)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= -(1 + \nu) \cdot \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Получено уравнение неразрывности деформаций, выраженное в напряжениях, оно может быть записано

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - оператор Лапласа второго порядка, он показывает, что надо взять вто-

рые производные  $(\sigma_x + \sigma_y)$  отдельно по  $x$  и  $y$  и сложить их. Отметим, что функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической.

Теперь решение плоской задачи в напряжениях сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений равновесия (2.8) и гармонического уравнения (2.13), при выполнении граничных условий на поверхности тела.

Для решения плоской задачи удобно ввести так называемую функцию напряжений Эри  $\varphi(x, y)$ .

Напряжения выражаются через функцию  $\varphi$  следующим образом

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X_y - Y_x. \quad (2.14)$$

В этом случае уравнения равновесия (2.8) тождественно удовлетворяются при условии, что составляющие  $X$  и  $Y$  объемных сил постоянны. Уравнение (2.13), после подстановки в него (2.14), приобретает вид

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2.15)$$

$$\text{или } \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^4 \varphi = 0; \quad (2.16)$$

где  $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  двойной оператор Лапласа (бигармонический оператор) над функцией  $\varphi$  читается: "Набла четыре".

Уравнение (2.16) носит название "бигармонического уравнения", а функция, удовлетворяющая ему - "бигармонической функцией".

$$\text{В развернутом виде (2.16) имеет вид} \quad \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Граничные условия через функцию напряжений

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot 1 - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + XY + YX \right) m; \\ Y_v &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + XY + YX \right) \cdot 1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{aligned} \right\}$$

В результате решение плоской задачи в напряжениях свелось к необходимости решать единственное уравнение (2.17); после определения функции  $\varphi$  переход к напряжениям осуществляется по зависимостям (2.14).

### 2.1.3.1 Частные решения плоской задачи с помощью функции напряжений.

Некоторые задачи теории упругости можно решить, задавая некоторыми аналитическими выражениями для функции  $\varphi$  которые содержат неизвестные коэффициенты. Далее составляются выражения для напряжений и устанавливаются неизвестные коэффициенты так, чтобы выполнялись условия на поверхности тела.

**Решение в полиномах.** При рассмотрении этого вопроса объемные силы будем полагать равными нулю.

Полином первой степени

$$\varphi = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y \quad (2.18)$$

в качестве функции напряжений не соответствует напряженному состоянию, так как напряжения, подсчитанные по формулам (2.14) равны нулю.

Зададим функцию напряжений в виде полинома второй степени

$$\varphi = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (2.19)$$

Здесь дробные коэффициенты принимаются с целью получения более простых выражений для напряжений.

Бигармоническое уравнение (2.17) тождественно удовлетворяется при любых значениях коэффициентов  $a_2, b_2, c_2$  так как  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$

$$\text{Согласно (2.14) напряжения} \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a_1, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c_1, \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_1, \quad \text{т. е. это тот}$$

случай однородного напряженного состояния тела, когда все составляющие напряжений постоянны.

В таком состоянии находится прямоугольная полоса, подвергающаяся равномерному растяжению-сжатию в двух взаимно перпендикулярных направлениях и чистому сдвигу (рис. 2.3).

На гранях пластинки, которые параллельны координатным осям, поверхностная нагрузка совпадает с соответствующими составляющими напряжений в этой точке, например, на верхней грани у

$$= \frac{h}{2}$$

$$p_y = \sigma_y, \quad p_x = \tau.$$

Для оценки напряженного состояния применим полином третьей степени

$$\varphi = \frac{1}{6} a_3 x^3 + \frac{1}{2} b_3 x^2 y + \frac{1}{2} c_3 x y^2 + \frac{1}{6} d_3 y^3 \quad (2.20)$$

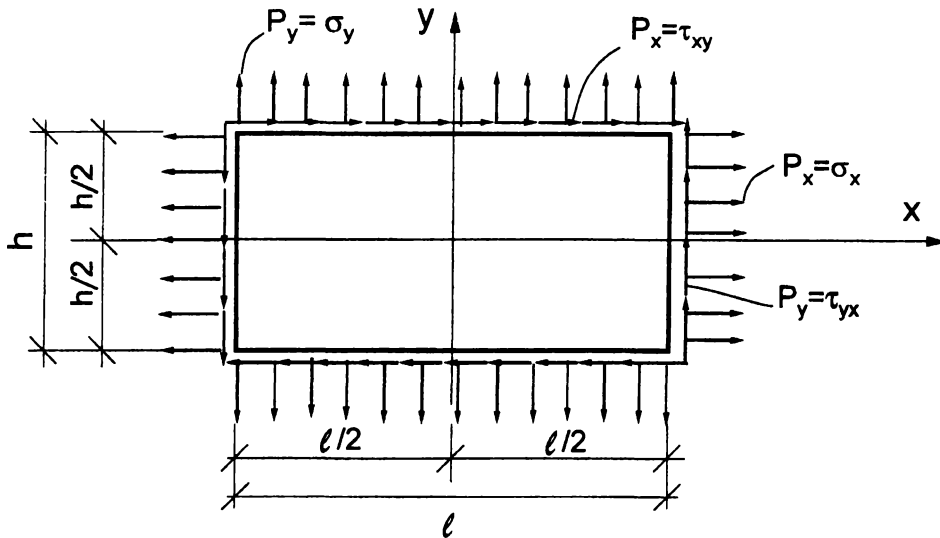


Рис. 2.3. Однородное напряженное состояние прямоугольной полосы.

Бигармоническое уравнение (2.17) удовлетворяется тождественно. Выражение для напряжений принимает вид

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y.$$

Если, например, принять  $a_3=b_3=c_3=0$  то получим  $\sigma_x=d_3y$ . Такое напряженное состояние возникает в элементе (длинной полосе  $l > 10h$ ) при ее "чистом" изгибе; напряжения  $\sigma_x$  изменяется по высоте сечения по линейному закону, причем на оси X они равны нулю (рис. 2.4).

Связь между изгибающим моментом  $M_z$  и  $d_3$  можно установить следующим образом

$$M_z = \int_A \sigma_x * y dA = d_3 \int_A y^2 dy = d_3 \frac{h^3}{12} = d_3 J_z;$$

где A - площадь поперечного сечения; dA - площадь элементарной площадки  $dA = bdy = l dy$ ;  $J_z$  - момент инерции сечения;

следовательно,  $d_3 = \frac{M_z}{J_z}$ ,  $\sigma_x = \frac{M}{J_z} \cdot y$ .

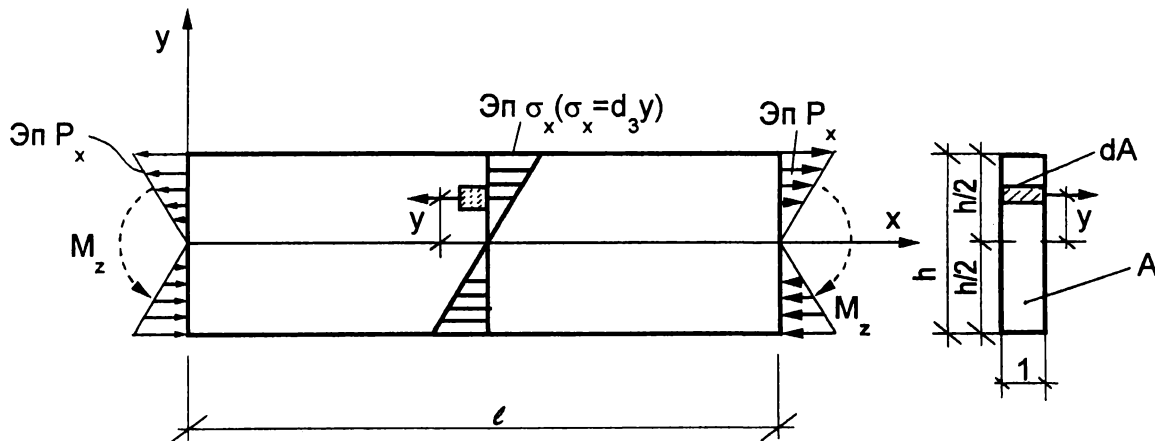


Рис. 2.4. Напряженное состояние длинной полосы ( $l > 10h$ )

В этом случае формула, полученная в сопротивлении материалов для "чистого" изгиба, и результаты точного решения задачи теории упругости совпадают. Но следует отметить, что это соглашение будет иметь место, когда на боковых гранях элемента  $x=0$ ,  $x=l$  нагрузка  $p_x$ , определяющая изгибающие моменты  $M_z$  (рис. 2.4), распределена по линейному закону  $p_x=d_3y$ .

Однако, как следует из принципа Сен-Венана, на некотором удалении от боковых граней формула сопротивления материалов будет достаточно точна независимо от способа приложения нагрузки.

С помощью функции напряжений в виде полинома третьей степени  $\varphi = \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3$ ,

можно оценить напряженное состояние при растяжении (сжатии) полосы (рис. 2.5).

Выражение для напряжений  $\sigma_y = a_2 + a_3 x$ ;  $\sigma_x = 0$ ;  $\tau_{xy} = 0$ .

Минимальных и максимальных значений напряжения  $\sigma_y$  достигают в крайних волокнах (при  $x = \pm \frac{h}{2}$ ).

$$\sigma_{y \min} = a_2 \pm a_3 \frac{h}{2}.$$

Коэффициенты  $a_2$  и  $a_3$  можно записать через нормальное усилие  $N$ , эксцентриситет  $e$  и геометрические характеристики поперечного сечения - площадь  $A = b \cdot h$ , момент инерции  $J_z = \frac{bh^3}{12}$

$$a_2 = \frac{N}{A}; \quad a_3 = \frac{N \cdot e}{J_z}.$$

Тогда формула для напряжений  $\sigma_y$  примет вид, который известен из курса сопротивления материалов

$$\sigma_y = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{J_z} x.$$

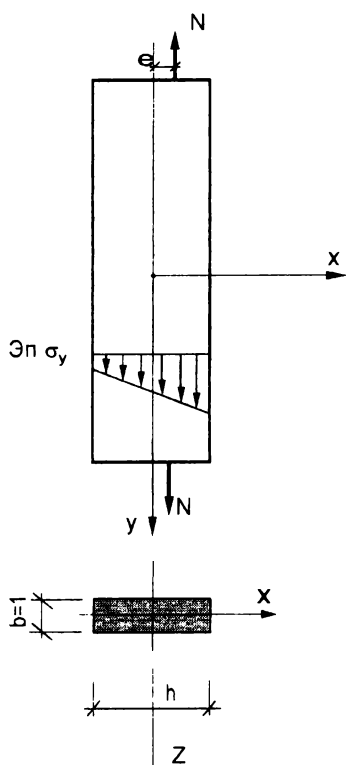


Рис.2.5 Схема напряженного состояния полосы

#### Расчет подпорной стенки.

Рассмотрим более сложную задачу о напряженном состоянии плотины (подпорной стенки) треугольного поперечного сечения (рис. 2.6); с напорной стороны поверхность вертикальна, с низовой - наклонная. Плотина имеет большую длину в направлении координаты  $z$ , поэтому деформации в этом направлении равны нулю (плотина находится в условиях плоской деформации).

Сооружение нагружено гидростатическим давлением, которое на глубине  $y$  равно  $\gamma y$ , где  $\gamma$  - вес  $1 \text{ м}^3$  воды, и собственным весом, составляющие объемной силы  $X=0$ ,  $Y=\gamma_1$ , где  $\gamma_1$  - вес  $1 \text{ м}^3$  материала.

Условно примем, что плотина достаточно глубоко простирается в грунт и поэтому граничные условия здесь можно считать несущественными при оценке напряженного состояния участка, нагруженного давлением воды. Таким образом, будем учитывать только граничные условия по вертикальной и наклонной граням плотины.

Для решения задачи примем функцию напряжений в виде полинома третьей степени (2.20), который удовлетворяет, как было отмечено выше, бигармоническому уравнению (2.17) при любых значениях коэффициентов.

С учетом составляющих объемных сил  $X=0$ ,  $Y=\gamma_1$ , получим систему напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \\ \tau_{xy} &= -b_3 x - c_3 y - \gamma_1 \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$



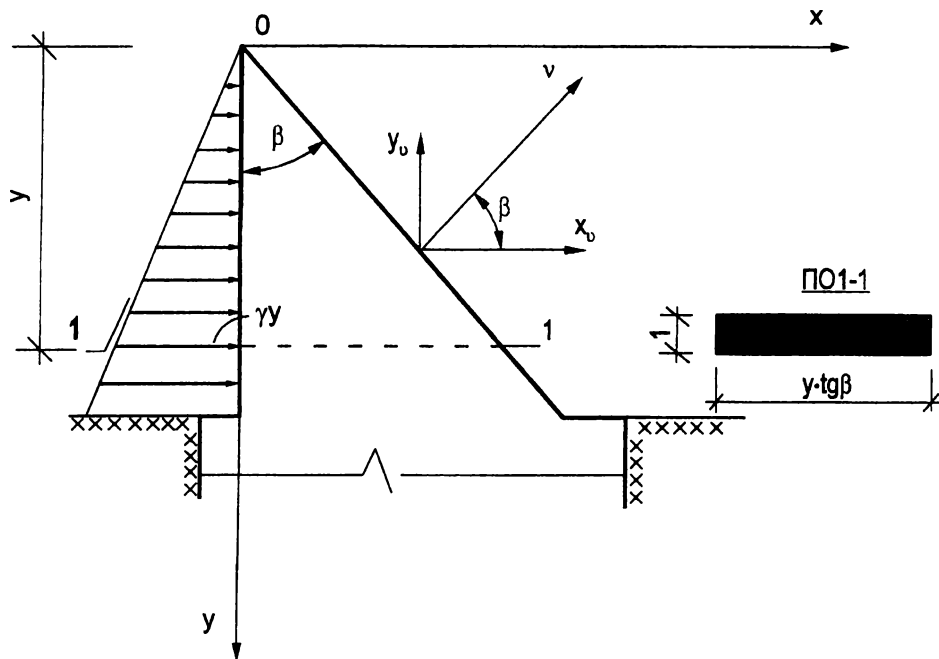


Рис. 2.6 Схема нагружения подпорной стенки

Для определения входящих в эти формулы коэффициентов используем граничные условия.

На вертикальной грани  $x = 0$

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y; \tau_{xy} = 0.$$

Из условий (2.21) при  $x=0$  следует:  $-\gamma y = d_3 y$ ;  $0 = -c_3 y$ , откуда  $d_3 = -\gamma$ ;  $c_3 = 0$ .

Формулы (2.21) при  $d_3 = \gamma$  и  $c_3 = 0$  приобретают вид

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y; \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \tau_{xy} = -(b_3 + \gamma_1) \cdot x.$$

Для определения других коэффициентов используем граничные условия на наклонной грани ( $x = y \cdot \text{tg} \beta$ ). На ней нагрузок нет и, следовательно,  $x_b$  и  $y_b$  равны нулю.

Используем граничные условия в общем виде

$$x_v = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m,$$

$$y_v = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m.$$

Направляющие косинусы грани равны

$$l = \cos \beta, m = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \sin \beta. \tag{a}$$

С учетом (a), значений  $X_v=0, Y_v=0$  и  $x=y \cdot \text{tg} \beta$  два уравнения для определения коэффициентов  $a_3$  и  $b_3$  принимают вид

$$\begin{cases} 0 = -\gamma y \cos \beta - (b_3 + \gamma_1) y \text{tg} \beta (-\sin \beta); \\ 0 = -(b_3 + \gamma_1) y \text{tg} \beta \cos \beta + (a_3 y \text{tg} \beta + b_3 y) \cdot (-\sin \beta). \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим

$$b_3 = \frac{\gamma}{\text{tg}^2 \beta} - \gamma_1;$$

$$a_3 = \frac{\gamma_1}{\text{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\text{tg}^3 \beta}.$$

Подставим все найденные значения коэффициентов в исходные выражения (2.21) и окончательные зависимости для напряжений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\gamma y; \\ \sigma_y = \left( \frac{\gamma_1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} \right) x + \left( \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} - \gamma_1 \right) y; \\ \tau_{xy} = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} x. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Оценим напряженное состояние плотины по формулам сопротивления материалов и сравним полученные результаты с решением (2.22). Выделим из плотины полосу шириной  $b=1$ , ее расчетная схема - консольная балка с переменной высотой поперечного сечения (рис. 2.7). На консоль в сечении  $y$  действуют две силы: равнодействующая гидростатического давления  $F_1$  на вертикальную грань и равнодействующая собственного веса  $F_2$ .

Сила  $F_1$  приложена в центре тяжести треугольной эпюры давления; сила  $F_2$  приложена в центре тяжести треугольной призмы (точка  $C$ ) с эксцентриситетом  $e = \frac{1}{2} y \operatorname{tg}\beta - \frac{1}{3} y \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6} y \operatorname{tg}\beta$  по отношению к центру тяжести (точка  $O$ ) рассматриваемого сечения. Отметим, что  $F_1$  вызывает изгиб, а  $F_2$  определяет внецентренное сжатие консольного элемента.

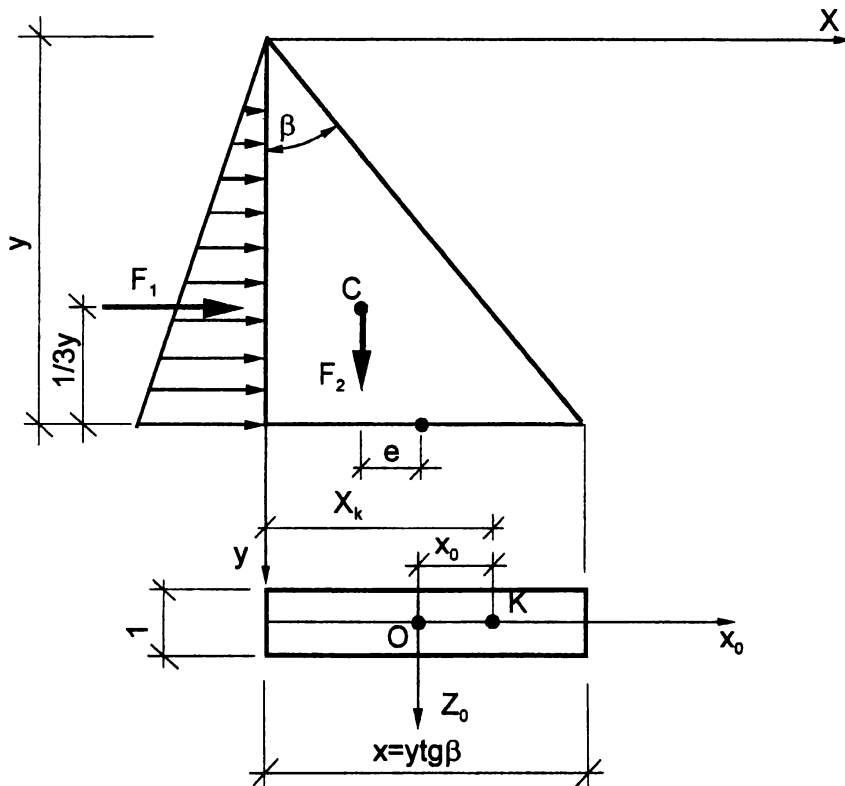


Рис. 2.7. Расчетная схема плотины.

Согласно формулам сопротивления материалов получаем следующие составляющие напряжений

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = \frac{F_2}{A} \pm \frac{Mx}{J_z}; \quad \tau_{xy} = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b}. \quad (2.23)$$

В соотношениях (2.23) продольная сила  $F_2 = \frac{1}{2} \gamma_1 y \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2} \gamma_1 y^2 \operatorname{tg}\beta$ ;

поперечная сила  $Q = F_1 = \frac{1}{2} \gamma y = \frac{1}{2} \gamma y^2$ ;

$$\text{изгибающий момент } M = -F_1 \frac{1}{3} y + F_2 e = -\frac{1}{2} \gamma y^2 \frac{1}{3} y + \frac{1}{2} \gamma_1 y^2 \text{tg}\beta e = -\frac{1}{6} \gamma y^3 + \frac{1}{12} \gamma_1 y^3 \text{tg}\beta;$$

$$\text{площадь поперечного сечения } A = y \text{tg}\beta \cdot \ell;$$

$$\text{момент инерции сечения относительно нейтральной оси } J_z = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot y^3 \text{tg}^3\beta;$$

статический момент части сечения, отсеченной в точке “К” прямой, относительно нейтральной оси  $S_{z_0}^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} y^2 \text{tg}^2\beta - x_{\text{ок}}^2 \right) = \frac{1}{2} (x \text{tg}\beta - x^2)$ , где  $x_{\text{ок}}$  - координата произвольной точки “К”, а  $x_0, z_0$  - главные центральные оси сечения.

Подставив эти величины в формулы (2.23), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; \\ \sigma_y &= \left( \frac{\gamma_1}{\text{tg}\beta} - \frac{2\gamma}{\text{tg}^3\beta} \right) x + \left( \frac{\gamma}{\text{tg}^2\beta} - \gamma_1 \right) y; \\ \tau_{xy} &= -\frac{3\gamma}{\text{tg}^3\beta} \left( x \text{tg}\beta - \frac{x^2}{y} \right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

На рис. 2.8 приведены данные расчетов по формулам теории упругости (2.22) и сопротивления материалов (2.24) при  $\beta=30^\circ$ ;  $\gamma=10 \text{ кН/м}^3$ ;  $\gamma_1=20 \text{ кН/м}^3$ .

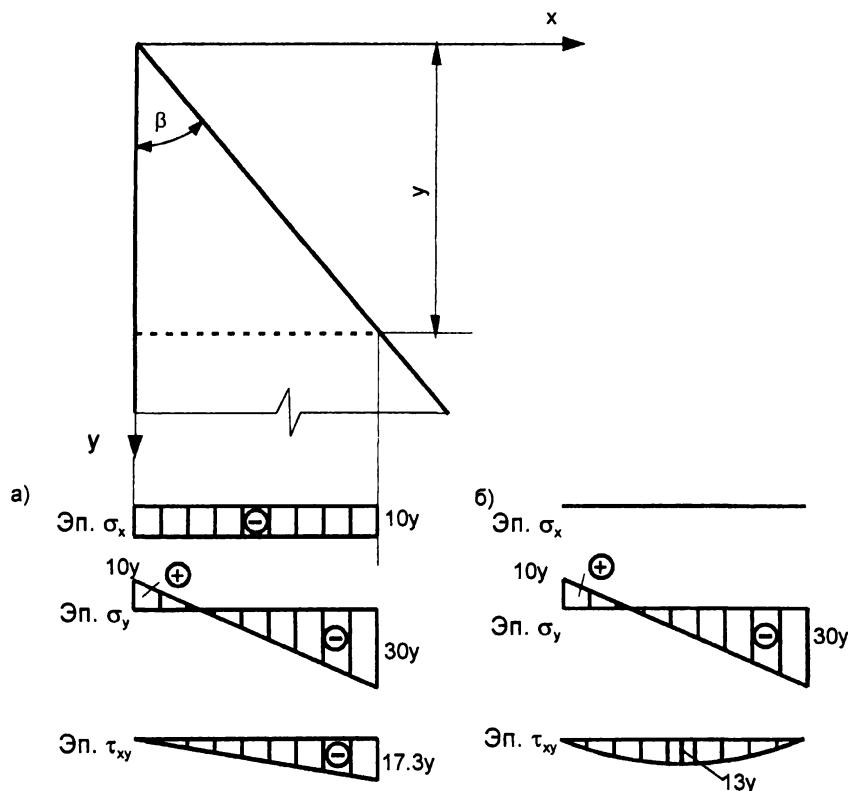


Рис. 2.8. Эпюры напряжений

а) решение теории упругости; б) решение сопротивления материалов

Сравнивая зависимости (2.22) и (2.24), результаты расчетов можно сделать следующие выводы. Формулы для напряжений  $\sigma_y$  в обоих случаях совпадают.

Напряжениями  $\sigma_x$  в сопротивлении материалов пренебрегают, хотя, как следует из результатов расчетов по формулам теории упругости, они имеют тот же порядок, что и напряжение  $\sigma_y$ .

Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , полученные по формулам теории упругости и сопротивления материалов, отличаются между собой не только количественно, но и качественно. Следовательно, расчет сооружений такого типа по формулам сопротивления материалов неприемлем.

Отметим, что условием отсутствия неблагоприятных для плотины растягивающих напряжений  $\sigma_y$  будет

$$\sigma_y = \left( \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - \gamma_1 \right) y \leq 0 \text{ при } x=0,$$

откуда  $\operatorname{tg}^2 \beta \geq \frac{\gamma}{\gamma_1}$ .

Для вышеиспользованных данных  $\gamma=10 \text{ кН/м}^3$  (вода),  $\gamma_1=20 \text{ кН/м}^3$  (бетон)  $\operatorname{tg}^2 \beta \geq 1/2$ ;  $\beta \geq 35^\circ$ .

Рассмотрим теперь в качестве функции напряжений полинома четвертой степени

$$\varphi = \frac{a_4}{12} x^4 + \frac{b_4}{6} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{6} x y^3 + \frac{e_4}{12} y^4. \quad (2.25)$$

Полином (2.25) удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.17) не при любых значениях коэффициентов. Если подставить четвертые производные от функции  $\varphi$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 2a_4, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 2e_4$$

в (2.17), то получим следующее соотношение, связывающее коэффициенты полинома

$$a_4 + c_4 + e_4 = 0. \quad (6)$$

Следовательно, из пяти коэффициентов независимыми являются четыре; пятый коэффициент из (6) может быть принят равным  $e_4 = -(a_4 + c_4)$ . Тогда выражение для функции  $\varphi$

$$\varphi = \frac{a_4}{12} (x^4 - y^4) + \frac{b_4}{6} x^3 y + \frac{c_4}{4} \left( x^2 y^2 - \frac{1}{3} y^4 \right) + \frac{d_4}{6} x y^3.$$

Уравнения для напряжений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -a_4 y^2 + \frac{c_4}{2} (x^2 - 2y^2) + d_4 x y; \\ \sigma_y &= a_4 x^2 + b_4 x y + \frac{c_4}{y^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_4}{2} x^2 - c_4 x + \frac{d_4}{2} y^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

### Изгиб консольной балки.

Рассмотрим задачу об изгибе консольной балки длиной  $\ell$  силой  $F$ , приложенной на конце (рис. 2.9).

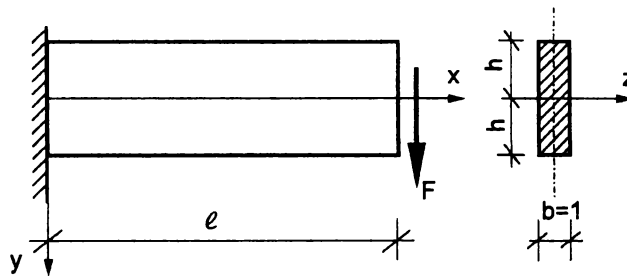


Рис. 2.9. Расчетная схема балки.

Для решения используем функцию напряжений в виде

$$\varphi = \frac{d_4}{6} x y^3 + b_2 x y. \quad (2.27)$$

Данная функция удовлетворяет уравнению (2.17).

Выражения для напряжений

$$\sigma_x = d_4 xy; \sigma_y = 0; \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 - b_2. \quad (в)$$

Коэффициенты  $b_2$  и  $d_4$  определяются из граничных условий: касательные напряжения на верхней и нижней гранях балки равны нулю (при  $y=\pm h$   $\tau_{xy}=0$ ); на правой грани равнодействующая касательных напряжений должна быть равной силе  $F$ .

Из первого условия следует

$$-\frac{d_4}{2} h^2 - b_2 = 0, \text{ откуда } b_2 = -\frac{d_4}{2} h^2. \quad (г)$$

Во второе условие, имеющее вид

$$\int_{-h}^{+h} \tau_{xy} dy = F,$$

подставим выражения для  $\tau_{xy}$  из (в) и зависимости между коэффициентами  $b_2$  и  $d_4$  (г)

$$-\int_{-h}^{+h} \left( \frac{d_4}{2} y^2 + b_2 \right) dy = -\int_{-h}^{+h} \left( \frac{d_4}{2} y^2 + \frac{d_4}{2} h^2 \right) dy = \frac{2}{3} d_4 h^3 = F.$$

Отсюда 
$$d_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{h^3}, b_2 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{F}{h}.$$

С учетом найденных значений коэффициентов функция напряжений имеет вид

$$\varphi = \frac{F}{4h^3} xy^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{F}{h} xy.$$

Выражение для напряжений

$$\sigma_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{h^3} xy; \sigma_y = 0; \tau_{xy} = \frac{3}{4} \cdot \frac{F}{h} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]. \quad (2.28)$$

Отметим, что формулы (2.28) и зависимости, полученные в курсе сопротивления материалов, полностью согласуются. Напряжения  $\sigma_x$ , например, определяются по формуле  $\sigma_x = \frac{M_x}{J_z} y$ , где изгибающий момент  $M_x = F \cdot x$ , момент инерции при принятых обозначениях

$$J_z = \frac{1 \cdot (2h)^3}{12} = \frac{2}{3} h^3, \text{ тогда } \sigma_x = \frac{3}{2} \frac{F}{h^3} xy.$$

Далее, используя формулы закона Гука, можно установить выражения для деформаций

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3F}{2Eh^3} xy; \varepsilon_y = -\nu \frac{3F}{2Eh^3} xy; \\ \gamma_{xy} &= \frac{3(1+\nu)F}{2E} \frac{1}{h} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Для определения перемещений  $u, v$  следует проинтегрировать формулы Коши. Постоянные интегрирования устанавливаются из условий закрепления консоли. При этом, это следует отметить, поперечные сечения балки, в том числе и в заделке, в результате деформаций сдвига не остаются плоскими, а искривляются. Но формула для нормальных напряжений  $\sigma_x$ , выведенная из гипотезы плоских сечений, остается справедливой и при искривлении сечений.

#### Изгиб однопролетной балки.

Рассмотрим балку на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки. Балка длиной  $2l$ , высотой  $2h$  и толщиной, равной  $1$ , нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 2.10).

Для решения задачи примем в качестве функции напряжений  $\varphi$  полиномы второй, третьей, четвертой и пятой степеней

$$\varphi = \frac{b_5}{12} \left( x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{d_5}{6} \left( x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{d_3}{6} y^3 + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (2.30)$$

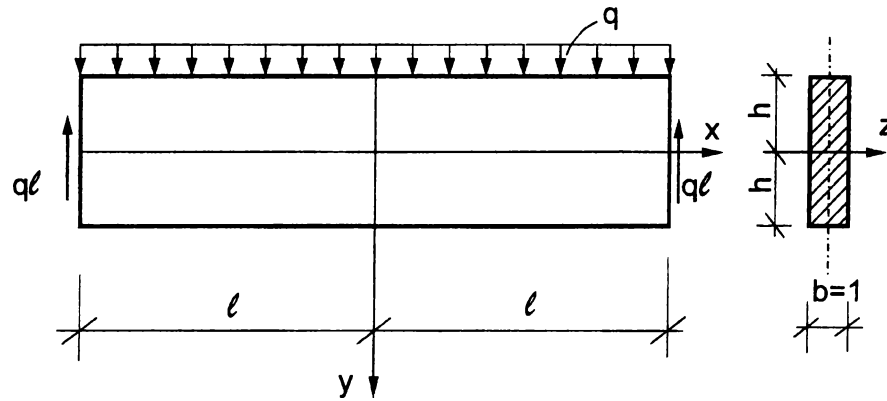


Рис. 2.10 Расчетная схема балки

Нетрудно убедиться, что функция (2.30) удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.17) при любых значениях коэффициентов.

По формулам (2.14), без учета объемных сил, выражения для напряжений примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{b_5}{3}y^3 + d_5\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + d_5y + c_2; \\ \sigma_y &= b_5x^2y + \frac{d_5}{3}y^3 + b_3y + a_2; \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_5}{3}x^3 - d_5xy^2 - b_3x. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Для определения постоянных используем граничные условия на верхней и нижней границах:

$$\text{при } y=-h \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0;$$

$$\text{при } y=+h \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Подставим в данные условия формулы для напряжений (2.31)

$$\left. \begin{aligned} -b_5hx^2 - \frac{d_5}{3}h^3 - b_3h + a_2 &= -q; \\ -\frac{b_5}{3}x^3 - d_5h^2x - b_3x &= 0; \\ b_5hx^2 + \frac{d_5}{3}h^3 + b_3h + a_2 &= 0; \\ -\frac{b_5}{3}x^3 - d_5h^2x - b_3x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

1. Так как эти уравнения должны выполняться при любых значениях  $x$ , то необходимо равно нулю коэффициентов при различных степенях  $x$ . Из второго и четвертого уравнений следует, что  $b_5=0$ .

С учетом этого значения зависимости (2.32) приводятся к виду

$$\begin{aligned} -\frac{d_5}{3}h^2 - b_3h + a_2 &= -q; \\ d_5h^2 + b_3 &= 0; \\ \frac{d_5}{3}h^3 + b_3h + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему, получим

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4h}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4h^3}.$$

На торцевых гранях балки при  $x = \pm l$  должны выполняться следующие граничные условия

$$\sigma_x = 0; \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} = \pm q \cdot l. \quad (д)$$

Последнее условие (д) требует, чтобы касательные напряжения здесь приводились к опорным реакциям. Подставив в это условие выражение для касательных напряжений (2.31) получаем тождество.

В каждой точке торцевого сечения (при произвольной координате  $y$ ) выражение (2.31) для  $\sigma_x$  не может обеспечить равенства  $\sigma_x=0$ , т.е. граничное условие для нормальных напряжений не удовлетворяется. Воспользоваться приемом "смягчение граничных условий", суть которого заключается в том, что вместо строгого выполнения граничного условия составляется приближенное условие в отношении главного вектора и главного момента сил, возникающих на определенной части поверхности тела. В рассматриваемом случае потребуем, чтобы на торцах обращались в нуль равнодействующие нормальных напряжений (нормальная сила и изгибающий момент)

$$N = \int_{-h}^{+h} \sigma_x dy = 0; \quad M_z = \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dy = 0.$$

Подставим в эти условия выражение для напряжений  $\sigma_x$  (2.31) и учтем, что  $b_5=0$

$$\int_{-h}^{+h} \left[ \frac{3q}{4h^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] dy = 0;$$

$$\int_{-h}^{+h} \left[ -\frac{3q}{4h^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] y dy = 0.$$

Выполнив интегрирование, определяем

$$c_2 = 0; \quad d_3 = \frac{3q}{4h^3} \left( l^2 - \frac{2}{5} c^2 \right).$$

Подставив найденные постоянные в формулы (2.31), получим систему напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3q}{4h^3} (l^2 - x^2) y + \frac{3q}{4h} \left( \frac{2}{3} \frac{y^2}{h^2} - \frac{2}{5} \right) y; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{4} \left( \frac{y^3}{h^3} - 3 \frac{y}{h} + 2 \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4h^3} (h^2 - y^2) x. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Характер эпюр напряжений для балки длиной  $l=10h$  в сечениях, где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  достигают своих максимальных значений приведены на рис. 2.11 и, например, в [5].

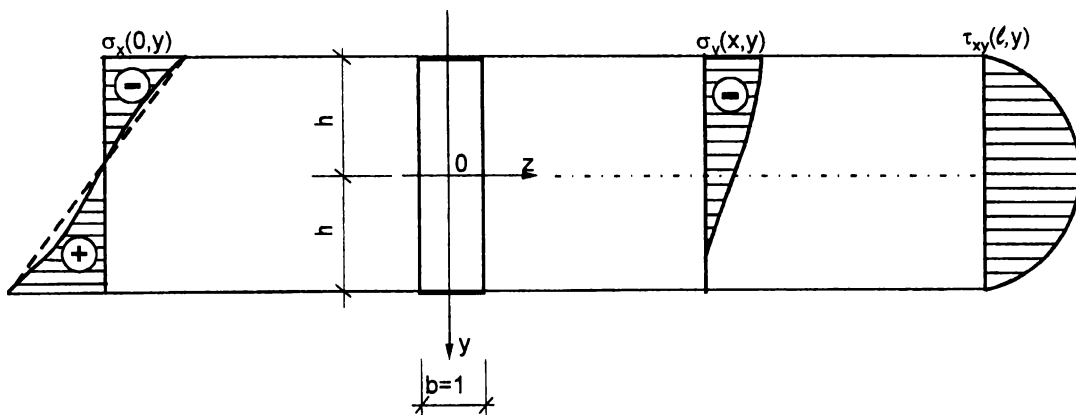


Рис. 2.11 Эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$

Для сравнения определим напряжения по формулам сопротивления материалов

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_z y}{J_z} = \frac{\frac{q}{2}(l^2 - x^2)y}{\frac{2}{3}h^3} = \frac{3q}{4h^3}(l^2 - x^2)y; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)} = \frac{-qx \frac{1}{2}(h^2 - y^2)}{\frac{2}{3}h^3 \cdot 1} = -\frac{3q}{4h^3}(h^2 - y^2)x. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Из сравнения формул (2.33) и (2.34) приходим к следующим выводам.

Первое слагаемое в формуле (2.33) для  $\sigma_x$  - это напряжение, даваемое формулой сопротивления материалов (на рис. 2.11 эпюра показана пунктиром). Второе слагаемое - самоуравновешенная система нормальных напряжений, возникающих в сечениях балки в силу совместности деформаций при  $\sigma_y \neq 0$ . Выясним долю этого слагаемого в общей величине  $\sigma_x$  на примере наибольшего значения  $\sigma_x$ , возникающих в крайних волокнах  $y=h$  в сечении  $x=0$  балки.

При  $x=0, y=h$  следует:

$$\text{из (2.33) } \sigma_x = \frac{3ql^2}{4h^2} \left( 1 + \frac{4}{15} \cdot \frac{h^2}{l^2} \right); \quad \text{из (2.34) } \sigma_x^0 = \frac{3ql^2}{4h^2}.$$

Как видно из приведенных данных, разница между ними зависит от отношения высоты поперечного сечения балки к ее длине и с уменьшением  $\frac{h}{l}$  это отличие уменьшается; так при  $l=10h$  разница составляет всего 4/15%. Таким образом использование гипотезы плоских сечений при выводе формулы для  $\sigma_x$  в курсе сопротивления материалов вполне оправдано.

Напряжениями  $\sigma_y$  при решении задачи методами сопротивления материалов пренебрегают. При оценке напряженного состояния методами теории упругости (2.33) величина  $\sigma_y$  отлична от нуля; они имеют наибольшее абсолютное значение  $\sigma_y = -q$  на верхней грани при  $y=h$ .

Из сравнения этой величины с величиной наибольших напряжений  $\sigma_x$ , подсчитанных по формуле (2.33) следует, что в достаточно длинных балках ( $l > 10h$ ) напряжения  $\sigma_y$  существенно малы,

$$\frac{|\max \sigma_y|}{\max \sigma_x} \cdot 100\% = 1.33\%.$$

Следовательно, принятая в курсе сопротивления материалов гипотеза о том, что продольные слои балки не давят друг на друга в балках  $l \geq 10h$  приемлема.

Формулы для касательных напряжений в обоих случаях совпадают. Отметим, что применение полиномов в качестве функции напряжений позволяет оценивать напряженное состояние изгибаемых элементов при загрузении их непрерывной по всей длине нагрузкой, закон изменения которой может быть аппроксимированной целым алгебраическим многочленом.

#### 2.1.4. Решение плоской задачи с помощью тригонометрических рядов.

Для решения основного дифференциального уравнения плоской задачи можно применить метод разделения переменных, представив функцию напряжений  $\varphi$  в виде произведения двух функций  $f(y)$  и  $\psi(x)$ , каждая из которых зависит от одного аргумента. Если функцию  $\psi(x)$  представить в виде тригонометрического ряда по синусам или косинусам, то бигармоническое уравнение преобразуется в линейное однородное дифференциальное уравнение, а решение последнего известно.

Рассмотрим функцию напряжений в виде

$$\varphi = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) f(y), \quad (2.35)$$



где  $n$  - любое целое число;

$l$  - длина балки (пластины) в направлении оси  $x$ .

Обозначим  $\alpha = \frac{n\pi}{l}$ , следовательно

$$\varphi = \sin(\alpha x) f(y).$$

В таком виде функция  $\varphi$  была представлена английским ученым Файлоном.

Производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= \alpha^4 \sin(\alpha x) f(y); \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \sin(\alpha x); \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= \sin(\alpha x) f^{IV}(y). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Подставляя (2.36) в бигармоническое уравнение получим линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\alpha^4 \sin(\alpha x) f(y) - 2\alpha^2 \sin(\alpha x) f''(y) + \sin(\alpha x) f^{IV}(y) = 0,$$

сократим на  $\sin(\alpha x)$ , тогда

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения, выраженный через гиперболические функции

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_3 y \operatorname{sh}(\alpha y) + C_4 y \operatorname{ch}(\alpha y).$$

Таким образом, функция напряжений, удовлетворяющая бигармоническому уравнению, имеет вид

$$\varphi = \sin(\alpha x) [C_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_3 y \operatorname{sh}(\alpha y) + C_4 y \operatorname{ch}(\alpha y)] \quad (2.37)$$

Если функцию напряжений  $\varphi$  представить в виде

$$\varphi = \cos 2x \cdot f(y), \quad (2.38)$$

решение аналогичное

$$\varphi = \cos 2x [C_5 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_6 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_7 y \operatorname{sh}(\alpha y) + C_8 y \operatorname{ch}(\alpha y)]. \quad (2.39)$$

Давая  $n$  различные значения, получим бесчисленное множество частных решений. Общее решение представится бесконечными рядами (тригонометрические ряды Рибьера-Файлона)

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha x) [C_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_3 y \operatorname{sh}(\alpha y) + C_4 y \operatorname{ch}(\alpha y)] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha y) [C_5 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_6 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_7 y \operatorname{sh}(\alpha y) + C_8 y \operatorname{ch}(\alpha y)] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Постоянные интегрирования  $C$  находятся из граничных условий задачи. С помощью тригонометрических рядов можно отыскать решение для балки (полосы), нагруженной по верхней и нижней гранями нагрузкой, распределенной по любому произвольному закону. Нагрузка на контуре должна быть разложена в тригонометрические ряды Фурье по синусам и косинусам.

Используя функцию напряжений в виде (2.40), добавляя в случае необходимости полиномы, можно решать сложные задачи теории упругости.

### 2.1.5 Решение плоской задачи методом конечных разностей.

Идея метода заключается в замене основных дифференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях, при этом задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Повторим основные уравнения плоской задачи теории упругости в декартовых координатах, выраженные через функции напряжений:

бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0; \quad (2.41)$$

Формулы для напряжений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad (2.42)$$

граничные условия

$$X_\sigma = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m; \quad (2.43)$$

$$Y_\sigma = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m.$$

Установим зависимость между производными функции в любой точке и значениями функции в этой и в соседних точках.

