

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рабочая тетрадь

студента _____

группы _____

Брест 2024

УДК 519.852 (076)

Рабочая тетрадь предназначена для подготовки студентов к выполнению аттестационных и контрольных работ. В первой части приведены варианты заданий по таким разделам математического программирования, как линейное программирование, включая транспортную задачу, и программирование на сетях и графах, изучаемым студентами экономических специальностей дневной и заочной форм обучения на втором курсе. Во второй части приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Составители: Юхимук Т. Ю., старший преподаватель;
Юхимук М. М., старший преподаватель;
Махнист Л. П., к. т. н., доцент

Рецензент: Басик А. И., доцент кафедры фундаментальной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина», к. ф.-м. н.

I. Практические задания

№ 1. Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y .

1. $Z = x + 2y$

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 2x - 3y \leq 10, \\ 3x + 8y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

2. $Z = x - 4y$

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 39, \\ x + 9y \geq 18, \\ x - 3y \geq -9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

3. $Z = -2x - 4y$

$$\begin{cases} 3x - 5y \geq -10, \\ 4x - y \leq 15, \\ x + 4y \geq 8, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

4. $Z = -3x + 2y$

$$\begin{cases} 3x + 8y \geq 32, \\ -x + 2y \leq 12, \\ 7x + 4y \leq 60, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

5. $Z = 2x + 7y$

$$\begin{cases} 5x - y \geq 5, \\ 4x - y \leq 24, \\ -3x + 8y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

6. $Z = x + 3y$

$$\begin{cases} 3x - 5y \leq 12, \\ x + 2y \leq 15, \\ 7x + 3y \geq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

7. $Z = 2x - 4y$

$$\begin{cases} 4x + y \leq 32, \\ -x + 6y \leq 42, \\ 5x + 6y \geq 30, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

8. $Z = -3x - 3y$

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6, \\ 3x - y \leq 21, \\ -x + 3y \leq 9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

9. $Z = 4x - 2y$

$$\begin{cases} 5x - 6y \geq -18, \\ x + y \leq 14, \\ x - y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

10. $Z = -x - 2y$

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 3x - y \leq 15, \\ -x + 7y \leq 35, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

11. $Z = 6x + 5y$

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 2, \\ 3x + 7y \leq 49, \\ 5x + y \geq 5, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

12. $Z = -3x + 6y$

$$\begin{cases} 7x - 3y \geq 14, \\ x - y \leq 6, \\ 5x + 3y \leq 46, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

13. $Z = 3x - 2y$

$$\begin{cases} -3x + 5y \leq 20, \\ 5x + 2y \leq 39, \\ 2x + 7y \geq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

14. $Z = 2x + y$

$$\begin{cases} x + y \geq 3, \\ 4x + 7y \leq 49, \\ 3x - 4y \leq 9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

15. $Z = x - 4y$

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ 3x - 10y \geq -10, \\ 4x - 3y \leq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

16. $Z = 4x + 2y$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4, \\ 7x + 2y \leq 70, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

17. $Z = -x - 5y$

$$\begin{cases} x + 3y \geq 4, \\ 3x + 2y \leq 24, \\ 5x - 3y \geq 2, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

18. $Z = -4x + 3y$

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6, \\ x - y \leq 3, \\ 3x - 8y \geq -21, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

19. $Z = 2x - 3y$

$$\begin{cases} 3x + 8y \geq 35, \\ -4x + 5y \leq 16, \\ 7x + 3y \leq 66, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

20. $Z = -5x - 3y$

$$\begin{cases} 3x + 5y \geq 15, \\ 3x - 2y \leq 15, \\ 2x + 9y \leq 72, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

21. $Z = x - 3y$

$$\begin{cases} -2x + y \leq 4, \\ x + 3y \geq 6, \\ 3x + 4y \leq 27, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

22. $Z = 4x + y$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 12, \\ 5x + 4y \geq 20, \\ x + 2y \leq 14, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

23. $Z = -x - 5y$

$$\begin{cases} -3x + 5y \leq 9, \\ 5x + 2y \leq 47, \\ 2x + 7y \geq 25, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

24. $Z = x + 3y$

$$\begin{cases} x + 4y \geq 6, \\ 4x + y \geq 9, \\ 5x + 7y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

25. $Z = 4x + 2y$

$$\begin{cases} -3x + 4y \leq 2, \\ 4x - 3y \leq 16, \\ -2x + 5y \geq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

26. $Z = -3x + 2y$

$$\begin{cases} 6x - y \geq 6, \\ 2x + 3y \leq 22, \\ x - 2y \leq 4, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

27. $Z = 4x - 2y$

$$\begin{cases} -x + y \leq 2, \\ 2x - 3y \leq 10, \\ x + y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

28. $Z = x - 3y$

$$\begin{cases} x - 2y \leq 2, \\ x + 8y \leq 32, \\ x + 2y \geq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