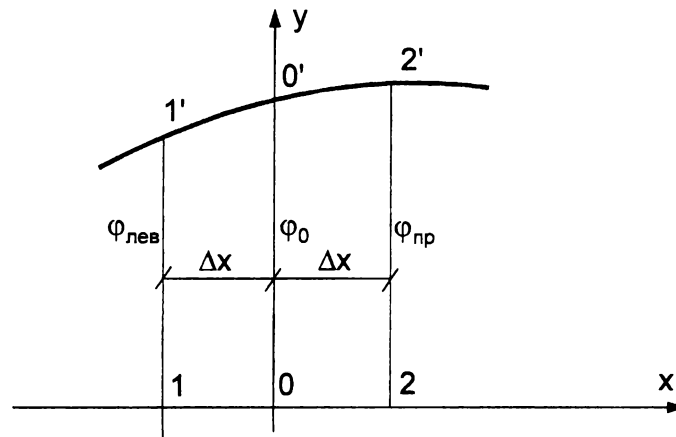


Рис. 2.12 Схема для определения зависимостей между производными

Рассмотрим кривую (рис.2.12), три ординаты которой  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  известны ( $\varphi_0$  совместим с осью ординат). Найдём приближенное значение производной в точке  $O'$ . Кривую в пределах  $1' 0' 2'$  заменим параболой. Её уравнение

$$\varphi = ax^2 + bx + c. \quad (2.44)$$

Коэффициенты уравнения определим из условий, что кривая проходит через три точки с ординатами  $\varphi_{лев}, \varphi_0, \varphi_{пр}$ .

$$a(-\Delta x)^2 + b(-\Delta x) + c = \varphi_{лев};$$

$$0 + 0 + c = \varphi_0;$$

$$a(\Delta x)^2 + b(\Delta x) + c = \varphi_{пр}.$$

Отсюда значения коэффициентов

$$a = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{лев} + \varphi_{пр}}{2(\Delta x)^2}; \quad b = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}; \quad c = \varphi_0.$$

Уравнение кривой с установленными значениями коэффициентов

$$\varphi = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{лев} + \varphi_{пр}}{2(\Delta x)^2} x^2 + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2(\Delta x)} x + \varphi_0. \quad (2.45)$$

Определим первую и вторую производные для  $x=0$  (для точки  $O'$ )

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2} \cdot x + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{\text{лев}} - 2\varphi_0 + \varphi_{\text{пр}}}{(\Delta x)^2}. \quad (a)$$

При  $x=0$  (точка  $O'$ )

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{лев}}}{2\Delta x}, \quad (б)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{\text{лев}} - 2\varphi_0 + \varphi_{\text{пр}}}{(\Delta x)^2}. \quad (в)$$

Выражения (а)-(в) позволяют бигармоническое уравнение (2.41) заменить алгебраическим.

В рассматриваемой задаче функция  $\varphi$  зависит от координат  $x, y$  и частные производные необходимо выразить через конечные разности:

Для этого рассмотрим плоскую область, на которой наметим сетку с ячейкой  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (рис. 2.13). Установим зависимость между функцией напряжений для некоторой узловой точки "k" ( $\varphi_k$ ) и смежных точек  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ .

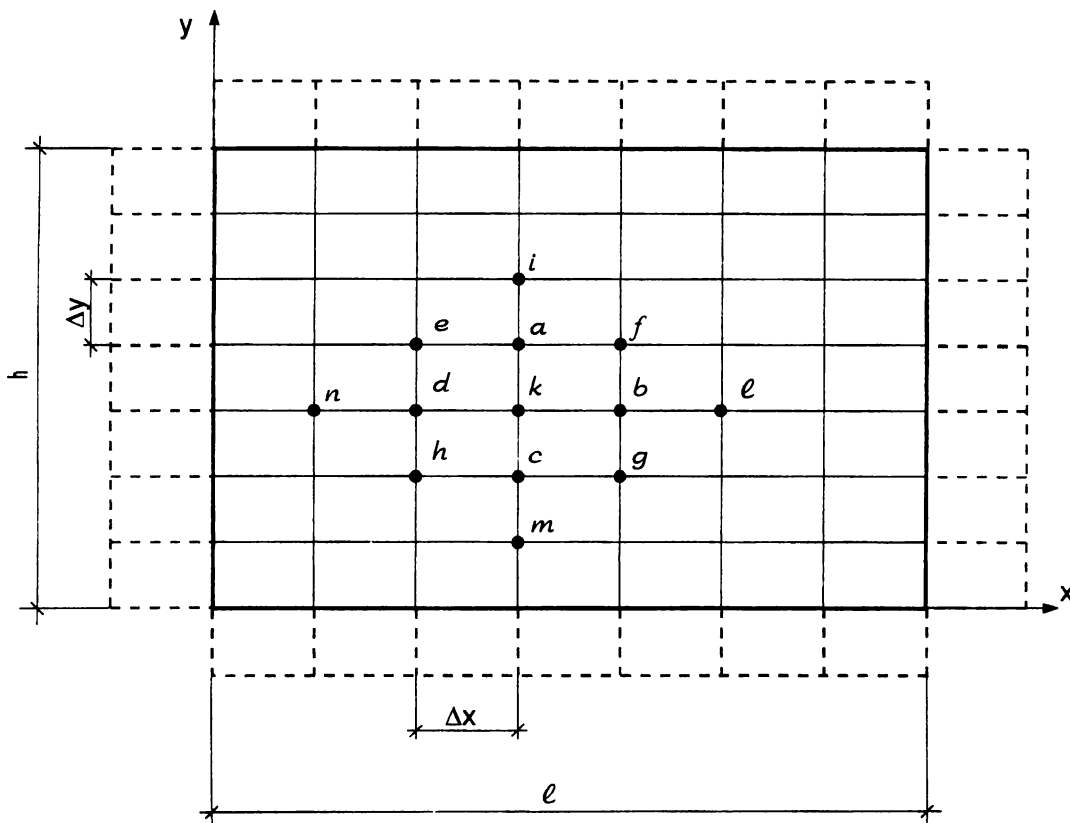


Рис. 2.13 Конечно-разностная схема плоской области

Эти функции пока неизвестны, но между ними существует определенная зависимость, которую необходимо установить.

Используя формулы (б) и (в), выражения для производных в точке "k" запишутся в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2(\Delta x)}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_d + \varphi_b}{(\Delta x)^2}. \quad (в)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2(\Delta y)}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a}{(\Delta y)^2}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_c}{2(\Delta y)} = \frac{\frac{\varphi_f - \varphi_e}{2(\Delta x)} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2(\Delta x)}}{2(\Delta y)} = \\ &= -\frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{y(\Delta x)(\Delta y)}. \end{aligned}$$

Четвертая производная, исходя из формулы (г)

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{-2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_d + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_b}{(\Delta x)^2}.$$

Вторые производные также определяются по зависимости (г). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= \frac{-2(-2\varphi_k + \varphi_d + \varphi_b) + (-2\varphi_d + \varphi_n + \varphi_k) + (-2\varphi_b + \varphi_k + \varphi_e)}{(\Delta x)^4} \\ &= \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_d + \varphi_b) + (\varphi_n + \varphi_e)}{(\Delta x)^4}. \end{aligned}$$

По аналогии 
$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_c + \varphi_a) + (\varphi_m + \varphi_i)}{(\Delta y)^4}.$$

Четвертая смешанная производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{-2\varphi_k + \varphi_d + \varphi_b}{(\Delta x)^2} \right) = \frac{-2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_k + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_d + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_b}{(\Delta x)^2} = \\ &= \frac{-2(-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a) + (-2\varphi_d + \varphi_h + \varphi_e) + (-2\varphi_b + \varphi_g + \varphi_e)}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} = \\ &= \frac{4\varphi_k - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + \varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}. \end{aligned}$$

Найденные значения производных подставим в бигармоническое уравнение (2.41), при этом введем обозначение  $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$ . Получим

$$\begin{aligned} &\varphi_k(6\alpha^2 + 8\alpha + 6) - 4(\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d)(\alpha + 1) + \\ &+ 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h)\alpha + (\varphi_i + \varphi_e\alpha^2 + \varphi_m + \varphi_n\alpha^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Такой вид имеет уравнение (2.41) в конечных разностях (в него входит 13 неизвестных значений  $\varphi$ ).

В случае квадратной сетки ( $\alpha=1$ ) уравнение упрощается

$$\begin{aligned} &20\varphi_k - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + \\ &+ (\varphi_i + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Напряжения в точке

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a}{(\Delta y)^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_d + \varphi_b}{(\Delta x)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_n}{4(\Delta x)(\Delta y)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Уравнения (2.46) или (2.47) можно составить для каждого узла сетки; их будет столько, сколько имеется узлов внутри контура. Но в них войдут также значения  $\varphi$  для узлов на контуре и для узлов на расстояниях  $\Delta x$  и  $\Delta y$  вне контура (рис. 2.13).

Использование так называемой рамной аналогии (идеи профессоров П. Л. Постернака, П. М. Варвака, А. П. Сеницына) позволяет достаточно просто определить значение функции напряжений  $\varphi$  во всех контурных точках через величины изгибающих моментов  $M$ , а в законтурных точках через продольные усилия  $N$  в стержнях рамы.

Суть рамной аналогии заключается в следующем. Пусть контур полосы нагружен нормальными  $q_n$  и касательными  $q_t$  распределенными нагрузками (рис. 2.14).

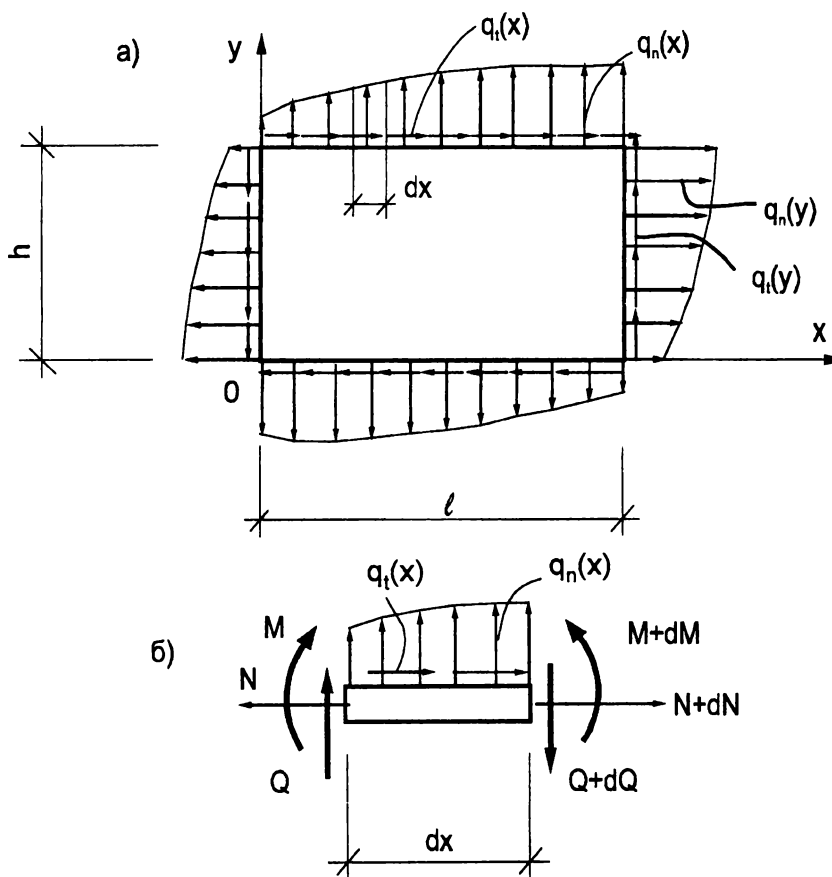


Рис. 2.14 Расчетные схемы рамной аналогии

Можно записать граничные условия для всех граней полосы, для верхней грани они будут

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_n(x), \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = q_t(x).$$

Для последующего рассмотрения примем раму такой же конфигурации и размеров как и контур полосы. Схемы загрузки рамы и полосы одинаковы. Выделим из верхнего стержня рамы участок длиной  $dx$  и из условия его равновесия (рис.2.14 б) следует

$$\sum x = 0, \quad q_i(x) = -\frac{dN}{dx};$$

$$\sum m = 0, \quad q_n(x) = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Сравнивая эти выражения с граничными условиями на верхней грани полосы видим, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 M}{dx^2}, \quad \varphi = M;$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\frac{dN}{dx}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N.$$

Отсюда следует, что значения функции напряжения  $\varphi$  в контурных точках численно равны величинам изгибающих моментов в соответствующих сечениях рамы, а частная производная от функции  $\varphi$  по направлению нормали к контуру для рассматриваемой контурной точки равна продольной силе  $N$  в том же сечении рамы.

Правило знаков устанавливается следующее:

- если принять положительным  $M$  в том случае, когда растянутые волокна расположены внутри контура рамы, то  $\varphi = M$ , в ином случае (когда внутри контура находятся сжатые волокна)  $\varphi = -M$ ;
- если в стержнях рамы действуют растягивающие усилия  $N$ , то для верхней грани  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N$ , нижней  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N$ , для правой грани  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = N$ , левой  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -N$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N, \quad \text{для правой грани} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = N, \quad \text{левой} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -N.$$

Используя рис.2.15, где приведено взаимное расположение законтурных, контурных и внутриконтурных точек (они обозначены соответственно  $s, k, p$ ) запишем соотношения для определения функции напряжений  $\varphi_s$ .

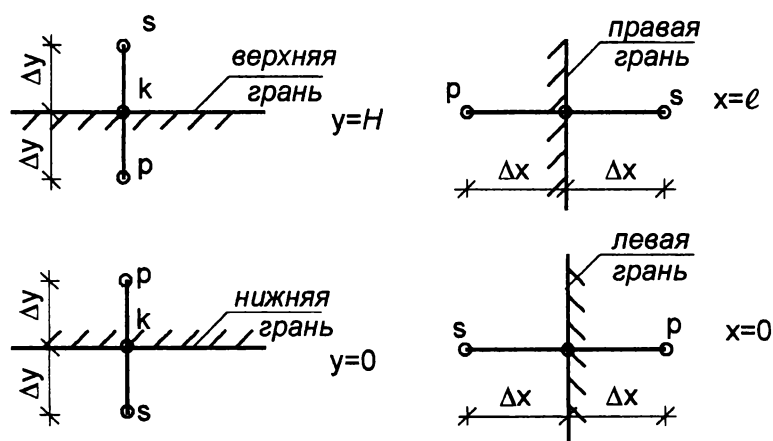


Рис. 2.15. Схема расположения точек

Верхняя грань  $y=H$ ;

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_k = \frac{\varphi_s - \varphi_p}{2(\Delta y)}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_s = \varphi_p + 2(\Delta y) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_k.$$

Нижняя грань  $y=0$ ;

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_k = \frac{\varphi_p - \varphi_s}{2(\Delta y)}, \quad \varphi_s = \varphi_p - 2(\Delta y) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_k.$$

Левая грань  $x=0$ ;

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_k = \frac{\varphi_p - \varphi_s}{2(\Delta x)}, \quad \varphi_s = \varphi_p - 2(\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_k.$$

Правая грань  $x=1$ ;

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_k = \frac{\varphi_s - \varphi_p}{2(\Delta x)}, \quad \varphi_s = \varphi_p - 2(\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_k.$$

Отметим, что для подсчета изгибающих моментов и продольных усилий в сечениях стержней может рассматриваться любая кинематически неизменяемая рама.

После определения, исходя из рамной аналогии, функций напряжений в контурных и законтурных точках неизвестными остаются только значения  $\varphi$  для внутриконтурных точек. Для их определения составляются необходимое количество уравнений типа (2.46).

### 2.2 Плоская задача в полярной системе координат. Основные соотношения.

Ряд задач теории упругости удобнее решать не в декартовых координатах, а в полярных (например, тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра и радиально расходящимися плоскостями).

Получим основные соотношения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение неразрывности, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Вырежем из упругого тела бесконечно малый элемент двумя радиальными плоскостями, образующие угол  $d\Theta$  и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r+dr$  (рис.2.16). Толщину элемента примем равной единице.

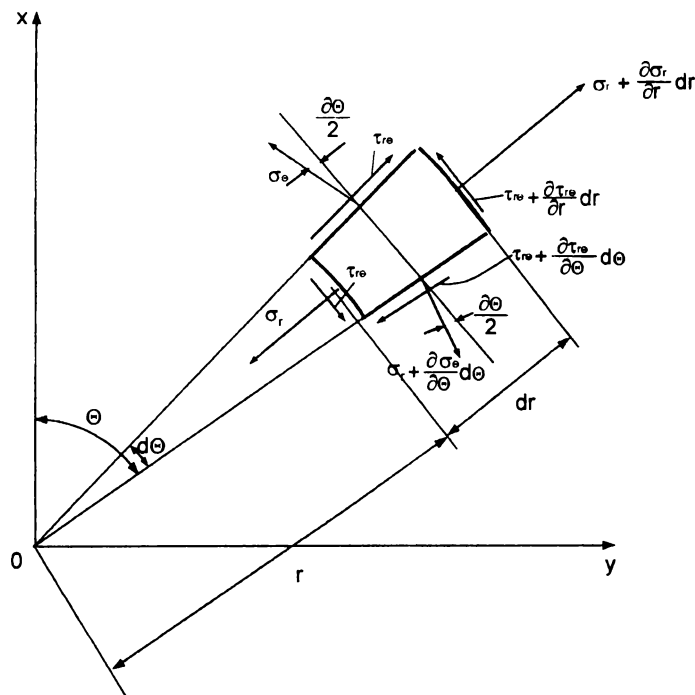


Рис. 2.16. Равновесие бесконечно малого элемента

На гранях этого элемента действуют следующие составляющие напряжений:  $\sigma_r$  и  $\sigma_\Theta$  - соответственно радиальные и тангенциальные нормальные напряжения;  $\tau_{\Theta r} = \tau_{r\Theta}$  - касательные напряжения. На элемент могут действовать по направлениям  $r$  и  $\Theta$  составляющие  $R$  и  $\Theta$  объемной силы.

Спроектируем все усилия, приложенные к выделенному элементу, на направление радиуса  $r$  и на ось, перпендикулярную  $r$ ,

$$\begin{aligned}
& -\sigma_r \cdot r d\Theta + \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) \cdot (r + dr) \cdot d\Theta - \sigma_\Theta dr \frac{d\Theta}{2} - \\
& - \left( \sigma_\Theta + \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} d\Theta \right) \cdot \frac{\partial \Theta}{2} - \tau_{r\Theta} dr + \left( \tau_{r\Theta} + \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} d\Theta \right) dr + R dr \cdot r d\Theta = 0, \\
& \left( \sigma_\Theta + \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} d\Theta \right) dr - \sigma_\Theta dr + \left( \tau_{r\Theta} + \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} \right) \cdot (r + dr) d\Theta - \tau_{r\Theta} r d\Theta + \\
& + \left( \tau_{r\Theta} + \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} \right) dr \cdot \frac{\partial \Theta}{2} + \tau_{r\Theta} dr \frac{d\Theta}{2} + \Theta r dr d\Theta = 0.
\end{aligned}$$

Раскроем скобки, выполним сокращения, отбросим бесконечно малые высшего порядка и разделим каждое слагаемое на число  $r dr d\Theta$ . В итоге уравнения равновесия для плоской задачи в полярных координатах будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r} + R &= 0; \\
\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} + \Theta &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Рассмотрим теперь уравнения деформаций. Ранее было получено уравнение неразрывности деформаций в напряжениях в декартовой системе координат для случая, когда объемные силы постоянны или равны нулю. Запишем его

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \\
& \text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ - оператор Лапласа.} \quad (a)
\end{aligned}$$

Известно, что сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная. Тогда

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\Theta.$$

Заменяя с помощью этого тождества напряжения в формуле (a), получаем уравнение неразрывности в полярной системе координат

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\Theta) = 0. \quad (2.50)$$

В развернутом виде это уравнение можно записать, используя выражение оператора Лапласа в полярной системе координат

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \cdot (\sigma_r + \sigma_\Theta) = 0. \quad (2.51)$$

Рассмотрим вывод геометрических уравнений. На рис. 2.17 показаны перемещения и деформации бесконечно малого элемента  $abcd$ . Используем следующие обозначения:  $u$  - радиальное перемещение (перемещение произвольной точки в направлении радиуса);  $v$  - окружное перемещение (перемещение в направлении, перпендикулярном радиусу);  $\varepsilon_r$  - радиальная деформация (на рис. 2.17а относительное удлинение стороны  $ab$ );  $\varepsilon_\Theta$  - окружная деформация (на рис. 2.17а относительное удлинение дуги  $ad$ );  $\gamma_{r\Theta}$  - относительная угловая деформация (искажение прямого угла  $bad$ ).

Элемент  $abcd$  после деформации займет положение  $a'b'c'd'$ . Перемещение точки  $a$  в радиальном и окружном направлениях будет соответственно  $u$  и  $v$ . Перемещение точки  $d$  в радиальном направлении составит  $\left( u + \frac{\partial u}{\partial \Theta} d\Theta \right)$ , в окружном  $\left( v + \frac{\partial v}{\partial \Theta} d\Theta \right)$ . Перемещение точки  $b$  в радиальном направлении



$\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)$ , в окружном  $\left(v + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)$ .

Относительное удлинение в радиальном направлении будет равно

$$\epsilon_r = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{где } ab=dr).$$

Величина удлинения в окружном направлении  $\epsilon_\theta$  определяется не только изменением радиуса на величину  $u$ , оно составляет  $\frac{u}{r}$ , но и разницей в перемещениях точек  $a$  и  $d$  в окружном направлении, которая равна  $\frac{\partial v}{r \cdot d\theta}$ . Таким образом, полная величина относительной деформации в окружном направлении

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Определим угловую деформацию  $\gamma_\theta$ . Величина искажения прямого угла между сторонами  $a'b'$  и  $a'd'$ , как следует из рис. 2.17б, представляет собой сумму двух углов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Угол  $\gamma_1$  равен разности углов  $b''a'b'$  и  $d'Oa$ , которые соответственно можно выразить (рис. 2.17б)

$$b''a'b' = \frac{\frac{\partial v}{\partial r} dr}{dr}; d'Oa = \frac{v}{r};$$

тогда

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (6)$$

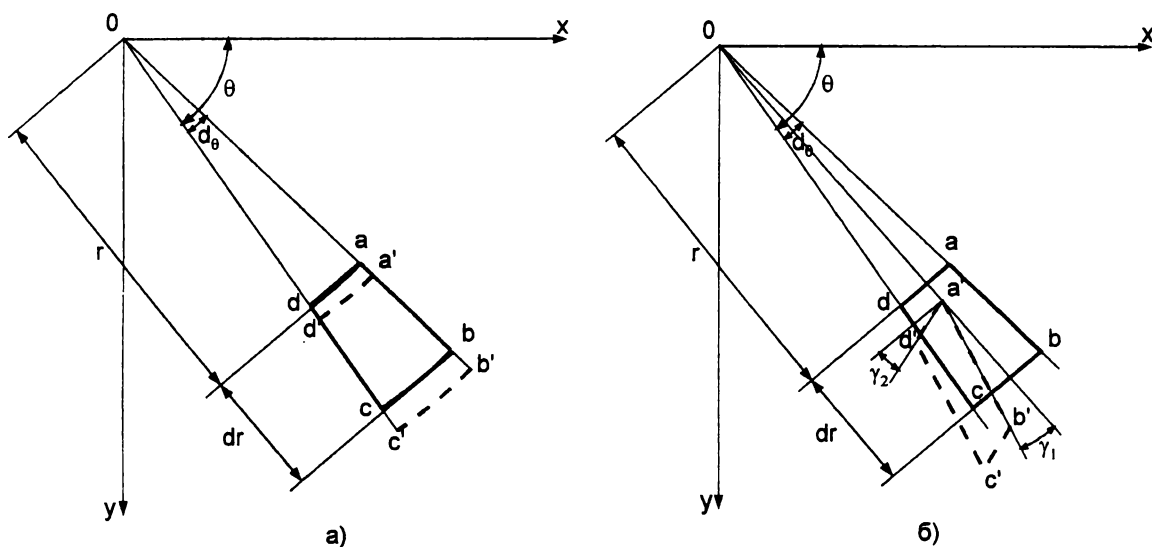


Рис. 2.17. Схема элемента для определения деформаций

Угол  $\gamma_2$  определяется разностью радиальных перемещений точек  $a$  и  $d$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (в)$$

Полное значение угла сдвига

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (г)$$

Запишем все три геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}; \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.52)$$

Формулы закона Гука в полярных координатах получаются из соответствующих уравнений в декартовых координатах, заменой индексов  $x$  и  $y$  на соответственно  $r$  и  $\theta$ .

Для плоского напряженного состояния прямые и обратные записи формул закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta); \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r); \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}. \quad (2.53)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta); \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r); \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}. \quad (2.54)$$

Для случая плоской деформации соответствующие формулы можно получить из (2.53) и (2.54) путем замены упругих постоянных  $E$  и  $\nu$  на приведенные упругие постоянные  $E_1$ ,  $\nu_1$ , определяемые по формулам

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Таким образом, для решения плоской задачи в полярных координатах имеются уравнения равновесия (2.49), геометрические соотношения (2.52), физические уравнения (2.53), (2.54).

Плоская задача решается либо в перемещениях, либо в напряжениях. Уравнение неразрывности (2.51) и уравнения равновесия (2.49) образуют полную систему трех уравнений с тремя неизвестными  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ .

Как и при решении плоской задачи в декартовых координатах систему трех уравнений можно свести к одному бигармоническому уравнению относительно функции напряжений  $\varphi(r, \theta)$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

или в развернутом виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (2.55)$$

Формулы для напряжений через функцию  $\varphi$  должны быть приняты в таком виде, чтобы удовлетворялись уравнения равновесия (2.49).

При отсутствии объемных нагрузок эти выражения будут

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}. \quad (2.56)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что при произвольной функции  $\varphi(r, \theta)$  зависимости (2.56) удовлетворяют уравнениям равновесия (2.49).

### 2.2.1. Осесимметричные задачи.

Рассмотрим задачи, в которых распределение напряжений и перемещений не зависит от полярного угла  $\theta$ . Такое напряженно-деформированное состояние возникает, например, в круглой трубе постоянного сечения, нагруженной внутренним и внешним равномерно распределенным давлением (задача Ляме), в кривом брусе с круговой осью при его "чистом" изгибе (задача Головина) и др.

Для осесимметричных задач из уравнений равновесия остается одно

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (2.57)$$

Формулы Коши, так как составляющая перемещения  $v$  в силу симметрии равна нулю, представлены в виде

$$\varepsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{w}{r}, \gamma_{r\theta} = 0. \quad (2.58)$$

Формулы закона Гука запишутся

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta); \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r). \quad (2.59)$$

Функция напряжений также не зависит от полярного угла. Бигармоническое уравнение (2.51) примет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

или в развернутой записи

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (2.60)$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Используя подстановку  $r=e^t$  его можно преобразовать в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - 4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (a)$$

Общий интеграл уравнения (a) имеет вид

$$\varphi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}. \quad (2.61)$$

Так как  $t = \ln r$ , то выражение для функции напряжений  $\varphi$  можно записать

$$\varphi = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 e^2 \ln r. \quad (2.62)$$

Для осесимметричной задачи из (2.56) получим формулы для напряжений

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \quad (2.63)$$

Используя уравнение (2.62),

$$\sigma_r = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 1); \quad (2.64)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3). \quad (2.65)$$

### 2.2.1.1. Задача Ляме

Примером осесимметричной задачи, как отмечалось выше, является задача Ляме о толстостенной круглой трубе, находящейся под действием внутреннего  $p_a$  и внешнего  $p_b$  равномерных давлений (рис. 2.18). Внутренний радиус трубы равен  $a$ , внешний -  $b$ . В данной задаче имеется только два граничных условия: при  $r=a$   $\sigma_r=p_a$ , при  $r=b$   $\sigma_r=p_b$ ; следовательно, используя их, определяются две постоянных интегрирования, третья постоянная может быть принята любой величиной. В общем случае решение получается многозначным. Для обеспечения однозначности перемещений  $w$ , определяемых из выражений (2.58), необходимо принять коэффициент  $C$  в выражениях (2.64) и (2.65) равным нулю.

$$\text{Тогда} \quad \sigma_r = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3; \quad \sigma_\theta = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3. \quad (2.66)$$

Используя вышеупомянутые граничные условия, получим для коэффициентов  $C_2$  и  $C_3$  следующие выражения

$$C_2 = \frac{(p_b - p_a)a^2b^2}{b^2 - a^2}; \quad C_3 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

С учетом установленных значений  $C_2$  и  $C_3$  запишем формулы для напряжений

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2)r^2}; \quad (2.67)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2)r^2}. \quad (2.68)$$

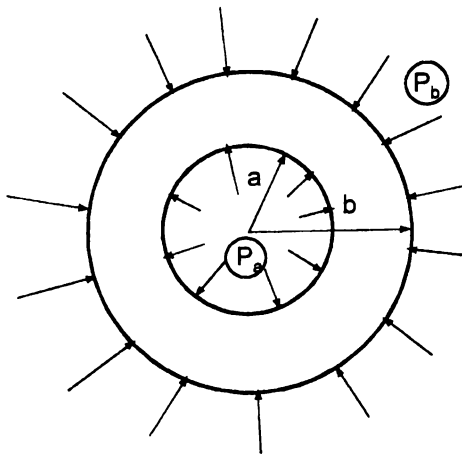


Рис. 2.18 Расчетная схема трубы

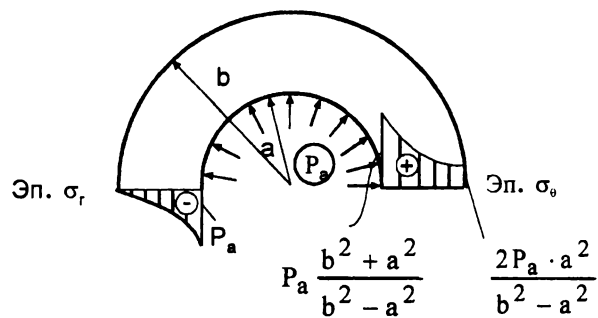


Рис. 2.19 Эпюры напряжений при внутреннем давлении

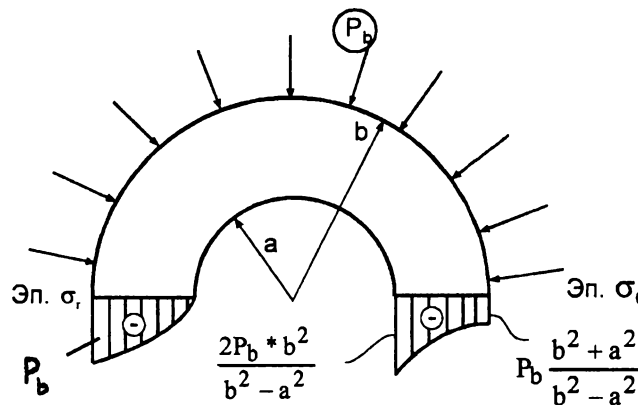


Рис. 2.20 Эпюры напряжений при внешнем давлении

Отметим, что сумма нормальных напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  во всех точках трубы одинакова. Действительно, сложив почленно выражения (2.67) и (2.68), получим

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = \text{const}. \quad (2.69)$$

Из анализа выражений (2.67) и (2.68) следует, что напряжение  $\sigma_r$  всегда сжимающее и изменяется от величины  $p_a$  при  $r=a$  до  $p_b$  при  $r=b$ . Что касается напряжений  $\sigma_\theta$ , то они могут быть как сжимающими, так и растягивающими.

Рассмотрим два частных случая работы трубы.

Первый - на трубу действует только внутреннее давление  $p_a$ , наружное давление отсутствует  $p_b=0$ . Формулы для напряжений (2.67) и (2.68) записываются в виде

$$\sigma_r = -\frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right).$$

Сжимающие радиальные и растягивающие тангенциальные напряжения в точках внутренней поверхности (при  $r=a$ ) достигают своих максимальных значений

$$\max \sigma_r = -p_a; \quad \max \sigma_\theta = p_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

В точках наружной поверхности (при  $r=b$ ) напряжений равны

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = \frac{2p_a a^2}{b^2 - a^2}.$$

Эпюры напряжений по толщине трубы показаны на рис. 2.19.

Для второго случая, когда на трубу действует только наружное давление ( $p_a=0$ ), формулы для напряжений (2.67) и (2.68) имеют вид

$$\sigma_r = -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

В точках внутренней поверхности (при  $r=a$ ) напряжения составляют

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = -\frac{2p_b b^2}{b^2 - a^2};$$

в точках наружной поверхности (при  $r=b$ )

$$\sigma_r = -p_b; \quad \sigma_\theta = -p_b \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

Эпюры напряжений приведены на рис. 2.20.

### 2.2.1.2. Задача Х.С. Головина.

Рассмотрим другой пример плоской задачи, в которой напряжения и деформации не зависят от полярного угла  $\theta$  - "чистый" изгиб кривого бруса с круговой осевой линией. Сечение бруса примем прямоугольным с шириной, равной 1 (рис. 2.21).

В случае "чистого" изгиба напряжения устанавливаются по формулам (2.64÷2.65). Для определения входящих в (2.64÷2.65) постоянных имеются два граничных условия на криволинейных поверхностях

$$\text{при } r=a \quad \sigma_r=0; \tag{a}$$

$$\text{при } r=b \quad \sigma_r=0; \tag{б}$$

и два интегральных граничных условия на торцах:

равнодействующая нормальных напряжений  $\sigma_\theta$  должна быть равна нулю

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \tag{в}$$

момент, создаваемый этими напряжениями,

$$\int_a^b \sigma_{\theta} r dr = M. \quad (\text{г})$$

Подставив в условия (а) и (б) формулу для напряжений (2.64), (2.65), получим следующие уравнения

$$\frac{C_2}{a^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln a + 1) = 0; \quad (\text{д})$$

$$\frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln b + 1) = 0. \quad (\text{е})$$

Условие (в) записывается в следующем виде

$$\int_a^b \left[ -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3) \right] dr = 0,$$

после интегрирования

$$\frac{C_2}{b} + 2C_3 b + C_4 b(2 \ln b + 1) - \frac{C_2}{a} + 2C_3 a + C_4 a(2 \ln a + 1) = 0. \quad (\text{ж})$$

Условие (г) приводится к такому интегралу

$$\int_a^b \left[ -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3) \right] r dr = M,$$

после интегрирования

$$-C_2 \ln \frac{b}{a} + (C_3 + C_4)(b^2 - a^2) + C_4(b^2 \ln b - a^2 \ln a) = M. \quad (\text{з})$$

Отметим, что при выполнении условий (д) и (е), условие (ж) тождественно удовлетворяется.

Условия (д), (е) и (з) позволяют определить постоянные  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ :

$$\begin{aligned} C_2 &= 4 \frac{M}{k} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}, \\ C_3 &= -\frac{M}{k} \left[ b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right], \\ C_4 &= 2 \frac{M}{k} (b^2 - a^2), \end{aligned}$$

где

$$k = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Подставляя найденные значения постоянных  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  в (2.64), (2.65) получим следующие выражения для радиальных  $\sigma_r$  и тангенциальных напряжений  $\sigma_{\theta}$  в случае “чистого” изгиба кривого бруса

$$\sigma_r = \frac{4M}{k} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right), \quad (2.70)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{4M}{k} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 - a^2 \right). \quad (2.71)$$

Касательные напряжения в осесимметричных задачах равны нулю.

На рис. 2.21 показаны эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\theta}$ . Отметим, что радиальные напряжения  $\sigma_r$  достигают максимальных значений в волокнах, расположенных ближе к центру кривизны, чем нейтральный слой.

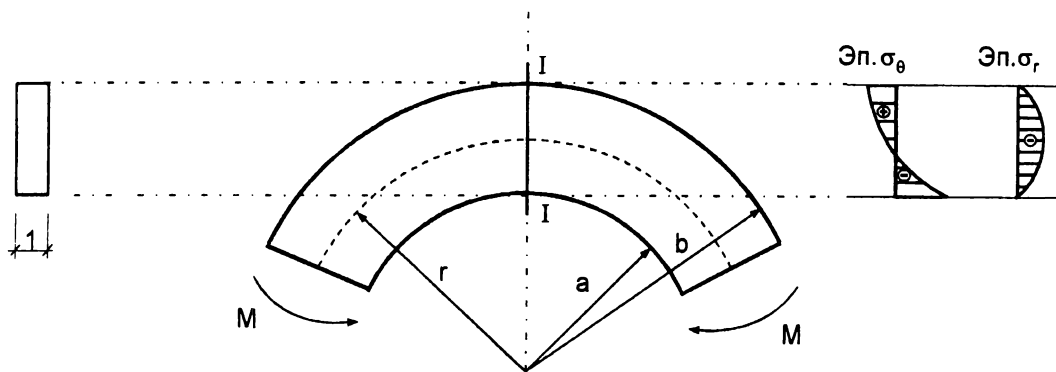


Рис. 2.21. Расчетная схема кривого бруса и эпюры напряжений  $\sigma_\theta, \sigma_r$  в сечении I-I

Тангенциальные напряжения  $\sigma_\theta$  распределяются по высоте сечения не по гиперболическому закону, как это следует из элементарной теории изгиба кривого бруса, а по более сложному закону (2.71).

Сравним изложенное выше точное решение задачи о “чистом” изгибе кривого бруса с приближенным, приводимым в курсе “Сопrotивление материалов”. В приближенном решении использована гипотеза плоских сечений и допущение о том, что волокна не давят друг на друга ( $\sigma_r=0$ ). Точное решение теории упругости подтверждает справедливость того, что плоские сечения до деформации остаются такими же и после приложения изгибающих моментов.

Что же касается второго допущения, то результаты точного решения свидетельствуют о наличии при изгибе кривого бруса давления волокон друг на друга.

### 2.2.1.3. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой.

Это пример задачи, в которой напряжения зависят от радиуса  $r$  и полярного угла  $\theta$ .

Пусть призматическое тело с поперечным сечением в форме клина, толщину которого примем равной 1, загружено в вершине сжимающей, равномерно распределенной по толщине силой  $F$  (рис. 2.22).

В клине возникают напряжения  $\sigma_r$ , величина которых обратно пропорциональна расстоянию от вершины клина, они достигают максимальных значений на оси клина (при  $\theta=0$ ) и уменьшаются при увеличении угла  $\theta$ .

Полагаем, что клин неограниченно простирается в направлении оси  $X$ , по этой причине напряженное состояние клина в области закрепления кромки не рассматриваем. Таким образом, можно принять, что

$$\sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0, \sigma_r = -k \frac{F \cos \theta}{r}. \tag{a}$$

Распределение напряжений (a) удовлетворяет граничным условиям; на гранях клина при  $\theta=\pm\alpha$  напряжения  $\sigma_\theta=0, \tau_{r\theta}=0$ .

Решение задачи будем искать с помощью функции напряжений  $\varphi$ , удовлетворяющей соотношениям (a) и бигармоническому уравнению (2.60). Этим условиям соответствует функция напряжений такого вида

$$\varphi = -\frac{kF}{2} r\theta \sin \theta, \tag{2.72}$$

где  $k=\text{const}$ .

По формулам (2.56) вычисляем напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  и убеждаемся, что функция (2.72) соответствует предполагаемому распределению напряжений (a) и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям. Такое поле напряжений называется радиальным.

Для определения неизвестного коэффициента  $k$  рассмотрим равновесие части клина, вырезанного дугой радиуса  $r$  (рис. 2.22). Спроектируем все силы, действующие на вырезанный элемент, на направление силы  $F$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -F. \quad (б)$$

Подставим в (б) выражение  $\sigma_r$  по (а)

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} kF \cos^2 \theta d\theta = -F,$$

отсюда

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}. \quad (в)$$

Формула для нормальных радиальных напряжений  $\sigma_r$  с учетом (в) в окончательной записи

$$\sigma_r = -\frac{F \cos \theta}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) r}. \quad (2.73)$$

Эпюра напряжений  $\sigma_r$  показана на рис. 2.22.

Зная распределение напряжений в полярной системе координат, можно перейти к напряжениям  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в декартовой системе, что бывает нужным при решении различных прикладных задач. Выполним это, используя формулы для напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  при одноосном напряженном состоянии

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)\sigma, \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha. \quad (г)$$

Подставляя в эти зависимости для горизонтальной площадки  $\alpha_1 = -\theta$ , а для вертикальной  $\alpha_2 = 90^\circ - \theta$  в формулу для (2.73)  $\sigma_r$ , получим

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta, \quad \tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cdot \cos \theta; \quad (д)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{F \cos^3 \theta}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) r}; \\ \sigma_y &= -\frac{F \sin^2 \theta \cos \theta}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) r}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{F \sin \theta \cos^2 \theta}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) r}. \end{aligned} \right\} \quad (е)$$

Заменяя по формулам  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , получаем выражения (е) полностью в декартовой системе координат:



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Fx^3}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{Fxy^2}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{Fx^2y}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} (2.74)$$

На рис. 2.22 приведено распределение напряжений в горизонтальном сечении.

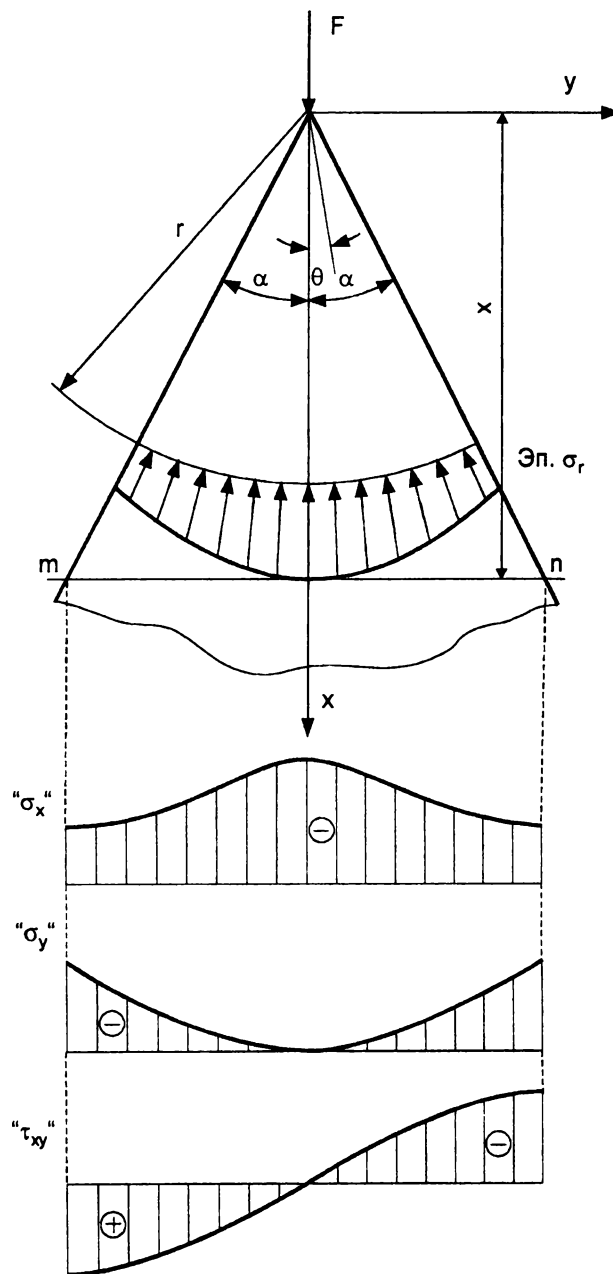


Рис. 2.22 Расчетная схема клина и эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в сечении  $m-n$

### 2.2.1.4. Клин, нагруженный в вершине силой $F$ , перпендикулярной к оси (изгиб клина)

Для решения задачи примем, как и в предыдущем случае, функцию напряжений  $\varphi$  в виде (2.72), которое удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.60) и граничным условиям.

Значение  $k$  определим из условия равновесия отсеченной части клина (рис. 2.23). Проектируем все силы на направление действия силы  $F$

$$\int_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -F. \quad (a)$$

Подставим в (a) выражение для  $\sigma_r$  ( $\sigma_r = -k \frac{F \cos \theta}{r}$ )

$$\int_{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} k F \cos^2 \theta d\theta = F, \text{ откуда } k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}.$$

Формула для нормальных радиальных напряжений  $\sigma_r$  с учетом полученного значения  $k$

$$\sigma_r = - \frac{F \cos \theta}{\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)}. \quad (2.75)$$

Зависимости для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в декартовой системе координат получим, используя соотношения между  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_r$  ( $\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta$ ,  $\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cdot \cos \theta$ ) с заменой угла  $\theta$  на  $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2 \theta, \sigma_y = \sigma_r \cos^2 \theta, \tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (б)$$

Далее, учтя связь между декартовыми и полярными координатами  $x=r\sin\theta$ ,  $y=-r\cos\theta$ , выражения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в окончательной записи

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F x^2 y}{\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) \left(x^2 + y^2\right)^2}; \\ \sigma_y &= \frac{F y^3}{\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) \left(x^2 + y^2\right)^2}; \\ \tau_{xy} &= \frac{F x y^2}{\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) \left(x^2 + y^2\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Эпюры напряжений показаны на рис. 2.23.

Аналогично можно получить решение для клина при произвольно направленной силе  $F$ .

### 2.2.1.5. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость (задача Фламана).

Задача по определению напряжений и деформаций является плоской, если сосредоточенная сила  $F$  (равнодействующая полосовой нагрузки) приложена на границе полубесконечной тонкой пластины - случай плоского напряженного состояния (рис. 2.24а) или равномерно распределена по прямой на границе полупространства - случай плоской деформации (рис. 2.24б).

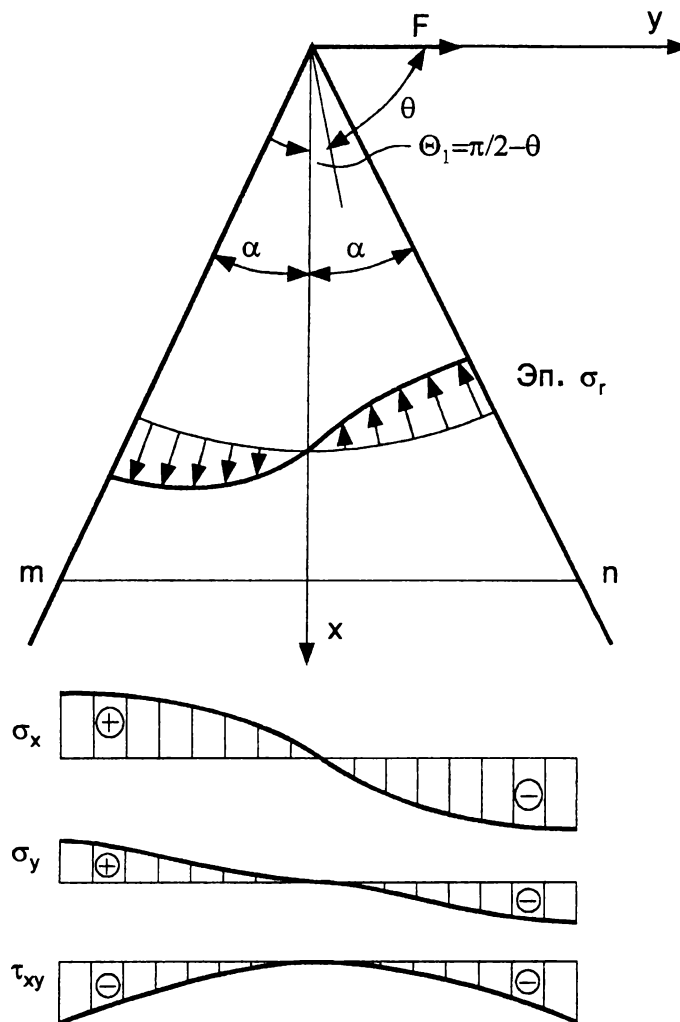


Рис. 2.23. Расчетная схема и эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  при изгибе клина

В подобных условиях находится основание под длинным равномерно загруженным ленточным фундаментом.

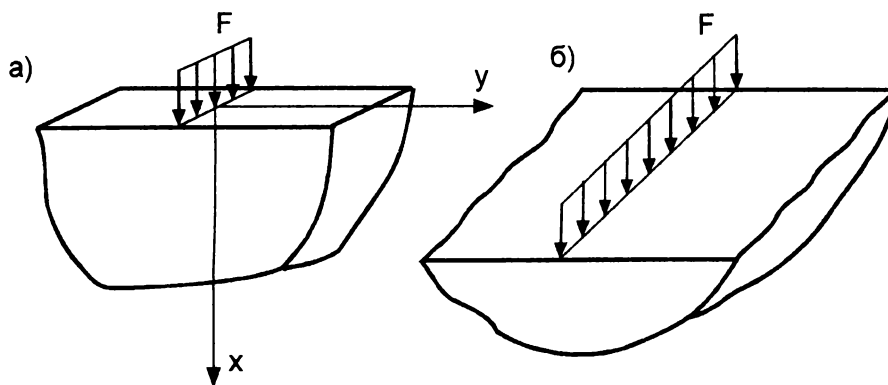


Рис. 2.24 Схемы нагружения

В полуплоскости и в полупространстве напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  определяются одинаково. Отличие заключается в том, что в полупространстве возникают напряжения  $\sigma_z$ , которые могут быть установлены по формуле

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Данную задачу можно рассматривать как распространение случая нагружения бесконечного клина в вершине силой  $F$  в предположении, что угол раствора равен  $\pi$ , т.е.  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, все формулы для определения напряжений в сечении клина, приведенные выше, будут справедливы и для подсчета напряжений в полуплоскости (при  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ ). В результате для напряжений получим

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}; \quad \sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Из рис. 2.25 следует, что  $\frac{r}{\cos \theta} = d$ , тогда

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d}. \quad (a)$$

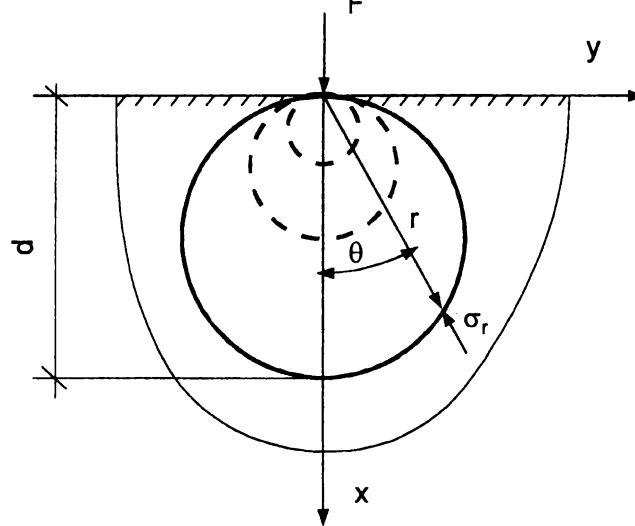


Рис. 2.25 Схема для определения напряжений  $\sigma_r$

Таким образом, если провести окружность диаметром  $d$  так, чтобы она касалась прямолинейного края плоскости в точке приложения силы  $F$ , то в любой точке этой окружности нормальные напряжения  $\sigma_r$  будут одинаковы и подсчитываться по формуле (а).

Множество окружностей, касающихся границы полуплоскости в точке приложения силы  $F$ , называются кругами Буссинеска\*.

При расчете фундаментов необходимо знать распределение напряжений в основании фундаментов по горизонтальным и вертикальным сечениям. Выражения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  получим, приняв в формулах (2.74)  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2Fx^3}{\pi(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= \frac{2Fxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Fx^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

\* По имени французского ученого, впервые решившего задачу о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство; задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость была решена Фламаном. В литературе ее именуют задачей Буссинеска-Фламана.

Эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , определенные по формулам (2.77) при заданном расстоянии от границы полуплоскости, показаны на рис. 2.26.

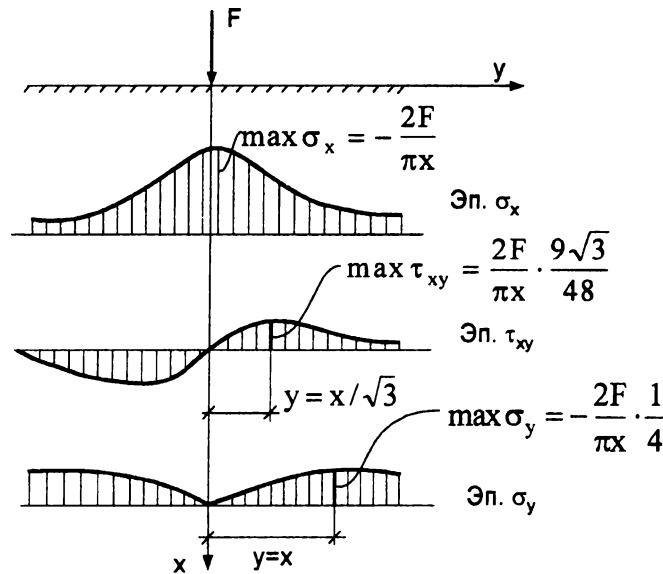


Рис. 2.26. Эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$

Нормальные напряжения  $\sigma_x$  имеют наибольшую величину под силой  $F$  и убывают с удалением от точки приложения силы. Нормальные напряжения  $\sigma_y$  и касательные напряжения  $\tau_{xy}$  на оси  $X$  равны нулю, на некотором расстоянии от оси  $X$  они достигают наибольшей величины, а затем убывают.

Если приложена не одна, а несколько сил, то при определении напряженно-деформированного состояния следует использовать принцип независимости действия сил.

Формулы решения Фламана могут играть роль функций влияния для произвольной нагрузки  $q$ , приложенной к краю полуплоскости. Определим, например, напряжения  $\sigma_x(x,y)$  в точке от заданной нагрузки  $q(y_1)$ , рис. 2.27. Обозначим напряжение для  $\sigma_x$  при  $F=1$  через  $\Phi(x,y)$ , которое называют функцией влияния единичной силы на напряжение  $\sigma_x$ . Тогда от элементарной силы  $dF=q(y_1)dy_1$  в рассматриваемой точке возникает напряжение  $d\sigma_x=\Phi(x,y-y_1) \cdot q(y_1)dy_1$ .

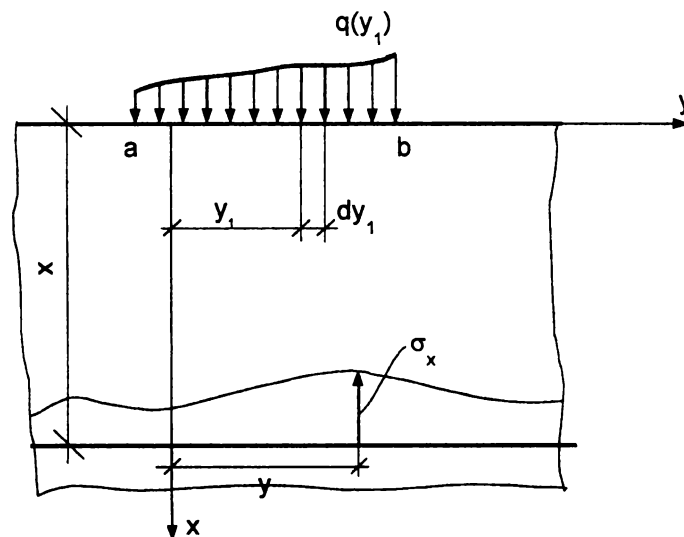


Рис. 2.27 Схема определения напряжений  $\sigma_x$

Полное напряжение  $\sigma_x$  в этой точке от нагрузки  $q$  получим, суммируя влияние всех элементарных сил на участке  $ab$

$$\sigma_x = \int_a^b \Phi(x, y - y_1) q(y_1) dy_1 \quad (2.78)$$

С помощью функций влияния и выражений типа (2.78) можно оценить напряженное состояние упругой полуплоскости от любых силовых воздействий.

### 2.2.1.6. Напряжения в круглом диске, сжатом по диаметру (задача Герца).

Для определения напряжений в диске, сжатом по диаметру (рис. 2.28), можно представить, что этот диск является частью полуплоскости, сжатой силой  $F$  в произвольной точке границы. В соответствии с решением Фламана, от приложенной в полюсе  $O_1$  силы  $F$  в произвольной точке  $N$  диска возникают радиальные сжимающие напряжения

$$\sigma_r^{(1)} = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\cos\theta_1}{r_1} \quad (a)$$

От силы  $F$ , действующей в нижнем полюсе  $O_2$ , аналогично

$$\sigma_r^{(2)} = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\cos\theta_2}{r_2} \quad (б)$$

В точке  $M$  на окружности диска радиуса  $r_{1M}$  и  $r_{2M}$  взаимно перпендикулярны друг к другу и  $\frac{\cos\theta_{1M}}{r_{1M}} = \frac{\cos\theta_{2M}}{r_{2M}} = \frac{1}{D}$ , где  $D$  – диаметр диска.

Следовательно, напряжения (а), (б) здесь принимают значения

$$\sigma_{rM}^{(1)} = \sigma_{rM}^{(2)} = -\frac{2F}{\pi D} = \text{const.}$$

Таким образом, принятый характер распределения напряжений в диске обусловил в контурных точках напряженное состояние, соответствующее всестороннему сжатию. Для удовлетворения граничным условиям необходимо по контуру диска приложить нормальные растягивающие усилия интенсивностью  $q = \frac{2F}{\pi D}$  (рис. 2.29), тогда суммарные напряжения на поверхности диска будут равны нулю.

Напряжения в диске получаются наложением двух радиальных напряжений  $\sigma_r^{(1)}$ ,  $\sigma_r^{(2)}$  и однородного напряженного состояния  $\sigma_r^{(3)} = \sigma_\theta^{(3)} = q$ ,  $\tau_{r\theta}^{(3)} = 0$ .

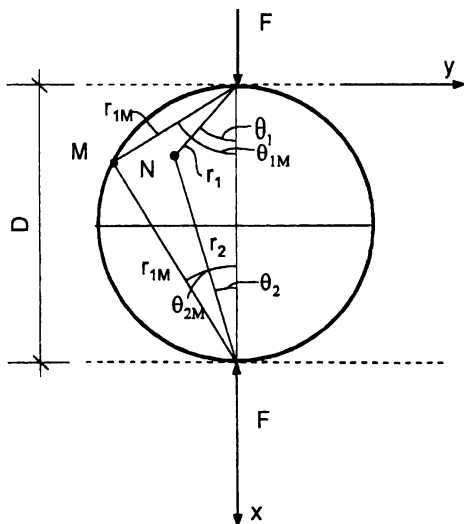


Рис. 2.28 Расчетная схема задачи

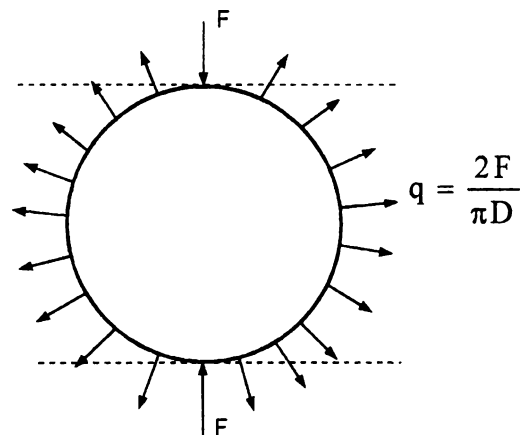


Рис. 2.29 Расчетная схема для граничных условий

Используя выражения для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  через напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  повторим их в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta \end{aligned} \right\},$$

для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_r^{(1)} \cos^2 \theta_1; \quad \sigma_x^{(2)} = \sigma_r^{(2)} \cos^2 \theta_2; \quad \sigma_x^{(3)} = \frac{2F}{\pi d}; \\ \sigma_y^{(1)} &= \sigma_r^{(1)} \sin^2 \theta_1; \quad \sigma_y^{(2)} = \sigma_r^{(2)} \sin^2 \theta_2; \quad \sigma_y^{(3)} = \frac{2F}{\pi d}; \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -\sigma_r^{(1)} \sin \theta_1 \cos \theta_1; \quad \tau_{xy}^{(2)} = -\sigma_r^{(2)} \sin \theta_2 \cos \theta_2; \quad \tau_{xy}^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

получим формулы для определения напряжений в декартовых координатах

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} + \sigma_x^{(3)} = -\frac{2F}{\pi} \left( \frac{\cos^3 \theta_1}{r_1} + \frac{\cos^3 \theta_2}{r_2} - \frac{1}{D} \right); \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} + \sigma_y^{(3)} = -\frac{2F}{\pi} \left( \frac{\sin^2 \theta_1 \cos \theta_1}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta_2 \cos \theta_2}{r_2} - \frac{1}{D} \right); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} + \tau_{xy}^{(3)} = \frac{2F}{\pi} \left( \frac{\cos^2 \theta_2 \sin \theta_2}{r_2} - \frac{\cos^2 \theta_1 \sin \theta_1}{r_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Правая часть (2.79) также можно записать в декартовых координатах, учтя, что

$$\cos \theta_1 = \frac{x}{r_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{D-x}{r_2}, \quad \sin \theta_1 = \frac{y}{r_1}, \quad \sin \theta_2 = \frac{y}{r_2}, \quad r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_2^2 = (D-x)^2 + y^2.$$

Определим напряжение в точках на горизонтальном диаметре диска, где

$$\begin{aligned} x = \frac{D}{2} = R, \quad r_1 = r_2 = \sqrt{R^2 + y^2}, \\ \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}}, \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти данные в зависимости (2.79), получим

$$\sigma_x = \frac{F}{\pi R} \left[ 1 - \frac{4R^4}{(R^2 + y^2)^2} \right]; \quad \sigma_y = \frac{F}{\pi R} \left[ 1 - \frac{4R^2 y^2}{(R^2 + y^2)^2} \right]; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (2.80)$$

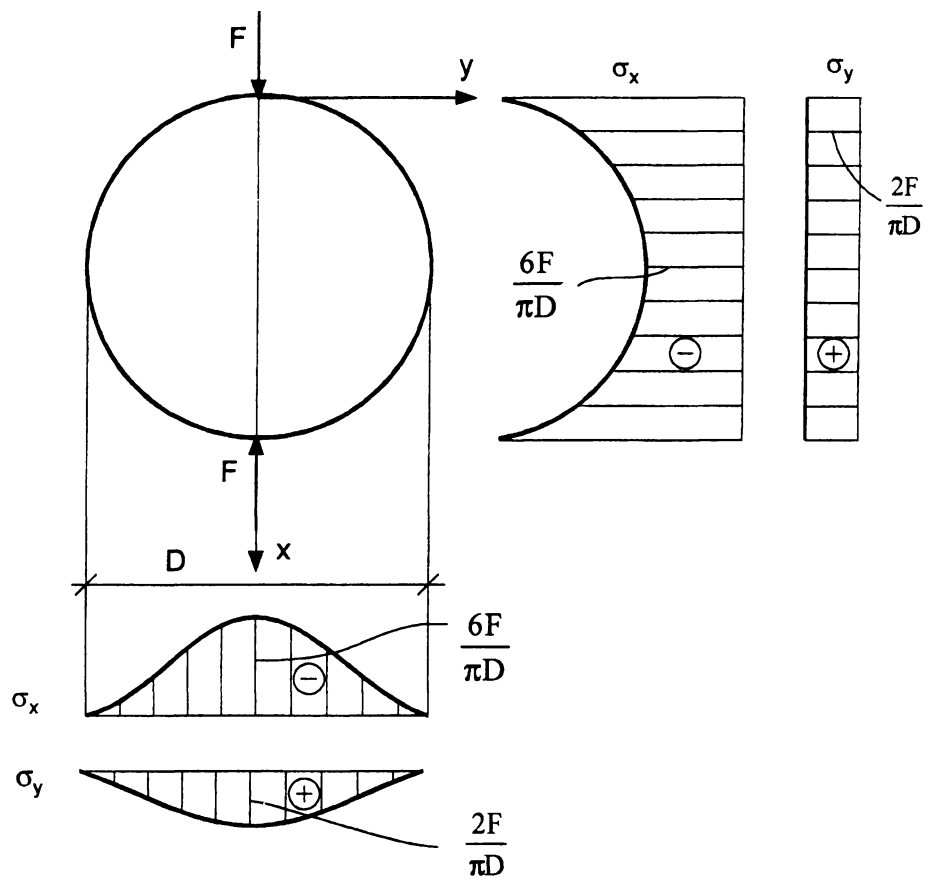
Эпюры напряжений на горизонтальном диаметре приведены на рис. 2.30.

Отметим, что максимальных значений напряжения достигают при  $y=0$ , а при  $y=\pm R$ ;  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ .

Для точек на вертикальном диаметре, при  $y=0$ ,  $r_1=x$ ,  $r_2=D-x$ ,  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1$ ,  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$ , формулы для напряжения записываются

$$\sigma_x = \frac{2F}{\pi D} \left( 1 - \frac{D}{x} - \frac{D}{D-x} \right); \quad \sigma_y = \frac{2F}{\pi D}; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Эпюры напряжений на вертикальном диаметре показаны на рис. 2.30.

Рис. 2.30. Эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$



## ГЛАВА 3.

### *Прикладные задачи теории упругости.*

#### 3.1 Кручение призматических стержней.

В случае кручения стержня круглого поперечного сечения решение, основанное на элементарной теории и изложенное в курсе "Сопротивление материалов", является точным решением, удовлетворяющим всем требованиям теории упругости. Доказательство этого здесь не приводим.

Решение задачи становится гораздо сложнее, если кручению подвергается стержень некруглого поперечного сечения. На рис. 3.1 показан стержень произвольного поперечного сечения, нагруженный двумя внешними крутящими моментами, которые действуют в плоскости его крайних поперечных сечений. Объемные силы принимаем равными нулю, а боковую поверхность свободной от внешних нагрузок.

На рис. 3.1 ось  $z$  совпадает с осью кручения - осью, которая при закручивании стержня остается неподвижной, оси  $x$ ,  $y$  взаимно ортогональны.

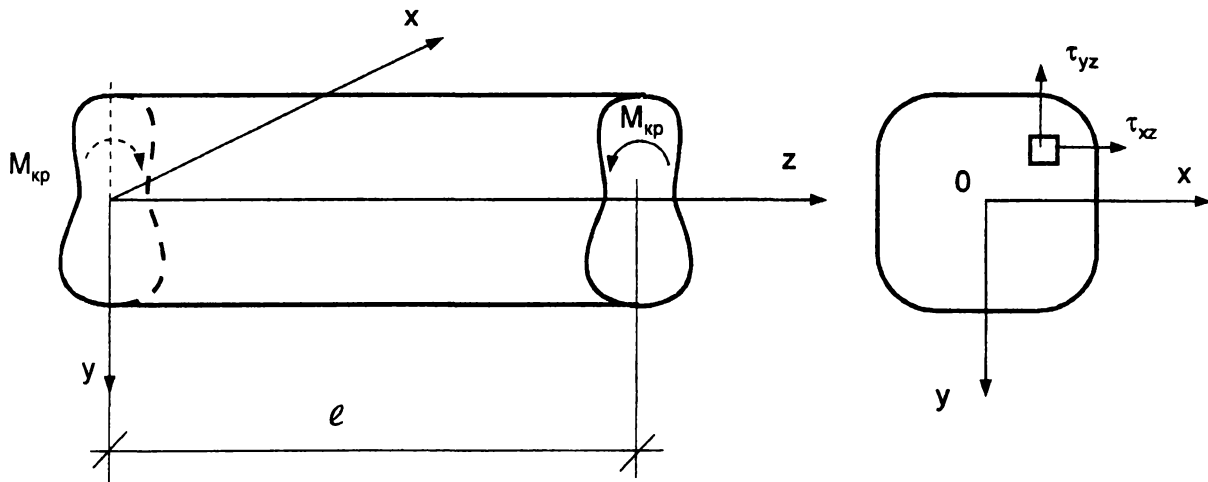


Рис. 3.1. Схема нагружения стержня.

Примем нормальные напряжения в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, равными нулю

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.$$

Касательные напряжения в любых плоскостях, параллельных оси  $z$ , также равны нулю

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.$$

Подставив эти значения напряжений в дифференциальные уравнения равновесия (1.38), получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0.$$

Из первых двух уравнений следует, что касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  не зависят от координаты  $z$ , распределение их одинаково для всех поперечных сечений, но в каждом сечении  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  должны удовлетворять третьей зависимости. В данной задаче удобно использовать функцию напряжений Л. Прандтля  $\phi$ , которая аналогична функции напряжений Эри в плоской задаче теории упругости. В этом случае уравнение равновесия будет удовлетворено, если принять

$$\begin{aligned}\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\end{aligned}\tag{3.1}$$

где  $\varphi$  - функция напряжений, не зависящая от координаты  $z$ .

Рассмотрим, как записываются уравнения совместности (1.41) для стержня, подвергающегося кручению.

Три первых уравнения (1.41) обращаются в тождества, поскольку все нормальные напряжения равны нулю. В тождество обращается и последнее уравнение. Из оставшихся двух уравнений получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Подставим в эти зависимости напряжения по формулам (3.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Из уравнений (3.3) следует, что выражение в скобках не зависит от  $x$  и  $y$ , а потому должно быть постоянной величиной

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = B = \text{const}.\tag{3.4}$$

Функцию напряжений  $\varphi$  необходимо принимать такой, чтобы она удовлетворяла этому соотношению. На контуре поперечного сечения ее проще всего принять равной нулю, так как согласно уравнениям (3.1) и условиям на поверхности, величина константы не влияет здесь на значение напряжений.

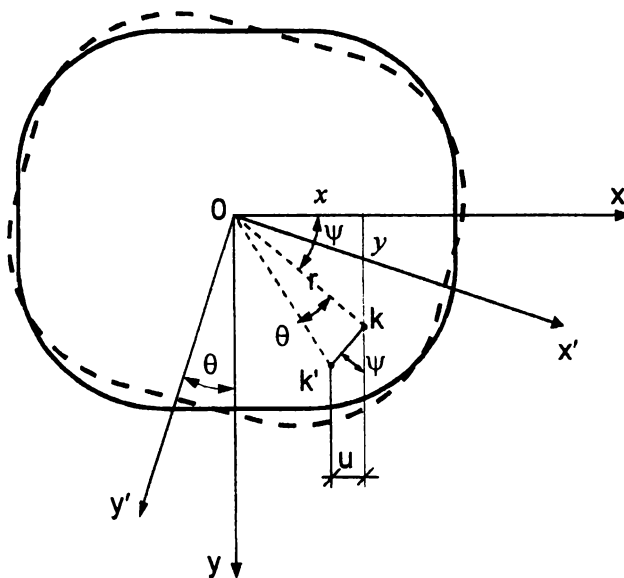


Рис. 3.2. Схема деформации сечения.

Рассмотрим деформации стержня. При кручении поперечные сечения стержня поворачиваются. Угол закручивания на единицу длины обозначим  $\theta$ , тогда сечение, отстоящее от начала координат на расстоянии  $z$ , повернется на угол  $\theta z$ . Точка  $k$  в этом сечении (рис.3.2) переместится в новое положение  $k'$ , ее перемещение равно  $\theta z r$ , где  $r$  - расстояние точки  $k$  от начала координат  $O$ . Проекция этого перемещения на ось  $x$  (составляющая полного перемещения  $u$ ) равна  $u = -\theta z r \sin \psi$ , где

$$\sin \psi = \frac{y}{r},$$

$$\text{тогда} \quad u = -\theta z \frac{y}{r} = -\theta y z. \quad (3.5)$$

Аналогично, составляющая полного перемещения по направлению оси  $y$

$$v = \theta x z. \quad (3.6)$$

Формулы Коши, с учетом, что нормальные напряжения  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ , а следовательно,  $\epsilon_x = 0$ ,  $\epsilon_y = 0$ ,  $\epsilon_z = 0$ , могут быть записаны

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (3.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0; \quad (3.8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0; \quad (3.9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.9) и (3.10) при установленных перемещениях (3.5) и (3.6) удовлетворяются. Отметим, что перемещения  $w$  не зависят от координаты  $z$ .

Подставляя выражения для  $u$  (3.5) и  $v$  (3.6) в зависимости (3.9) и (3.10), получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} + \theta y, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} - \theta x. \quad (3.12)$$

Эти соотношения свидетельствуют, что перемещения  $w$  в общем случае не равны нулю, отсюда следует важный вывод: поперечные сечения стержня при кручении *искривляются*.

Полученные выше соотношения позволяют определить постоянную величину  $B$  в формуле (3.4). Для этого продифференцируем уравнение (3.11) по  $y$ , и (3.12) - по  $x$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \cdot \frac{1}{G} + \theta;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \cdot \frac{1}{G} - \theta.$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$\left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{G} + 2\theta = 0.$$

Отсюда

$$-2\theta G = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}.$$

С учетом формул (3.1)

$$-2\theta G = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

Эта зависимость носит название уравнения Пуассона.

Тогда с учетом (3.4)

$$V = -2\theta G. \quad (3.14)$$

Задача о расчете призматического стержня на кручение по сути состоит в нахождении функции  $\phi$ , которая бы удовлетворяла уравнению (3.4) и на контуре обращалась в нуль. Но следует отметить, что в практических расчетах при разнообразии поперечных сечений подобрать соответствующую функцию напряжений трудно.

### 3.1.1 Мембранная аналогия.

Решения различных задач теории упругости часто приводятся к одинаковым по своей структуре математическим уравнениям.

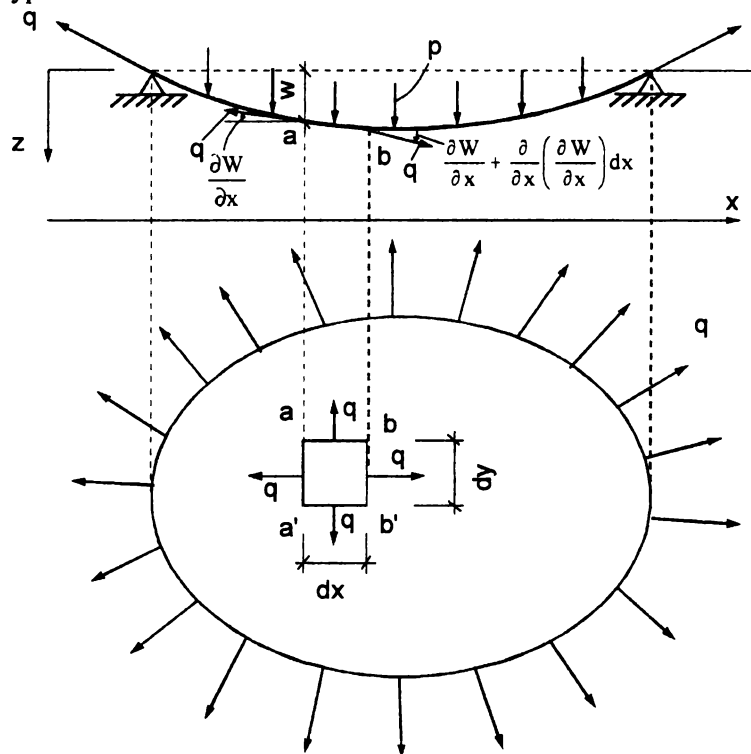


Рис. 3.3. Расчетная схема метода мембранных аналогий.

Представим себе мембрану из однородного материала (тонкую пластинку, которая может работать ввиду малой толщины только на растяжение), натянутую на жесткий контур того же очертания, что и поперечное сечение скручиваемого стержня. Мембрана подвергается затем равномерному поперечному давлению  $p$  и удерживается в равновесии растягивающими силами  $q$ , распределенными равномерно по контуру; растягивающие силы в самой мембране по всем направлениям также равны  $q$ . Выделим из мембраны бесконечно малый элемент с размерами  $dx$  и  $dy$  (рис.3.3). Прогиб в точке "a" обозначим  $w$ , угол наклона касательной здесь равен первой производной  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ; в точке "b" прогиб

составит  $\left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)$ , угол наклона касательной  $\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx$

$$\frac{\partial \left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

Далее составим уравнение равновесия элемента поверхности мембраны, спроектировав на вертикальную ось  $z$  все действующие на него силы. Предварительно определим эти силы.

К стороне  $aa'$  приложена сила натяжения  $qdy$ , проекция ее на вертикальную ось -  $qdy \frac{\partial w}{\partial x}$ .

Проекция на ось  $z$  силы натяжения, приложенной к стороне  $bb'$ ,

$$qdy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right).$$

Аналогично проекция сил натяжения, приложенных к сторонам  $ab$  и  $ab'$ ,

$$-qdx \frac{\partial w}{\partial y}; \quad q \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx.$$

Уравнение равновесия запишется в виде

$$-qdy \frac{\partial w}{\partial x} + qdy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - qdx \frac{\partial w}{\partial y} + qdx \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) + p dx dy = 0.$$

После приведения подобных членов и сокращения получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{q} \quad (3.15)$$

причем прогибы мембраны на контуре в силу его жесткости будут равны нулю, т.е.

$$w=0. \quad (3.16)$$

Дифференциальное уравнение (3.15) и граничные условия (3.16) тождественно совпадают с дифференциальным уравнением (3.13) и граничными условиями, определяющими функцию напряжений при кручении призматического стержня. В этом и заключается аналогия, установленная Л. Прандтлем, между задачами о кручении призматических стержней и об изгибе мембраны. Аналогия Л. Прандтля открывает возможность нового способа расчета стержней на кручение. Вместо кручения можно изучать изгиб мембраны, подвергающейся равномерному давлению и опирающейся на контур, в точности соответствующей поперечному сечению скручиваемого стержня. Решение задачи становится более простым.

### 3.1.2 Кручение стержня прямоугольного сечения.

Согласно мембранной аналогии функция напряжений  $\varphi(x, y)$  для прямоугольного сечения будет симметричной функцией относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 3.4). Поэтому эту функцию можно определить в четвертой части сечения, например,  $OABC$ , при этом нормальная производная функции напряжений на осях должна быть равной нулю

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (3.17)$$

На остальном контуре области  $OABC$  функция  $\varphi(x, y)$  имеет значение

$$\varphi \left( \frac{a}{2}, y \right) = 0, \quad \varphi \left( x, \frac{b}{2} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Решая уравнение (3.4) методом разделения переменных, функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  представим в виде

$$\varphi(x, y) = A_0 - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{b} + B_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{b} \right] \cos \frac{(2k-1)\pi y}{b}. \quad (3.19)$$

Второе условие (3.18) тождественно удовлетворяется уравнением (3.19).

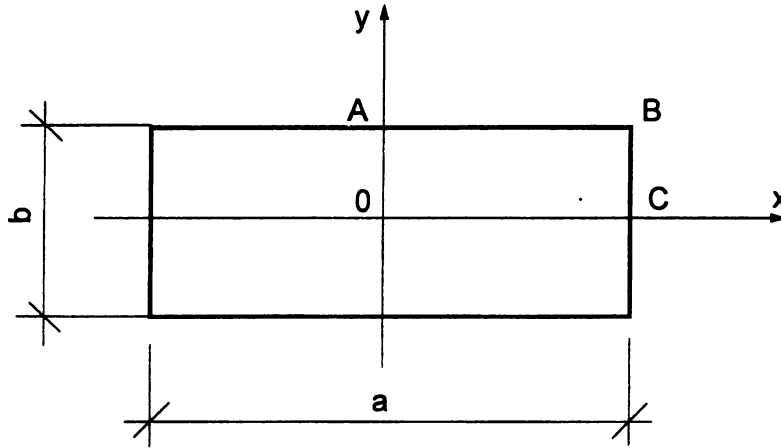


Рис. 3.4 Схема стержня

Используя первое условие (3.17) и условие (3.18), получим выражения для коэффициентов

$$A_0 = \frac{b^2}{4}, \quad B_k = 0, \quad A_k = \frac{8b^2}{\pi^3} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}}. \quad (3.20)$$

Подставляя эти значения в формулу (3.19), функция напряжений может быть представлена в виде

$$\varphi(x, y) = \frac{b^2}{4} - y^2 + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{b}. \quad (3.21)$$

Пользуясь формулами для определения напряжений (3.1) и функцией напряжений (3.21), получим выражения для напряжений

$$\tau_{xz} = -G\theta \left[ 2y + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2} \right]; \quad (3.22)$$

$$\tau_{yz} = G\theta \frac{8b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{b}. \quad (3.23)$$

Наибольшие касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон.

Опустив промежуточные выкладки, приведем формулы для максимальных касательных напряжений, выраженных через крутящий момент

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{M_z}{\alpha ab^2}. \quad (3.24)$$

В серединах коротких сторон напряжения

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{\beta ab^2}. \quad (3.25)$$

Угол закручивания определяется формулой

$$\theta = \frac{M_z}{\gamma G a b^3}. \quad (3.26)$$

Коэффициенты для некоторых отношений  $\frac{a}{b}$  помещены в нижеприведенной таблице.

Таблица

a/b	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	0,208	0,208	0,141
1,5	0,231	0,270	0,196
2	0,246	0,309	0,229
3	0,267	0,354	0,263
4	0,282	0,379	0,281
6	0,299	0,402	0,299
10	0,313	0,422	0,313
$\infty$	0,333	0,448	0,333

В случае вытянутых прямоугольных сечений, когда размер "a" намного больше "b", можно принять  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\gamma = \frac{1}{3}$ ,

тогда 
$$\tau_{xz(\max)} = \frac{3M}{ab^2}, \quad (3.27)$$

$$\theta = \frac{3M}{G a b^3}. \quad (3.28)$$

Эти формулы применяются при расчете на кручение сложных сечений, в том числе двутавров и швеллеров, которые "разбивают" на прямоугольники.

### 3.2 Расчет пластин.

#### 3.2.1 Основные понятия и гипотезы.

Пластинами называются плоские тела любой формы в плане, один размер которых (толщина h) мал в сравнении с другими линейными размерами (рис. 3.5). Пластины нашли широкое применение в различных областях техники - строительстве (панели, плиты для покрытия производственных зданий, фундаментные плиты и др.), машиностроении, судостроении и др. Это объясняется тем, что они обладают высокой несущей способностью, экономичностью, хорошей технологичностью.

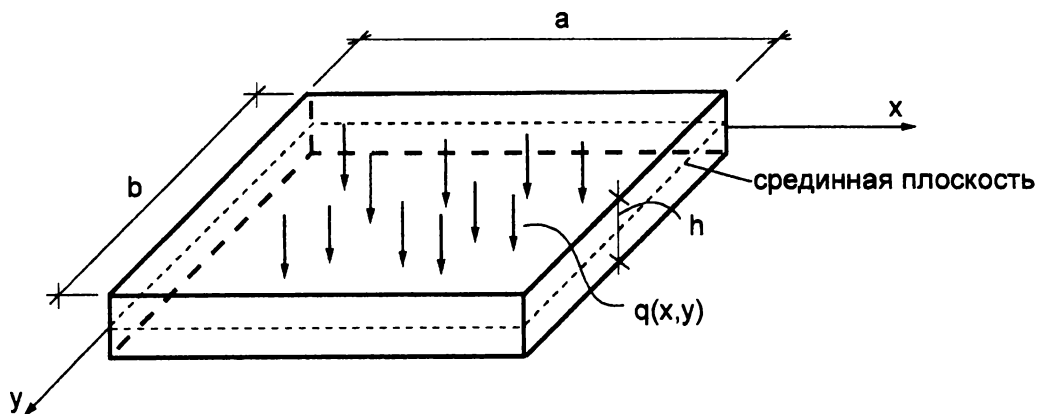


Рис. 3.5 Общая схема пластины

При расчете пластин вводят понятие о срединной плоскости и линейном элементе. Плоскость, которая делит пластину пополам по толщине, называется срединной плоскостью. В теории пластин срединная плоскость играет такую же важную роль, как в сопротивлении материалов - нейтральный слой при изгибе балок. Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью пластины называют контуром пластины. При изгибе срединная плоскость превращается в слегка искривленную поверхность прогибов  $w=w(x, y)$ , она носит название срединной поверхностью изогнутой пластины. В срединной плоскости, как правило, располагаются координатные оси; ось  $Oz$  направляется перпендикулярно срединной плоскости, чаще всего - вниз.

Толщина пластины оказывает существенное влияние на особенности ее работы при изгибе. Различают три вида пластин в зависимости от отношения  $\frac{a}{h}$  - минимального размера в плане  $a$  к толщине  $h$ .

К толстым относятся пластины, у которых  $\frac{h}{a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ . Такие пластины используются в инженерной практике в качестве элементов гидротехнических сооружений, опорных конструкций различного оборудования и др. Расчет толстых пластин ведется с учетом всех компонент напряженного состояния как массивных тел с использованием общих уравнений пространственной задачи.

Гибкими называются пластины, имеющие прогибы более  $\frac{1}{4}h$ . Такие конструктивные элементы получили распространение в авиастроении, приборостроении и др.

К тонким относятся пластины, имеющие  $\frac{1}{5} \geq \frac{h}{a} \geq \frac{1}{80}$  и величину ожидаемых прогибов не более  $\frac{1}{4}h$ . Это пластины, наиболее широко применяемые в промышленном и гражданском строительстве.

Рассмотрим техническую теорию расчета тонких пластин. В основе ее лежат гипотезы, предложенные Кирхгофом. Они аналогичны гипотезам используемым в элементарной теории изгиба балок, поперечные размеры которых малы по сравнению с пролетом.

1. Любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации (гипотеза прямых нормалей).

Поскольку гипотеза предполагает, что углы между линейным элементом и касательными к изогнутой срединной поверхности пластины остаются при изгибе прямыми, сдвиги в поперечных плоскостях принимаются равными нулю  $\gamma_{xz} = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ .

Данная гипотеза является по сути обобщением известной в сопротивлении материалов гипотезы плоских сечений.

2. Длина линейного элемента при изгибе не меняется. Эта гипотеза допускает, что линейная деформация в направлении оси  $z$  отсутствует  $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ .

3. В срединной плоскости отсутствуют деформации удлинения, укорочения и сдвига, т.е. она является нейтральной. На основании этого следует, что перемещения в срединной плоскости равны нулю  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ .

4. Отдельные слои пластины не оказывают давление друг на друга, следовательно, напряжение  $\sigma_z$ , характеризующее это взаимное давление, принимается равным нулю,  $\sigma_z = 0$ . Это допущение аналогично предположению об отсутствии надавливания продольных волокон при расчете балок.



Определение напряжений и усилий в сечениях пластины - задача статически неопределимая. Решать ее удобно в перемещениях, для чего за основную неизвестную функцию принимается функция прогибов  $w=w(x, y)$ . Выразив через  $w$  все остальные неизвестные величины, составляется разрешающее уравнение относительно  $w$ . После его решения и определения прогибов остальные величины устанавливаются по соответствующим выражениям через прогибы  $w$ .

### 3.2.2 Перемещения и деформации в пластинах и их выражение через прогибы.

В соответствии с исходными предпосылками прогиб не зависит от координаты  $z$ , т.е.  $w=w(x, y)$ . Это означает, что все точки пластины, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Используя соотношения Коши, получим

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Отсюда находим производные от составляющих перемещения по координате  $z$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Проинтегрировав эти равенства по переменной  $z$ , находим

$$\begin{aligned}u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y), \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y)\end{aligned}\tag{3.29}$$

где  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  - произвольные функции, появляющиеся при интегрировании уравнений в частных производных.

Для определения этих функций воспользуемся гипотезой о нерастяжимости срединной плоскости, при  $z=0$  составляющие перемещение, как отмечалось выше,  $u_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ . Подставляя эти условия в формулы (3.29), получим  $u_0 = f_1(x, y) = 0$ ,  $v_0 = f_2(x, y)$ .

С учетом этих данных формулы для перемещений, выраженные через функцию прогибов, принимают следующий вид

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = z \frac{\partial w}{\partial y}.\tag{3.30}$$

Составляющие деформаций находятся с помощью формул Коши, подставляя в них значения составляющих перемещения (3.30)

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

### 3.2.3 Напряжения в пластине.

Для определения напряжений в пластинах используем формулы закона Гука (в обратной записи), в которых положим  $\epsilon_z = 0$ .

С учетом соотношений (3.31) получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Как следует из зависимостей (3.32), напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  изменяется по толщине пластины по линейному закону, в точках срединной плоскости они равны нулю.

Распределение этих напряжений по высоте пластины показано на рис. 3.6.

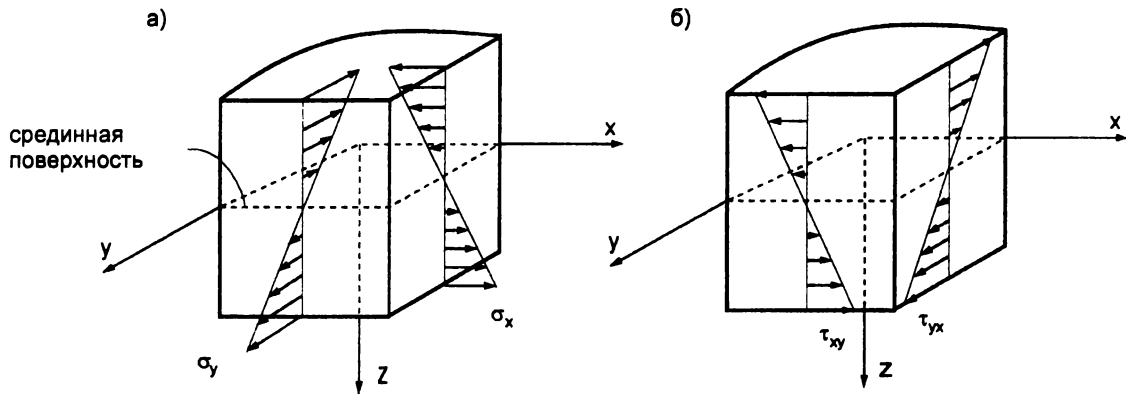


Рис. 3.6 Эпюры напряжений по толщине пластины

Касательные напряжения, действующие в двух других плоскостях  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  в соответствии с исходными предпосылками должны быть равны нулю. Однако, это противоречит условиям равновесия пластины, так как поперечная нагрузка в общем случае может оказаться неуравновешенной.