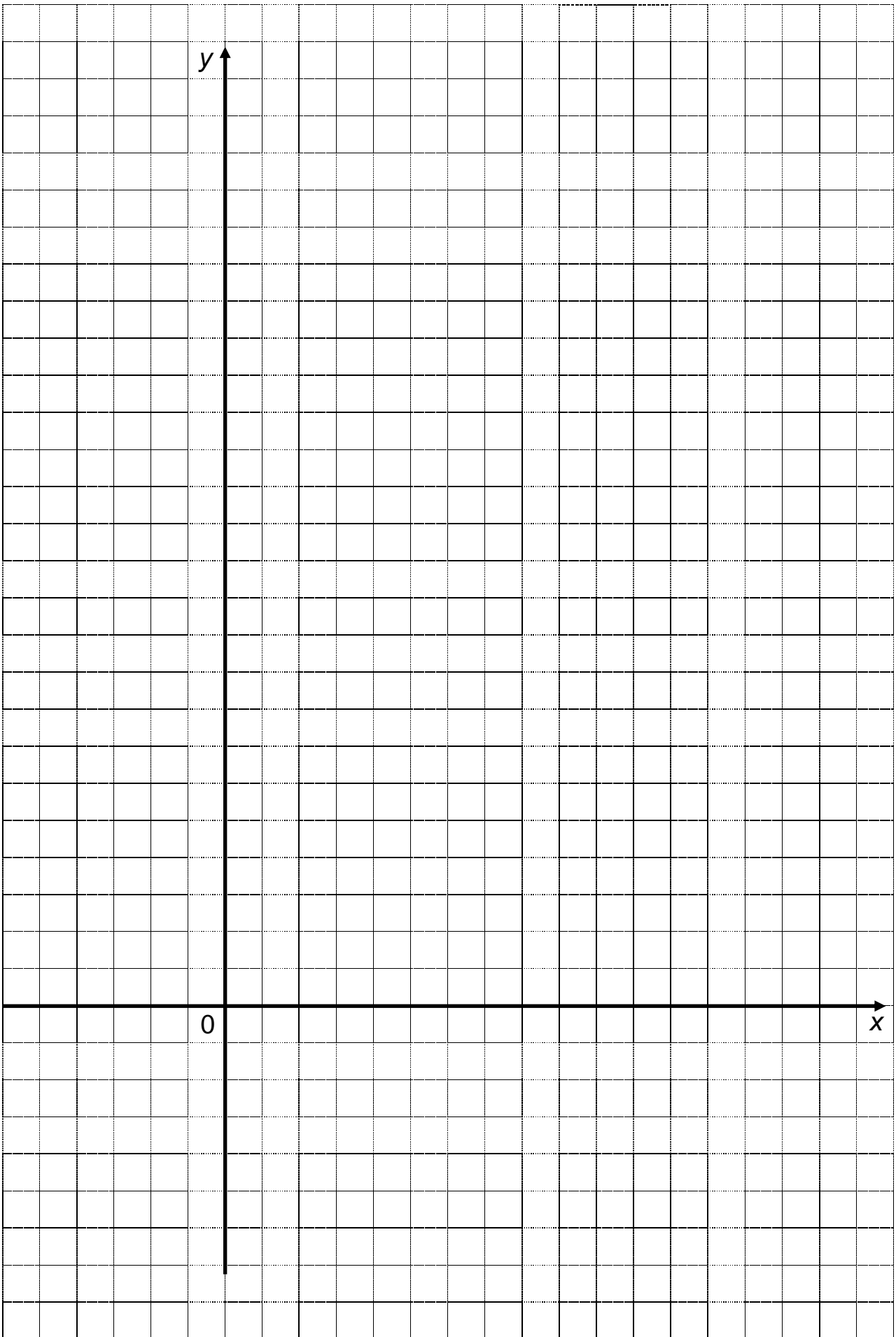
29. $Z = 3x + y$

$$\begin{cases} x - y \leq 8, \\ 2x + 9y \leq 49, \\ 5x + 6y \geq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

30. $Z = 4x + 2y$

$$\begin{cases} 7x - 3y \geq 7, \\ 4x - 3y \leq 20, \\ 3x + 4y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

		Решение																	
	l_1 :																	x	
																		y	
	l_2 :																	x	
																		y	
	l_3 :																	x	
																		y	



№ 2. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

1. $\max Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. $\min Z = -2x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 27, \\ 3x_1 - x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. $\max Z = -x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. $\min Z = x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ 3x_1 + x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. $\min Z = -x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 63, \\ 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9. $\max Z = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10. $\min Z = -5x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 \leq 49, \\ 4x_1 + x_2 \leq 37, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 25, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11. $\max Z = x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12. $\min Z = -2x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13. $\max Z = -x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 43, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14. $\min Z = -4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15. $\max Z = -3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 55, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16. $\min Z = 4x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17. $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 32, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 10x_2 \leq 50, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 26, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

№3. У поставщиков A_i имеется некоторая однородная продукция в количестве a_i , которую нужно перевезти потребителям B_j в количестве b_j по ценам c_{ij} денежных единиц за перевозку единицы продукции от A_i к B_j . Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки и полностью удовлетворяющий спрос потребителей. Начальный опорный план составить методом северо-западного угла.

1а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	7	3	1	200
A_2	5	6	5	3	150
A_3	4	1	2	1	250
b_j	90	210	100	200	

16.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	5	5	70
A_2	3	7	2	75
A_3	1	4	8	55
b_j	50	80	70	

2а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	1	3	1	150
A_2	4	5	4	3	170
A_3	2	1	6	3	180
b_j	40	160	150	150	

26.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	8	4	3	85
A_2	1	7	5	45
A_3	2	4	3	60
b_j	40	80	70	

3а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	8	5	1	140
A_2	2	5	3	2	160
A_3	1	3	5	1	200
b_j	100	90	120	190	

36.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	2	1	120
A_2	2	4	5	80
A_3	1	4	7	65
b_j	100	80	85	

4а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	6	3	2	250
A_2	3	2	8	1	120
A_3	1	5	6	4	170
b_j	130	140	110	160	

46.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	5	1	120
A_2	1	6	3	125
A_3	2	3	8	105
b_j	100	130	120	

5а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	6	3	1	100
A_2	3	7	5	3	350
A_3	4	1	2	4	150
b_j	50	250	190	110	

56.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	4	1	85
A_2	1	6	2	65
A_3	2	1	7	90
b_j	60	55	125	

6a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	6	4	1	175
A_2	1	4	4	2	250
A_3	2	1	1	3	225
b_j	120	230	160	140	

66.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	4	1	50
A_2	1	3	2	75
A_3	2	2	4	85
b_j	35	85	90	

7a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	8	3	1	255
A_2	3	6	5	2	185
A_3	3	1	5	1	140
b_j	135	145	230	70	

76.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	7	8	6	80
A_2	4	6	5	70
A_3	2	5	7	60
b_j	40	90	80	

8a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	3	2	5	250
A_2	1	6	5	5	170
A_3	2	1	5	3	200
b_j	140	160	150	170	

86.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	8	5	75
A_2	2	7	2	95
A_3	1	4	3	80
b_j	60	90	100	

9a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	6	5	2	150
A_2	1	4	6	6	140
A_3	5	2	3	2	110
b_j	120	70	120	90	

96.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	2	2	65
A_2	1	4	3	80
A_3	3	2	4	75
b_j	55	85	80	

10a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	1	5	2	175
A_2	3	5	8	3	265
A_3	4	2	6	4	190
b_j	140	130	210	150	

106.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	5	2	95
A_2	1	7	2	75
A_3	1	2	6	90
b_j	80	55	125	

11a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	2	2	4	370
A_2	1	5	4	4	160
A_3	3	1	5	2	95
b_j	250	140	160	75	

116.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	2	65
A_2	2	7	3	90
A_3	3	2	8	85
b_j	35	100	105	

12a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	9	3	1	140
A_2	4	7	5	2	170
A_3	4	2	6	2	200
b_j	135	85	150	140	

126.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	7	5	95
A_2	3	5	4	100
A_3	1	4	6	80
b_j	65	100	110	

13a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	1	2	2	90
A_2	4	5	7	3	160
A_3	4	1	3	6	130
b_j	140	90	70	80	

136.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	5	2	100
A_2	1	7	2	85
A_3	1	2	6	115
b_j	120	55	125	

14a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	1	4	5	135
A_2	4	5	7	1	180
A_3	2	1	4	2	145
b_j	95	150	85	130	

146.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	4	2	110
A_2	1	8	1	75
A_3	3	2	2	85
b_j	60	120	90	

15a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	4	5	1	110
A_2	3	4	6	5	180
A_3	2	2	3	4	150
b_j	80	120	140	100	

156.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	3	2	170
A_2	3	1	1	145
A_3	1	2	3	205
b_j	160	140	220	

16a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	2	3	1	90
A_2	3	5	6	3	125
A_3	4	2	1	4	155
b_j	150	35	105	80	

166.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	4	75
A_2	2	7	1	125
A_3	1	2	3	90
b_j	130	60	100	

17a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	4	1	2	75
A_2	4	5	7	2	135
A_3	1	1	3	4	150
b_j	125	60	95	80	

176.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	1	2	95
A_2	2	4	6	125
A_3	2	1	5	80
b_j	120	55	125	

18a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	2	1	2	125
A_2	4	5	7	1	155
A_3	2	2	3	4	220
b_j	150	80	130	140	

186.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	2	3	85
A_2	1	3	6	95
A_3	2	1	4	120
b_j	120	55	125	

19a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	7	3	1	165
A_2	1	6	1	1	150
A_3	2	2	4	8	135
b_j	105	130	105	110	

196.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	8	2	95
A_2	3	5	1	80
A_3	1	2	6	85
b_j	85	75	100	

20a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	5	1	2	205
A_2	2	2	1	1	160
A_3	7	1	7	3	235
b_j	185	120	145	150	

206.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	8	7	1	125
A_2	2	3	2	105
A_3	1	3	6	100
b_j	90	110	130	

21a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	1	140
A_2	5	7	5	1	160
A_3	1	1	7	3	200
b_j	130	120	110	140	

216.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	3	1	75
A_2	2	6	2	95
A_3	1	3	5	80
b_j	65	80	105	

22a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	1	1	1	200
A_2	3	4	3	5	350
A_3	1	2	4	7	150
b_j	130	270	220	80	

226.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	2	45
A_2	1	4	3	75
A_3	1	2	7	90
b_j	35	75	100	

23a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	2	1	3	120
A_2	6	5	4	2	150
A_3	1	3	1	3	130
b_j	140	75	105	80	

236.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	4	75
A_2	2	7	1	125
A_3	1	2	3	90
b_j	130	60	100	

24a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	3	1	75
A_2	6	4	7	1	85
A_3	1	3	1	1	120
b_j	110	70	60	40	

246.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	5	3	85
A_2	1	6	3	80
A_3	1	2	8	135
b_j	50	160	90	

25a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	3	1	2	110
A_2	3	5	3	1	140
A_3	1	3	8	7	200
b_j	150	130	90	80	

256.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	7	1	65
A_2	2	6	1	75
A_3	1	8	5	90
b_j	40	120	70	

26a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	3	2	5	130
A_2	4	8	5	2	145
A_3	1	1	7	2	225
b_j	100	100	120	180	

266.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	5	2	60
A_2	2	5	3	80
A_3	1	1	4	90
b_j	50	80	100	

27a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	4	2	1	135
A_2	2	5	3	4	185
A_3	1	3	6	7	220
b_j	180	200	70	90	

276.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	8	3	95
A_2	2	6	2	125
A_3	1	7	4	150
b_j	70	180	120	

28a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	3	1	1	100
A_2	1	3	6	2	140
A_3	3	2	7	4	180
b_j	90	110	120	100	

286.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	2	110
A_2	1	9	1	120
A_3	2	4	6	70
b_j	80	120	100	

29a.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	8	1	3	160
A_2	1	9	1	2	210
A_3	2	1	4	3	230
b_j	100	300	120	80	