Для определения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  используем дифференциальные уравнения равновесия без учета объемных сил.

Из первого уравнения находим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Подставим сюда зависимости для напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  (3.32)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right) + \frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}.$$

Упрощая полученное выражение, получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

или

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \quad (3.33)$$

где  $\nabla^2$  - дифференциальный оператор Лапласа.

Выполним интегрирование (3.33) по переменной  $z$ . Тогда

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_1(x, y), \quad (a)$$

где  $f_1(x, y)$  - произвольная функция, для определения которой используем условие отсутствия сдвигающих (касательных) нагрузок на верхней и нижней поверхностях пластины, т. е. при  $z = \pm \frac{h}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ .

Подставим эти соотношения в формулу (а)

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f_1(x, y).$$

Откуда искомая функция

$$f_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Тогда выражение для касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , ( $\tau_{zx}$ ) примет вид

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (3.34)$$

Аналогично, решив второе дифференциальное уравнение равновесия относительно напряжения  $\tau_{yz}$  ( $\tau_{zy}$ ), находим

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (3.35)$$

Отметим, что касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  изменяются по толщине пластины по закону квадратной параболы, достигая в точках срединной плоскости максимальных значений; так же как касательные напряжения в балках прямоугольного сечения при изгибе.

Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  приведены на рис. 3.7.

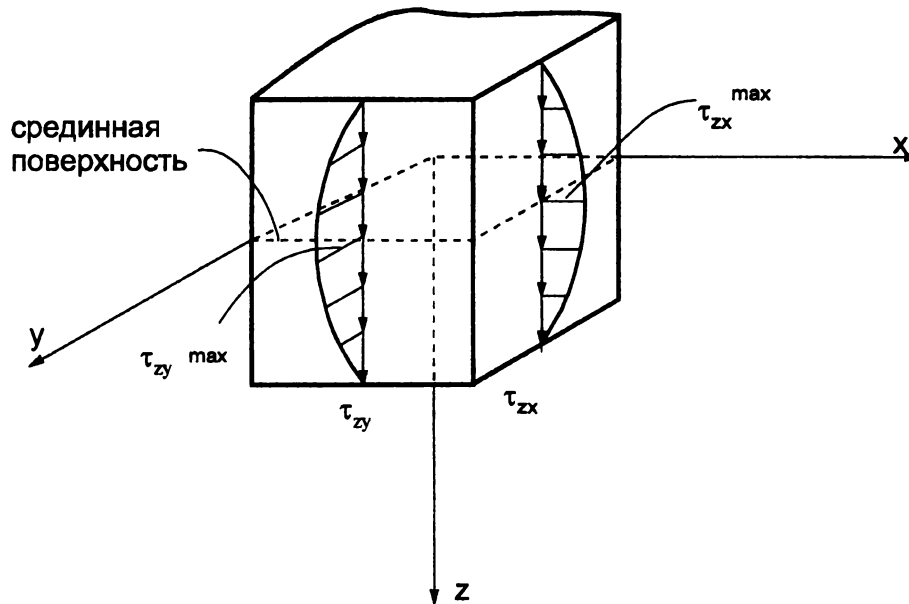


Рис. 3.7 Распределение напряжений  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$

Рассмотрим вопрос о напряжении  $\sigma_z$ , величина которого в соответствии с гипотезой о отсутствии взаимного давления между продольными слоями пластины была принята равной нулю, что позволило упростить формулу закона Гука. Однако, это допущение не соответствует граничным усло-

виям на внешних поверхностях пластины при наличии распределенных и сосредоточенных внешних нагрузок. Для определения напряжений  $\sigma_z$  используем третье дифференциальное уравнение равновесия, принимая объемные силы равными нулю,

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}.$$

Подставим в данное выражение формулы (3.34), (3.35) для касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ ,

после упрощения получим 
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w.$$

Интегрируя по  $z$ , находим

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\int \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz + f_2(x, y) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 w \int \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz + f_2(x, y) = \\ &= \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2 \cdot z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + f_2(x, y), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $f_2(x, y)$  - произвольная функция, определяемая из граничных условий.

Рассмотрим случай, когда верхняя поверхность пластины загружена распределенной поперечной нагрузкой  $q(x, y)$ , а нижняя поверхность свободна от нагрузки, следовательно, граничные условия имеют вид при  $z = -\frac{h}{2}$ ,  $\sigma_z = -q(x, y)$ ; при  $z = +\frac{h}{2}$ ,  $\sigma_z = 0$ .

Подставляя эти условия в формулу (3.36), получим

$$\begin{aligned} -\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 w + f_2(x, y) &= -q, \\ \frac{Eh^2}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 w + f_2(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Складывая почленно данные соотношения, находим  $f_2(x, y) = -\frac{q(x, y)}{2}$ .

С учетом этого выражения формула для напряжений  $\sigma_z$  принимает вид

$$\sigma_z = \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{q(x, y)}{2}. \quad (3.37)$$

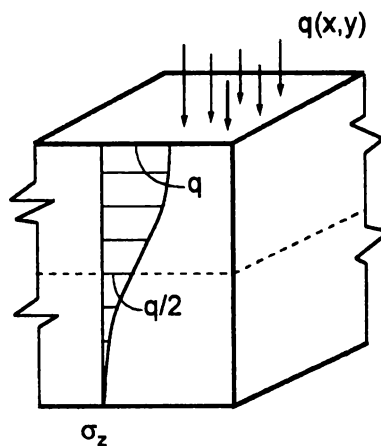


Рис. 3.8 Эпюра  $\sigma_z$

Напряжения  $\sigma_z$  изменяются по толщине пластины по закону кубической параболы (рис. 3.8), также как и в балках прямоугольного сечения, находящейся под действием распределенной нагрузки.

Напряжения  $\sigma_z$ , подсчитанные по формуле (3.37), имеют тот же порядок, что и интенсивность поперечной нагрузки.

Величины  $\sigma_z$  составляют незначительную долю от напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и ими вполне можно пренебречь.

### 3.2.4 Внутренние усилия в пластинах.

Напряжения, действующие в пластине, приводятся к равнодействующим внутренним усилиям. Определим усилия, создаваемые напряжениями (3.37) в сечениях пластины, нормальных к ее срединной плоскости. Для этого выделим из пластины элемент с единичными размерами в плане ( $dx=1$ ;  $dy=1$ ) и высотой, равной  $h$ . Рассмотрим площадку элемента, расположенную нормально оси  $x$ ; на ней действуют составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$ ; на рис. 3.9 показаны положительные величины этих напряжений.

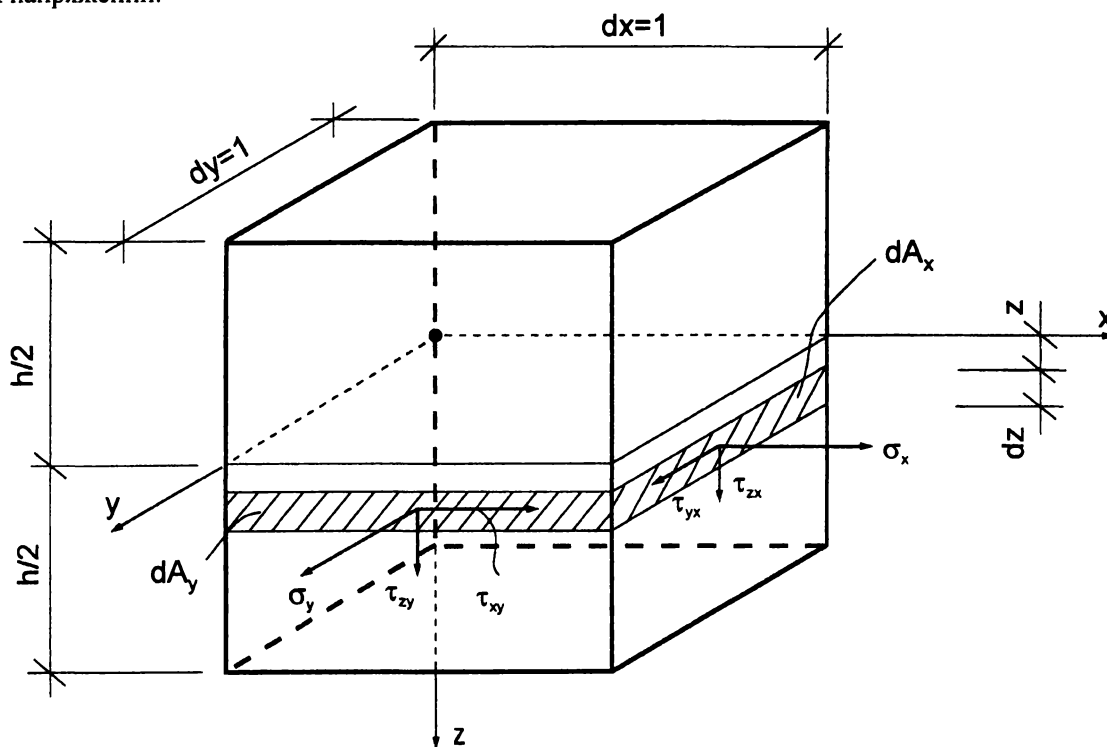


Рис. 3.9 Напряженное состояние элемента пластины

Отнесем напряжения к элементарной полоске, площадь которой равна  $dA_x = dzdx = dz \cdot 1$ .

Равнодействующие напряжений представляют собой следующие определенные интегралы.

Нормальная сила 
$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz.$$

Подставим сюда выражение для нормальных напряжений  $\sigma_x$  (3.37), вынесем за знак интеграла величины, не зависящие от координаты  $z$

$$N_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz.$$

Под знаком интеграла стоит нечетная функция, а пределы интегрирования отличаются только знаком. Следовательно, интеграл равен нулю и усилие  $N_x = 0$ .

Сдвигающая сила определяется выражением

$$S_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz.$$

Выполнив аналогичные преобразования, можно убедиться, что сдвигающая сила в сечении пластины также равна нулю ( $S_{xy} = 0$ ).

Определим изгибающий момент, который создается нормальными напряжениями  $\sigma_x$ . Равнодействующая этих напряжений на площадке толщиной  $dz$  и шириной, равной 1 равна  $\sigma_x \cdot dz$ , а изгибающий момент  $\sigma_x \cdot dz \cdot z$ . Суммируя моменты на всех таких площадках по толщине пластинки получим

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z dz.$$

Подставим сюда  $\sigma_x$  по формуле (3.37)

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz.$$

Интеграл представляет момент инерции  $J = \frac{1 \cdot h^3}{12}$ .

Поэтому  $M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ . Обозначим

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.38)$$

Эта величина называется цилиндрической жесткостью пластины и является физической и геометрической характеристикой пластины при ее изгибе. Цилиндрическая жесткость отличается от жесткости  $EJ$ , принимаемой при расчете балок, знаменателем  $(1-\nu^2)$  пластина всегда имеет большую жесткость, чем соответствующее количество расположенных рядом балок. Таким образом

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.39)$$

Отметим здесь аналогию с изгибающим моментом в балке, где  $M_x = -EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ .

Поперечная сила равна

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz.$$

Подставим в этот интеграл выражение для касательных напряжений  $\tau_{xz}$  (3.34)

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

Интегрируя, получим

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (3.40)$$

Крутящий момент равен 
$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz.$$

Подставим сюда значение касательного напряжения  $\tau_{yz}$  (3.31) и выполним интегрирование

$$M_{yx} = -\frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Здесь также удобно применить обозначение цилиндрической жесткости  $D$ , для этого числитель и знаменатель полученного уравнения умножим на  $(1-\nu^2)$

$$M_{yx} = -\frac{Eh^3(1-\nu^2)}{12(1+\nu) \cdot (1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В итоге получим

$$M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.41)$$

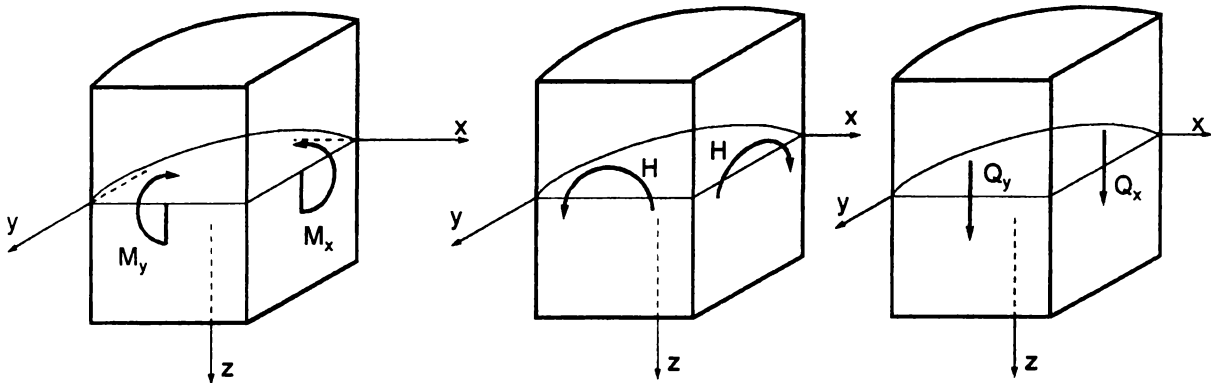


Рис. 3.10 Внутренние усилия в сечении

Аналогично найдем усилия, действующие в сечении с нормалью  $y$  (рис. 3.9):

изгибающий момент 
$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.42)$$

поперечная сила 
$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right),$$

крутящий момент, ввиду равенства касательных напряжений по перпендикулярным площадкам  $M_{xy} = M_{yx} = H$ ,

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.44)$$

Отметим, что все внутренние усилия выражены через прогибы срединной поверхности пластины, следовательно, они являются функциями переменных  $x$  и  $y$ .

Характер действия этих усилий показан на рис. 3.10; изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  создают искривление пластины, крутящие моменты  $M_{xy}$ ,  $M_{yx} = N$  вызывают более сложную деформацию, в результате которой в горизонтальных слоях пластины возникают деформации сдвига, изменяющиеся по толщине по линейному закону.

Индексы и знаки у внутренних усилий соответствуют индексам и знакам у напряжений, равнодействующими которых они являются.

### 3.2.4.1 Выражение напряжений через внутренние усилия.

По величине усилий можно найти напряжение в любой точке пластины. Нормальные напряжения через изгибающие моменты выражаются по обычным формулам сопротивления материалов, как для балки прямоугольного поперечного сечения высотой  $h$  и шириной, равной 1.

$$\text{Момент инерции сечения} \quad J = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}.$$

$$\text{Тогда} \quad \sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z = \frac{M_x z}{J}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z = \frac{M_y z}{J}.$$

Наибольшие напряжения возникают при  $z = \pm \frac{h}{2}$

$$\sigma_{x \frac{\max}{\min}} = \pm \frac{M_x}{W}; \quad \sigma_y = \pm \frac{M_y}{W}.$$

Здесь  $W$  - момент сопротивления прямоугольного сечения ( $h \times 1$ ).

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  определяются из сопоставления формул (3.32) и (3.41) и выражаются через крутящий момент

$$\tau_{xy} = \frac{12M_{xy} \cdot z}{h^3} = \frac{M_{xy} \cdot z}{J}.$$

Наибольшие напряжения  $\tau_{xy}$  имеют место при  $z = \pm \frac{h}{2}$

$$\tau_{xy \frac{\max}{\min}} = \pm \frac{M_{xy}}{W} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

Кроме моментов в сечениях пластины действуют поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , им отвечают напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

Для их определения сравниваем формулы (3.34) и (3.40), (3.35) и (3.43). В результате получаем

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_x}{h^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad (3.45)$$

$$\tau_{yz} = \frac{6Q_y}{h^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (3.46)$$

Зависимости (3.45+3.46) - это формула Журавского для балки прямоугольного сечения шириной, равной 1. Наибольшие касательные напряжения возникают в середине высоты пластины, они равны

$$\tau_{xz \frac{\max}{\min}} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}.$$



### 3.2.5 Дифференциальное уравнение изгиба пластины.

Из курса сопротивления материалов известны условия равновесия элемента балки в виде дифференциальных зависимостей  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -q$ ,  $\frac{\partial M}{\partial x} = Q$ .

Получим аналогичные уравнения для пластины. Выделим из срединной плоскости пластины бесконечно малый элемент  $dx dy$ , и покажем приложенные к нему усилия (рис.3.11). Нормально к срединной плоскости действует поверхностная нагрузка интенсивностью  $q$ ; в связи с малостью выделенного элемента в его пределах можно принять  $q=const$ .

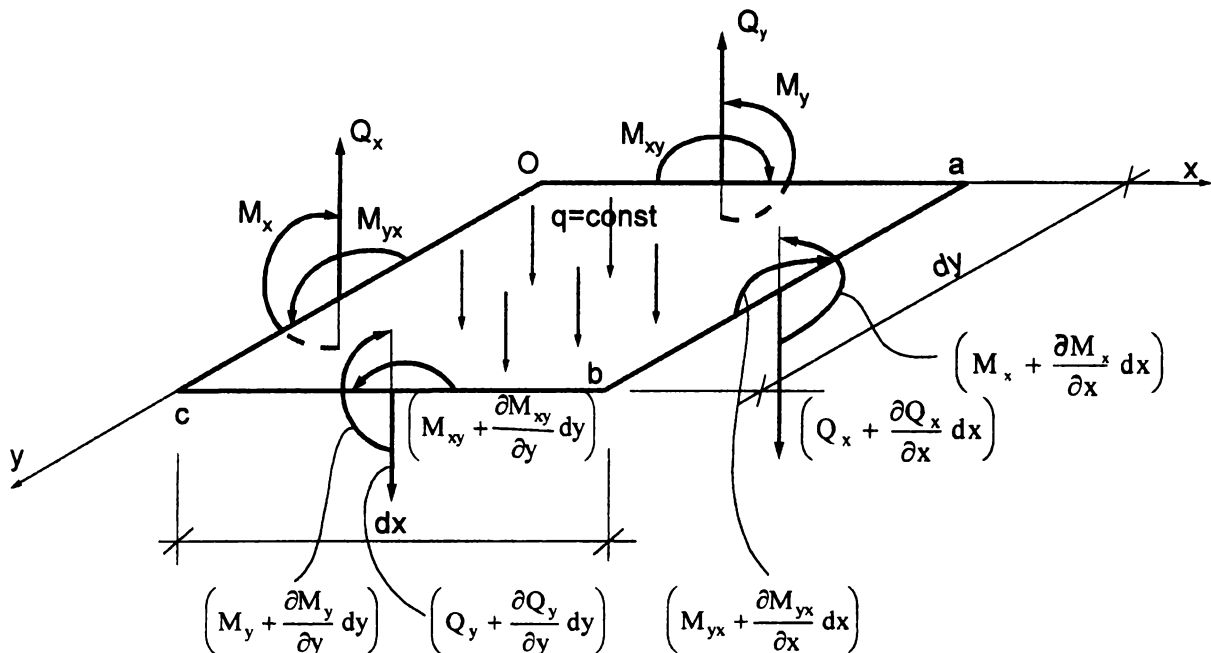


Рис. 3.11 Схема равновесия бесконечно малого элемента пластины

Учтем, что на грани  $ab$ , отстоящей от грани  $Oc$  на бесконечно малом расстоянии  $dx$ , внутренние усилия изменяются на величину частного дифференциала; аналогично изменяются усилия при переходе от грани  $Oa$  к  $bc$ . Здесь величины внутренних усилий представляют собой их интенсивность или так называемые погонные усилия; в соответствии с этим изгибающие и крутящие моменты имеют размерность силы (например,  $kH \cdot м/м = kH$ ), а поперечные силы - распределенной линейной нагрузки (например,  $kH/м$ ).

Выделенный элемент должен находиться в равновесии под действием внутренних усилий и распределенной нагрузки. Следовательно должны выполняться шесть условий равновесия: три уравнения проекций на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Учитывая размеры граней, спроектируем все силы, изображенные на рис. 3.11, на ось  $z$

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

После сокращения и деления на  $dx dy$  получим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \tag{3.47}$$

Уравнение моментов всех сил относительно оси  $y$

$$\begin{aligned} & \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - M_{xy} dx - \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \\ & - \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки, отбросим бесконечно малые высшего порядка, сократим на  $dx dy$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x. \quad (3.48)$$

Аналогично из уравнения моментов всех сил относительно оси  $x$  получаем

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y. \quad (3.49)$$

Отметим здесь следующее обстоятельство. В два дифференциальные уравнения равновесия для балки входят две неизвестные функции  $Q$  и  $M$ . Задача является статически определимой; при заданной внешней нагрузке возможно проинтегрировать эти уравнения и найти внутренние усилия  $Q$  и  $M$ .

Для пластины в три уравнения (3.47+3.49) входят пять неизвестных функций  $M_x, M_y, M_{yx}, Q_x, Q_y$ . В общем случае задача определения внутренних усилий статически неопределима. Ее возможно решить, одновременно определяя прогибы пластины  $w = w(x, y)$ . А для этого необходимо составить разрешающее уравнение относительно функции  $w$ .

В качестве разрешающего примем уравнение (3.47), которое преобразуем так, чтобы в него входила как неизвестная только  $w$ . Для этого подставим в формулу (3.47) зависимости для  $Q_x$  (3.48) и  $Q_y$  (3.49)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -q.$$

или

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (3.50)$$

Подставив в полученное уравнение выражения для моментов (3.39) и (3.42), найдем

$$-D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = 0.$$

Окончательно, после упрощения, получим

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (3.51)$$

Уравнение (3.51) можно записать и так

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D}, \quad (3.52)$$

или сокращенно 
$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (3.53)$$

Зависимость (3.51) представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины, его называют уравнением Софи Жермен.

При интегрировании уравнения С. Жермен появятся произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

### 3.2.6 Граничные условия на контуре пластины.

Функция прогибов пластины  $w(x, y)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению (3.51) и условиям ее опирания по контуру, т.е. граничным условиям. Эти условия, также как и в теории изгиба стержней, могут быть кинематическими (геометрическими), статическими и смешанными.

Рассмотрим вопросы составления граничных условий относительно функции  $w$  для трех основных случаев отражения пластины.

На рис. 3.12 показана прямоугольная пластина, у которой край  $y=0$  жестко защемлен, край  $x=0$  и  $x=a$  шарнирно оперты, а край  $y=b$  свободен от закрепления.

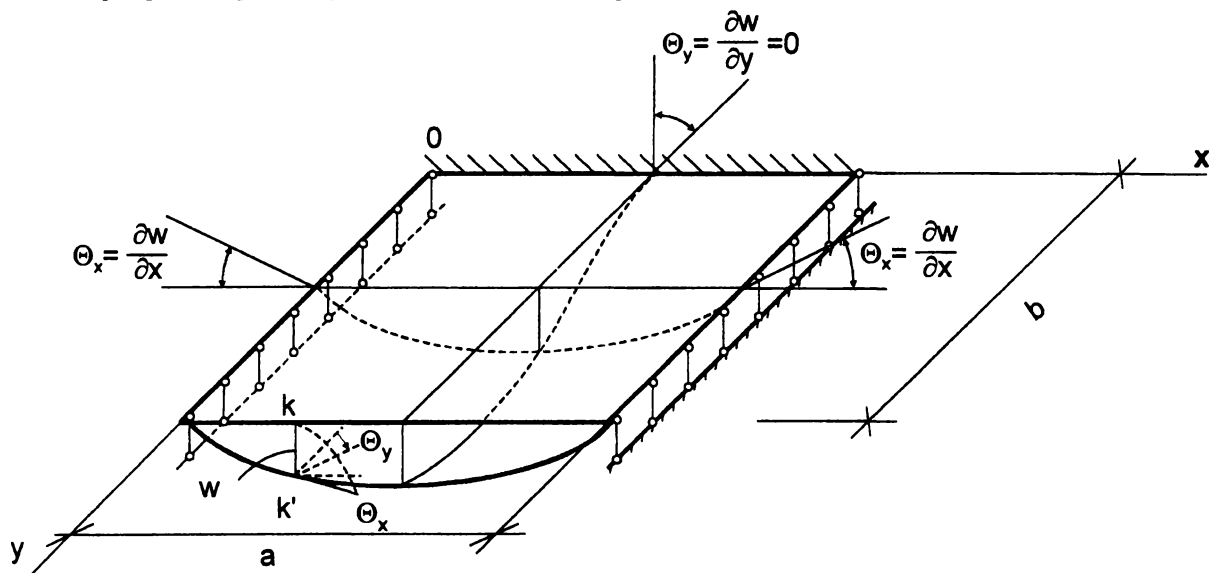


Рис. 3.12 Схема контурного закрепления пластины

На защемленной грани во всех ее точках прогибы равны нулю, защемленное сечение не поворачивается (нормали и касательные к срединной поверхности остаются соответственно вертикальными и горизонтальными), т.е. при  $y=0$  должно быть  $w=0$ ,  $\Theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ .

На шарнирных краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, например, для  $x=a$   $w=0$ .

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (a)$$

Если бы на этой грани был приложен внешний распределенный момент  $m_x$ , то второе условие (a) надо было записать в виде

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_x.$$

На свободном краю нет никаких напряжений, следовательно, здесь при  $y=b$ , должны обращаться в нуль изгибающий момент  $M_y$ , поперечная сила  $Q_y$  и крутящий момент  $H$ .

В таком виде условия для свободного края сформированы Пуассоном. Позже Кирхгоф показал, что в общем случае нельзя одновременно удовлетворить двум последним условиям. Это противоречие можно устранить, заменив два усилия  $Q_y$  и  $H$  одним усилием - обобщенной поперечной силой

$$V_y = Q_y + \Delta Q_y, \quad (6)$$

где  $\Delta Q_y$  - дополнительная поперечная сила, статически эквивалентная крутящим моментам.

Объяснение появления силы  $\Delta Q_y$  было дано Максвеллом. Распределенный вдоль края крутящий момент можно представить как последовательный ряд пар сил (рис.3.13). При переходе от одного участка края единичной ширины к соседнему крутящий момент изменяется на величину

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad dx = 1.$$

На границе участков силы частично уничтожаются и остаются поперечные усилия интенсивностью  $\frac{\partial H}{\partial x}$  и две силы, действующие на концах рассматриваемого участка пластины (рис. 3.13 в). Следовательно, крутящие моменты  $H$  и поперечная сила  $Q_y$  эквивалентны действию вертикальных сил интенсивностью

$$V_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (6)$$

Аналогично вдоль граней пластинки, параллельных оси  $y$ , будет действовать поперечная сила интенсивностью

$$V_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (7)$$

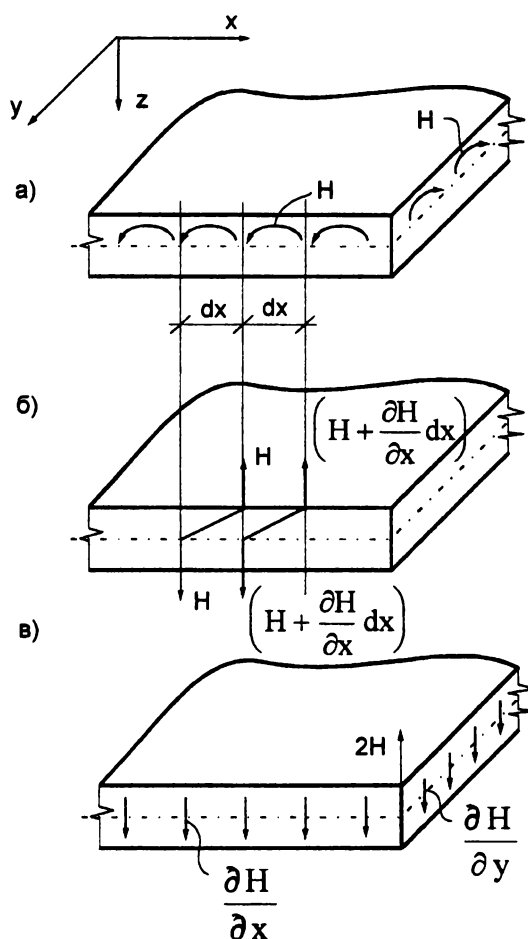


Рис. 3.13 Расчетная схема для определения обобщенной поперечной силы

Теперь два граничных условия для свободного края при  $y=b$  запишутся

$$M_y = 0; V_y = 0. \quad (\text{д})$$

Эти соотношения следует выразить через  $w$ .

Производные крутящего момента по  $x$  и  $y$  определяются по формулам (3.44)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned} \quad (\text{е})$$

Подставляя в уравнение (в) и (г) значения поперечных сил (3.40), (3.43) и производных крутящих моментов (е), получим

$$\begin{aligned} V_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ V_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Граничные условия для свободного края при  $y=b$ , выраженные через функцию прогибов  $w$ , будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{ж})$$

Следует иметь в виду, что при равенстве нулю  $V_y$ , каждое из слагаемых  $Q_y$  и  $M_{xy}$  соотношения (ж) не обязательно равны нулю, т.е. получено такое решение, когда на свободном крае приложена система касательных напряжений  $\tau_{yz}$  (отвечающих  $Q_y$ ) и  $\tau_{yx}$  (соответствующих  $M_{xy}$ ). Однако, эти усилия на краю взаимно уравновешены и, согласно принципа Сен-Венана, им отвечает поле напряжений, быстро затухающее с удалением от края в глубь пластины.

### 3.2.7 Прямоугольные пластины.

#### 3.2.7.1 Расчет прямоугольных пластин с помощью двойных тригонометрических рядов.

При расчете пластин в редких случаях удастся получить решение в замкнутой форме, приходится, как правило, прибегать к помощи бесконечных рядов.

Рассмотрим прямоугольную пластину, шарнирно опертую по контуру и нагруженную по всей поверхности произвольной поперечной нагрузкой  $q(x,y)$  (рис. 3.14). Функция прогибов должна удовлетворять дифференциальному уравнению (3.51) и граничным условиям на краях.

Зададимся функцией  $w$  в виде двойного бесконечного ряда. На контуре пластины прогибы и моменты должны быть равными нулю. Для этого необходимо, чтобы при  $x=0$  и  $x=a$ , а также при  $y=0$

и  $y=b$  вторые производные  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  равнялись нулю. Таким условиям удовлетворяют тригонометрические ряды, состоящие из членов с синусами

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (3.55)$$

где  $A_{mn}$  - коэффициенты ряда, являющиеся постоянными величинами;

$m$  и  $n$  - целые положительные числа, соответствующие номеру членов ряда и характеризующие число волн полусинусоиды в разложении (3.55).

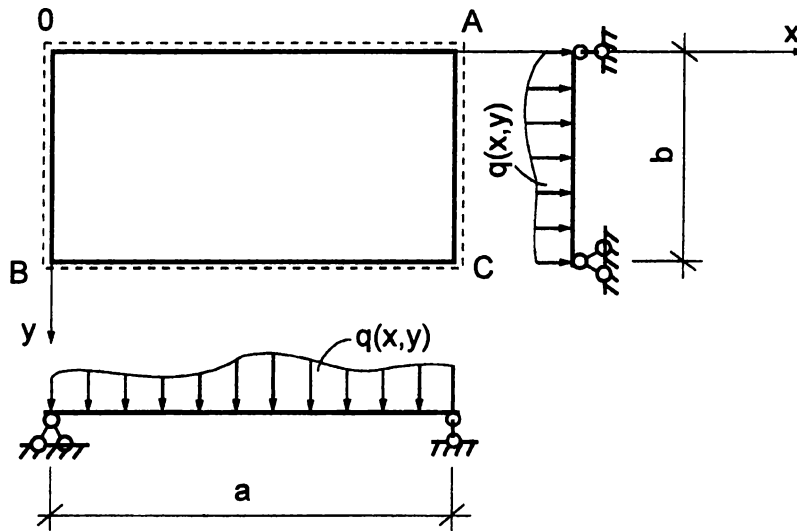


Рис. 3.14 Расчетная схема пластины

Двойной бесконечный ряд представляет бесконечную сумму членов, из которых каждый является бесконечным рядом. Можно легко убедиться, что при принятом выражении для  $w$  условия на контуре удовлетворяются.

Для определения неизвестных коэффициентов  $A_{mn}$  ряда используем основное уравнение (3.51). Вычислим производные

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Подставим выражения для производных в уравнении (3.51)

$$\begin{aligned} D \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] = q(x, y). \end{aligned}$$

Объединяя отдельные члены, получим

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = q(x, y); \quad (a)$$

или

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = q(x, y). \quad (b)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $A_{mn}$  необходимо и правую часть уравнения (b) разложить в двойной тригонометрический ряд по синусам

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (в)$$

Коэффициенты этого ряда могут быть определены по формуле теории рядов Фурье

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (г)$$

Подставим ряд (г) в уравнение (б)

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Два ряда равны между собой, если равны между собой соответствующие члены обоих рядов, отсюда

$$D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = C_{mn}.$$

Подставим сюда выражение для  $C_{mn}$ , получим общую формулу для определения коэффициентов

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy.$$

Дальнейшая конкретизация задачи зависит от вида функции  $q(x, y)$ . В частном случае равномерно распределенной по всей пластине нагрузки  $q$  выражение для коэффициентов  $A_{mn}$  будет иметь вид

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy.$$

Выполним интегрирование

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4q}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left[ -\frac{a}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \Big|_0^a \right] \cdot \left[ -\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Big|_0^b \right] = \\ &= \frac{4q}{D\pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1]. \end{aligned}$$

Все коэффициенты  $A_{mn}$  с четными индексами равны нулю. Коэффициенты же с нечетными индексами

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (д)$$

(здесь и далее  $m=1, 3, 5, \dots$ ;  $n=1, 3, 5, \dots$ )

После подстановки этих коэффициентов в ряд (3.55) выражение функции прогибов

$$w(x, y) = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (3.56)$$

Максимальный прогиб, проявляющийся в центре пластины при  $x = \frac{a}{2}$  и  $y = \frac{b}{2}$ , равен

$$w_{\max} = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (\text{е})$$

Выражение (е) преобразуем следующим образом: подставим сюда значение цилиндрической жесткости  $D$ , вынося за скобку  $a^4$ , получим

$$w_{\max} = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3} (1-\nu^2) \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2}. \quad (\text{ж})$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{192(1-\nu^2)}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

Тогда формула (ж) будет иметь вид

$$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (\text{з})$$

Полученная зависимость (з) удобна для табулирования.

Выражения для изгибающих моментов получим, подставляя в формулы (3.39), (3.42) функцию прогибов (3.56)

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(n^2 \frac{a^2}{b^2} + \nu m^2\right)}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (3.57)$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластины при  $x = \frac{a}{2}$  и  $y = \frac{b}{2}$

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(n^2 \frac{a^2}{b^2} + \nu m^2\right)}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$



При составлении таблиц выражения для изгибающих моментов представляют в виде  $\max M_x = \beta qa^2$ ,  $\max M_y = \beta_1 qa^2$ , где коэффициенты  $\beta$  и  $\beta_1$  являются функциями отношения сторон пластины  $a/b$ .

Формулы для определения поперечных сил получим, подставив функцию прогибов (3.56) в зависимости (3.40), (3.43)

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)};$$

$$Q_y = \frac{16qb}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m\left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2\right)}.$$
(3.58)

Максимальные поперечные силы возникают в середине сторон контура пластины;  $\max Q_x$  - в точках с координатами  $x=0, y=b/2$  и  $x=a, y=b/2$ ;  $\max Q_y$  - в точках с координатами  $x=a/2, y=0$  и  $x=a/2, y=b$ .

$$\max Q_x = \frac{16qa}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)};$$

$$\max Q_y = \frac{16qb}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m\left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2\right)}.$$

Для составления таблиц выражения для поперечных сил представляют в таком виде

$$\max Q_x = \gamma qa, \max Q_y = \gamma_1 qa,$$

где коэффициенты  $\gamma$  и  $\gamma_1$  являются функциями отношения сторон пластины  $a/b$ .

Следует иметь в виду, что изложенный выше метод двойных тригонометрических рядов позволяет получить пригодные для практических целей результаты, как правило, только для определения прогибов пластин. Применять этот метод для вычисления внутренних усилий нерационально, поскольку сходимость рядов для изгибающих моментов и поперечных сил недостаточна.

### 3.2.7.2 Расчет прямоугольных пластин с помощью одинарных тригонометрических рядов (задача М. Леви).

Использование одинарных тригонометрических рядов целесообразно при расчете прямоугольных пластин с двумя противоположными шарнирно опертыми краями. Два другие края могут иметь различные условия опирания или не иметь опор. Это существенно расширяет класс задач, допускающих решение.

Рассмотрим пример, когда распределенной нагрузкой  $q(x,y)$  загружена прямоугольная пластина с шарнирно опертыми краями  $x=0, x=a$  и жестко заделанными кромками  $y=0, y=b$  (рис. 3.15).

Граничные условия для краев  $x=0, x=a$  должны быть

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (a)$$

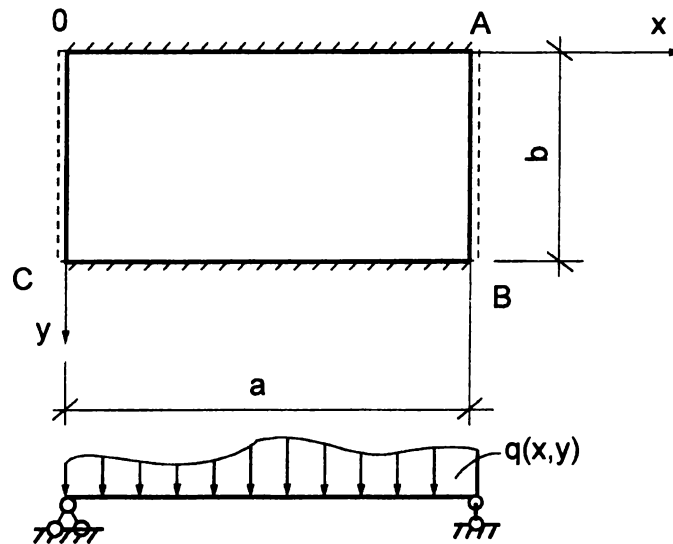


Рис. 3.15 Расчетная схема пластины

Функцию прогибов примем в виде  $w = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi \sin(\alpha x)$ , (3.59)

где  $\Psi$  - произвольная функция одного аргумента  $y$ , подлежащая определению;  $\alpha = \frac{n\pi}{a}$ .

Легко убедиться в том, что функция (3.59) удовлетворяет условиям для прогибов. Проверим условия (а) для изгибающих моментов, для этого подсчитаем вторые частные производные функции (3.59) по  $x$  и  $y$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Psi \alpha^2 \sin(\alpha x);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi'' \sin \alpha x.$$

Эти производные при  $x=0$  и  $x=a$  обращаются в нуль и, следовательно, условия (а) для изгибающих моментов также выполняются.

Для определения  $\Psi$  подставим функцию (3.59) в уравнение (3.51)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Psi^{IV} - 2\alpha^2 \Psi'' + \alpha^4 \Psi) \sin(\alpha x) = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (б)$$

Разложим заданную нагрузку  $q(x, y)$  в тригонометрический ряд Фурье по синусам

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin(\alpha x). \quad (в)$$

Пользуясь свойством ортогональности синусов при различных числах  $n$ , и учитывая, что разложение выполняется на отрезке  $0 \leq x \leq a$ , находим

$$F_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin(\alpha x) dx. \quad (г)$$

Подставив ряд (в) в уравнение (б), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Psi^{IV} - 2\alpha^2 \Psi'' + \alpha^4 \Psi) \sin(\alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin(\alpha x),$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\Psi^{IV} - 2\alpha^2 \Psi^{II} + \alpha^4 \Psi - F_n(y)] \sin(\alpha x) = 0. \quad (д)$$

Данное условие выполняется, если каждый член ряда равен нулю

$$\Psi^{IV} - 2\alpha^2 \Psi^{II} + \alpha^4 \Psi - F_n(y) = 0.$$

Получено обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\Psi^{IV} - 2\alpha^2 \Psi^{II} + \alpha^4 \Psi = F_n(y). \quad (е)$$

Общее решение уравнения (е) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения уравнения  $F_n(y)$ .

Однородное уравнение имеет вид

$$\Psi^{IV} - 2\alpha^2 \Psi^{II} + \alpha^4 \Psi = 0, \quad (ж)$$

его решение

$$\Psi_1 = C_{1n} \operatorname{ch}(\alpha y) + C_{2n} y \operatorname{ch}(\alpha y) + C_{3n} \operatorname{sh}(\alpha y) + C_{4n} y \operatorname{sh}(\alpha y), \quad (з)$$

где  $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$  - постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий на краях пластины.

Для определения  $F_n(y)$  - частного решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка надо использовать известные методы, например, метод Коши, метод вариации производных постоянных и др. Решение  $F_n(y)$  подбирается так, чтобы при подстановке в уравнение (е) получилось равенство.

Общее решение уравнения (е) с учетом (з) можно представить так

$$\Psi(y) = C_{1n} \operatorname{ch}(\alpha y) + C_{2n} y \operatorname{ch}(\alpha y) + C_{3n} \operatorname{sh}(\alpha y) + C_{4n} y \operatorname{sh}(\alpha y) + \bar{F}_n(y). \quad (и)$$

Подставляя функцию (и) в зависимость (3.59), получим

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} \operatorname{ch}(\alpha y) + C_{2n} y \operatorname{ch}(\alpha y) + C_{3n} \operatorname{sh}(\alpha y) + C_{4n} y \operatorname{sh}(\alpha y) + \bar{F}_n(y)] \sin \alpha y. \quad (3.60)$$

Одинарные тригонометрические ряды в функциях прогибов и ее производных сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Навье.

### 3.2.7.3 Пластина на упругом основании.

Рассмотрим прямоугольную пластину, которая лежит на сплошном упругом основании и нагружена поперечной нагрузкой интенсивностью  $q(x, y)$ . В этом случае дифференциальное уравнение изгиба должно содержать распределенную по площади пластины реакцию (отпор) основания (рис. 3.16). При выводе расчетных зависимостей предполагают наличие непрерывного контакта между пластиной и основанием, отсутствие сил трения и сцепления между пластинкой и поверхностью упругого основания.

Обозначив интенсивность отпора  $r=r(x, y)$ , уравнение С. Жермен (3.51) примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 w = q - r. \quad (3.61)$$

В зависимости от свойств дифференцируемого основания связь между отпором  $r$  и прогибами  $w$  может быть различной. Наиболее простой является известная из курса сопротивления материалов модель Винклера, согласно которой реактивные давления пропорциональны прогибам в соответствующих точках  $r=kw$ , где

$k$  - коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Подставив значение  $r$  в (3.61), получим уравнение изгиба пластины, лежащей на Винклеровом основании, в виде

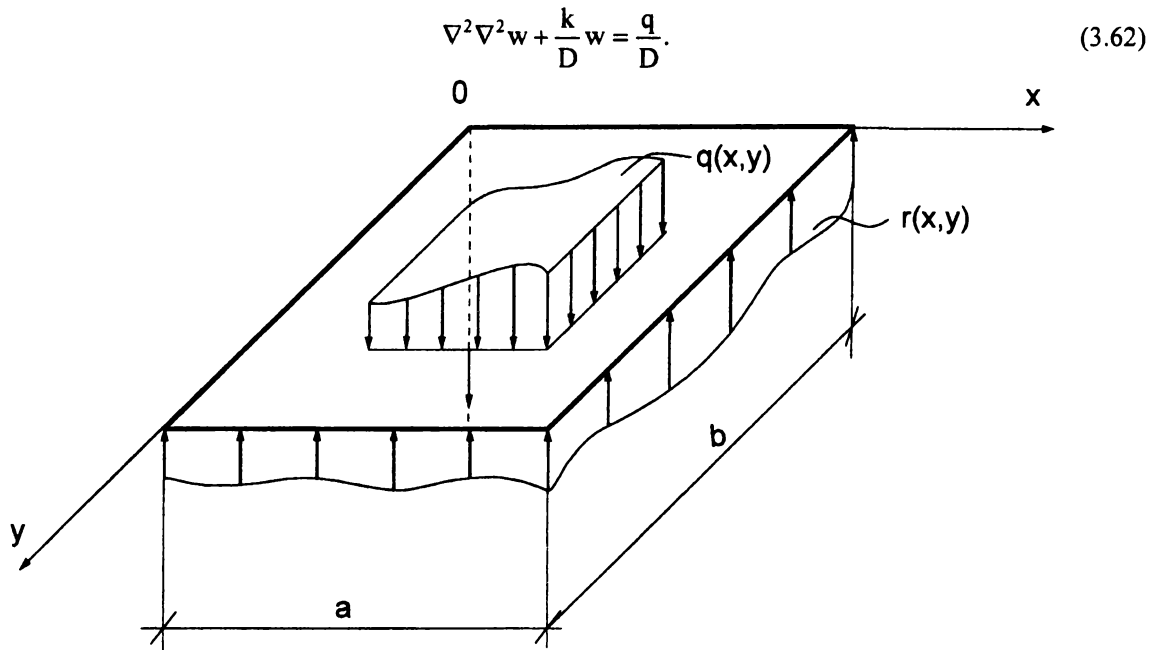


Рис. 3.16 Схема пластины на упругом основании

Модель Винклера достаточно широко применяется благодаря своей простоте, однако ей присущ ряд недостатков, что не всегда приводит к правильным окончательным результатам.