296.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	7	2	120
A_2	1	9	1	70
A_3	2	1	3	80
b_j	80	90	100	

30а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	7	1	3	220
A_2	1	9	3	2	180
A_3	2	6	4	5	270
b_j	150	270	160	90	

30б.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	2	1	50
A_2	3	7	1	70
A_3	2	1	8	90
b_j	40	60	110	

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					
A_2					
A_3					
b_j					

Решение

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					
A_2					
A_3					
b_j					

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^2	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^3	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^4	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

X^5	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1					
A_2					
A_3					
v_j					

$$X^* = X = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]; f_{\min} = f(X^*) = \dots$$

б)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1				
A_2				
A_3				
b_j				

Решение

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1				
A_2				
A_3				
b_j				

X^0	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

X^1	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

X^2	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

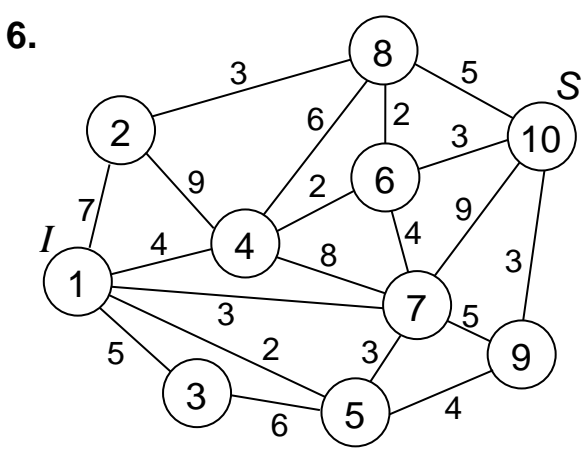
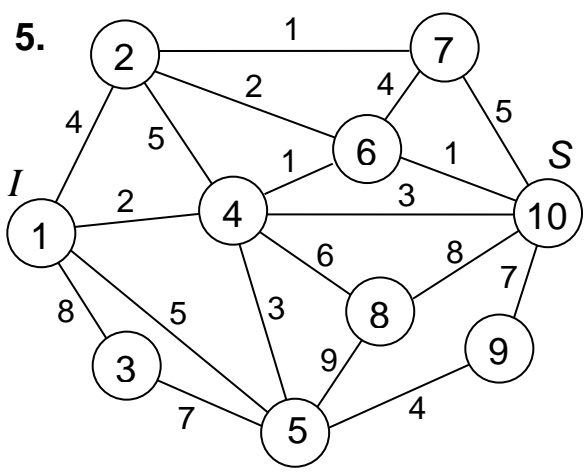
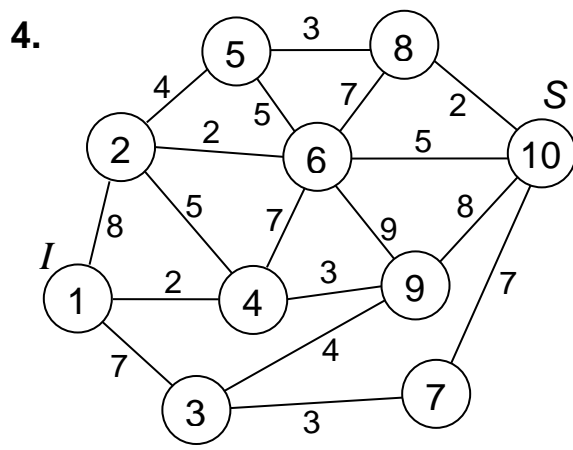
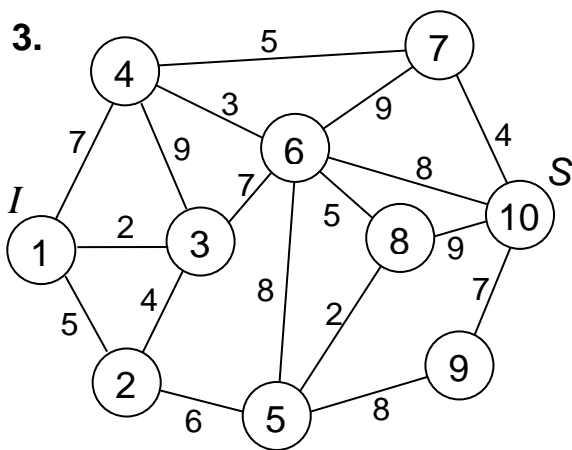
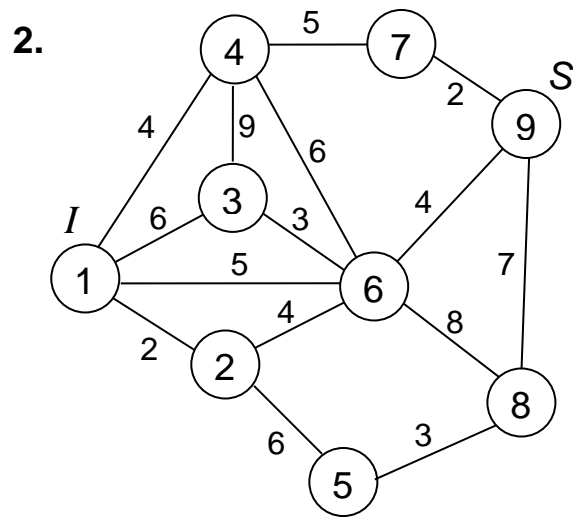
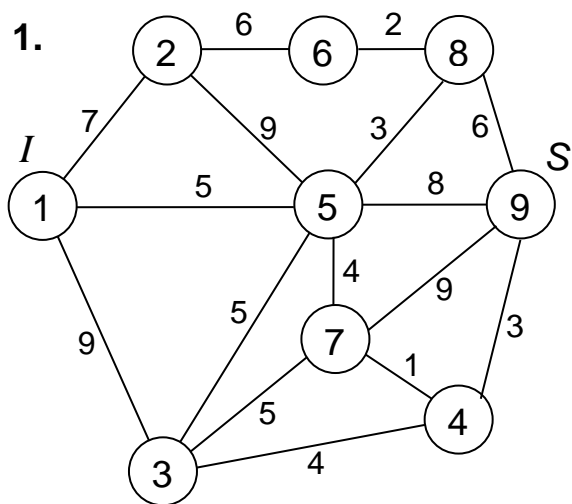
X^3	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

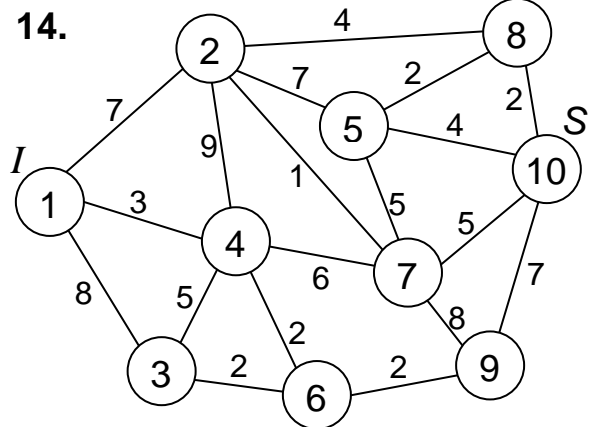
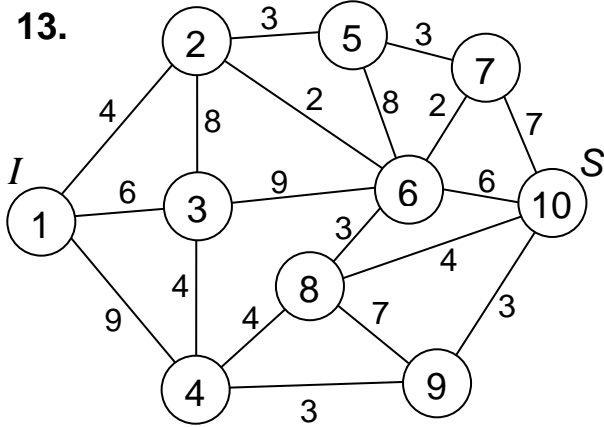
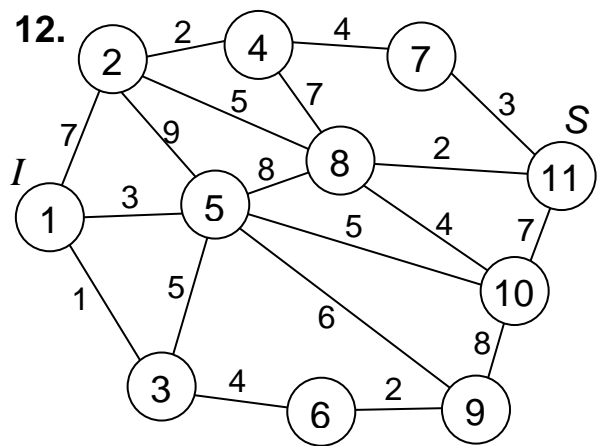
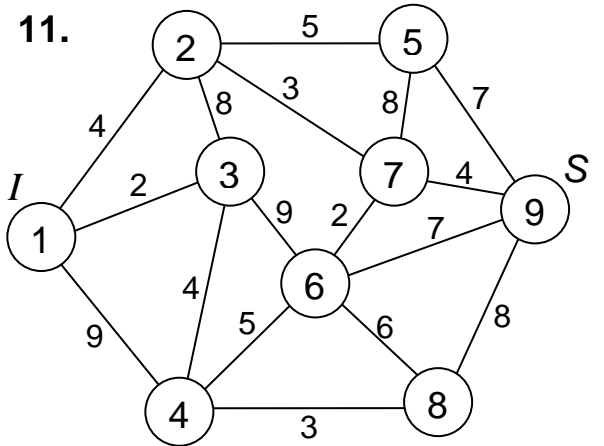
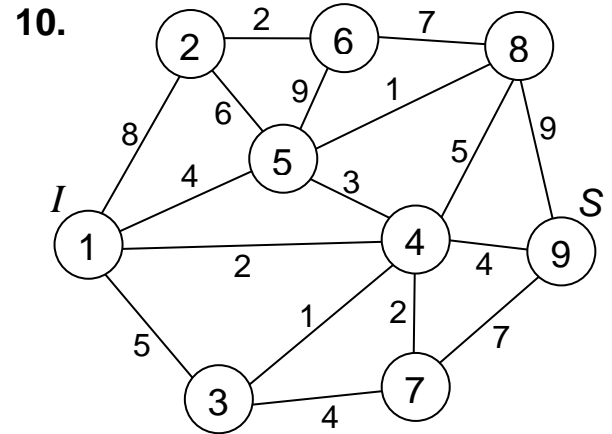
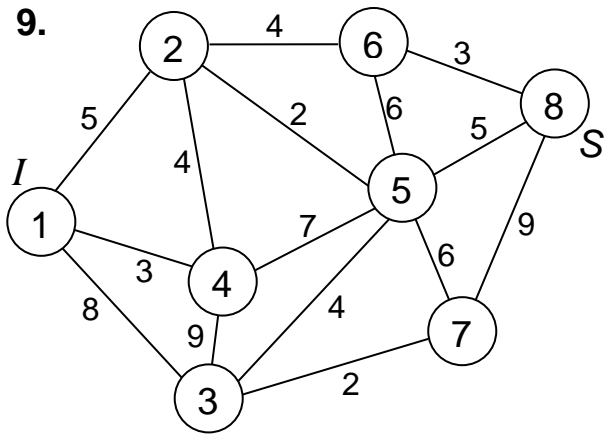
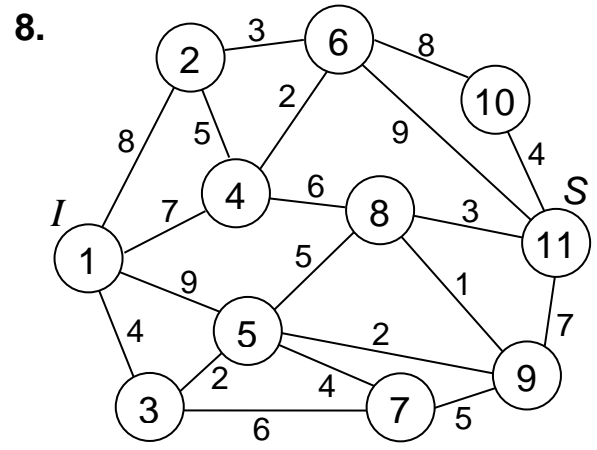
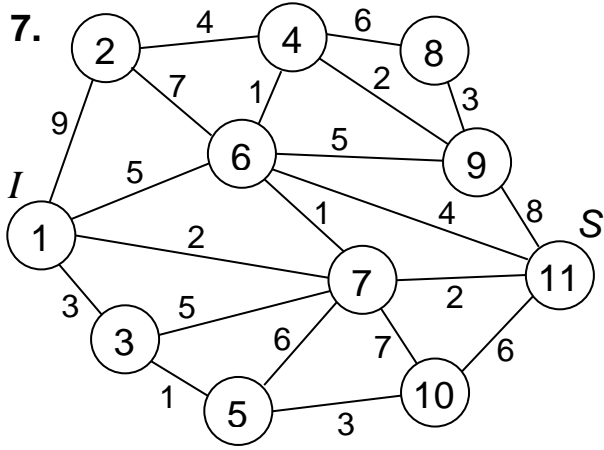
X^4	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