Другой распространенной моделью деформируемого основания является модель упругого полупространства. Прогибы поверхности полупространства могут быть определены от распределенной нагрузки по решению Буссинеска. В соответствии с ним в точке  $(x_i, y_i)$  от элементарной нагрузки  $g dx dy$ , приложенной в точке  $(x, y)$ , прогиб равен

$$dw_i = k[(x - x_i), (y - y_i)] g dx dy, \quad (a)$$

где  $k$  - функция влияния единичной силы  $F=1$  с координатами  $(x, y)$  на прогибы поверхности полупространства.

Прогибы точек упругого полупространства от действия непрерывно распределенного давления  $g(x, y)$  определяется следующей зависимостью

$$w(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0^2} \int_0^b \int_0^a \frac{g(x_i, y_i) \cdot dx dy}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}, \quad (3.63)$$

где  $E_0$  и  $\nu_0$  - упругие характеристики основания.

Установление функции прогибов пластины  $w(x, y)$  сводится к решению системы двух уравнений с удовлетворением граничных условий.

В рассматриваемой модели связь между прогибами и интенсивностью нагрузки  $g$  более сложная, чем в модели Винклера.

В большинстве практических случаев расчета плит, лежащих на упругом полупространстве, решается численно.

### 3.2.8. Круглые пластины.

Расчет круглых пластин удобно выполнять в полярных координатах  $r, \theta$ . Начало отсчета координат (полюс) принимается в центре срединной плоскости (рис. 3.17). Прогиб пластины и поперечная нагрузка являются функциями двух переменных  $r$  и  $\theta$ , т.е.  $w(r, \theta)$  и  $q(r, \theta)$ . Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины имеет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) = q(r, \theta), \quad (3.64)$$

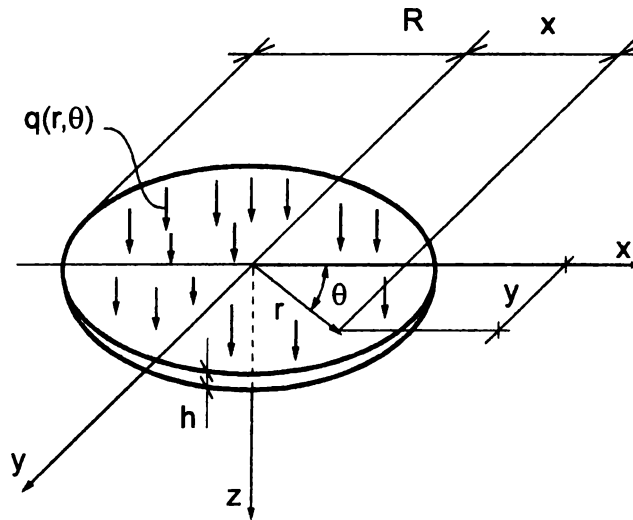


Рис. 3.17 Расчетная схема круглой пластины

или в развернутом виде

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta), \quad (3.65)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} -$$

оператор Лапласа в полярной системе координат.

В круглых пластинах возникают следующие напряжения: нормальные радиальные  $\sigma_r$  и тангенциальные  $\sigma_\theta$  напряжения, касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{zr}$ ,  $\tau_{z\theta}$ ; напряжения  $\sigma_z$  в соответствии с принятой гипотезой теории изгиба тонких пластин, принимается равным нулю.

Равнодействующими этих напряжений являются внутренние усилия: радиальный изгибающий момент  $M_r$  (изгибающий момент в сечении, перпендикулярном к радиусу-вектору  $r$ ), тангенциальный изгибающий момент  $M_\theta$  (изгибающий момент в сечении, совпадающим с радиусом-вектором  $r$ ), крутящий момент  $M_{r\theta} = M_{\theta r} = H$ , радиальная поперечная сила  $Q_r$  (поперечная сила на площадке с нормалью  $r$ ), тангенциальная поперечная сила  $Q_\theta$  (поперечная сила на площадке, совпадающей с радиусом-вектором  $r$ ).

Характер действия внутренних усилий по граням бесконечно малого элемента пластины показан на рис. 3.18.

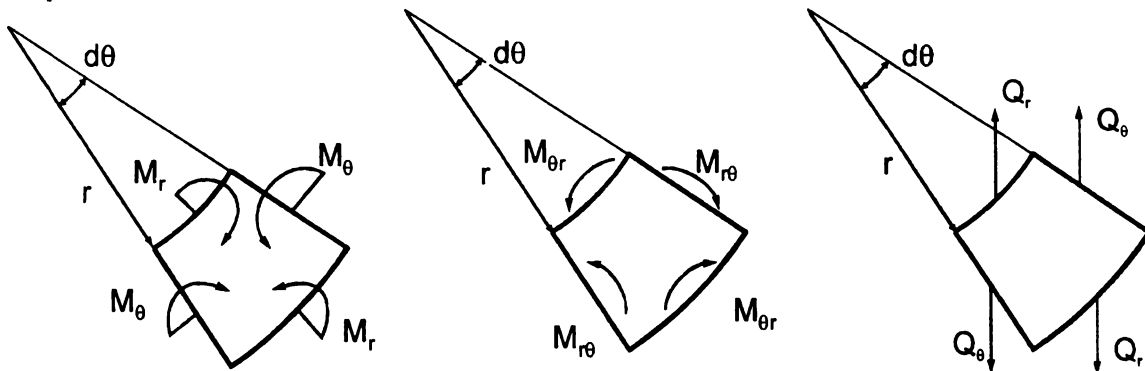


Рис. 3.18 Распределение внутренних усилий

Выразим внутренние усилия через прогибы пластины. Для этого в формулах (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) заменим производные функции прогибов по  $x$  и  $y$  на производные по  $r$  и  $\theta$ . Получим зависимости: для изгибающих моментов

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta &= -D \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

для крутящего момента

$$M_{r\theta} = -D(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (3.67)$$

для поперечных сил

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Граничные условия для круглых сплошных плит устанавливаются на контуре при  $r=R$ . Отметим, что для свободного от закрепления контура вводится приведенная радиальная поперечная сила, определяемая по формуле

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} = -D \left[ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (3.69)$$

Граничные условия в кольцевых плитах (плитах с центральным вырезом) определяются на внутреннем и внешнем контурах при  $r=R_1$  и  $r=R$ .

### 3.2.8.1. Осесимметричный изгиб круглых пластин.

Случай осесимметричного изгиба имеет место, если нагрузка на пластину и условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла  $\theta$ . При этом изогнутая срединная поверхность пластины представляет собой поверхность вращения, осью которой является ось  $Oz$ ; следовательно, и прогибы не будут зависеть от полярного угла  $\theta$ , и являются функцией лишь переменной  $r$ , т.е.  $w=w(r)$ . Этот вывод распространяется на напряжения и внутренние усилия в пластине.

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности (3.65) принимает вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{q(r)}{D}, \quad (3.70)$$

или в развернутом виде

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{q(r)}{D}. \quad (3.71)$$

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения (с переменными коэффициентами типа Эйлера) состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения  $w_1(r)$  и какого-либо частного решения неоднородного уравнения  $\bar{w}(r)$

$$w(r) = w_1(r) + \bar{w}(r). \quad (a)$$

Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (3.71), имеет вид

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} = 0, \quad (б)$$

его решение запишется так

$$w_1(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (в)$$

Входящие в (в) постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из соответствующих граничных условий каждой конкретной задачи.

Для нахождения частного решения  $\bar{w}(r)$  уравнения (3.71) можно представить так

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}. \quad (г)$$

После последовательного четырехкратного интегрирования получим общий вид частного решения

$$\bar{w}(r) = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r \left[ \int_0^r \left[ \int_0^r q(r) r dr \right] dr \right] dr \right\} dr. \quad (д)$$

Если нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины, т.е.  $q(r)=q=\text{const}$ , частное решение принимает вид

$$\bar{w}(r) = \frac{qr^4}{64D}, \quad (е)$$

и общее решение неоднородного дифференциального уравнения для этого случая загрузки будет

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (3.72)$$

При осесимметричном изгибе возникают напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  и внутренние усилия  $M_r, M_\theta, Q_r$ , определяемые по формулам

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right); \\ M_\theta &= -D \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right); \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Крутящий момент  $M_\theta$  и поперечная сила  $Q_\theta$  равны нулю.

Рассмотрим задачу о изгибе круглой сплошной пластины, шарнирно опертой по контуру, и загруженной равномерно распределенной по всей поверхности нагрузкой (см. рис. 3.19). Выражение (3.72) определяет прогиб такой пластинки.

Для определения постоянных интегрирования в решении (3.72) используем следующие граничные условия. В центре пластинки при  $r=0$  прогиб должен иметь конечное значение. Для удовлетворения этому условию в решении (3.72) опустить члены содержащие натуральный логарифм, т.к.  $\ln 0 = -\infty$ , приняв постоянные интегрирования  $C_2$  и  $C_4$  равными нулю.

Тогда уравнение (3.72) имеет вид

$$w(r) = C_1 + C_3 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (3.74)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_3$  используем граничные условия на шарнирно опертом контуре,

$$\text{при } r=R \quad w=0, \quad M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0. \quad (ж)$$

Подставляя в условие (ж) функцию прогибов (3.74) получаем

$$C_1 + C_3 R^3 + \frac{qR^4}{64D} = 0,$$

$$2C_3 + \frac{3qR^3}{16D} + \nu \left( 2C_3 + \frac{qR^2}{16D} \right) = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{qR^4}{32D} - \frac{qR^4}{64D},$$

$$C_3 = -\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{qR^2}{32D}.$$

Определив  $C_1$  и  $C_3$ , запишем окончательное решение

$$w = \frac{q(R^2 - r^2)}{64D} \left[ \frac{5 + \nu}{1 + \nu} R^2 - r^2 \right]. \quad (3.75)$$

$$M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu) (R^2 - r^2),$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} \left[ (3 + \nu) R^2 - (1 + 3\nu) r^2 \right] \quad (3.76)$$

$$Q_r = -\frac{qr}{2}.$$

Максимальный прогиб проявляется в центре пластины при  $r=0$ , где он равен

$$w_{\max} = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{qR^4}{64D}.$$

Максимальные изгибающие моменты возникают также в центре пластины, где

$$\max M_r = \max M_\theta = \frac{qR^2}{16} (3 + \nu).$$

Изгибающие моменты на контуре при  $r=R$  равны

$$M_r = 0,$$

$$M_\theta = \frac{qR^2}{8} (1 - \nu).$$

Эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 3.19.

В аналогичной постановки решаются задачи об изгибе круглой сплошной пластины, жестко защемленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 3.20).

Прогиб пластины также определяется выражением (3.74.). Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_3$  используем граничные условия на жестко защемленном контуре при  $r=R$   $w=0$ ,  $\varphi_r = \frac{dw}{dr} = 0$ .

Подставляя в эти условия функцию прогибов (3.74), получаем два алгебраических уравнения

$$C_1 + C_3 R^2 + \frac{qR^4}{64D} = 0,$$

$$2C_3 R + \frac{qR^3}{16D} = 0.$$

Решив систему, находим

$$C_1 = \frac{qR^4}{64D}; \quad C_3 = -\frac{qR^2}{32D}.$$

Уравнение изогнутой срединной поверхности примет вид  $w(r) = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2$ . (3.77)



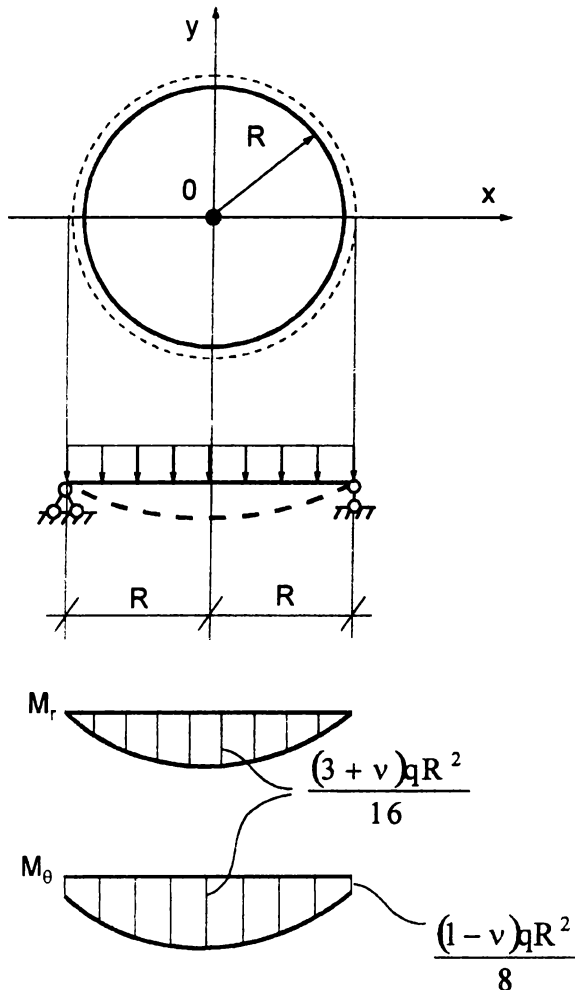


Рис. 3.19 Эпюры внутренних усилий  $M_r, M_\theta$

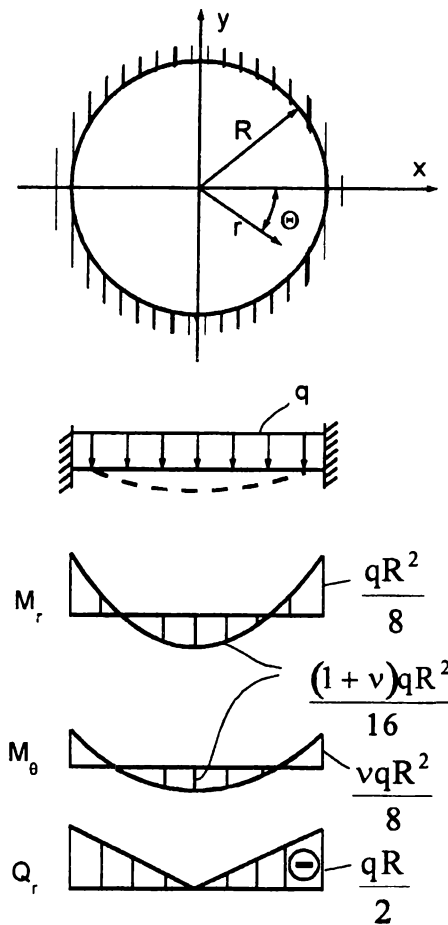


Рис. 3.20 Эпюры  $M_r, M_\theta, Q_r$

Подставляя функцию прогибов (3.77) в выражение (3.73), получим формулы для внутренних усилий в пластине

$$M_r = \frac{q}{16} \left[ (1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2 \right]; \quad M_\theta = \frac{q}{16} \left[ (1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2 \right]; \quad Q_r = -\frac{qr}{2}. \quad (3.78)$$

Максимальный прогиб имеет место в центре пластины при  $r=0$

$$w_{\max} = \frac{qR^4}{64D}.$$

Изгибающие моменты в центре пластины при  $r=0$  равны

$$M_r = M_\theta = \frac{qR^2}{16}(1+\nu),$$

на контуре пластины при  $r=R$

$$M_r = -\frac{qR^2}{8}, \quad M_\theta = \nu \frac{qR^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 3.20. Отметим, что максимальный изгибающий момент ~ на 40% менее максимального изгибающего момента в шарнирно опертой пластине.

Рассмотрим особенности расчета кольцевой пластины жестко защемленной по наружному контуру, в нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 3.21).

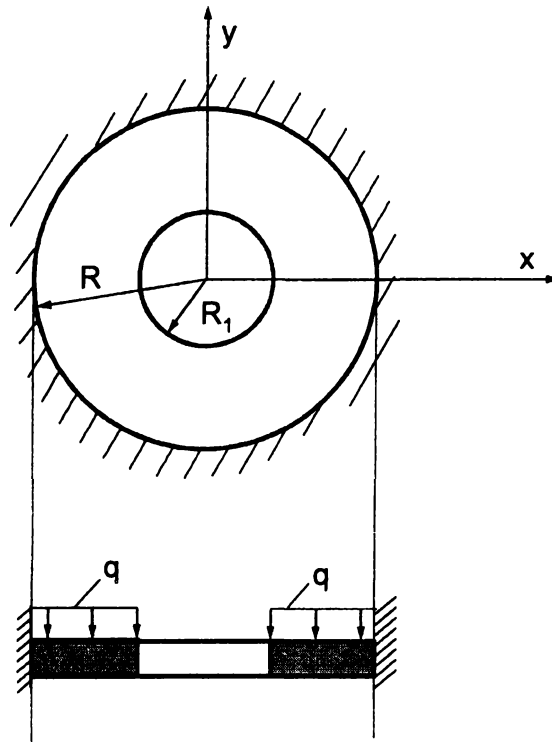


Рис. 3.21 Расчетная схема пластины

Для определения постоянных интегрирования в функции (3.72) используем такие граничные условия:

на внешнем защемленном крае при  $r=R$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0;$$

на внутреннем свободном крае при  $r=R_1$

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0,$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0.$$

Далее, подставив в эти граничные условия функцию прогибов (3.72), получим систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\frac{qR^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln R + C_3 R^2 + C_4 R^2 \ln R = 0;$$

$$\frac{qR^3}{16D} + \frac{C_2}{R} + 2C_3 R + 2C_4 R \ln R + C_4 R = 0;$$

$$\frac{3qR_1^2}{16D} + \frac{C_2}{R_1^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln R_1 + 3C_4 + \sqrt{\left( \frac{qR_1^2}{16D} + \frac{C_2}{R_1^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln R_1 + C_4 \right)} = 0;$$

$$\frac{qR_1}{2D} + \frac{4C_4}{R_1} = 0.$$

Решив эту систему  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и по сути, задача может считаться решенной. Выражения для прогибов и внутренних усилий здесь не приводятся.

### 3.2.9 Расчет пластин с помощью вариационных методов.

Получение аналитических решений многих задач теории упругости, пригодных для практических целей, в силу больших математических трудностей часто невозможно. В этих случаях целесообразно использовать приближенные методы, среди которых важное место занимают вариационные методы. В их основе лежат вариационные принципы, например, принцип возможных перемещений Лагранжа.

Рассмотрим некоторые основные понятия вариационных принципов. В инженерной практике обычно отыскивается экстремум некоторой функции  $y=f(x)$ , но встречаются и такие задачи, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной  $z$ , которая сама зависит от выбора функции  $y(x)$ . Такие переменные  $z$  называются функционалами. В простейшем случае функционал  $z$  представляется в виде

интеграла  $z = \int_a^b F(x, y, y_1) dx$ , где  $a, b$  определяют интервал изменения аргумента  $x$ . В вариационных

задачах следует найти такой вид функции  $y(x)$ , при котором функционал  $z$  приобретает максимальное или минимальное значение.

Отметим, что методы решения вариационных задач во многом сходны с исследованием функции на максимум и минимум. В задачах на максимум и минимум независимому переменному  $x$  дается приращение  $\Delta x = x - x_1$ , равное дифференциалу  $dx$ .

В вариационных задачах дается приращение (или вариация)  $\delta y$  искомой функции  $y(x)$ , равное  $\delta y = y(x) - y_1(x)$ . В дифференциальном исчислении дифференциал функции представляет собой линейную по отношению к приращению аргумента  $\Delta x$  часть приращения функции, в вариационном исчислении вариация функционала  $\delta z$  представляет собой линейную по отношению к вариации функции  $\delta y$  часть функционала.

Если функция  $y=f(x)$  достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента  $x$ , дифференциал  $dy=0$ ; аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю.

В задачах расчета пластин вариационные методы позволяют привести основное дифференциальное уравнение изгиба пластины (3.51) в частных производных к системе линейных алгебраических уравнений или к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Например, функцию прогиба пластины можно задать в виде ряда с конечным числом членов

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \varphi_{kl}(x, y), \quad (3.79)$$

где  $k=1, 2, \dots, m$ ;  $l=1, 2, \dots, n$ .

В этом выражении  $\varphi_{kl}(x, y)$  - линейные независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи, они задаются в начале расчета и называются аппроксимирующими функциями. Коэффициенты  $a_{kl}$  в зависимости (3.79) являются постоянными числами (параметрами), подлежащими определению.

В зависимости от числа членов ряда (3.79) решение может быть получено с любой степенью точности.

Существуют различные методы определения постоянных параметров  $a_{kl}$  в их числе методы Ритца, Бубнова-Галеркина и др.

Метод Ритца основан на принципе Лагранжа, согласно которому, если упругое тело находится в равновесии, то работа всех сил (внешних и внутренних) на любом возможном перемещении равна нулю

$$\delta \left[ \iiint_V W dx dy dz - \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz - \iint_S (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) ds \right] = 0. \quad (3.80)$$

Первый интеграл в уравнении (3.80) представляет собой потенциальную энергию упругого тела (работу внутренних сил), второй – работу внешних объемных сил, третий – работу внешних поверхностных сил. При этом все внутренние и внешние силы считаются неизменными. Если обозначить полную потенциальную энергию тела буквой  $\mathcal{E}$ , то выражение (3.80) можно кратко записать так

$$\delta \mathcal{E} = 0 \quad (3.81)$$

Следовательно, потенциальная энергия упругого тела в состоянии устойчивого равновесия имеет минимальное значение.

Используя при расчете пластин метод Ритца, необходимо составить выражение для работы внешних сил  $A$  и потенциальной энергии деформации пластин. Полная потенциальная энергия пластины равна  $\mathcal{E} = U - A$ . Если функция прогибов задана в виде (3.79), полная потенциальная энергия является квадратичной функцией параметров  $a_{kl}$ :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_{kl}^2)$  (доказательство здесь не приводим).

Можно составить частные производные от  $\mathcal{E}$  по всем параметрам и, выполняя условия минимума полной потенциальной энергии пластины, приравнять их нулю

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_{kl}} = 0.$$

Используя это соотношение, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно  $a_{kl}$ ; подставив их в функцию прогибов (3.79), получаем приближенное решение задачи об изгибе пластины.

Следует отметить, что практически метод Ритца в большинстве случаев удобно реализуется в методе конечных элементов (МКЭ). Преимущества заключаются в том, что окончательные разрешающие уравнения Ритца удается составлять без явного получения выражения энергии упругого тела и его дифференцирования.

Метод Бубнова-Галеркина по сути представляет собой приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений. Идея метода была высказана проф. И. Г. Бубновым в 1913 г., независимо от него этот метод в 1915 г. был использован академиком Б. Г. Галеркиным при решении задач прикладной теории упругости. С формально-математической точки зрения метод основан на свойстве ортогональных функций. Если имеется семейство непрерывных функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_l(x), \varphi_n(x) \quad (3.82)$$

и интеграл от произведения двух любых функций того семейства на отрезке  $[a, b]$  равен нулю при  $k \neq l$

$$\int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(x) dx = 0, \quad (3.83)$$

то функции (3.82) образуют на отрезке ортогональную систему. Например, система функций  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin kx, \cos kx$  ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , поскольку интегралы возможных вариантов комбинирования двух различных функций

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx) \cos(lx) dx = 0.$$

Указанное свойство можно распространить на функции нескольких переменных.

Если одна из функций системы равна нулю, то ее можно считать ортогональной ко всем функциям, поскольку в этом случае условие (3.83) выполняется тождественно.

В теории изгиба пластин в качестве такой функции может быть принята функция, представляющая собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины

$$\varphi(x, y) = D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q(x, y). \quad (3.84)$$

Эта функция должна быть, согласно (3.83), равной нулю и, следовательно, быть ортогональной к любым функциям, заданным в некоторой области.

Если функция прогиба представлена в виде суммы (3.79), то при подстановке  $w(x, y)$  в уравнение (3.84) в общем случае тождественного нуля не получается, т. е.  $\varphi(x, y) \neq 0$ .

В каждой точке  $x, y$  заданной области интегрирования величина  $\varphi(x, y)$  будет иметь свое значение вместо требуемого по (3.83) нуля и ее называют функцией-ошибкой. Стремясь к минимальной величине функции-ошибки, потребуем, чтобы функция  $\varphi(x, y)$  была ортогональна к аппроксимирующим функциям  $\varphi_{kl}(x, y)$  в уравнении (3.83)

$$\iint_S \varphi(x, y) \varphi_{kl}(x, y) dx dy = \iint_S \left[ D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q(x, y) \right] \cdot \varphi_{kl} dx dy = 0. \quad (3.85)$$

Интегрирование должно выполняться по всей площади  $S$  срединной плоскости пластины.

После подстановки в (3.85) выражения (3.79) и замены интеграла от суммы суммой интеграла получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $a_{kl}$ . Решение системы дает искомые коэффициенты  $a_{kl}$ .

Уравнениям данного метода можно дать и вариационную трактовку. Как известно, зависимость  $S$ . Жермен выражает условие равновесия элемента пластины  $dx, dy$ ,

$D \nabla^4 w(x, y) - q(x, y)$  - сумма проекций на ось  $z$  всех внешних и внутренних сил, действующих на бесконечно малый элемент. Функция прогибов  $w(x, y)$  представляет собой перемещение в направлении оси  $z$ , следовательно, функции  $\varphi_{kl}$  также являются перемещениями в направлении оси  $z$ . В этом смысле метод Бубнова-Галеркина, как и метод Ритца, исходит из принципа возможных перемещений Лагранжа.

Рассмотрим применение метода Бубнова-Галеркина к расчету прямоугольной пластины, защемленной по контуру и нагруженной по всей поверхности равномерно распределенной нагрузкой (рис. 3.22).

Функция напряжений должна удовлетворять следующим условиям

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad w = 0, \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ \text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad w = 0, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить этим условиям приближенное выражение функции прогибов можно принять в виде такого ряда

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n a_{k\ell} \left( 1 + \cos \frac{2k\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{2\ell\pi y}{b} \right), \quad (3.86)$$

где функция  $\varphi_{k\ell} = \left( 1 + \cos \frac{2k\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{2\ell\pi y}{b} \right)$  каждого члена ряда удовлетворяет всем граничным условиям.

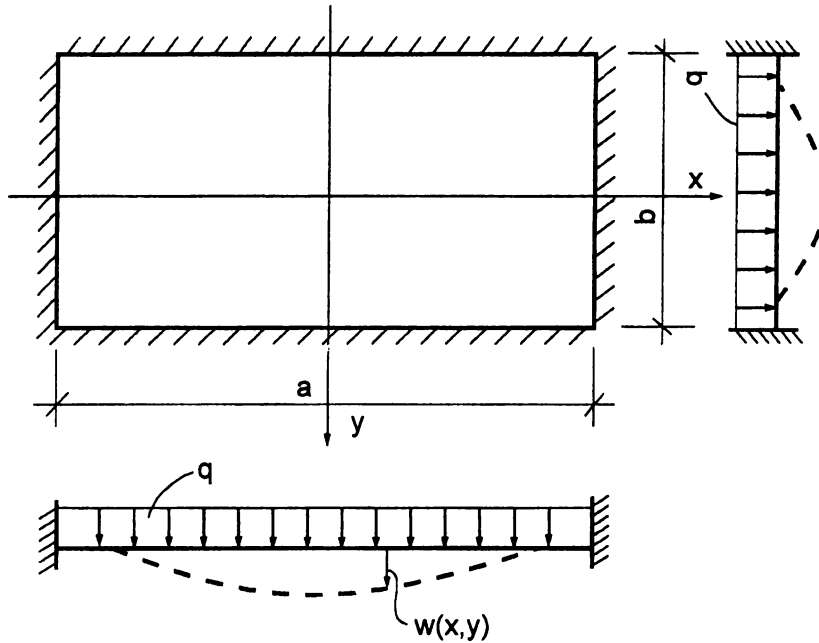


Рис. 3.22 Схема нагружения пластины

Для отыскания неопределенных параметров  $a_{kl}$  необходимо составить систему уравнений Бубнова-Галеркина. Ограничимся в первом приближении одним членом ряда (3.86)

$$w_{11} = a_{11}\varphi_{11} = a_{11} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \quad (3.87)$$

и, подставив его в выражение (3.84), получим

$$\varphi(x, y) = 16D\pi^4 a_{11} \left[ \frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - q.$$

Функции  $\varphi(x, y)$  и  $\varphi_{11}$  подставим в уравнение (3.85)

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left( \varphi(x, y) \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \right) dx dy = 0$$

выполнив интегрирование, после упрощения получим

$$4\pi^4 a_{11} \left( \frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) = \frac{q}{D}.$$

Отсюда значение  $a_{11}$  равно

$$a_{11} = \frac{qa^4}{4D\pi^4} \left( \frac{1}{3 + 3\frac{a^4}{b^4} + 2\frac{a^2}{b^2}} \right).$$

Внося коэффициент  $a_{11}$  в уравнении (3.86) получаем функцию прогибов в первом приближении

$$w_{11} = \frac{qa^4}{4D\pi^4} \cdot \frac{\left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{3 + 3\frac{a^4}{b^4} + 2\frac{a^2}{b^2}}. \quad (3.88)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластины.

Отметим, что использование метода Бубнова-Галеркина приводит к менее громоздким выкладкам, чем в методе Ритца. Применение метода Бубнова-Галеркина предусмотрено при выполнении студентами расчетно-проектировочной работы “Расчет пластин при изгибе” по курсу “Теория упругости и пластичности”.

### 3.3 Основы расчета тонких оболочек.

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми  $h$  (толщина оболочки) мало в сравнении с другими размерами тела. Поверхность, делящая толщину  $h$  пополам носит определение срединной поверхности.

Ниже рассматриваются тонкие оболочки постоянной толщины, геометрия таких оболочек определяется формой срединной поверхности. К таким относят оболочки, у которых отношение толщины  $h$  к наименьшему радиусу кривизны поверхности составляет величину, меньшую  $\frac{1}{20}$ . Оболочки считаются толстыми, если указанное выше отношение превышает величину  $\frac{1}{20}$ .

Остановимся на некоторых основных сведениях из геометрии поверхностей. Если через произвольную точку  $M$  рассматриваемой криволинейной поверхности провести две нормальные плоскости  $L$  и  $Q$ , то получающиеся в пересечении плоскостей с поверхностью кривые  $B_1, B_2$  (рис. 3.23) обладают максимальными значениями кривизн по сравнению с любыми кривыми на поверхности, проведенными через ту же точку  $M$ . Направление кривых  $B_1, B_2$  в точке  $M$  называют главными направлениями, их кривизны  $k_1$  и  $k_2$  - главными кривизнами, а соответствующие радиусы  $R_1$  и  $R_2$  - главными радиусами кривизн в точке  $M$ .

Плоскости  $L$  и  $Q$  являются ортогональными плоскостями и, соответственно, главные направления в точке  $M$  ортогональны.

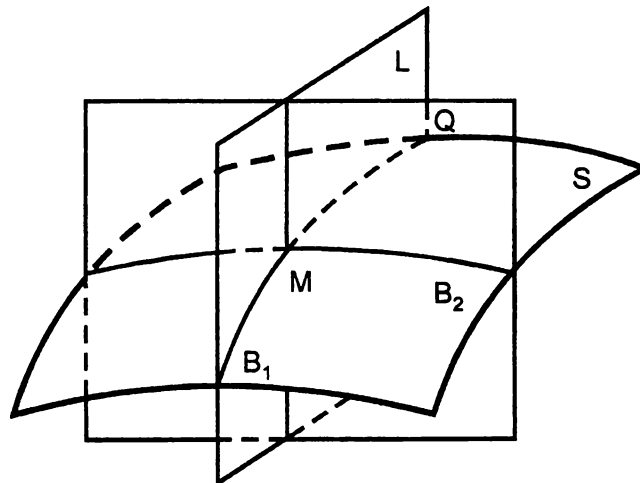


Рис. 3.23 Элемент криволинейной поверхности

Помимо главных кривизн  $k_1$  и  $k_2$ , обратных по значению главным радиусам  $k_1 = \frac{1}{R_1}, k_2 = \frac{1}{R_2}$  в теории поверхностей большое значение имеет понятие о гауссовой кривизне, представляющее собой произведение двух главных кривизн в точке  $\Gamma = k_1 k_2$ , а также средней кривизне  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ .

Геометрия поверхности оболочки характеризуется гауссовой кривизной. Различают оболочки положительной гауссовой кривизны - сферические, эллиптические оболочки (рис. 3.24а); нулевой гауссовой кривизны - цилиндрические, конические оболочки (рис. 3.24б); отрицательной гауссовой

кривизны - гиперболические оболочки (рис. 3.24в); смешанной кривизны (оболочки, состоящие из участков с различной гауссовой кривизной - торообразные.

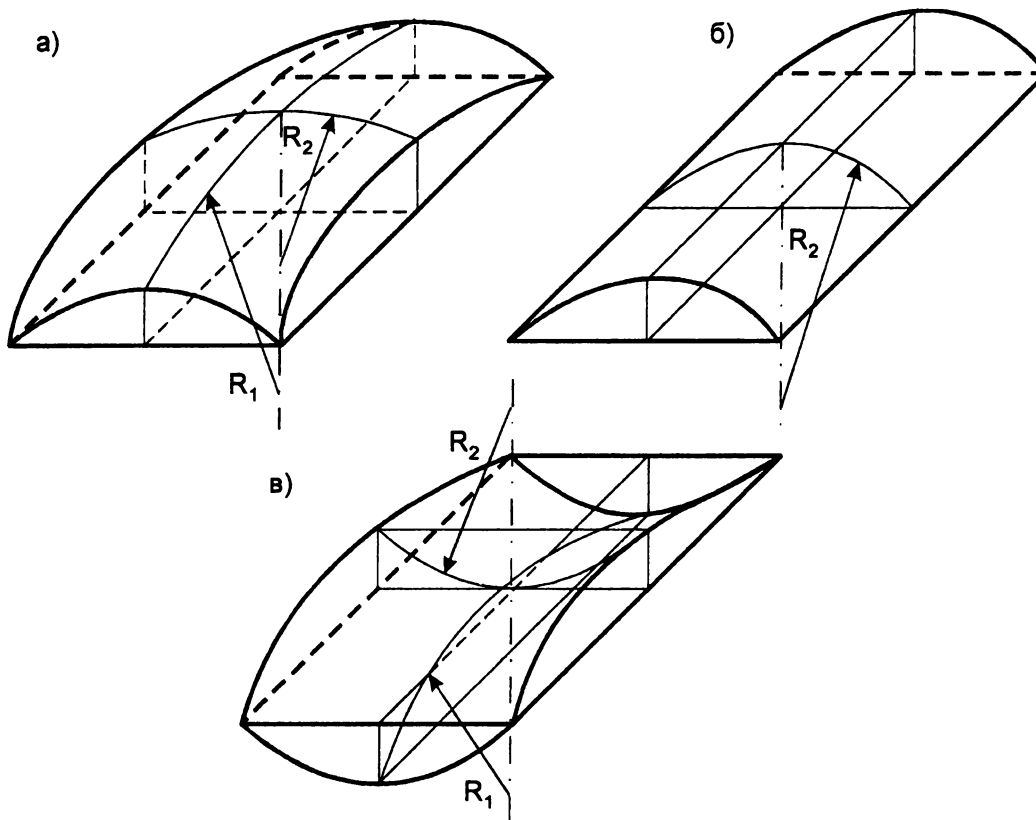


Рис. 3.24 Схема оболочек гауссовой кривизны

Оболочки первого и третьего типов называют оболочками двойной кривизны. Они являются либо оболочками вращения, образуемыми вращением некоторой плоской кривой вокруг прямолинейной оси, либо оболочками переноса, которые получаются путем перемещения некоторой образующей кривой по произвольной направляющей так, что плоскости, в которых лежит образующая, остаются параллельными друг другу.

Рассмотрим элемент оболочки (рис. 3.25). Под действием внешней нагрузки в сечениях элемента возникают: нормальные усилия  $N_1$  и  $N_2$ , сдвигающие усилия  $T_1$  и  $T_2$ , изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$ , крутящие моменты  $M_{12}$  и  $M_{21}$ , поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$ .

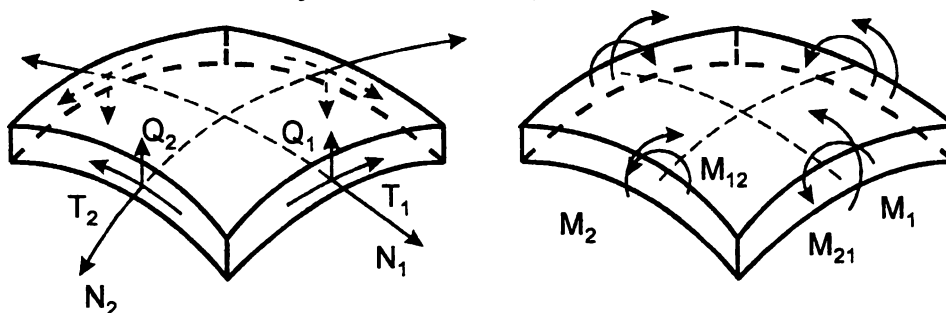


Рис.3.25 Равновесие элемента оболочки

Исходные дифференциальные уравнения для расчета оболочек, полученные с учетом всех перечисленных выше усилий, оказываются настолько сложными, что их интегрирование даже для про-



стейших случаев связано с большими математическими трудностями, но во многих частных случаях исходные дифференциальные уравнения и решения задачи существенно упрощаются. В инженерной практике расчет оболочек осуществляется по безмоментной и моментной теориям.

При эксплуатации оболочки внешняя нагрузка часто уравнивается нормальными и сдвигающими усилиями, по этой причине изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы существенно снижаются.

При определенных условиях изгибные напряжения оказываются по сравнению с напряжениями, действующими в срединной поверхности, настолько малыми, что ими можно пренебречь. Отметим, что изгибающие и крутящие моменты становятся пренебрежимо малыми тогда, когда оболочка имеет либо очень малую толщину  $h$ , либо когда очень малы величины изменений кривизны.

Такое напряженное состояние называется безмоментным, оно является технически наиболее выгодным вследствие равномерности работы материала по толщине оболочки. Особенно это важно для железобетонных оболочек, где возможно образование трещин, от небольших по величине растягивающих напряжений.

Для существования безмоментного напряженного состояния необходимо выполнение ряда условий, которые относятся к самой оболочке, к граничным условиям и к нагрузке. Эти условия следующие:

- оболочка должна иметь плавные очертания без скачкообразных изменений кривизны и толщины;
- края оболочки должны иметь возможность свободно перемещаться по направлению нормали к средней поверхности;
- нагрузка должна плавно распределяться по поверхности оболочки.

При несоблюдении этих условий изгибные напряжения могут быть существенными и их необходимо учитывать. В этом случае теория расчета оболочек называется моментной.

Но нередко в большей части оболочки возникает безмоментное напряженное состояние, лишь небольшие зоны у краев оболочки находятся в условиях смешанного напряженного состояния. Они называются зонами краевого эффекта.

В реальных конструкциях условия безмоментного состояния не всегда могут быть выполнены. Особенно трудно выполнимо условие, касающееся свободы перемещения краев для оболочек, входящих в состав конструкций, т.е. связанных краями между собой, с плитами и т.д., т.е. в конструкциях наиболее часто встречающихся в покрытиях, резервуарах, газгольдерах и пр. В указанных случаях края оболочек оказываются так или иначе закрепленными, что приводит к возникновению краевых усилий и моментов, оболочка оказывается нагруженной еще и нагрузкой, распределенной по ее краю, все это затрудняет использование теории безмоментного напряженного состояния.

При несоблюдении хотя бы одного из перечисленных выше условий расчет оболочек должен вестись по моментной теории.

Математическая теория расчета тонких оболочек основывается на гипотезах Кирхгофа-Лява, которые имеют место и при расчете пластин:

- прямолинейный, нормальный к срединной поверхности оболочки до деформации, элемент остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности деформированной оболочки и не изменяет своей длины (гипотеза прямых нормалей);
- нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, по сравнению с остальными напряжениями пренебрежимо малы и при расчете принимаются равными нулю (гипотеза о не надавливании слоев).

Толстые оболочки рассчитываются как трехмерное упругое тело.

### 3.3.1 Деформации, напряжения и внутренние усилия в тонких оболочках.

Деформация всей оболочки может быть описана, если известна деформация ее срединной поверхности. Деформация же срединной поверхности определяется геометрией этой поверхности до и после деформации.

Не всегда удобно задавать поверхность оболочки в декартовой системе координат. Целесообразно систему координат связать с самой поверхностью. Если на поверхности провести сетку семейств кривых  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  так, чтобы они имели касательные совпадающие с главными направлениями (рис. 3.26), то такие кривые, являющиеся линиями главных кривизн поверхности, можно принять за координатные линии. Эти криволинейные координатные линии являются ортогональными. Параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  называются криволинейными координатами точек поверхности. Конкретный смысл этих координат может быть различным.

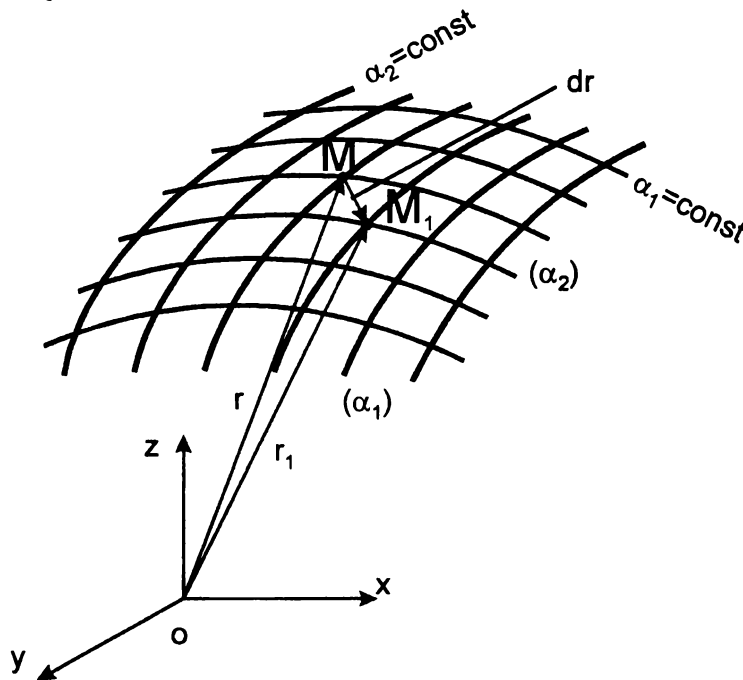


Рис.3.26 Линии главных кривизн оболочки

Положение на поверхности какой-либо точки  $M$  с координатами  $\alpha_1, \alpha_2$  определяет проведенный из точки  $O$  в точку  $M$  радиус-вектор  $r$ . Его векторное уравнение

$$r = r(\alpha_1, \alpha_2). \quad \text{а)}$$

Близко расположенная точка  $M_1$  имеет криволинейные координаты  $(\alpha_1 + \Delta\alpha_1), (\alpha_2 + \Delta\alpha_2)$ , ее радиус-вектор обозначен  $r_1$ . Тогда расстояние на поверхности между точками  $M$  и  $M_1$  равно приращению вектора

$$\overline{MM_1} = dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} d\alpha_2.$$

Квадрат длины этого отрезка  $|dr|^2$  представляет скалярное произведение вектора  $dr$  самого на себя

$$|dr|^2 = ds^2 = \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \right|^2 d\alpha_1^2 + \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \right|^2 d\alpha_2^2. \quad \text{б)}$$

Если обозначить  $\left| \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \right| = A_1$  и  $\left| \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \right| = A_2$ , то уравнение (б) можно записать в виде

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2. \quad \text{в)}$$

Зависимость (в) называют уравнением первой квадратичной формы поверхности, коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  - коэффициентами первой квадратичной формы или параметрами Ляме. Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  являются функциями криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2$

$$A_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2), A_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Приращение только одной координаты, например  $\alpha_1$  на  $d\alpha_1$  при  $\alpha_2 = \text{const}$ , приводит к приращению дуги  $dS_1 = A_1 d\alpha_1$ ; аналогично определяется и приращение дуги  $dS_2$ . Таким образом, коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  можно рассматривать как длины дуг поверхности соответственно вдоль координатных линий  $\alpha_1 = \text{const}$  и  $\alpha_2 = \text{const}$  при приращениях  $d\alpha_1 = 1$  или  $d\alpha_2 = 1$ .