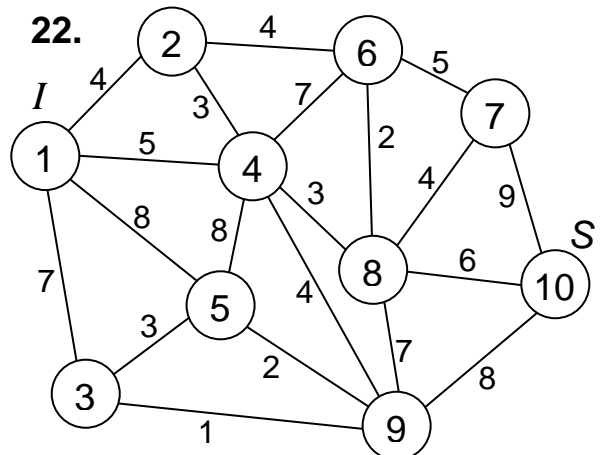
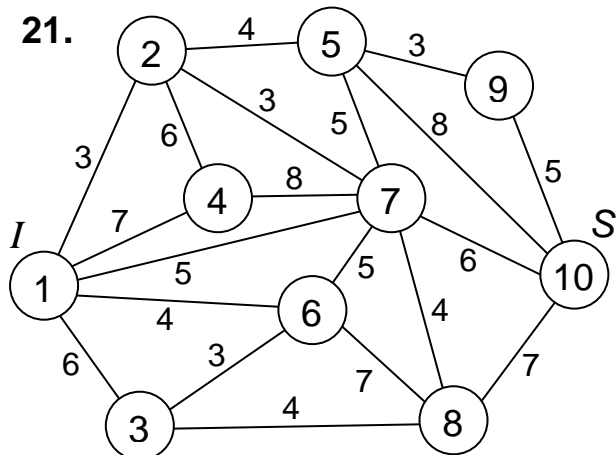
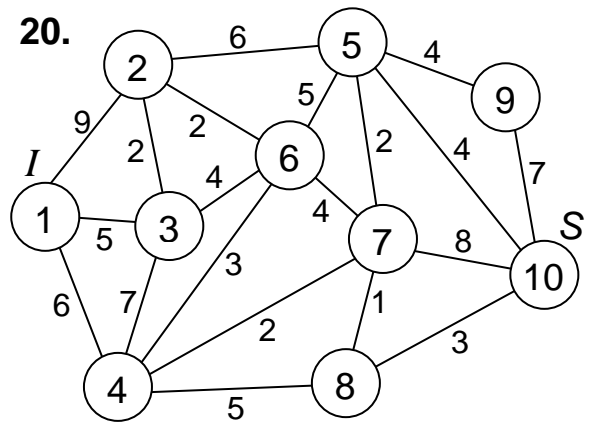
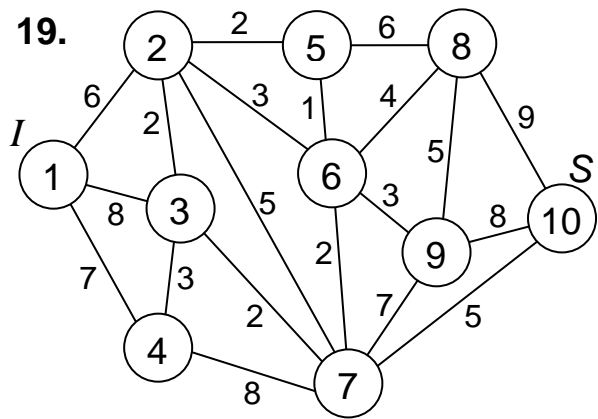
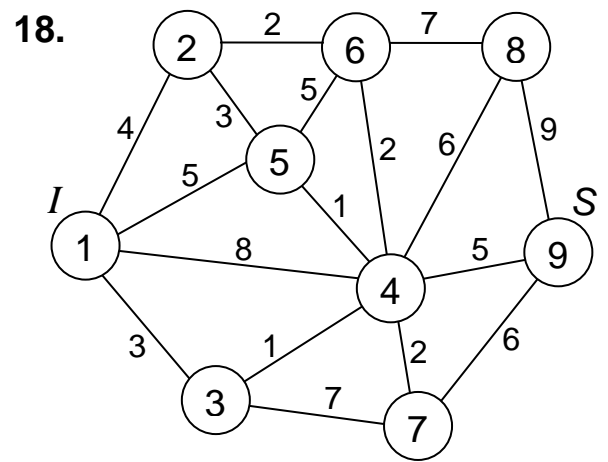
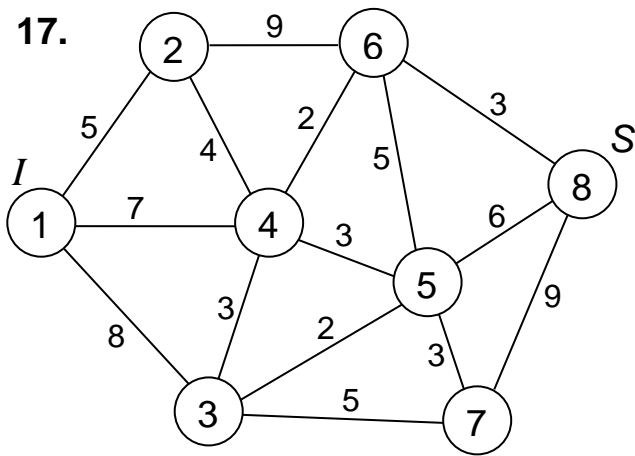
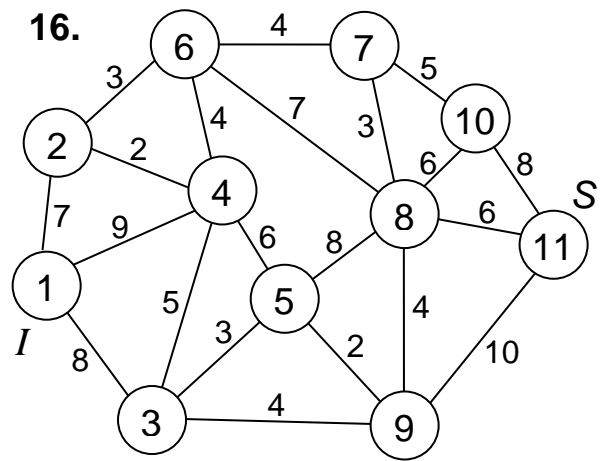
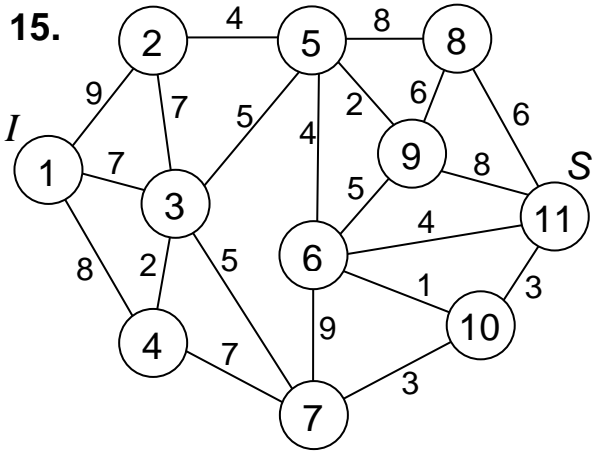
X^5	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1				
A_2				
A_3				
v_j				