Определение деформации в точке срединной поверхности удобнее описывать не при помощи вектора, а посредством параметров  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и  $w$ . Относительное линейное удлинение  $\epsilon_1$ , проявляющееся в направлении  $d_1$ , состоит из трех слагаемых (рис. 3.27)

$$\epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1''' \quad (\text{г})$$

Составляющая деформации  $\epsilon_1'$  зависит от перемещения вдоль координатной линии  $\alpha_2 = \text{const}$ , т.е.  $\epsilon_1' = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}$ .

Вторая составляющая определяется перемещением точки в направлении координатной линии  $\alpha_1 = \text{const}$  и изменением коэффициента  $A_1$  по координате  $\alpha_2$ ,

$$\epsilon_1'' = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v \quad (\text{д})$$

Третья составляющая деформации  $\epsilon_1'''$  связана с нормальным перемещением  $w$

$$\epsilon_1''' = \frac{1}{R_1} w \quad (\text{е})$$

Выражение для  $\epsilon_1$  в окончательной записи

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} \quad (\text{ж})$$

Аналогично может быть записана зависимость для  $\epsilon_2$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} \quad (\text{з})$$

Без выводов, которые изложены, например в [8], приведем выражения для деформаций сдвига в срединной поверхности  $\gamma$ , изменения кривизн  $H_1, H_2$  и кручения  $\chi$ .

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u}{A_2} \right); \\ H_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right); \\ H_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right); \\ \chi &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right). \end{aligned}$$

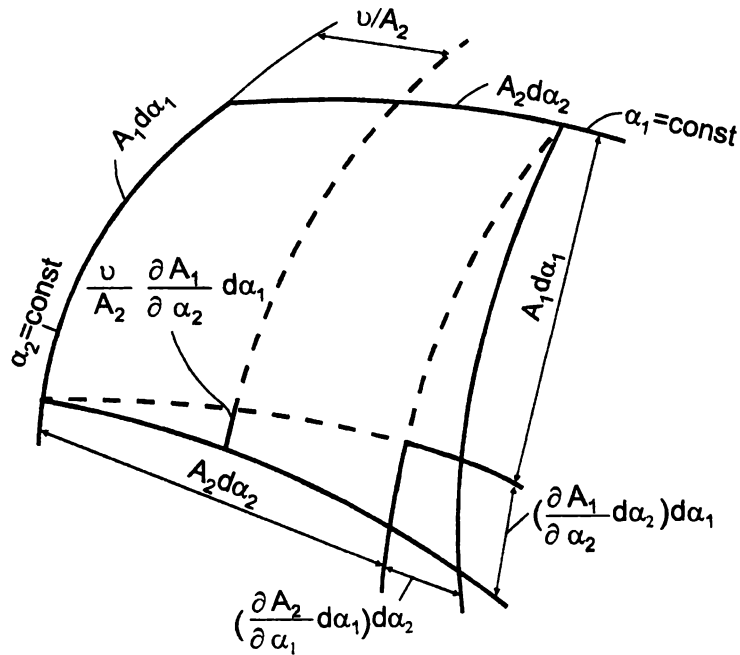


Рис. 3.27 Деформационная схема срединной поверхности

Выделим из оболочки бесконечно малый элемент сечениями, пропорциональными к срединной поверхности и проходящими через координатные линии  $\alpha_1, \alpha_1 + \partial\alpha_1; \alpha_2 + \partial\alpha_2$  (рис. 3.28).

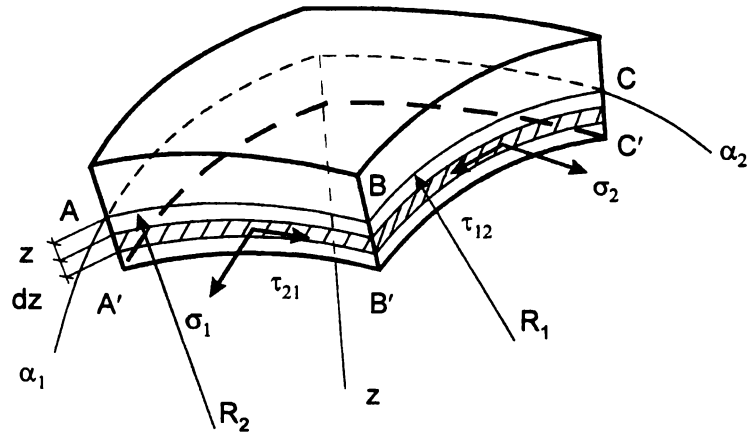


Рис.3.28 Схема элемента оболочки для определения деформаций

Деформации  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и сдвиг  $\gamma$  по толщине оболочки изменяются линейно. В слое, отстоящем от срединной поверхности, в результате деформации срединной поверхности и поворота боковых граней элемента, имеют место деформации  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$  равные

$$\epsilon_1^{(z)} = \epsilon_1 + zH_1, \quad \epsilon_2^{(z)} = \epsilon_2 + zH_2, \quad \gamma^{(z)} = \gamma + z\chi, \quad (и)$$

где  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$  - деформации в срединной поверхности,  $H_1, H_2, \chi$  - изменения кривизн и кручение срединной поверхности

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1);$$

$$\tau_{12} = G\gamma. \quad (3.89)$$

Напряженное состояние оболочки определяется усилиями, связанными с деформацией срединной поверхности ( $N_1, N_2$  - нормальные усилия,  $T_{12}$  и  $T_{21}$  - сдвигающие силы), а также усилиями, возникающими при изгибе оболочки ( $M_1, M_2$  - изгибающие моменты,  $M_{12}, M_{21}$  - крутящие моменты).

Выражения для погонных нормальных и сдвигающих усилий запишутся в виде

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz;$$

$$T_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad T_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz.$$

Присутствие слагаемых  $\frac{z}{R_1}$  и  $\frac{z}{R_2}$  в выражениях объясняется тем, что длины дуг  $A'B'$  и  $B'C'$  не равны длинам дуг соответственно  $AB$  и  $BC$ . И, несмотря на то, что закон парности касательных напряжений соблюдается, усилия  $T_{12}$  и  $T_{21}$  оказываются различными (при  $R_1 \neq R_2$ ). Но в тонких оболочках отношения  $\frac{z}{R_2} \ll 1$ ,  $\frac{z}{R_1} \ll 1$  и ими можно пренебречь, выражения в скобках следует принять равными

$$1 - \frac{z}{R_2} \approx 1; \quad 1 - \frac{z}{R_1} \approx 1.$$

Тогда

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 dz; \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_2 dz; \quad T_{12} = T_{21} = T = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau dz \quad (3.90)$$

Изгибающие и крутящие моменты равны

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_2 z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz;$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz.$$

И здесь, по вышеизложенным причинам, можно опустить вторые слагаемые в скобках и выражения для моментов примут вид

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_2 z dz; \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau z dz; \quad (3.91)$$

Отметим, что полученные уравнения подобны аналогичным уравнениям для пластин. Здесь также следует заметить, что первая гипотеза Кирхгофа о прямолинейности нормального элемента дает основание пренебречь сдвигами в направлении  $z\alpha_1$  и  $z\alpha_2$  и, следовательно, касательными напряжениями  $\tau_{31}$  и  $\tau_{13}$ , действующими в этих направлениях. Однако, касательные напряжения  $\tau_{31}$  и  $\tau_{13}$  могут достигать значительных величин и пренебрегать ими в уравнениях равновесия нельзя.

Подставляя зависимости (и), (3.89) в уравнения для сил (3.90) и моментов (3.91), получим

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2); \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1); \quad T_{12} = T_{21} = T = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \cdot \gamma;$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (H_1 + \nu H_2); \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (H_2 + \nu H_1); \quad M_{12} = M_{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi. \quad (3.92)$$

Введя понятие "цилиндрическая жесткость оболочки", обозначаемое  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ , выражения для изгибающих и крутящих моментов можно записать

$$M_1 = -D(H_1 + \nu H_2); \quad M_2 = -D(H_2 + \nu H_1); \quad M_{12} = M_{21} = -D(1 + \nu)\chi. \quad (3.93)$$

Соотношения для моментов полностью совпадают с теми, которые были получены ранее в теории пластин.

Расчет оболочек в общем случае представляет собой сложную задачу и как отмечалось выше может осуществляться по безмоментной или моментной теориям.

### 3.3.2 Особенности расчета оболочки произвольной формы по безмоментной теории.

Расчет оболочек по безмоментной теории представляет для инженера большой интерес. Именно в безмоментно работающей оболочке наиболее полно используется прочность материала и, следовательно, с технико-экономической стороны такие оболочки наиболее выгодны. Поэтому при проектировании конструкций, состоящих из оболочек, всегда следует уделять должное внимание условиям, при которых напряженное состояние оболочки по возможности приближается к безмоментному.

Если же эти условия окажутся конструктивно невыполнимыми, все равно расчет оболочек по безмоментной теории представляет интерес как один из важных этапов общего расчета. Поэтому расчету оболочек по безмоментной теории уделяется должное внимание.

Пусть на оболочку действует распределенная поверхностная нагрузка, составляющие которой равны  $q_1, q_2, q_n$ . Для определения внутренних усилий выделим из срединной поверхности оболочки сечениями  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$  бесконечно малый ортогональный криволинейный четырехугольник со сторонами (см. рис. 3.29)

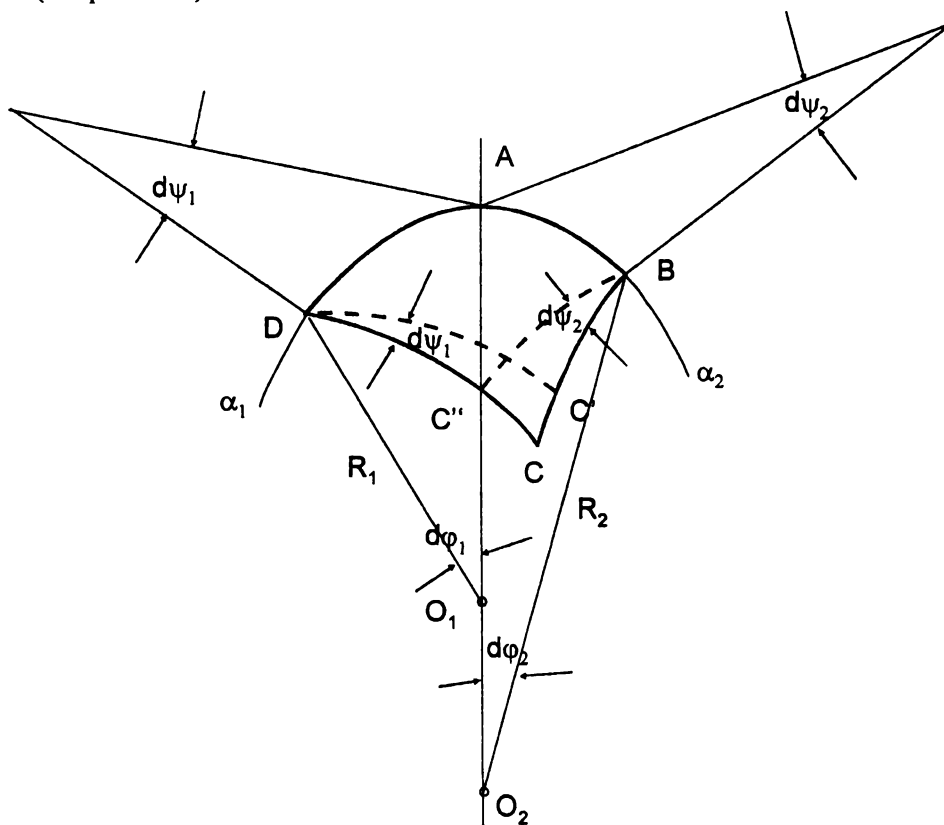


Рис. 3.29 Схема элемента для определения внутренних усилий

$$\begin{aligned}
 AD &= A_1 d\alpha_1, & BC &= A_1 d\alpha_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 d\alpha_1, & d\varphi_1 &= \frac{A_1 \cdot d\alpha_1}{R_1}, \\
 AB &= A_2 d\alpha_2, & DC &= A_2 d\alpha_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2, & d\varphi_2 &= \frac{A_2 \cdot d\alpha_2}{R_2}.
 \end{aligned} \tag{a}$$

Углы  $d\psi_1$  и  $d\psi_2$  лежат в касательной плоскости и образованы направлениями смежных касательных к линиям кривизн, проходящих через точки А, В и D

$$\begin{aligned}
 d\psi_1 \approx \text{tg}(d\psi_1) &= \frac{CC'}{AB} = \frac{\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 d\alpha_1}{A_2 d\alpha_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1; \\
 d\psi_2 \approx \text{tg}(d\psi_2) &= \frac{\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2}{A_1 d\alpha_1} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{б}$$

Углы  $d\psi_1$  и  $d\psi_2$  соответственно равны

$$d\psi_1 = \frac{AD}{R_1} = \frac{A_1 d\alpha_1}{R_1}; \quad d\psi_2 = \frac{AB}{R_2} = \frac{A_2 d\alpha_2}{R_2}. \tag{в}$$

Схема усилий, действующих по граням находящегося в равновесии выделенного элемента, показана на рис. 3.30.

Спроектируем все силы на направление координатной линии  $\alpha_1$

$$\begin{aligned}
 &- N_1 A_2 d\alpha_2 + \left[ N_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 A_2) d\alpha_1 \right] d\alpha_2 - \\
 &- T_{12} A_1 d\alpha_1 + \left[ T_{12} A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T_{12} A_1) d\alpha_2 \right] d\alpha_1 - \\
 &- N_2 A_1 d\alpha_1 d\psi_2 + T_{21} A_2 d\alpha_2 d\psi_1 + q_1 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0
 \end{aligned}$$

откуда, после подстановки выражений для углов  $d\psi_1$  и  $d\psi_2$  и сокращений на  $A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T_{12} A_1) + T_{21} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + q_1 = 0. \tag{3.94}$$

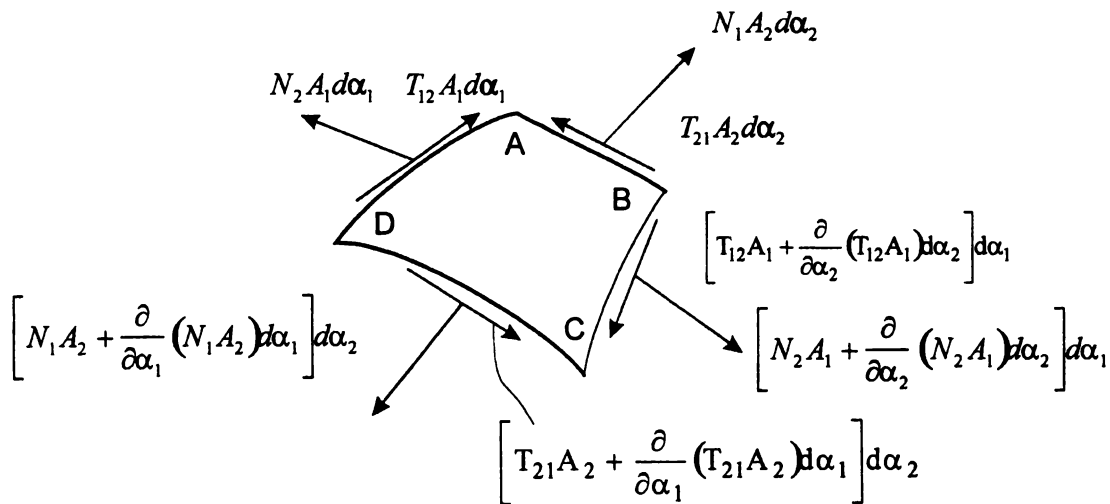


Рис. 3.30 Схема элемента оболочки в равновесии

Аналогично получаем второе уравнение равновесия, проектируя силы на направление координатной линии  $\alpha_2$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (N_2 A_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (T_{21} A_2) + T_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + q_2 = 0. \quad (3.95)$$

Проектируем все силы на направление нормали к срединной поверхности, в результате запишем третье уравнение равновесия

$$-N_1 A_2 d\alpha_2 d\varphi_1 - N_2 A_1 d\alpha_1 d\varphi_2 + q_n A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.$$

Подставляя сюда выражения для  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$  и сокращая на  $A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$  получим

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_n \quad (3.96)$$

Из условия равновесия моментов относительно нормали к выделенному элементу получаем

$$T_{12} = T_{21} = T,$$

которое называется законом парности сдвигающих усилий.

В итоге полную сводку дифференциальных уравнений равновесия безмоментной теории оболочек (с учетом закона парности сдвигающих усилий) можно записать в таком виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T A_1) + T \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + q_1 &= 0, \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (N_2 A_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (T A_2) + T \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + q_2 &= 0, \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - q_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.97)$$

Система (3.97) содержит три неизвестных функции  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $T$  и их число соответствует количеству уравнений, следовательно, задача определения напряженного состояния безмоментной оболочки является внутренне статически определимой.

Здесь следует иметь в виду, что безмоментная оболочка в целом, т.е. относительно реакций опорных закреплений, может оказаться и статически неопределимой.

Решая систему (3.97), можно найти функции  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $T$ . Тогда зависимости для отыскания перемещений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1); \\ \gamma &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u}{A_1} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} T. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Для обеспечения безмоментности работы оболочки необходимо посредством соответствующих граничных условий, создаваемых определенными закреплениями, предотвратить возможность появления в ней изгибной деформации. На контуре оболочки должны отсутствовать изгибающие и крутящие моменты, а также поперечная сила. Таким образом, в качестве граничного условия на кромке  $\alpha = \text{const}$  может быть задано усилие  $N_1$ , либо  $T$ . Второе граничное условие обязательно должно быть представлено через перемещение. Можно задавать граничные условия лишь для перемещений  $u$  и  $v$ , что же касается перемещения  $w$  и углов поворота нормали  $\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}$  и  $\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$ , то они могут приобретать



лишь те значения, которым отвечают нулевые, соответствующие им обобщенные силы  $Q$  и  $M$ . При расчете оболочек с использованием безмоментной теории, кроме основной задачи определения усилий, следует находить перемещения  $u, v, w$  даже в случае, если они расчетчика не интересуют. Подсчитанные величины перемещений позволяют удостовериться, удовлетворяют ли закрепления оболочки на контуре условиям, исключаяющим чисто изгибные перемещения.

### 3.3.2.1 О краевом эффекте.

Краевым эффектом называется моментное (изгибное) напряженное состояние, быстро затухающее по мере удаления от так называемой линии искажения в нормальном к ней направлении. Краевой эффект проявляется на ширине полосы, равной по величине нескольким толщинам оболочки. Если линия искажения ни в одной точке не касается асимптотической линии срединной поверхности, то краевой эффект называется простым, в противном случае - обобщенным (учет последнего достаточно сложен).

Не излагая вывод, приведем выражение для простого краевого эффекта, представляющее собой разрешающее дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно  $w$

$$\frac{1}{A_1^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \frac{12(1-\nu^4)}{h^2 R_2^2} w = 0.$$

После определения  $w$  можно найти все остальные функции  $\epsilon_1, \epsilon_2, N_1, N_2, M_1, M_2, Q_1$ .

### 3.3.2.2 Уравнение безмоментной теории оболочек вращения.

Как частный случай уравнений безмоментной теории интерес представляют уравнения оболочек вращения. При осесимметричном нагружении такой оболочки, например, собственным весом касательные усилия  $T$  будут равны нулю. Следовательно, определению подлежат нормальные меридиональные  $N_1$  и кольцевые  $N_2$  усилия. Обозначим величину нагрузки, отнесенной к единице площади поверхности, через  $q$ , тогда составляющие этой нагрузки  $q_n$  и  $q_1$  (рис. 3.31) равны

$$q_1 = q \sin \theta, \quad q_n = q \cos \theta.$$

Для определения меридиальных усилий  $N_1$  сделаем горизонтальный разрез и рассмотрим равновесие верхней части оболочки (рис. 3.32). Нагрузка равна  $q_1 A$ , где  $A$  - площадь поверхности отсеченной части оболочки, должна уравниваться вертикальной проекцией меридиональных усилий, распределенных по всей окружности радиуса  $r$ .

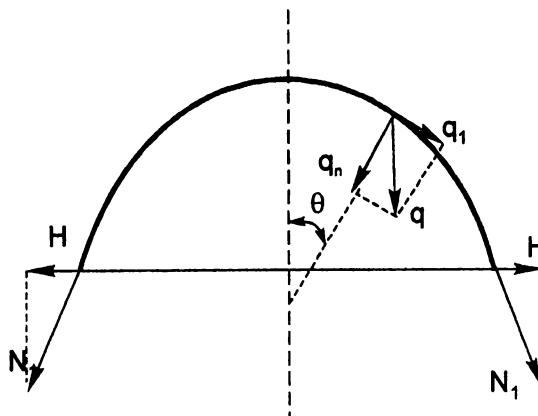


Рис. 3.31 Силовая схема оболочки при осесимметричном нагружении

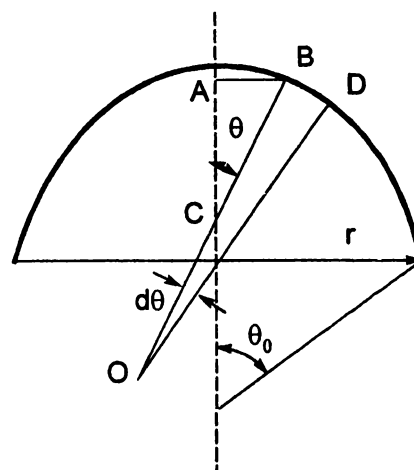


Рис. 3.32 Расчетная схема для определения усилий

Площадь поверхности оболочки  $A$  определим по данным рис. 3.32. Здесь  $r$  - текущий радиус окружности в сечениях, перпендикулярных оси вращения,  $R_1=OB=OD$ ;  $R_2=BC$  - радиусы кривизны в меридианальной плоскости и перпендикулярном направлении.

Дифференциал площади поверхности

$$dA=2\pi r ds, \text{ где } ds=BD=R_1 d\theta, \\ r=AB=R_2 \sin\theta.$$

Площадь поверхности отсеченной части оболочки

$$A = 2\pi \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta.$$

Условие равновесия имеет вид

$$N_1 2\pi R_2 \sin^2 \theta - 2\pi q \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta = 0.$$

Откуда выражение для меридиального усилия

$$N_1 = -\frac{q}{R_2 \sin^2 \theta} \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta. \quad (3.99)$$

Зависимость для кольцевого усилия  $N_2$  получим, используя третье уравнение (3.97)

$$\frac{N_2}{R_2} - \frac{q}{R_1 R_2 \sin^2 \theta} \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta = q \cos \theta,$$

Откуда

$$N_2 = \frac{q}{R_1 \sin^2 \theta} \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta - q R_2 \cos \theta \quad (3.100)$$

Получим выражения для перемещений оболочки вращения. Имея в виду обозначения на рис. 3.32,  $BD=ds_1=R_1 d\theta$ , коэффициент  $A_1=R_1$ ;  $\alpha_1=\theta$ ;  $ds_2=ABd\varphi=R_2 \sin\theta d\varphi$ ,  $\varphi$  - угол вращения образующей кривой относительно вертикальной оси  $z$ . Значение коэффициента  $A_2=R_2 \sin\theta$ ;  $\varphi=\alpha_2$ .

При асимметричном нагружении напряженно-деформированное состояние оболочки не зависит от окружной координаты  $\varphi$ , при этом составляющая перемещения  $v=0$ . Из соотношений (3.98), учитывая отмеченное, получим уравнения для перемещений  $u$  и  $w$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2); \\ \frac{u}{R_1 R_2} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1). \quad (3.101)$$

Определение перемещений может быть выполнено в следующей последовательности. Исключая функцию прогиба  $w$ , преобразуем систему (3.101) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - F_1(\theta)u + F_2(\theta) = 0, \quad (3.102)$$

где функции

$$F_1(\theta) = \frac{1}{R_1} \frac{dR_2}{d\theta},$$

$$F_2(\theta) = \frac{1}{Eh} [N_2(R_2 + \nu R_1) - N_1(\nu R_2 + R_1)]$$

являются известными функциями угловой координаты  $\theta$ .

После нахождения функции  $u$  путем интегрирования уравнения (3.102) в общем виде, из второго уравнения (3.101) определяется функция прогиба  $w$

$$w = \frac{R_2}{Eh} (N_2 - \nu N_1) - \frac{u}{R_1} \frac{dR_2}{d\theta}. \quad (3.103)$$

В качестве примера рассмотрим особенности определения усилий в сферическом куполе от действия собственного веса интенсивностью  $q$ .

Так как оболочка сферическая  $R_1=R_2=R_0$ ,  $q_1=q\sin\theta$ ,  $q_n=q\cos\theta$ .

Для определения усилий  $N_1$  и  $N_2$  воспользуемся формулами (3.99) и (3.100), из которых следует

$$N_1 = \frac{R_0 q \int_0^\theta \sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = -qR_0 \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} = -\frac{qR_0}{1 + \cos \theta}; \quad (3.104)$$

$$N_2 = -qR_0 \left[ \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right]. \quad (3.105)$$

Из формулы (3.104) следует, что меридиональные усилия во всех точках купола являются сжимающими. Кольцевые усилия могут быть положительными (растягивающими) и отрицательными (сжимающими).

В вершине купола при  $\theta=0$

$$N_1 = N_2 = -\frac{qR_0}{2};$$

а у основания купола

$$N_1 = -qR_0, N_2 = +qR_0.$$

Эпюры усилий  $N_1$  и  $N_2$  показаны на рис. 3.33. Кольцевое нормальное усилие  $N_2$  из сжимающего в районе вершины переходит в растягивающее. Параллель с нулевым значением усилия  $N_2$  называют швом перехода, он соответствует углу  $\theta$ , определяемому из условия  $N_2=0$ ,

$$\cos \theta_n - \frac{1}{1 + \cos \theta_n} = 0,$$

откуда  $\theta_n = 51^\circ 49'$ .

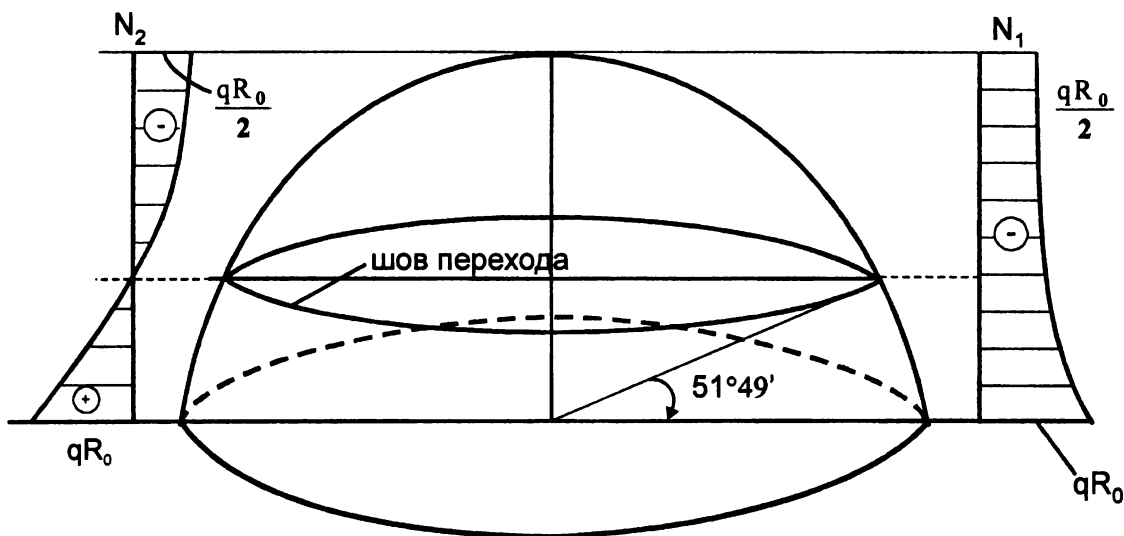


Рис. 3.33 Эпюры усилий  $N_1$   $N_2$

Ниже шва перехода в куполе возникает растягивающее кольцевое усилие. Но если купол пологий (центральный угол менее  $2 \cdot 51^\circ 49' = 103^\circ 38'$ ), то растягивающие усилия в нем не возникают.

Меридиальные усилия  $N_1$  на контуре оболочки можно разложить на вертикальную составляющую  $S$  и горизонтальную составляющую  $H$ , называемую распором (рис.3.34). Вертикальная составляющая легко воспринимается стеной, на которую опирается купол, для восприятия распора необходима специальная

конструкция. Такой конструкцией является подкрепляющее оболочку по контуру опорное кольцо. Опорное кольцо, нагруженное распором, работает на растяжение.

Величина растягивающих усилий в опорном кольце  $N^k$  определяется из рассмотрения равновесия половины опорного кольца (рис. 3.35)

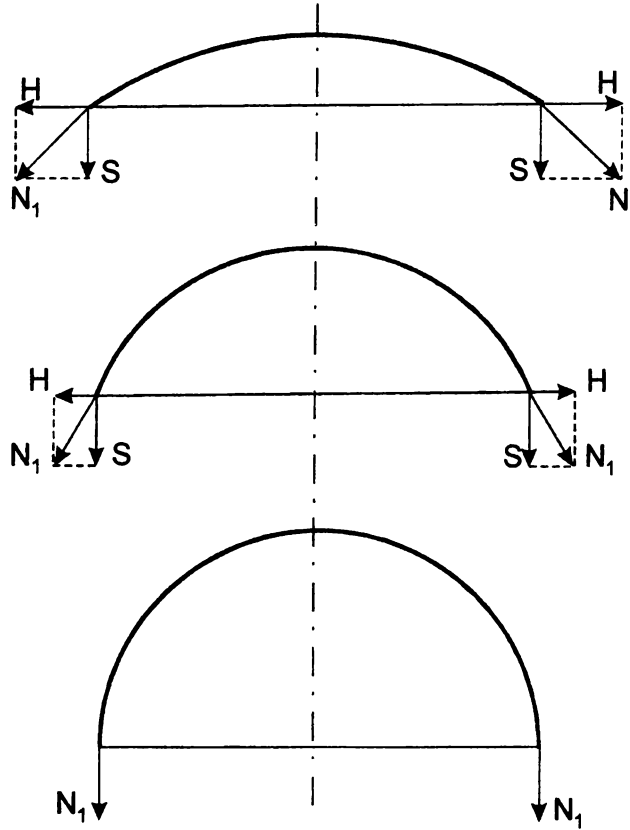


Рис. 3.34 Усилия на контуре купола

$$2N^k = \int_0^{\pi} H \sin \varphi R_0 d\varphi,$$

$$N^k = HR_0.$$

Усилия в опорном кольце возникают с увеличением распора. В сферическом куполе распор тем больше, чем положе купол (рис.3.34). Если срединная поверхность купола представляет собой половину шаровой поверхности, то распор равен нулю. Опорное кольцо в этом случае в принципе не требуется. Но здесь необходимо иметь в виду следующие обстоятельства. В крутом сферическом куполе у опорной параллели возникают значительные по величине кольцевые усилия. И если купол выполнен из железобетона, который плохо сопротивляется растяжению, для обеспечения прочности купола его толщину плавно увеличивают вдоль меридиана от вершины к опорной широте. Это позволяет разместить в необходимом количестве кольцевой растянутой арматуры. Железобетонное опорное кольцо рекомендуется выполнять предварительно напряженным. Выбор величины обжатия и конструирования опорного кольца рекомендуется производить так, чтобы обеспечить трещиностойкость кольца.

Для обеспечения без моментного напряженного состояния необходимо, чтобы перемещения контурных контактных точек кольца и оболочки были одинаковы.

Отметим, что купола, у которых нет шва перехода, т.е. все кольцевые волокна сжаты, не могут работать как безмоментные; в них у опорного кольца возникает изгибная деформация (краевой эффект).

Поскольку для сферической оболочки  $R_1=R_2=R_0=\text{const}$ , то зависимости (3.101) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + w = -\frac{qR_0^2}{Eh} \left( \frac{1+\nu}{1+\cos\theta} - \nu \cos\theta \right),$$

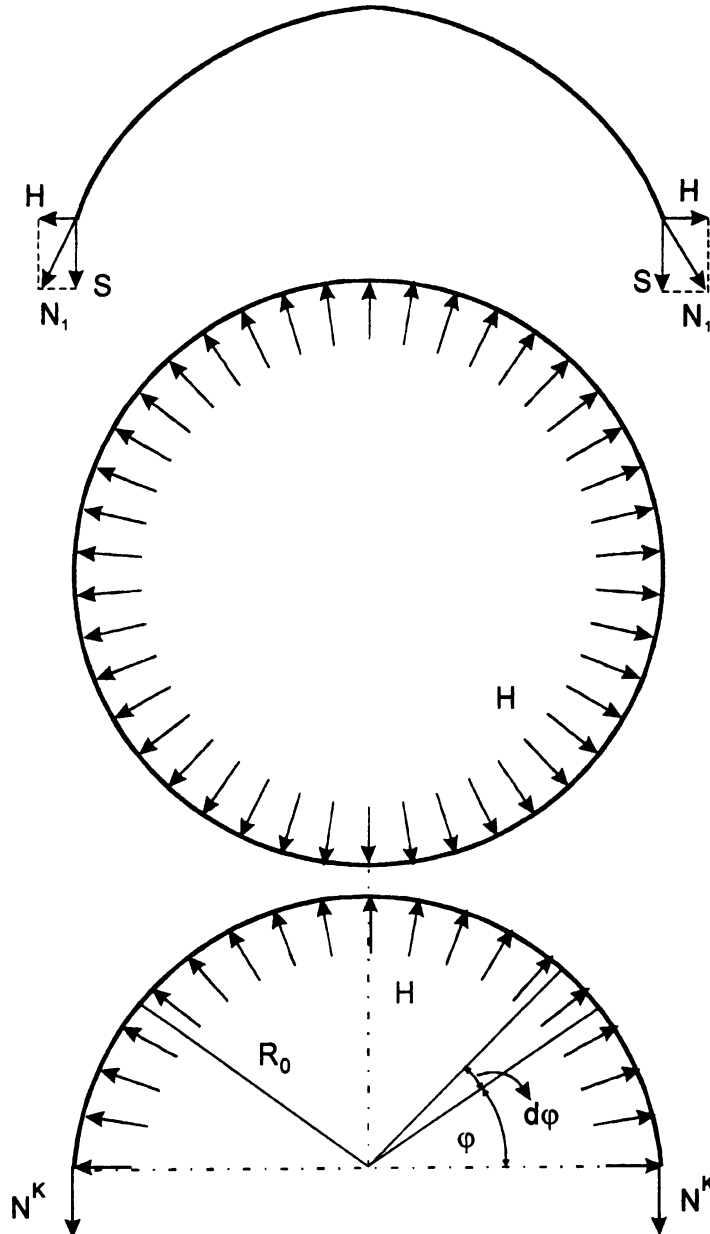


Рис. 3.35 Расчетная схема для определения усилий  $N^k$

$$w = -\frac{qR_0^2}{Eh} \left( \cos\theta - \frac{1+\nu}{1+\cos\theta} \right) \quad (3.106)$$

Исключая  $w$ , получим дифференциальное уравнение для определения меридиальных перемещений  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{qR_0^2}{Eh} \left[ (1+\nu)\cos\theta - \frac{2(1+\nu)}{1+\cos\theta} \right].$$

При  $\theta=0$   $u=0$ , тогда

$$u = \frac{(1+\nu)qR_0^2}{Eh} \left( \sin \theta + 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.107)$$

По уравнению (3.107) можно установить величину угла  $\theta$ , при котором  $w$  становится положительным.

### 3.3.3 Пологие оболочки.

Пологими оболочками, которые широко применяются в строительстве, называются оболочки, имеющие небольшой подъем над плоскостью, на которую они опираются. Например, прямоугольную в плане оболочку (рис.3.36) можно отнести к пологой, если отношение стрелы подъема  $f$  к меньшему размеру в плане составляет менее 1/5 (теория пологих оболочек создана В. З. Власовым).

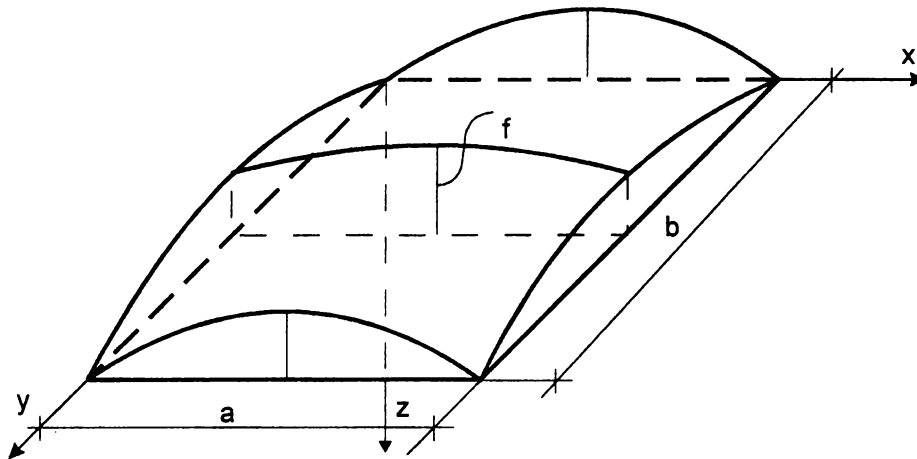


Рис. 3.36 Схема пологой оболочки

Геометрию срединной поверхности пологих оболочек в пределах точности технической теории можно отождествить с геометрией плоскости, на которую они проектируются. В этом случае криволинейные координаты можно считать совпадающими с декартовыми  $x, y$  на плоскости, т.е.  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Гауссова кривизна  $\Gamma = k_1 \cdot k_2 \approx 0$ .

На этом основании коэффициенты первой квадратичной формулы  $A_1$  и  $A_2$  принимаются равными единице. Можно полагать, что главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  в пределах рассматриваемого участка пологой оболочки постоянны.

Выражения для деформации, изменения кривизны и кручения, в предположения малости прогиба оболочки и малости деформаций в срединной поверхности, приобретают вид

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (3.108)$$

$$H_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad H_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad H = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.109)$$

Здесь  $u, v, w$  - перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей. Найденные деформации должны удовлетворять уравнению совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

После подстановки сюда выражений (108) получим

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.110)$$

Для вывода уравнений равновесия пологой оболочки рассмотрим бесконечно малый элемент со сторонами  $dx$  и  $dy$ , на боковых гранях которого действуют усилия в срединной поверхности (на рис.3.37а, 3.37б) они показаны раздельно). Нормально к срединной поверхности действует внешняя нагрузка.

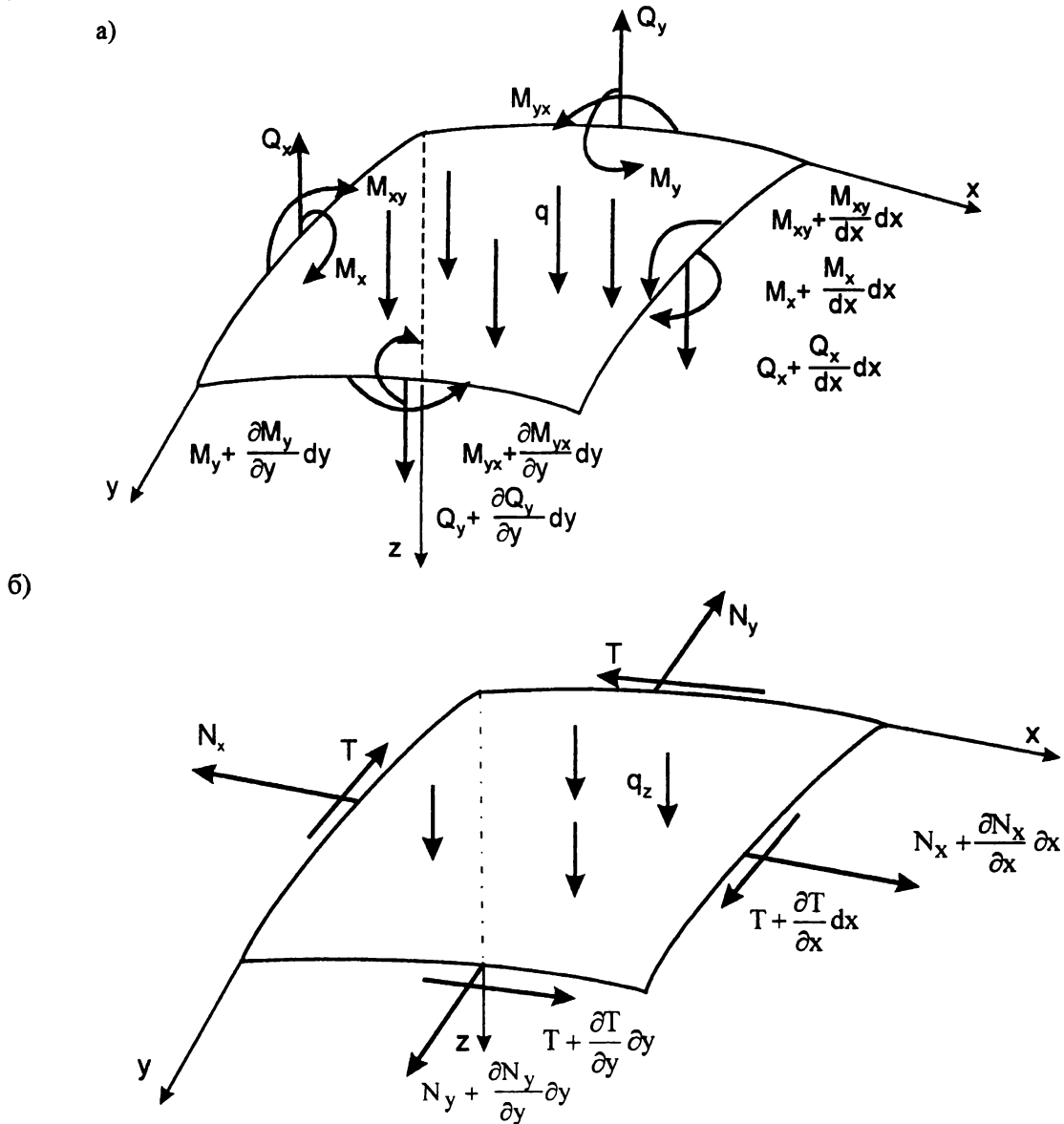


Рис. 3.37 Схемы равновесия срединной поверхности оболочки

Составим уравнения суммы проекций всех усилий на координатные оси  $x, y, z$

$$- N_x dy + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy - T dx + (T + \frac{\partial T}{\partial y} dy) dx + q_x dx dy = 0;$$

$$- N_y dy + (N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy) dx - T dy + (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) dy + q_y dx dy = 0;$$

$$- Q_x dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy - Q_y dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx +$$

$$+ \frac{N_x dy dx}{R_1} + \frac{N_y dx dy}{R_2} - q_z dx dy = 0.$$

В последнем уравнении равновесия учтено, что угол между направлениями усилий  $N_x$  и  $(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx)$  равен  $\frac{dx}{R_2}$ , а между направлениями  $N_y$  и  $(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy)$  равен  $\frac{dy}{R_1}$ .

Так как оболочка нагружена распределенной нагрузкой, нормальной к срединной поверхности, то составляющие нагрузки  $q_x$  и  $q_y$  равны нулю, а  $q_z=q$ .

Пренебрегая величинами второго порядка малости, после сокращения получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} + q &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Уравнения равновесия в виде суммы моментов относительно оси  $x$  запишется так (здесь как и ранее  $M_{xy}=M_{yx}=H$ )

$$\begin{aligned} -M_y dx + (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy) dx - H dy + (H + \frac{\partial H}{\partial x} dx) dy - \\ - (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx dy - \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{1}{2} dy - q dx dy \frac{1}{2} dy = 0. \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами высшего порядка, найдем

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \quad (3.112)$$

Аналогично получим уравнение равновесия, определяя сумму моментов относительно оси  $y$ ,

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (3.113)$$

Продифференцируем обе части уравнения (3.112) по  $y$ , а обе части уравнения (3.113) по  $x$  и подставим выражения для производных  $\frac{\partial Q_x}{\partial x}$  и  $\frac{\partial Q_y}{\partial y}$  в уравнение (3.111). в результате получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} = -q. \quad (3.114)$$

Таким образом получена система уравнений равновесия пологой оболочки в усилиях. Если задача о напряженном и деформированном состоянии оболочки решается в перемещениях, необходимо иметь систему уравнений равновесия в перемещениях. Чтобы получить такую систему, следует в уравнениях (3.111), (3.114) усилия выразить через перемещения. Не приводя промежуточных выкладок, запишем уравнения равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w &= -q; \end{aligned} \quad (3.115)$$

где  $\nabla^2 \nabla^2$  - бигармонический оператор,  $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ .



Искомые функции напряжений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  должны удовлетворять как уравнением равновесия, так и заданным граничным условиям. Отметим, что уравнения совместности деформаций удовлетворяются тождественно.

Систему уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций можно свести к разрешающей системе из двух уравнений относительно функции  $w$  и функции напряжений  $\varphi$  наподобие функции Эри в плоской задаче теории упругости. Напомним, что напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  определяются через функцию напряжений по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, убеждаемся, что последние удовлетворяются тождественно.

Уравнения равновесия и совместности деформаций приводятся к виду

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w &= h\left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) = q_n, \\ \frac{1}{E} \nabla^2\nabla^2 \varphi &= -\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Полученную систему уравнений свести к одному разрешающему уравнению либо относительно функции  $\varphi$ , либо относительно функции  $w$ .

Для того, например, чтобы привести систему (3.116) к разрешающему уравнению относительно функции прогиба  $w$  следует к двум частям первой зависимости (3.116) применить оператор  $\nabla^2\nabla^2$

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w = h\left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2\nabla^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2\nabla^2 \varphi\right) - \nabla^2\nabla^2 q_n = 0. \quad (3.117)$$

Решим второе уравнение (3.116) системы относительно  $\nabla^2\nabla^2$

$$\nabla^2\nabla^2 \varphi = -E\left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

и результат подставляя в (3.117), получим

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + Eh\left(\frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{R_1 R_2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) = \nabla^2\nabla^2 q_n. \quad (3.118)$$

В итоге задача об изгибе полой оболочки, находящейся под действием нормальной к срединной поверхности нагрузки  $q_n$ , сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных.

Приемы решения таких уравнений рассмотрены в [4] и др.

Отметим, что если  $\frac{1}{R_1} = 0$ ,  $\frac{1}{R_2} = 0$ , т.е. имеется не оболочка, а пластина, то разрешающая система уравнений (3.116) распадается на два независимых уравнения

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w &= q_n, \\ \nabla^2\nabla^2 \varphi &= 0, \end{aligned}$$

первое из них представляет собой уравнение С. Жермен для изгибаемой пластинки, а второе бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости. Разделение  $w$  и  $\varphi$  происходит в граничных условиях.

Решение системы (3.116) представляет большие трудности, поэтому целесообразно применять вариационные методы решения (метод Бубнова-Галеркина или метод Ритца), а также численные методы.

Ниже рассмотрим пример изгиба полой оболочки, прямоугольной в плане, нагруженной нагрузкой  $q$ , распределенной по произвольному закону. Предполагаем, что оболочка по криволинейным кромкам опирается на диафрагмы абсолютно жесткие в их плоскости и гибкими из нее (рис.3.38). Граничные условия при принятом опирании состоят в следующем:

$$\text{при } x=0, x=a, w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \sigma_x=0, u=0,$$

$$\text{при } y=0, y=b, w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \sigma_y=0, v=0.$$

Изгиб срединной поверхности описывается уравнением (3.118). Решение будем искать в виде двойных рядов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (3.119)$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (3.120)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражения (3.119) и (3.120) удовлетворяют первым двум граничным условиям. Проверим, удовлетворяются ли последние граничные условия  $u=0, v=0$ . Найдем выражение для  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  полой оболочки, используя (3.108),

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right); \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right).$$

После интегрирования получим ряды вида

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

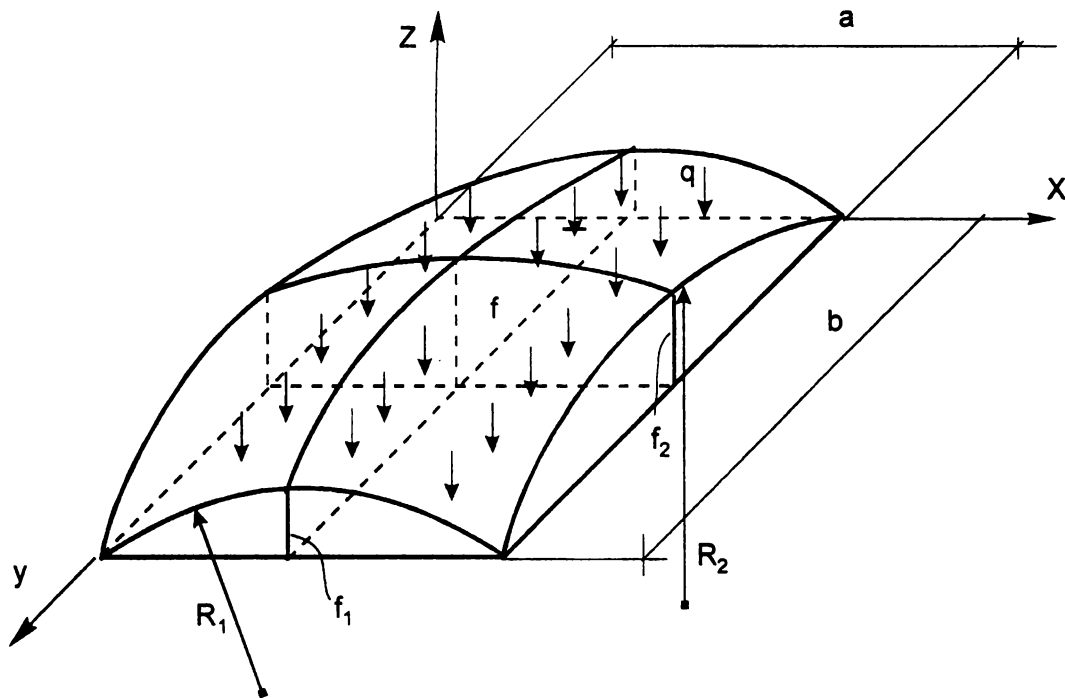


Рис. 3.38 Схема нагружения полой оболочки

Полученные выражения для  $u$  и  $v$  удовлетворяют заданным граничным условиям:

при  $x=0, x=a, v=0$ ;

при  $y=0, y=b, u=0$ .

Разложим заданную функцию нагрузки  $q(x,y)$  в двойной тригонометрический ряд

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (3.121)$$

где  $q_{mn}$  - коэффициенты разложения нагрузки (тем самым заданная нагрузка также представляется в виде набора отдельных синусоидальных составляющих нагрузок).

Коэффициенты  $q_{mn}$  равны

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (3.122)$$

Для определения коэффициентов  $A_{mn}$  подставим (3.119) и (3.122) в уравнение (3.118). В результате, после сокращения синусов, получим выражение

$$A_{mn} = \frac{q_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)}{D \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + Fh \left( \frac{1}{R_1^2} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \frac{2}{R_1 R_2} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{R_2^2} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \right)}. \quad (3.123)$$

Коэффициенты разложения  $F_{mn}$  находятся подстановкой (3.119) и (3.120) в (3.116)

$$F_{mn} = \frac{A_{mn} E \left( \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{1}{R_1} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{1}{R_2} \right)}{\left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}.$$

После того как определены функции  $w$  и  $\phi$ , можно найти внутренние усилия, действующие в оболочке

$$M_x = D \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \nu \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$M_y = D \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$M_{12} = M_{21} = -D(1-\nu) \sum_m \sum_n F_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$N_x = -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$N_y = -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$T = -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Напряжения в оболочке  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  могут быть определены, используя функцию напряжений, и имея в виду, что складываются они из напряжений от изгиба ( $\sigma_x^u, \sigma_y^u, \tau_{xy}^u$ ) и напряжений в срединной поверхности ( $\sigma_x^0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_y^0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tau_{xy}^0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ ):

$$\sigma_x = \sigma_x^u + \sigma_x^0; \quad \sigma_y = \sigma_y^u + \sigma_y^0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^u + \tau_{xy}^0.$$

Максимальные изгибные напряжения определяются по тем же формулам, что и для пластин

$$\max \sigma_x^u = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\max \sigma_y^u = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$\max \tau_{xy}^u = -\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Другие методы и способы расчета пластин и тонких оболочек рассматриваются, например, в [1-4].

## **ПРИЛОЖЕНИЕ**

## ПРИМЕР 1.

## «Расчет неразрезной балки-стенки»\*

Требуется определить напряжение в высокой балке (балке-стенке), расчетная схема которой представлена на рис. 1. Балка-стенка опирается на колонны и перекрывает несколько пролетов. Внешняя нагрузка интенсивностью  $q=0,005$  кН/см, приложена равномерно по верху балки-стенки, собственный вес не учитываем.

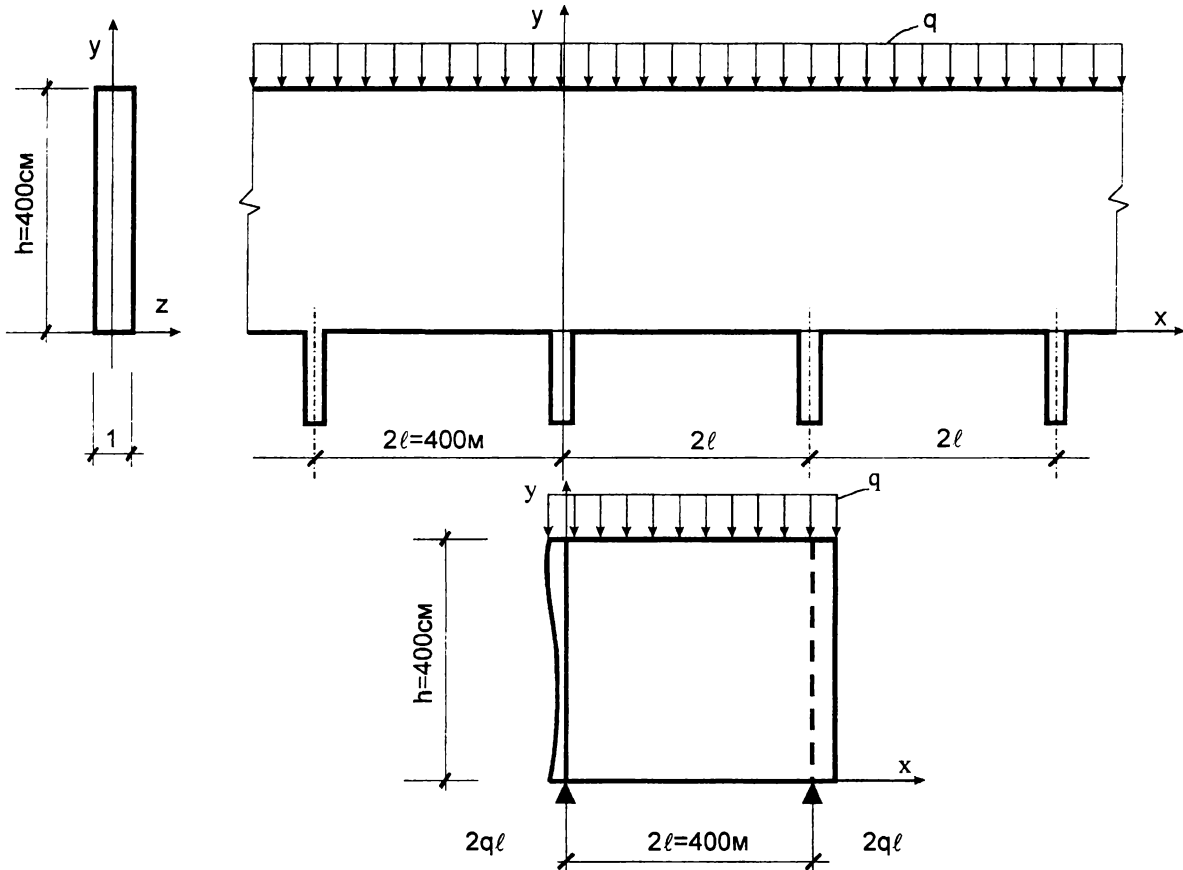


Рис. 1 Расчетная схема балки-стенки

Реакции опор считаем сосредоточенными и действующими по осям колонн. Величина пролета принята равной  $2l=400$ см, высота  $h=400$ см, толщина  $\delta$ - единице.

Все пролеты многопролетной балки-стенки, кроме крайних, находятся в одинаковых условиях, поэтому рассматривается только один пролет.

Задачу решаем, принимая функцию напряжений в виде тригонометрического ряда, заключающего только косинусы. Но один тригонометрический ряд здесь использовать не удастся, так как не будут выполнены все условия на контуре, поэтому в функцию напряжений добавим еще полином второй степени. Принятая функция напряжений имеет вид

$$\varphi = \sum_1^{\infty} \cos(\alpha x) [C_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_3 y \operatorname{sh}(\alpha y) + C_4 y \operatorname{ch}(\alpha y)] + D_1 x^2 + D_2 xy + D_3 y^2, \quad (1)$$

\* Последовательность решения принята по [1].

где  $\alpha = \frac{n\pi}{1}$ ,  $n$  - целое число. Равное порядковому номеру члена ряда.

Коэффициенты  $D$  - постоянные;  $C$  - зависят от порядковых номеров  $n$  и для каждого члена ряда имеют свои значения.

Подставляя четвертые производные  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}$  в уравнение неразрывности деформации

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,$$

убеждаемся, что оно удовлетворяется.

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  находим через вторые производные функции напряжений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos(\alpha x) \{C_1 \text{sh}(\alpha y) + C_2 \text{ch}(\alpha y) + C_3 y \text{sh}(\alpha y) + C_4 y \text{ch}(\alpha y)\} + 2[C_3 \text{ch}(\alpha y) + C_4 \text{sh}(\alpha y)] + 2D_3, \quad (2)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos(\alpha x) [C_1 \text{sh}(\alpha y) + C_2 \text{ch}(\alpha y) + C_3 y \text{sh}(\alpha y) + C_4 y \text{ch}(\alpha y)] + 2D_1, \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin(\alpha x) \{C_1 \text{ch}(\alpha y) + C_2 \text{sh}(\alpha y) + C_3 y \text{ch}(\alpha y) + C_4 y \text{sh}(\alpha y)\} + [C_3 \text{sh}(\alpha y) + C_4 \text{ch}(\alpha y)] + D_2. \quad (4)$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3$  находят из условий на контуре:

при  $y=0$   $\sigma_y=0$ ; при  $y=0$   $\tau_{xy}=0$ ;

при  $y=h$   $\sigma_y=-q$ ; при  $y=h$   $\tau_{xy}=0$ ;

при любом значении  $x$   $\int_0^1 \sigma_x dy = 0$ ; при  $y=1$   $\tau_{xy}=0$ ;

в любом горизонтальном сечении  $\int_0^1 \sigma_y dx = -ql$ .

Окончательные выражения для постоянных и формулы для напряжений имеют вид

$$C_1 = -\frac{2q}{\alpha^2}; \quad C_2 = +\frac{2q}{\alpha^2}; \quad C_3 = -\frac{2q}{\alpha}; \quad C_4 = +\frac{2q}{\alpha}; \quad D_1 = -\frac{q}{2}; \quad D_2 = 0; \quad D_3 = 0.$$

$$\sigma_x = -2q \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos(\alpha x); \quad (5)$$

$$\sigma_y = -2q \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos(\alpha x); \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = -2q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha y} \alpha y \sin(\alpha x); \quad (7)$$

Далее следует проверить, удовлетворяют ли выражения (5), (6) и (7) уравнениям равновесия плоской задачи, которые без учета объемных сил, имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Определим производные

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 2q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha y} (1 - \alpha y) \alpha \sin(\alpha x);$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 2q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha y} \alpha y \alpha \cos(\alpha x);$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -2q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha y} (1 - \alpha y) \alpha \sin(\alpha x);$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -2q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha y} \alpha y \alpha \cos(\alpha x).$$

Подставляя выражения для производных в дифференциальные уравнения равновесия, убеждаемся, что последние удовлетворяются.

Для иллюстрации напряженного состояния балки-стенки определены напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении по середине пролета при  $x=l$  и напряжения  $\sigma_y$  в продольном сечении при  $y=0,25h$ .

При подсчете напряжений ограничились пятью членами ряда. Вычисления здесь не приводим, величины напряжений указаны на эпюрах (рис. 2).

Интересно сравнение результатов расчета неразрезной балки-стенки методами теории упругости и сопротивления материалов.

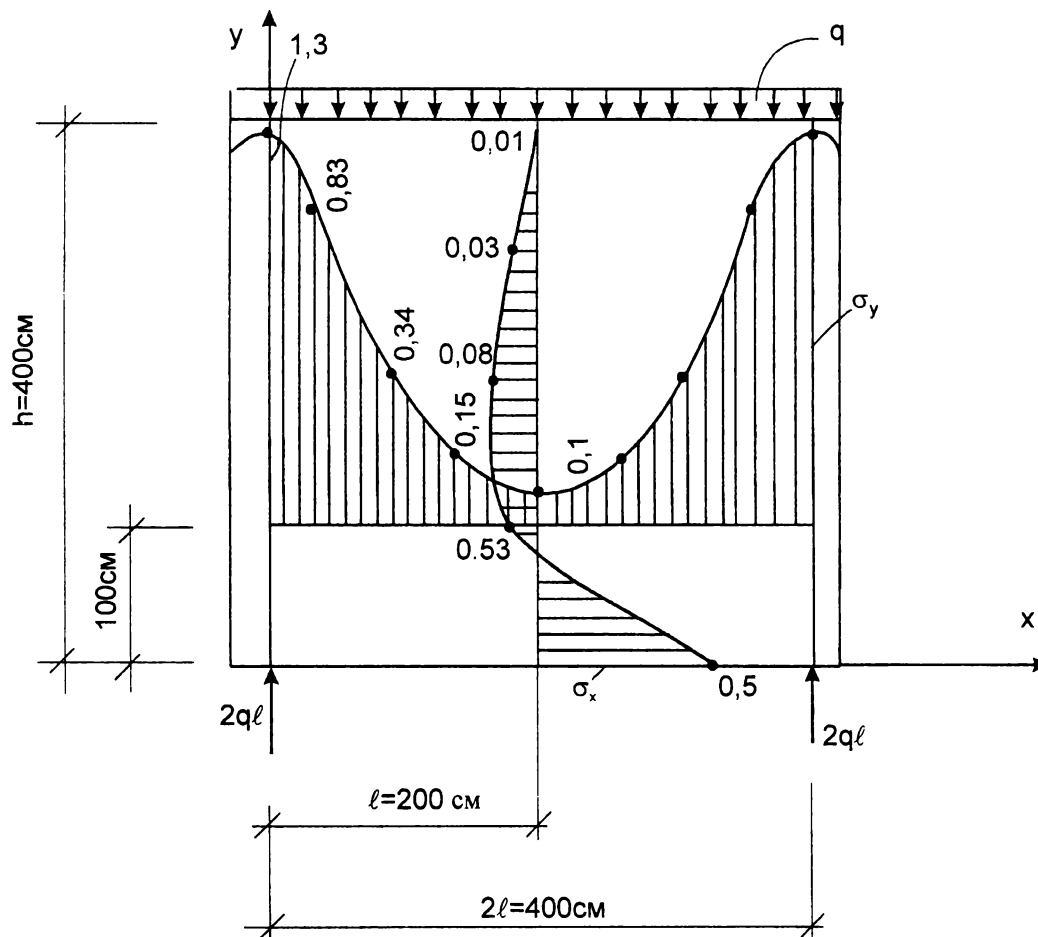


Рис. 2 Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$



Напряжение в точке 1 в нормальном сечении  $x=l=2\text{м}$  определим по формуле сопротивления материалов

$$\max \sigma_x = \frac{M}{W_x} = \frac{6M}{\delta h^2}.$$

Изгибающий момент  $M$  по середине пролета неразрезной балки при равномерно распределенной нагрузке  $q$  равен

$$M = \frac{qL^2}{24},$$

где  $L$  - пролет балки,  $L=4.0\text{м}$ .

Тогда напряжение в точке 1

$$\max \sigma_x = \frac{6qL^2}{24h^2} = \frac{6 \cdot 50\text{н/см}(400\text{см})^2}{24 \cdot (400\text{см})^2} = 0.125\text{Мпа}.$$

Таким образом величина напряжений, подсчитанная по формуле сопротивления материалов в четыре раза менее точного значения ( $0,5\text{Мпа}$ ), полученного методом теории упругости.

## ПРИМЕР 2.

### Расчет упругой прямоугольной в плане пластины на поперечную нагрузку.

В данном примере рассмотрим прямоугольную в плане пластину с размерами  $a = 3$  м;  $b = 2$  м;  $h = 6$  см; нагруженную распределенной нагрузкой  $q = 10$  кН/м<sup>2</sup>, расположенной на средней трети пластины (см. рис. 3). Модуль упругости и коэффициент Пуассона равны соответственно  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа и  $\mu = 0,15$ .

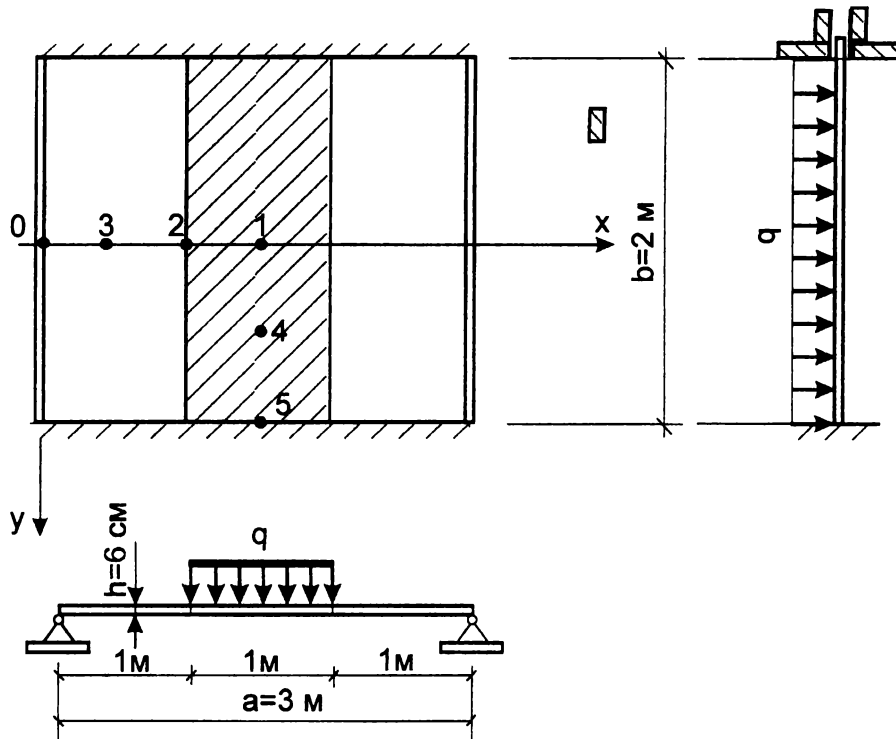


Рис. 3 Расчетная схема пластинки

В расчете требуется:

1. построить эпюры прогибов по линиям  $y = 0$  и  $x = 1,5$  м;
2. построить эпюру  $M_y$  по прямой  $x = 1,5$  м и подсчитать  $M_x$  в точке 1 (см. рис. 3);
3. подсчитать наибольшие напряжения в точках 1 и 5;
4. построить эпюру нагрузок по линии  $y = 0$ .

В предлагаемом примере грани пластинки, перпендикулярные оси  $ox$  - шарнирно опертые, а грани, перпендикулярные оси  $oy$  - защемлены. Для этого случая решение удобно принять в одинарных рядах. Примем функцию прогибов в таком виде:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} J_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (1)$$

Граничные условия на гранях  $x = 0$  и  $x = a$  выполняются автоматически; для выполнения граничных условий на гранях  $y = \pm \frac{b}{2}$  следует подобрать соответствующий вид функции  $J_m(y)$ .

Так как заданная пластинка и нагрузка симметричны относительно оси  $O_x$  и  $O_y$ , то в общем решении (1) оставим только симметричные слагаемые (см. рис. 4).

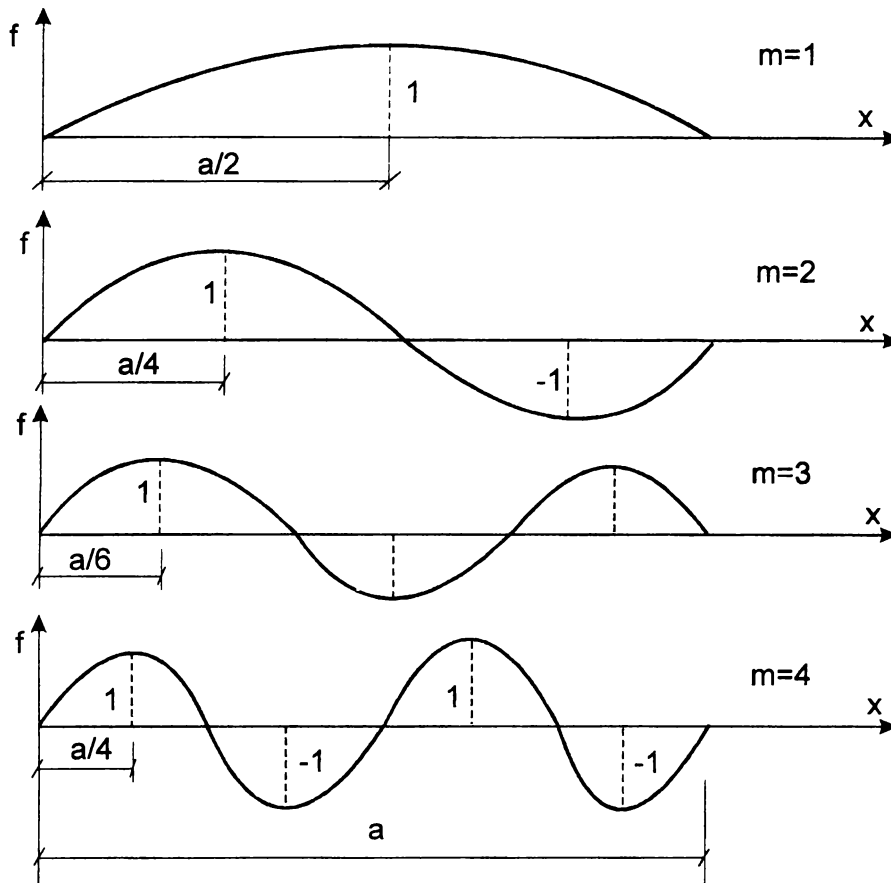


Рис.4 График изменения  $f = \sin(\alpha_m x)$  при  $m=1,2,3,4$

При  $m=1,3,\dots$  - симметричные слагаемые; при  $m=2,4,\dots$  косо-симметричные слагаемые.

$$J_m = \frac{q_m}{D\alpha_m^4} + A_m \operatorname{ch}\alpha_m y + B_m \alpha_m y \operatorname{sh}\alpha_m y, \quad (2)$$

здесь  $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, m = 1,3,5$ .

Разложим нагрузку  $q(x)$  в ряд по  $\sin \frac{m\pi x}{a}$ :

$$q_m = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

здесь  $q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$  - коэффициенты Фурье.

$$\text{В нашем случае } q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} q(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

$$\text{В результате } q_m = \frac{6,36}{m} \left( \cos \frac{m\pi}{3} - \cos \frac{2m\pi}{3} \right). \quad (3)$$

Определим постоянные  $A_m$  и  $B_m$  из граничных условий на гранях  $y = \pm \frac{b}{2}$ :

$$1) W = 0; \quad 2) \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

$$1) \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{q_m}{\alpha_m^4 D} + A_m \operatorname{ch} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) + B_m \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0,$$

т.к. функции  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  линейно независимы, то:

$$\frac{q_m}{\alpha_m^4 D} + A_m \operatorname{ch} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) + B_m \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) = 0; \quad (4)$$

$$2) \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \frac{b}{2} + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) + B_m \alpha_m^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0,$$

или, как и раньше:

$$A_m \alpha_m \operatorname{sh} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) + B_m \alpha_m^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch} \left( \alpha_m \frac{b}{2} \right) = 0. \quad (5)$$

Решая совместно уравнения (4) и (5), найдем:

$$A_m = -q_{0m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_{0m} + \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}}{\alpha_{0m} + \operatorname{sh} \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}}; \quad (6)$$

$$B_m = q_{0m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_{0m}}{\alpha_{0m} + \operatorname{sh} \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}};$$

здесь

$$\alpha_{0m} = \frac{\alpha_m b}{2} = \frac{m\pi b}{2a}; \quad g_{0m} = \frac{q_m}{\alpha_m^4 D}. \quad (7)$$

Запишем окончательный вид функции прогибов:

$$w(x, y) = \sum_{m=1,3,5} q_{0m} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \alpha_{0m} \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y) - (\operatorname{sh} \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}) \operatorname{ch}(\alpha_m y)}{\alpha_{0m} + \operatorname{sh} \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}} + 1 \right\}. \quad (8)$$

Для подсчета изгибающих моментов необходимо взять вторые производные от  $w$  по  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_m \alpha_m^2 [q_0 + A_m \operatorname{ch}(\alpha_m y) + B_m \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y)] \sin(\alpha_m x); \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_m \alpha_m^2 [A_m \operatorname{ch}(\alpha_m y) + B_m (2 \operatorname{ch}(\alpha_m y) + \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y))] \sin(\alpha_m x) \quad (10)$$

По известным для  $M_x$  и  $M_y$  формулам с учетом (6) и (7) для нашего частного случая получим:

$$M_x = \sum_{m=1,3,5} (1 - \mu) \frac{q_m}{\alpha_m^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \alpha_{0m} \cdot \alpha_m y \cdot \operatorname{sh}(\alpha_m y) - \left[ \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \operatorname{sh} \alpha_{0m} + \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m} \right] \operatorname{ch}(\alpha_m y)}{\alpha_{0m} + \operatorname{sh} \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}} + \frac{1}{1 - \mu} \right\} \cdot \sin(\alpha_m x); \quad (11)$$

$$M_y = \sum_{m=1,3,5} (1 - \mu) \frac{q_m}{\alpha_m^2} \left\{ \frac{\left[ \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m} - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \operatorname{sh} \alpha_{0m} \right] \operatorname{ch}(\alpha_m y) - \operatorname{sh} \alpha_{0m} \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y)}{\alpha_{0m} + \operatorname{sh} \alpha_{0m} \operatorname{ch} \alpha_{0m}} + \frac{\mu}{1 - \mu} \right\} \cdot \sin(\alpha_m x) \quad (12)$$

Все необходимые выражения для решения поставленной задачи имеются .  
 Результаты вычислений сведем в таблицу.

N точки	x, м	y, м	M <sub>x</sub> , кНм/м	M <sub>y</sub> , кНм/м	W, мм	g, кН/м
1	1,5	0	0,724	0,984	0,773	11,87
2	1	0	-	-	0,590	4,40
3	0,5	0	-	-	0,310	-0,42
4	1,5	0,5	-	0,407	0,221	11,870
5	1,5	1	-	-2,237	0	11,87

По данным, полученным в результате расчетов, построим эпюры M<sub>y</sub>, W, q.

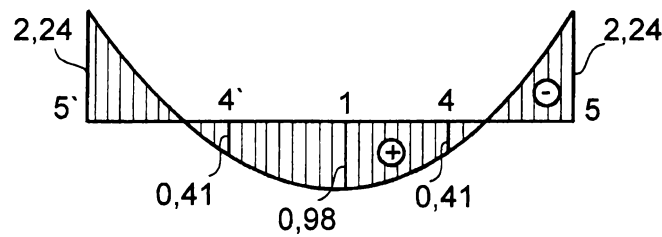


Рис. 5 Эпюра M<sub>y</sub> по линии x = 1,5 м

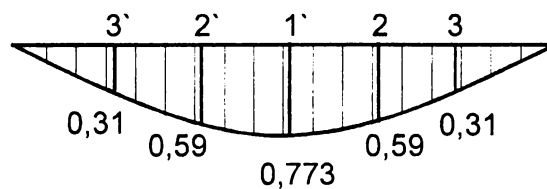


Рис. 6 Эпюра прогибов W [мм] по линии y = 1,5 м

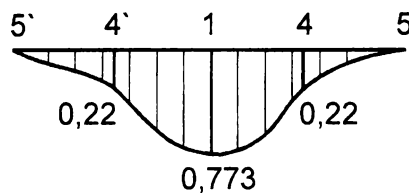


Рис. 7 Эпюра прогибов W[мм] по линии x = 1,5 м

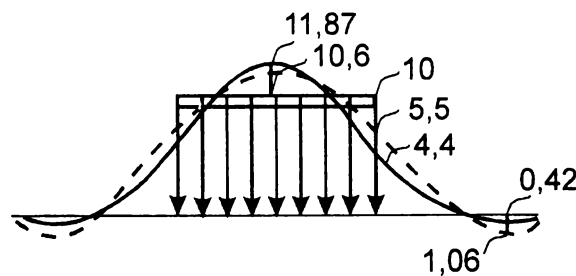


Рис. 8 Эпюра  $q \left[ \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right]$  по линии y = 0: сплошная линия - сумма трех слагаемых ряда; прерывистая линия - сумма двух слагаемых ряда; заштрихована заданная нагрузка

Подсчет наибольших напряжений в точках 5 и 1.

Момент сопротивления:  $W = \frac{1 \cdot h^2}{6}$  (ширина = 1 м.).

**Точка 5.**

$M_y = -2,24 \text{ кНм/м}$ .  $W = \frac{1 \cdot 0,06^2}{6} = 0,0006 \text{ м}^3$ .

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_y|}{W} = \frac{-2,24}{0,0006} = 3,73 \text{ МПа.}$$

**Точка 1.**

$M_x = 0,724 \text{ кНм/м}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W} = \frac{0,724}{0,0006} = 1,21 \text{ МПа.}$$

**ПРИМЕР 3.**

**Расчет купола (оболочки вращения).**

1. Методические указания к расчету.

Поверхность вращения образуется вращением плоской кривой вокруг некоторой оси  $\xi$ . Две поверхности вращения относительно одной оси  $\xi$ , отстоящие на небольшом расстоянии  $h$  друг от друга, образуют тело оболочки вращения (рис. 9). Варианты опирания по нижнему краю оболочки могут быть различными (рис. 10).

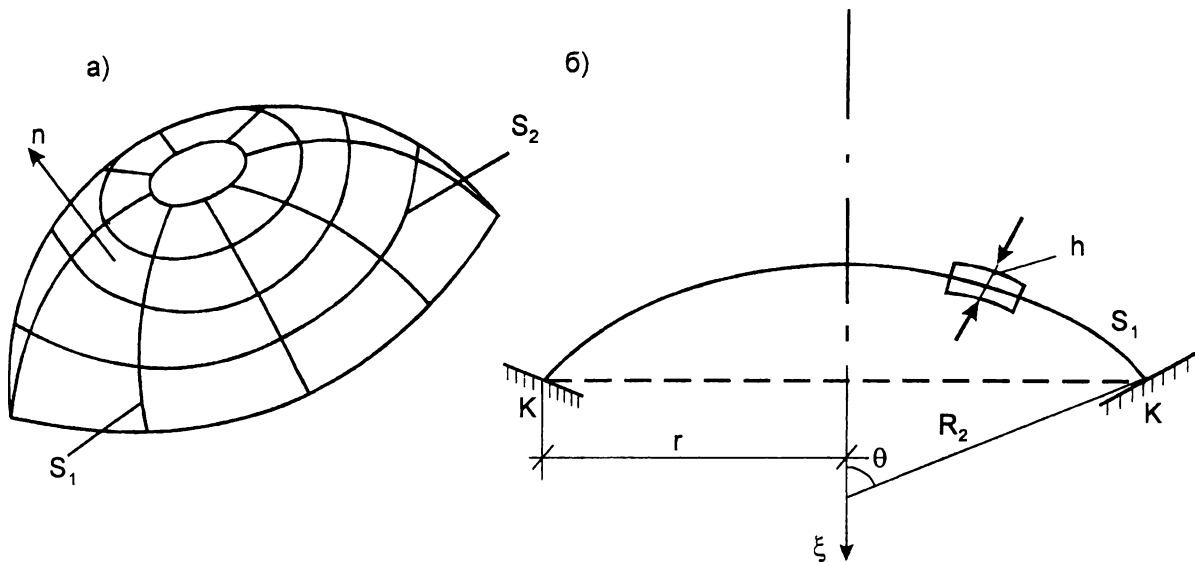


Рис. 9 Общий вид купола: а) координатные линии; б) разрез купола

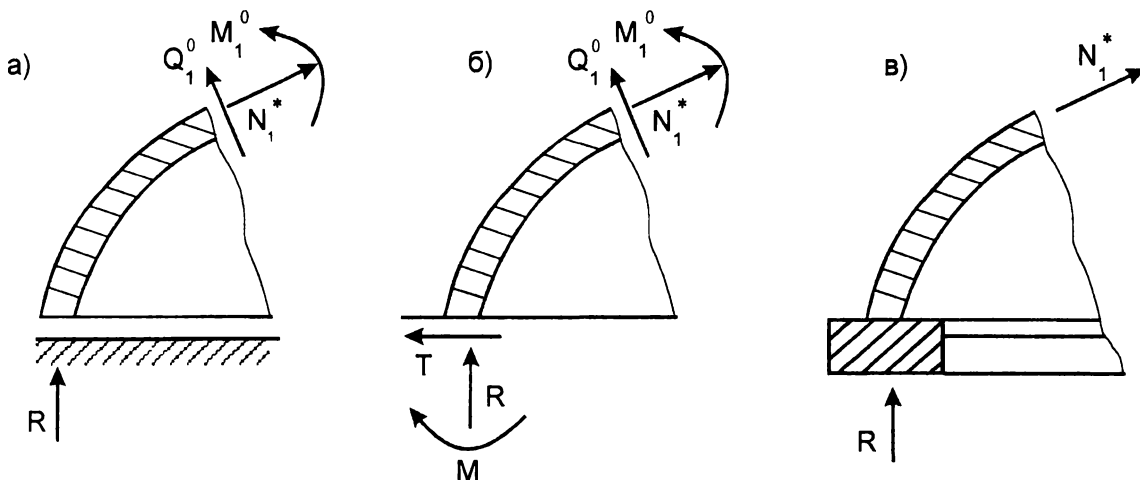


Рис. 10 Опирание оболочки а) свободный край; б) защемленные края; в) опорное кольцо

Расчет на прочность предусматривает определение внутренних усилий, толщины оболочки, возникающих в ней напряжений, определение размеров опорного кольца.

Основные геометрические соотношения.

Примем за координатные линии меридианы  $S_1$  и параллели  $S_2$ . Меридиан—это след пересечения через ось вращения с поверхностью вращения. Параллель—это след пересечения с горизонтальной плоскостью. Нормаль к серединной поверхности будем обозначать буквой  $n$ . Пусть  $\xi=\xi(r)$ - функ-

ция, задающая линию меридиана. Из рассмотрения (рис 9б) можно получить геометрические зависимости.

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{1 + \xi'^2} dr, \quad \operatorname{tg} \theta = \xi', \quad \sin \theta = \frac{\xi'}{\sqrt{1 + \xi'^2}}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \xi'^2}}, \quad R_2 = \frac{r}{\sin \theta}, \quad R_1 = \frac{ds_1}{d\theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где «'» (штрих)-дифференцирование по аргументу  $r$ .

Кривизна  $\frac{d\theta}{ds_1}$  координатной линии определяется дифференцированием

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds_1} = \left( \frac{d\theta}{dr} \right) \left( \frac{dr}{ds_1} \right) = \frac{\xi''}{(1 + \xi'^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

## 2. Пример расчета .

Рассмотрим вычисление геометрических параметров оболочки.

Высота купола  $\xi_k = H = 20$  м, радиус окружности на уровне опорного контура

$r_k = 40$  м, тангенс угла наклона касательной к меридиану  $\xi'_k = \operatorname{tg} \theta = 2$ , отношение радиусов кривизны на том же уровне  $\frac{R_2}{R_1} = 2$ .

Уравнение меридиана  $\xi = c_1 r^2 + c_2 (r - 0.8 r_k)^3 + c_3 (r - 0.9 r_k)^3$ .

Значение второй производной  $\xi''_k$  функции  $\xi(r)$  на уровне опорного контура  $r = r_k$  находится из соотношения радиусов кривизны.

Значение второй производной  $\xi''_k$  функции  $\xi(r)$  на уровне опорного контура  $r = r_k$  находится из соотношения радиусов кривизны.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{r \xi''}{\xi' + \xi'^3}. \quad (3)$$

Для нашего примера  $\xi'' = 0,5$ . Произвольные постоянные  $C_1, C_2, C_3$ , входящие в уравнение меридиана, определяются по значению функции  $\xi(r)$  и ее первых двух производных  $\xi'(r)$ ,  $\xi''(r)$  на уровне опорного контура:

$$\begin{aligned} \xi_k &= C_1 40^2 + C_2 8^3 + C_3 4^3 = 20; \\ \xi'_k &= C_1 40 + C_2 3 \cdot 8^2 + C_3 3 \cdot 4^2 = 2; \\ \xi''_k &= C_1 2 + C_2 6 \cdot 8 + C_3 6 \cdot 4 = 0,5; \end{aligned}$$

Из решения этой системы  $C_1 = 0,01136, C_2 = 0,001420, C_3 = 0,0011704$ .

Уравнение меридиана для заданного варианта оболочки:

$$\begin{aligned} \xi(r) &= 0.01136 r^2 + 0.001420 (r - 32)^3 + 0.0011704 (r - 36)^3; \\ \xi'(r) &= 0.02272 r + 0.004260 (r - 32)^2 + 0.051120 (r - 36)^2; \\ \xi''(r) &= 0.02272 + 0.008520 (r - 32) + 0.102240 (r - 36); \\ (r - a)^i &= 0 \text{ при } a \geq r; \quad (r - a)^i = (r - a)^i \text{ при } a < r. \end{aligned}$$

Вычисление геометрических параметров при различных значениях радиуса  $r$  выполняется по формулам (1) и (2). Результаты вычислений можно свести в таблицу 1.



r	5	15	25	30	35	40
$\xi$	0.284	2.556	7.100	10.224	13.954	19.993
$\xi'$	0.1136	0.3408	0.5680	0.6816	1.072	1.9993
$\xi''$	0.02272	0.02272	0.02272	0.02272	0.02272	0.02272
$(1+\xi'^2)^{0.5}$	1.0064	1.0566	1.11500	1.2102	1.4660	2.2381
$R_1$	44.87	51.90	66.94	78.01	65.269	22.36
$R_2$	44.29	46.50	50.62	53.26	47.86	44.72
$\sin\theta$	0.1128	0.3225	0.4939	0.5632	0.7312	0.8944
$\cos^2\theta$	0.9872	0.8957	0.7561	0.6228	0.4653	0.1999
$R_2/R_1$	0.987	0.8959	0.7562	0.6827	1.380	2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕПНЫХ УСИЛИЙ

Внутренние усилия определяются по безмоментной теории. (Состояние называется безмоментным, когда отсутствуют внутренние моменты и поперечные силы). Продольные усилия по сложившейся традиции будем называть цепными. Любая часть оболочки под действием внешних и внутренних сил находится в равновесии (рис.11а). Пусть  $P(r) = \int 2\pi\tilde{r}g_{\xi}d\tilde{r}$  -равнодействующая вертикальной нагрузки;

$q_{\xi} = q_0 + q_1 r$  -интенсивность внешней нагрузки на единицу площади плана

$N_1^*$  -меридиальное усилие на единицу длины окружности. Сумма проекций всех сил на вертикаль.

$$N_1^* = \frac{-P(r)}{2\pi r \sin\theta} \tag{4}$$

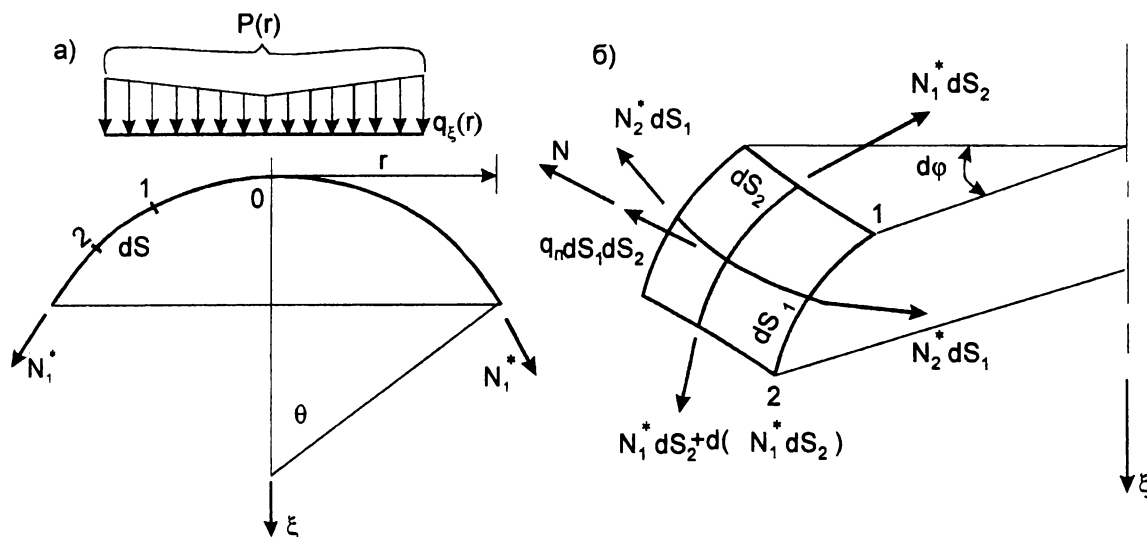


Рис. 11 Цепные усилия

При линейном законе изменения интенсивности  $q_{\xi} = q_0 + q_1 r$

$$N_1^* = \frac{-0,5r(q_0 + 0,666q_1 r)}{\sin\theta}$$

Для получения второго уравнения равновесия надо из оболочки выделить бесконечно малый элемент и составить сумму проекций сил на нормаль n (рис.11б). После сокращения на  $ds_1, ds_2$  приходим к такому уравнению:

$$\frac{N_1^*}{R_1} + \frac{N_2^*}{R_2} = q_n, \quad (5)$$

где  $N_2^*$  - окружное усилие на единицу длины меридиана;

\*-(звездочка) говорит о том, что усилия определены по без моментной теории;

$q_n$ -интенсивность нормальной нагрузки. Несложно представить, что нормальная составляющая интенсивности нагрузки на единицу площади срединной поверхности  $q_n$  вычисляется как

$$q_n = q_\xi \cdot \cos^2 \theta.$$

В силу осевой симметрии сдвигающее усилие в срединной поверхности равно нулю.

Пример вычислений цепных усилий  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  для случая когда:  $E_k$ ,  $E_{об}$  – модули упругости,

$$q_0 = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}; q_1 = 0.01 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}; E_{об} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; [G] = 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; \nu = 0.1; \frac{E_k}{E_{об}} = 2 \text{ приводится в таблице 2.}$$

#### ЦЕПНЫЕ УСИЛИЯ В ОБОЛОЧКЕ.

r	5	15	25	30	35	40
$\frac{P}{\pi \cdot r}$	10.3	31.5	54.2	6.6	78.2	96.6
$N_1$	-45.66	-48.84	-54.87	-58.59	-53.47	-50.65
$q_\xi$	2.05	2.15	2.25	2.30	2.35	2.40
$q_n$	-2.02	-1.882	-1.700	-1.432	-1.093	-0.48
$N_2^*$	-44.39	-43.75	-44.59	-36.26	-13.0	73.84

По результатам вычислений строим эпюры усилий (см. рис. 12).

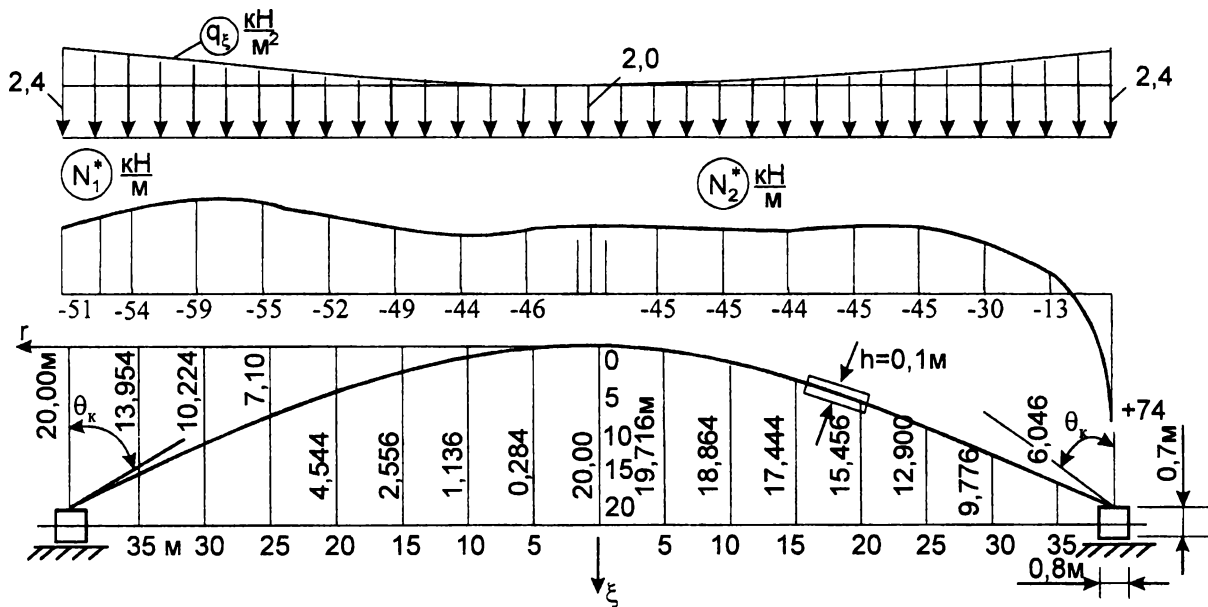


Рис. 12 Эпюры  $q_\xi$ ,  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  (безмоментное состояние)

Толщину оболочки определяем по четвертой теории прочности.

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{N_1^{*2} + N_2^{*2} - N_1^* N_2^*}}{h} \leq [\sigma] \quad (6)$$

Отсюда  $h = 1,078 \cdot 10^{-2}$  м.

Для обеспечения безмоментного состояния вблизи опорного контура опорная реакция должна быть направлена по касательной к меридиану. Делать наклонную опору сложно. Если усилия  $N_1^*$ ,  $N_2^*$

в этом месте разного знака, то наклонную опору можно заменить опорным кольцом. По окружности примыкания опорного кольца к оболочке линейные деформации оболочки и кольца должны быть одинаковы. Деформация оболочки определяется по закону Гука

$$\epsilon_r^* = \frac{N_2^* - \nu N_1^*}{E_{об} h},$$

Интенсивность горизонтальной силы  $T$ , действующей на опорное кольцо  $T = -N_1^* \cos \theta$  показана на рис. 13.

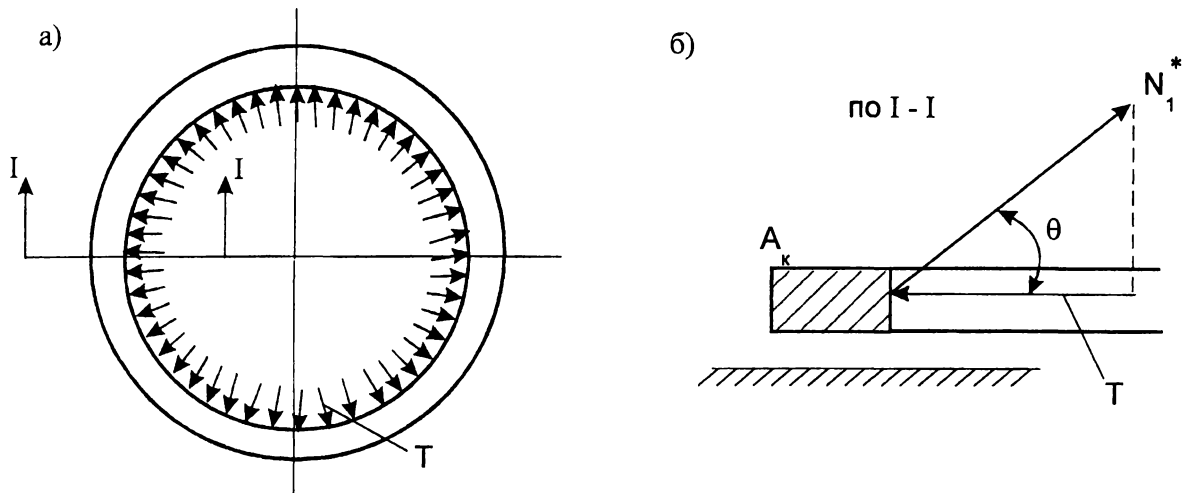


Рис. 13 Распределение усилий на опорном кольце

Линейная деформация кольца: 
$$\epsilon_k = \frac{T \cdot r_k}{E_k A_k}.$$

Приравниваем деформации друг к другу

$$\frac{N_2^* - \nu N_1^*}{E_{об} h} = - \frac{N_1^* \cos \theta \cdot r_k}{E_k A_k} \quad (7)$$

Отсюда видно, что опорное кольцо можно подобрать только при  $N_1^* \cdot N_2^* < 0$ .

Для примера:  $N_1^* = 73.84 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $N_2^* = -50.65 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $E_k = 2E_{об}$ ;  $r_k = 40\text{м}$ ;  $\cos \theta = 0,4472$ .

Площадь сечения опорного кольца  $A_k = 0,574\text{м}^2$  находим из формулы (7).

### УЧЕТ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА.

Если опирание оболочки задано (см. рис.10) по типу а) - свободный край или по типу б) - защемленный край, то состояние вблизи опорного контура может не быть безмоментным. Дополнительное напряженное состояние определяется уравнением краевого эффекта

$$\frac{d^4 w^0}{ds} + 4\beta^4 w^0 = 0, \quad \beta \approx \frac{3}{h^2 R_2^2}. \quad (8)$$

Однородное решение можно взять таким:

$$w^0 = e^{-\beta s} (A_0 \sin \beta s + B_0 \cos \beta s), \quad (8')$$

где  $w_0$  - перемещение точек срединной поверхности по направлению к нормали  $n$ .

Константы  $A_0$  и  $B_0$  находятся из граничных условий.

Производная порядка  $i$  по аргументу  $s$  вычисляется по формуле

$$\frac{d^{(i)}w_0}{ds^i} = \beta^i e^{-\beta s} (A_i \sin \beta s + B_i \cos \beta s),$$

$$A_1 = -(A_0 + B_0); \quad B_1 = A_0 - B_0, \quad A_2 = 2B_0,$$

$$B_2 = -2A_0, \quad A_3 = 2(A_0 - B_0), \quad B_3 = 2(A_0 + B_0).$$

Здесь  $s$  - длина дуги меридиана, измеряемая от нижнего края.

Внутренние усилия определяются:

$$M_1^0 \approx D \frac{d^i w^0}{ds^2}, \quad N_2^0 = \frac{E h w^0}{R_2}; \quad Q_1^0 \approx -D \frac{d^3 w^0}{ds^3}, \quad D = \frac{E h^3}{12},$$

где  $M_1^0$  - изгибающий момент на единицу длины окружности;  $N_2^0$  - дополнительное кольцевое усилие;  $Q_1^0$  - поперечная сила;

<sup>0</sup> - (индекс) указывает на то, что функции получены из уравнения краевого эффекта.

Обратимся теперь к граничным условиям. Когда край оболочки защемлен, перемещение  $w$  вдоль нормали  $n$  и угол поворота касательной равны нулю (см. рис 106).

$$w = w^0 + w^* = 0, \quad \frac{dw}{ds} \approx \frac{dw^0}{ds} = 0,$$

где  $w^0$  - однородное решение (8');  $w^*$  - перемещение, соответствующее неоднородному уравнению (5), определяется по формуле  $w^* = \varepsilon_r^* R_2$ .

В развернутом виде граничные условия запишутся

$$B_0 + \frac{(N_2^* - \nu N_1^*) R_2}{E_{об} h} = 0, \quad A_0 - B_0 = 0.$$

При свободном опирании оболочки изгибающий момент  $M_1$  и горизонтальная сила  $T$  равны нулю (см. рис.10а)

$$M_1^0 = 0, \quad Q_1^0 \sin \theta_k - N_1^* \cos \theta_k = 0.$$

В развернутом виде

$$A_0 = 0, \quad 2\beta^3 (A_0 + B) \sin \theta_k + N_1^* \cos \theta_k = 0.$$

Например, пусть рассмотренная выше оболочка вместо опорного кольца имеет защемленный край. Выпишем результаты расчета по безмоментному состоянию

$$h_1 = 0.1 \text{ м}, \quad R_1 = 22.36 \text{ м}, \quad R_2 = 44.72 \text{ м}, \quad r_k = 40 \text{ м},$$

$$N_1^* = -50.65 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; \quad N_2^* = 73.84 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; \quad \nu = 0.1; \quad E_{об} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Тогда

$$B_0 + \frac{(73.84 + 0.1 \cdot 50.65)}{0.1 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 44.72} = 0, \quad A_0 - B_0 = 0.$$

Откуда находим

$$A_0 = B_0 = -1.764 \cdot 10^{-3}, \quad A_1 = 3.528 \cdot 10^{-3}, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = -B_2 = -3.528 \cdot 10^{-3}.$$

Перемещение  $W^0$ , изгибающий момент  $M_1^0$  и кольцевое усилие  $N_2^0$ , вызванное защемлением края

$$w^0 = 1.764 \cdot 10^{-3} e^{-\beta s} (\sin \beta s + \cos \beta s), \quad \beta = 0.6223,$$

$$M_1^0 \approx D \cdot \beta^2 e^{-\beta s} (A_2 \sin \beta s + B_2 \cos \beta s) = 2.277 e^{-\beta s} (-\sin \beta s + \cos \beta s);$$

$$N_2^0 \approx E_{об} h e^{-\beta s} (A_0 \sin \beta s + B_0 \cos \beta s) = -\frac{3528 e^{-\beta s}}{R_2} (\sin \beta s + \cos \beta s).$$

Результаты вычислений сведены в таблицу 4 и показаны на графиках (см. рис. 14). Значения радиуса кривизны  $R_2$  можно вычислить по линейной интерполяции.

**УСИЛИЯ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА.**

Таблица 4

№ п/п	$\beta s$	s	$R_2$	$e^{-\beta s}$	$M_1^0$	$N_2^0$
0	0	0	44.72	1	2.777	-78.9
1	$\pi/4$	1.26	45.50	0.4566	0	-49.84
2	$\pi/2$	2.52	46.30	0.2079	$-4.73 \cdot 10^{-2}$	-15.8
3	$3\pi/4$	3.79	46.70	0.0948	$-3.06 \cdot 10^{-2}$	0
4	$\pi$	5.05	47.9	0.0432	$-9.84 \cdot 10^{-2}$	3.2

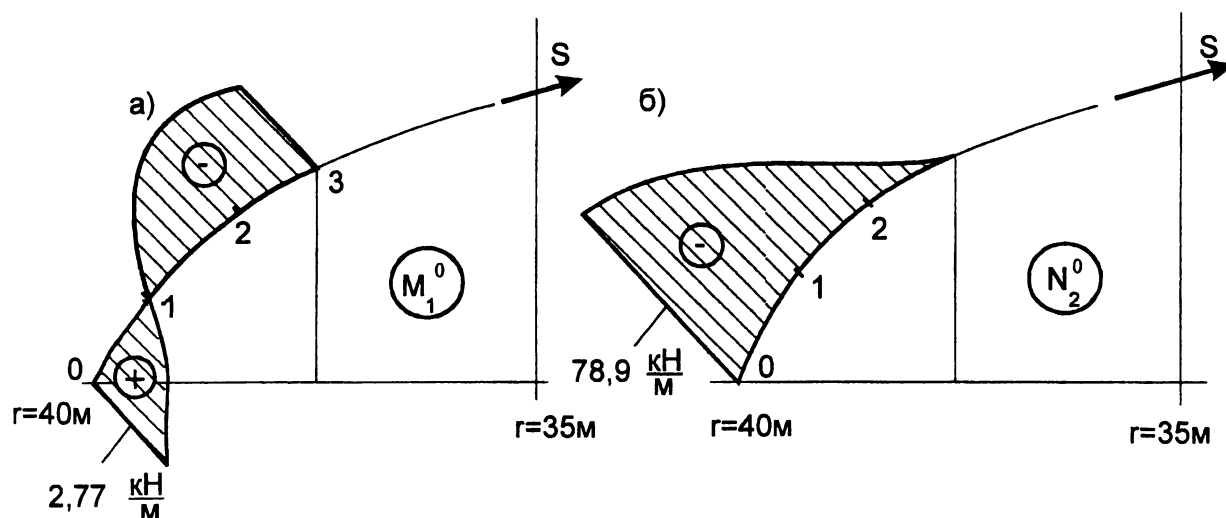


Рис. 14 Эпюры  $M_1^0$ ,  $N_2^0$ —от краевого эффекта

Напряжения в районе краевого эффекта

$$\sigma_1 = \frac{\left( N_1^* + \frac{M_1^0}{h} \right)}{h} = 2166 \text{ кН/м}^2, \quad \sigma_2 = \frac{\left( N_2^* + N_2^0 + \nu \frac{6M_1^0}{h} \right)}{h} \approx 166 \text{ кН/м}^2.$$

В заключение отметим, что обрушение оболочки может произойти в результате потери устойчивости. Расчет на прочность не является достаточным условием для безопасной эксплуатации сооружения.

### **Ученые в области механики деформированного твердого тела.**

БЕЛЯЕВ НИКОЛАЙ МИХАЙЛОВИЧ (1890-1944), русский ученый-механик. Окончил Петроградский институт инженеров путей сообщения. С 1929- профессор этого института, с 1934 - Ленинградского политехнического института, преподавал в других институтах.

Исследования относятся к теории прочности. Изучал теорию контактных напряжений. Решил задачу об устойчивости призматических стержней под действием продольных переменных сил. Автор фундаментального учебника по сопротивлению материалов.

БУССИНЕСК (БУССИНЕК) ЖОЗЕФ ВАЛЕНТИН (1842-1929), французский механик. Работал на Лилльском и Парижском факультетах наук.

Основные исследования посвящены механике и теории упругости. Предложил метод определения напряжений и деформаций в полубесконечной среде, находящейся под действием заданных сил, приложенных к ее граничной плоскости.

БУБНОВ ИВАН ГРИГОРЬЕВИЧ (1872-1919), русский корабельный инженер и механик.

Окончил Кронштадское морское инженерное училище, морскую академию в Петербурге, с 1904 - преподаватель Петербургского политехнического института, с 1910 - профессор Морской академии.

Разработал метод нахождения приближенного решения операторного уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы, который применил к решению ряда задач теории упругости. Развил теорию расчета пластин, работающих в системе корпуса корабля. Основоположник строительной механики корабля. Разработал приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости.

ВЛАСОВ ВАСИЛИЙ ЗАХАРОВИЧ (1906-1959), русский ученый в области механики. Окончил Московский инженерно-строительный институт. В 1931-1958 работал там же.

Основные направления исследований - сопротивление материалов, строительная механика, теория упругости. Разработал методы сведения задач устойчивости упругих систем к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Развил методы расчета тонкостенных стержней, оболочек. Развил вариационный метод расчета многосвязных призматических оболочек.

ГАЛЕРКИН БОРИС ГРИГОРЬЕВИЧ (1871-1945), ученый в области теории упругости, академик. Окончил Петербургский технологический институт. С 1909 - преподавал в Петербургском (Ленинградском) политехническом институте, с 1920 - профессор университета и Института путей сообщения в Петрограде (Ленинграде), в 1939-1945 - директор Института механики Академии наук СССР.

Исследования относятся к строительной механике и теории упругости. Разработал методы точного и приближенного интегрирования уравнений теории упругости. Один из создателей теории изгиба пластин. Развил математическую теорию цилиндрических оболочек. Выполнил ряд крупных инженерных и проектных работ.

ГАЛИЛЕЙ ГАЛИЛЕО (1564-1642), итальянский физик, механик, математик, астроном, один из основателей точного естествознания. Воспитывался в монастыре Воломороза во Флоренции, с 1581г. учился в Пизанском университете, изучал медицину, математику, механику. В 1589-1610 - профессор Пизанского и затем Падуанского университетов.

Автор работ по фортификации, «Краткое наставление по военной архитектуре», «Трактат по фортификации». В работе «Механика» изложил общую теорию простых машин. Автор ряда открытий в области астрономии. Убежденный последователь гелиоцентрической системы. В 1610 принял

предложение Козимо II Медичи переехать во Флоренцию в качестве придворного математика. В 1633 был привлечен инквизицией к ответственности за книгу «Диалог о двух главнейших системах мира», и в течение девяти лет официально считался узником инквизиции. В книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» изложены основополагающие исследования по механике материалов и динамике. Первые два диалога книги посвящены основам сопротивления материалов и строительной механики. Установил, что прочность бруса пропорциональна площади его поперечного сечения и не зависит от длины, исследовал изгиб балки, лежащей на двух опорах и прочность полых балок. Известен галилеевский принцип относительности движения. В области математики Галилей - один из предшественников создания теории вероятностей.

**ЖЕРМЕН СОФИ (1776-1831)**, французский математик и механик. Дочь ювелира. Самостоятельно изучила математику.

Разрабатывала теорию чисел, теорию упругости и теорию колебаний. Вывела несколько формул, названных ее именем. В развитии математической физики труды Жермен являются основополагающими. Нашла ряд важных положений в теории упругих пластин.

**ЖУРАВСКИЙ ДМИТРИЙ ИВАНОВИЧ (1821-1891)**, русский инженер и механик. Окончил Институт корпуса инженеров путей сообщения (1842). Принимал участие в постройке Петербургско-Московской железной дороги и в других строительных работах. Спроектировал и построил металлический шпиль Петропавловского собора в Петербурге. В 1877-1889 - директор департамента железных дорог.

Работы посвящены строительной механике и применению математических методов к строительному делу. Впервые дал определение касательных напряжений в изгибаемых элементах, вывел формулу для определения касательных напряжений в балках. Разработал приближенный метод расчета балок.

**ИЛЬЮШИН АЛЕКСЕЙ АНТОНОВИЧ (1911)**, русский ученый в области механики. Окончил Московский университет. С 1938 - профессор Московского университета, в 1936-1960 работал в институте механики АН СССР (в 1953-1960 - директор).

Основные исследования посвящены механике сплошной среды. Предложил постулат изотропии, модификацию метода Ритца, метод упругих решений нелинейных задач механики твердого тела. Создал теорию пластического течения, теорию пластической деформации оболочек.

**КАСТЕЛЬЯНО КАРЛО АЛЬБЕРТО (1847-1884)**, итальянский механик и инженер. Окончил Туринский политехнический институт.

Дипломная работа содержала формулировку теории об определении прогибов шарнирных ферм (теорема Кастильяно). Эта теорема является одной из основных в теории сооружений, она обобщена автором на упругое тело любого вида. Получил выражение упругой энергии для стержней, подвергающихся различным видам деформаций, и использовал их для решения статически неопределимых задач о балках и арках.

**КИРХГОФ ГУСТАВ РОБЕРТ (1824-1887)**, немецкий физик и механик. Окончил Кёнигсбергский университет. Профессор университета в Бреслау. Гейдельбергского и Бременского университетов.

Работы по механике посвящены теории деформаций, движения и равновесия упругих тел. Разработал теорию изгиба пластин и теорию деформаций тонких стержней.

**КЛАЙПЕРОН БЕНУА ПОЛЬ ЭМИЛЬ (1799-1864)**, французский инженер, физик, механик. Окончил Горную школу в Париже. В 1820-1830 - профессор Петербургского института инженеров путей сообщения, с 1831 профессор Школы мостов и дорог в Париже.

Работы по механике посвящены теории упругости и строительной механике. Вместе с Г. Ляме написал мемуар о внутреннем равновесии твердых тел из однородных материалов. Дал формулировку уравнения трех моментов. Разработал метод определения усилий в неразрезных балках. В теории упругости известна теорема Клайперона.

КРЫЛОВ АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ (1863-1945), русский математик, механик, кораблестроитель. Окончил Морскую академию, где работал с 1890. Профессор Петербургского политехнического института и Института инженеров путей сообщения, в 1908-1910 - главный инспектор кораблестроения и председатель Морского технического комитета, в 1919-1921 - начальник Морской академии, с 1927 - профессор Морской академии, в 1927 - 1934 - директор Физико-математического института Академии наук СССР.

Основные исследования относятся к теории корабля, строительной механике, теории дифференциальных уравнений, теории гироскопов. Приобрел мировую известность трудами по кораблестроению, механике корабля, теории вибрации судов.

В строительной механике обосновал и развил оригинальный метод расчета балок, лежащих на упругом основании.

ЛЯМЕ ГАБРИЕЛЬ (1795-1870), французский инженер, математик и механик. Окончил Политехническую школу и Горную школу в Париже. По приглашению русского правительства в 1920-1932 работал в Институте корпуса инженеров путей сообщения, где возглавлял кафедру механики, математики, физики. В 1832 возвратился во Францию, в 1832-1834 - профессор физики Политехнической школы, в 1848-1863 - Сорбонны.

Исследования посвящены теории упругости и математической физики. Автор «Лекции по математической теории упругости твердых тел» - первого трактата по теории упругости. Ввел понятие эллипсоида напряжений Ляме. Исследовал теорию упругого равновесия сферических оболочек. Ввел функции Ляме.

ЛЕВИ МОРИС (1838-1910), французский математик и механик. Окончил Политехническую школу и Школу мостов и дорог в Париже. Работал инженером. В 1862-1883 - репетитор Политехнической школы, с 1885 - профессор Коллеж де Франс. С 1885г. Генерал-инспектор мостов и дорог.

Работы в различных областях прикладной математики и механики. Решил проблему определения давления массы грунта. Вывел дифференциальные уравнения равновесия плоского, кривого стержня, изогнутого действием равномерно распределенной нагрузки, исследовал изгиб прямоугольных пластин. Для пластинок конечной толщины изучил местные возмущения, вызываемые заменой одной статической системы краевых сил другой системой, ей эквивалентной. Решил двумерную задачу распределения напряжений в клине, подвергнутом давлению по его границам.

Член-корреспондент Петербургской Академии наук.

ЛЯВ ОГАСТЕС ЭДУАРД ХЬЮТ (1863-1940), английский математик и механик. Окончил Кембриджский университет. Работал в Кембриджском и Оксфордском университетах. Основные направления исследований - математическая теория упругости и ее применение к проблемам земной коры. Разрабатывал вопросы теории пластин, теории колебаний, гидродинамики. Автор работы «Трактат о математической теории упругости», в котором рассмотрены условия равновесия и устойчивости упругих пластинок, оболочек и твердых тел. Развил строгую теорию пластин.

МАКССВЕЛЛ ДЖЕЙМС КЛЕРК (1831-1879), английский физик и механик. Окончил Эдинбургский и Кембриджский университеты. В 1854-1856 работал в Кембриджском университете, в 1856-1860 - профессор Абердинского, в 1860-1865 - Лондонского, а в 1871-1879 - Кембриджского университетов.

Основные исследования выполнены в области математической физики, механики. Ряд работ посвящен теории упругости. Вывел уравнения равновесия изотропных тел, применив упругие посто-



янные. Для проверки полученных данных впервые ввел метод фотоупругости, разработав при этом технику оптического метода анализа напряжений в поляризованном свете. Разработал общую теорию диаграмм напряжений для трехмерных систем напряжений. Показал, что общее уравнений упругости может быть выражено с помощью трех функций напряжений. Получил уравнение, позволяющее решить некоторые статически неопределимые задачи.

**МИЧЕЛЛ ДЖОН ГЕНРИ** (1863-1940), австралийский математик и механик. Окончил Мельбурнский и Кембриджский университеты. С 1890 работал в Мельбурнском университете.

Работы в области математики, физики, гидравлики и теории упругости. В теории упругости установил дифференциальные зависимости между составляющими напряжения. Дал решение двумерной задачи теории упругости.

**МОР ХРИСТИАН ОТТО** (1835-1918), немецкий ученый в области механики. Окончил Политехническую школу в Ганновере. В 1856-1866 работал инженером железных дорог, в 1867-1873 - профессор Штутгартского, в 1873-1899 - Дрезденского политехнических институтов.

Развивал методы графостатики, Предложил графический метод построения упругой линии в простых и неразрезных балках, Разработал метод расчета неразрезных балок с помощью уравнения трех моментов. Создал теорию прочности (теорию Мора), разработал графический метод определения напряжений при сложном напряженном состоянии (круг Мора). Создал теорию расчета статически неопределимых систем методом сил, дал обобщение формулы Максвелла (формула Мора-Максвелла).

**НАВЬЕ ЛУИ МАРИ АНРИ** (1785-1836), французский ученый в области математики и механики, один из основоположников теории упругости. Окончил в Париже Политехническую школу и Школу мостов и дорог. С 1819 работал в Школе мостов и дорог, 1831 - в Политехнической школе.

В работе «Трактат о построении мостов» изложил теорию изгиба призматического бруса. В 1820 опубликовал мемуар об изгибе пластинок, в 1821 - работу, в которой сформулировал основные уравнения математической теории упругости. Сформулировал уравнение, получившее название уравнений Навье-Стокса. Разработал метод расчета висячих мостов. Опубликовал (1826) первый курс сопротивления материалов. Занимался практическим мостостроением.

**ОСТРОГРАДСКИЙ МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ** (1801-1862), русский механик и математик. Учился в Харьковском университете, в 1822-1827 слушал математические курсы на Парижском факультете наук и в Коллеж де Франс. С 1828 работал в Петербурге: в Морском кадетском корпусе, Институте путей сообщения, Главном педагогическом институте, Главном инженерном училище, Главном артиллерийском училище.

Работы относятся к аналитической механике, гидромеханике, теории упругости, небесной механике, математической физике, математическому анализу и теории дифференциальных уравнений. Исследовал малые колебания упругих тел. Имя Остроградского носит разработанный им метод выделения рациональной части неопределенного интеграла. Формула Грина-Остроградского выражает преобразование интеграла, взятого по объему, ограниченной некоторой поверхностью, в интеграл, взятый по этой поверхности. Создал русскую школу прикладной механики.

**ПАПКОВИЧ ПЕТР ФЕДОРОВИЧ** (1887-1946), русский ученый в области строительной механики. Родился в Брест-Литовске. Окончил Петербургский политехнический институт. Работал в Петрограде (Ленинграде): политехническом институте, кораблестроительном институте, Военно-морской академии.

В теории упругости развил экспериментальные методы, упростил предложенное Ж.В. Буссинеком решение дифференциальных уравнений теории упругости, исследовал устойчивость упругих систем.

ПУАССОН СИМЕОН ДЕНИ (1781-1840), французский математик, механик и физик, один из основоположников математической физики. Окончил Политехническую школу в Париже. С 1802 - экзаменатор, с 1806 - профессор Политехнической школы. С 1812 - член Бюро долгот, с 1816 - профессор Парижского факультета наук, с 1820 - наблюдатель за преподаванием математики во всех колледжах Франции.

Работы посвящены теории рядов Фурье, теории неопределенных интегралов, вариационному исчислению, теории вероятностей, математической физике, теоретической механике. Обобщил уравнение теории упругости на анизотропные тела, решил ряд задач теории упругости, ввел коэффициент, учитывающий свойства материала упругого тела (коэффициент Пуассона). Написал "Курс механики" (1811), многократно переиздававшийся.

РИТЦ ВАЛЬТЕР (1878-1909), швейцарский физик и математик. Учился в Цюрихском и Геттингенском университетах.

Основные исследования относятся к решению вариационных задач теоретической физики. Предложил "прямой" метод приближенного решения вариационных задач (метод Ритца), который нашел широкое применение в теории колебаний, теории упругости, строительной механике.

СЕН-ВЕНАН (БАРРЕ ДЕ СЕН-ВЕНАН) АДЕМАР ЖАН КЛО (1797-1886), французский ученый в области механики и математики. Учился в Политехнической школе (Париж). Работал в управлении мостов и дорог, инженером на строительстве каналов. С 1837 - профессор Школы мостов и дорог (Париж) и одновременно в 1850-1852 - профессор Агротехнического института (Версаль).

Основные исследования относятся к механике твердого тела, теории упругости, гидростатике, гидродинамике и векторному исчислению. Один из создателей современной теории упругости. Предложил полуобратный метод решения задач теории упругости. Ввел названный его именем принцип (принцип Сен-Венана), развил теорию изгиба балки, основываясь на гипотезе плоских сечений. Развил математическую теорию кручения.

ТИМОШЕНКО СТЕПАН ПРОКОФЬЕВИЧ (1878-1972), ученый в области механики. Окончил Петербургский институт инженеров путей сообщения. В 1903-1906 работал там же; в 1907-1911 и 1917-1920 - в Киевском политехническом институте; в 1912-1917 - профессор политехнического, электротехнического институтов и института инженеров путей сообщения в Петербурге; в 1919-1920 - директор Института технической механики Украинской Академии наук. В 1920-1922 - профессор Загребского политехнического института (Югославия). В 1922-1960 жил и работал в США, в 1923-1927 - научный консультант компании "Вестингауз", в 1927-1936 - профессор Мичиганского, в 1936-1960 - Стэнфордского университетов. С 1960 жил в ФРГ.

Основные работы относятся к механике твердых деформируемых тел, строительной механике, сопротивлению материалов, теории упругости, теории сооружений. Исследовал изгиб, кручение, колебания и удар стержней, разрабатывал теорию тонких пластин и оболочек. Развил теорию устойчивости упругих систем, разработал эффективные вариационные методы теории упругости. Написал ряд учебников и монографий, переведенных на многие языки. Основал в США научную школу в области механики упругого тела. Член многих Академий наук.

ФАЙЛОН ЛУИС НАПОЛЕОН ДЖОРДЖ (1875-1937), английский ученый в области механики. Учился в Университетском колледже в Лондоне и в Королевском колледже Кембриджского университета. С 1903 преподавал в Лондонском университете, в 1929-1937 - директор Лондонской университетской обсерватории.

Основные работы посвящены классической механике и механике непрерывных сред. Разрабатывал теорию рядов и применение математических методов в теории упругости. Изучал вопросы упругого равновесия и теорию обобщенного плоского состояния.

ЭЙЛЕР ЛЕОНАРД (1707-1783), математик, механик, физик, астроном. Окончил Базельский университет (Швейцария). В 1726 был приглашен в Петербургскую Академию наук. С 1726 - адъюнкт физиологии, позднее - математики, с 1731 - профессор физики и теоретической механики. В 1741 переехал в Берлин, где прожил 25 лет. В 1744 - директор Математического класса Берлинской Академии наук. В 1766 возвратился в Петербург.

Научные интересы Эйлера относились ко всем основным областям естествознания, к которым можно было применить математические методы. Заложил основы математической физики, механики твердого тела, издал ряд монографий по теории чисел, навигации, гидродинамике, гидравлике и др. Список трудов Л. Эйлера содержит около 850 названий, в их числе ряд многотомных монографий.

ЮНГ ТОМАС (1773-1829), английский ученый. В 1787-1792 был домашним учителем. В 1792-1796 изучал медицину в Лондонском, Эдинбургском, Геттингенском университетах. В 1797-1798 изучал математику и физику в Кембриджском университете. В 1802-1803 - профессор натуральной философии в Лондонском Королевском институте, в 1811-1829 - врач в больнице св. Георгия в Лондоне, с 1818 - секретарь Бюро долгот.

Исследования относятся к различным вопросам физики, химии, физиологии, медицины, астрономии, геофизики, механики, техники, филологии. При исследовании растяжения и сжатия впервые ввел понятие модуля упругости (модуль Юнга). Обратил внимание на то, что закон Гука сохраняет свое значение лишь до известных пределов. Разработал теорию изгиба консольной и прямой балок, исследовал упругую и неупругую деформацию. Является одним из основоположников науки о сопротивлении материалов.

ЯСИНСКИЙ ФЕЛИКС СТАНИСЛАВОВИЧ (1856-1899), русский инженер и ученый в области строительной механики и теории упругости. Окончил Петербургский институт инженеров путей сообщения. Работал на Петербургско-Варшавской железной дороге и городским инженером Вильно, в Петербургском управлении той же железной дороги, начальником технического отдела Петербурго-Московской железной дороги, с 1896 - профессор Петербургского института инженеров путей сообщения, преподавал в Горном институте и Институте гражданских инженеров.

Один из основоположников инженерных методов расчета на устойчивость. Его труды оказали существенное влияние на дальнейшие исследования по теории устойчивости.

## Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М: Высшая школа, 1990.-400с.
2. Александров А.В. и др. Сопротивление материалов- М: Высшая школа, 2000.-560с.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.- М: Высшая школа, 1986.- 512с.
4. Ван цзи-де Прикладная теория упругости.-М.:ГИФМЛ, 1959.-400с.
5. Жемочкин Б.Н. Теория упругости.- М: Гостройиздат, 1957.-315с.
6. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности.- М: Высшая школа. 1990.-368с.
7. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек.- М: Высшая школа 1987.-297с.
8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела.-М. Наука, 1988.-712с.
9. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности.- М: Высшая школа 1982.-264с.
10. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости.-М.: Гостехиздат, 1997.-300с.

## Содержание.

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. Объёмное напряжённое состояние. Основные соотношения. Постановка задач. ....	6
1.1 Нагрузки и напряжения. ....	6
1.2 Дифференциальные уравнения равновесия.....	7
1.3 Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности. ....	8
1.4 Исследование напряженного состояния в точке тел а. ....	9
1.5 Составляющие перемещений и составляющие деформаций. Зависимость между ними. ....	11
1.6. Уравнения совместности деформаций Сен-Венана.....	13
1.7. Обобщенный закон Гука. ....	15
1.8. Потенциальная энергия деформаций. ....	18
1.9 Система основных уравнений теории упругости.....	19
1.10 Решение задач теории упругости в перемещениях.....	21
1.11. Решение задач теории упругости в напряжениях. ....	22
1.12 Теорема о единственности решения. ....	24
ГЛАВА 2. Плоское напряженное состояние. Основные соотношения. Постановка задач, их решение...26	
2.1 Плоская задача в прямоугольной системе координат. ....	26
2.1.1 Плоская деформация. ....	26
2.1.2 Плоское напряженное состояние. ....	28
2.1.3 Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений Эри. ....	28
2.1.3.1 Частные решения плоской задачи с помощью функции напряжений. ....	30
2.1.4. Решение плоской задачи с помощью тригонометрических рядов. ....	40
2.1.5. Решение плоской задачи методом конечных разностей. ....	41
2.2 Плоская задача в полярной системе координат. Основные соотношения. ....	47
2.2.1. Осесимметричные задачи. ....	50
2.2.1.1. Задача Ляме.....	51
2.2.1.2. Задача Х.С. Головина.....	53
2.2.1.3. Клинь, нагруженный в вершине сосредоточенной силой.....	55
2.2.1.4. Клинь, нагруженный в вершине силой F, перпендикулярной к оси (изгиб клина).....	58
2.2.1.5. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость (задача Фламана). ....	58
2.2.1.6. Напряжения в круглом диске, сжатом по диаметру (задача Герца).....	62
ГЛАВА 3. Прикладные задачи теории упругости. ....	65
3.1 Кручение призматических стержней. ....	65
3.1.1 Мембранная аналогия.....	68
3.1.2 Кручение стержня прямоугольного сечения. ....	69
3.2 Расчет пластин.....	71
3.2.1 Основные понятия и гипотезы. ....	71
3.2.2 Перемещения и деформации в пластинах и их выражение через прогибы. ....	73
3.2.3 Напряжения в пластине. ....	73
3.2.4 Внутренние усилия в пластинах. ....	77
3.2.4.1 Выражение напряжений через внутренние усилия. ....	80

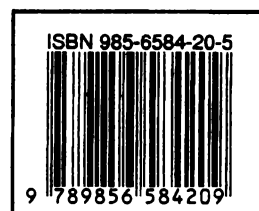
3.2.5 Дифференциальное уравнение изгиба пластины.....	81
3.2.6 Граничные условия на контуре пластины.....	83
3.2.7 Прямоугольные пластины.....	85
3.2.7.1 Расчет прямоугольных пластин с помощью двойных тригонометрических рядов.....	85
3.2.7.2 Расчет прямоугольных пластин с помощью одинарных тригонометрических рядов (задача М. Леви).....	89
3.2.7.3 Пластина на упругом основании.....	91
3.2.8. Круглые пластины.....	92
3.2.8.1. Осесимметричный изгиб круглых пластин.....	94
3.2.9 Расчет пластин с помощью вариационных методов.....	99
3.3 Основы расчета тонких оболочек.....	103
3.3.1 Деформации, напряжения и внутренние усилия в тонких оболочках.....	106
3.3.2 Особенности расчета оболочки произвольной формы по безмоментной теории.....	110
3.3.2.1 О краевом эффекте.....	113
3.3.2.2 Уравнение безмоментной теории оболочек вращения.....	113
3.3.3 Пологие оболочки.....	118
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	125
ПРИМЕР 1. “Расчет неразрезной балки-стенки”.....	126
ПРИМЕР 2. Расчет упругой прямоугольной в плане пластины на поперечную нагрузку.....	130
ПРИМЕР 3. Расчет купола (оболочки вращения).....	135
УЧЕТ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА.....	139
УСИЛИЯ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА.....	141
Ученые в области механики деформированного твердого тела.....	142
ЛИТЕРАТУРА.....	148

Учебное издание

**Рочняк О.А.**, **Фёдоров В.Г.**, **Хвисевич В.М.**

## **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.**

Учебное пособие для студентов строительных специальностей высших учебных заведений.



Редактор  
Технический редактор  
Компьютерная вёрстка и дизайн

Т.В. Строкач  
А.Д. Никитчик  
А.А. Паук  
Н.В. Ефимова

Издательство Брестского государственного технического университета (лицензия ЛВ № 382 от 01.03.2000 г.) Брест, ул. Московская, 267

---

Подписано в печать 10.01.2001г. Формат 60×84/8. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times. Уч. изд. л. 18,9. Усл. печ. л. 17,6. Заказ № 34. Тираж 300 экз. Отпечатано на ризографе Брестского государственного технического университета. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.