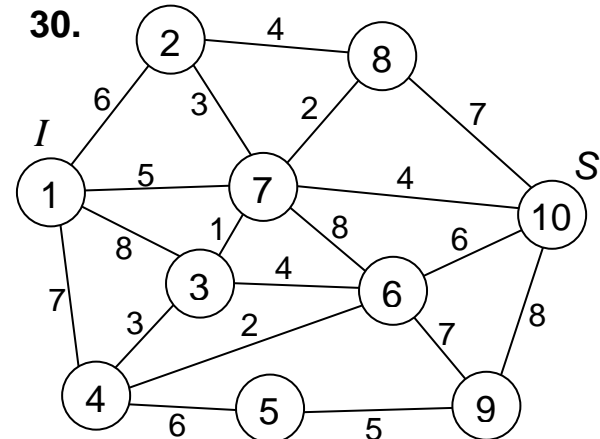
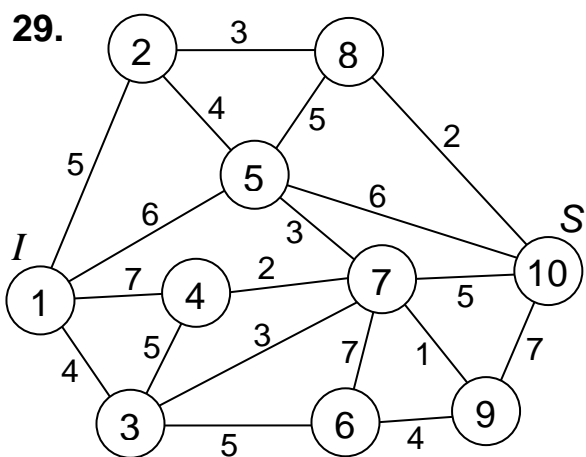
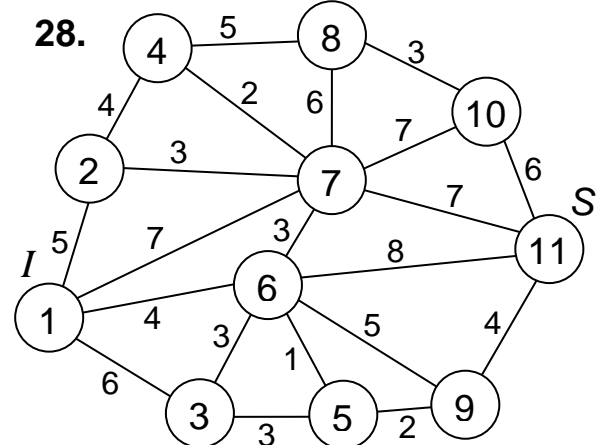
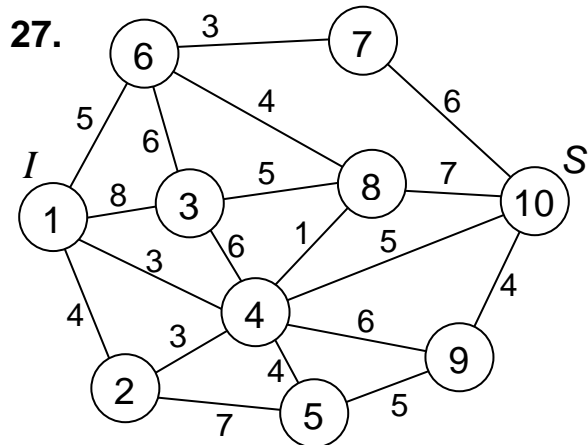
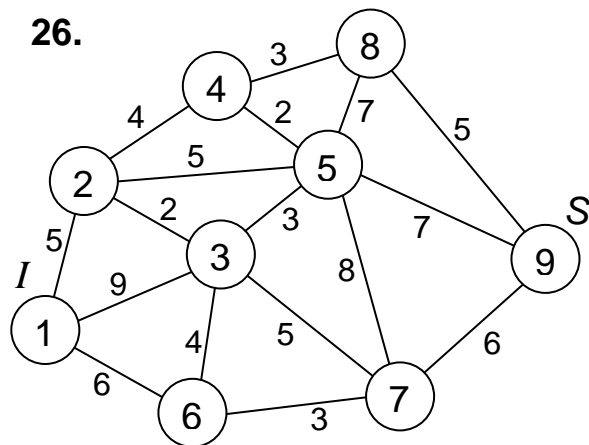
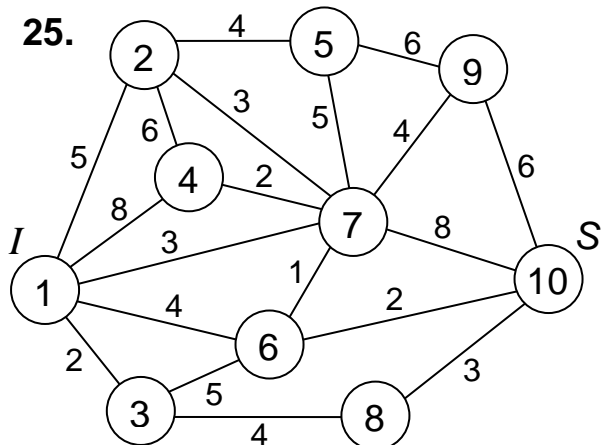
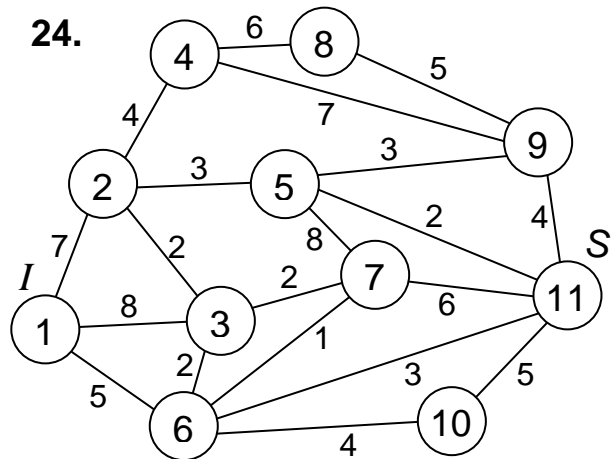
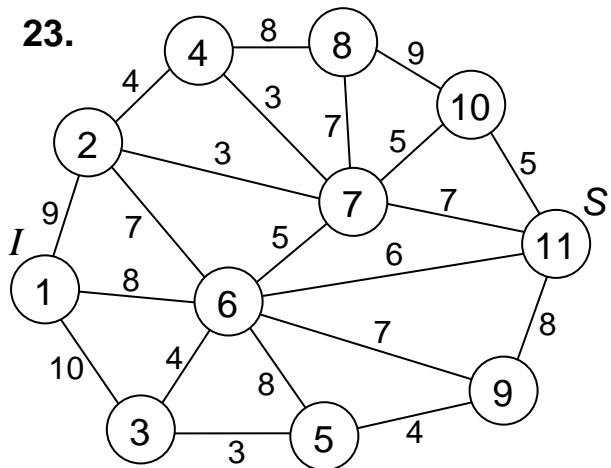
$$X^* = X = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]; f_{\min} = f(X^*) = \quad .$$

№ 4. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S . Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

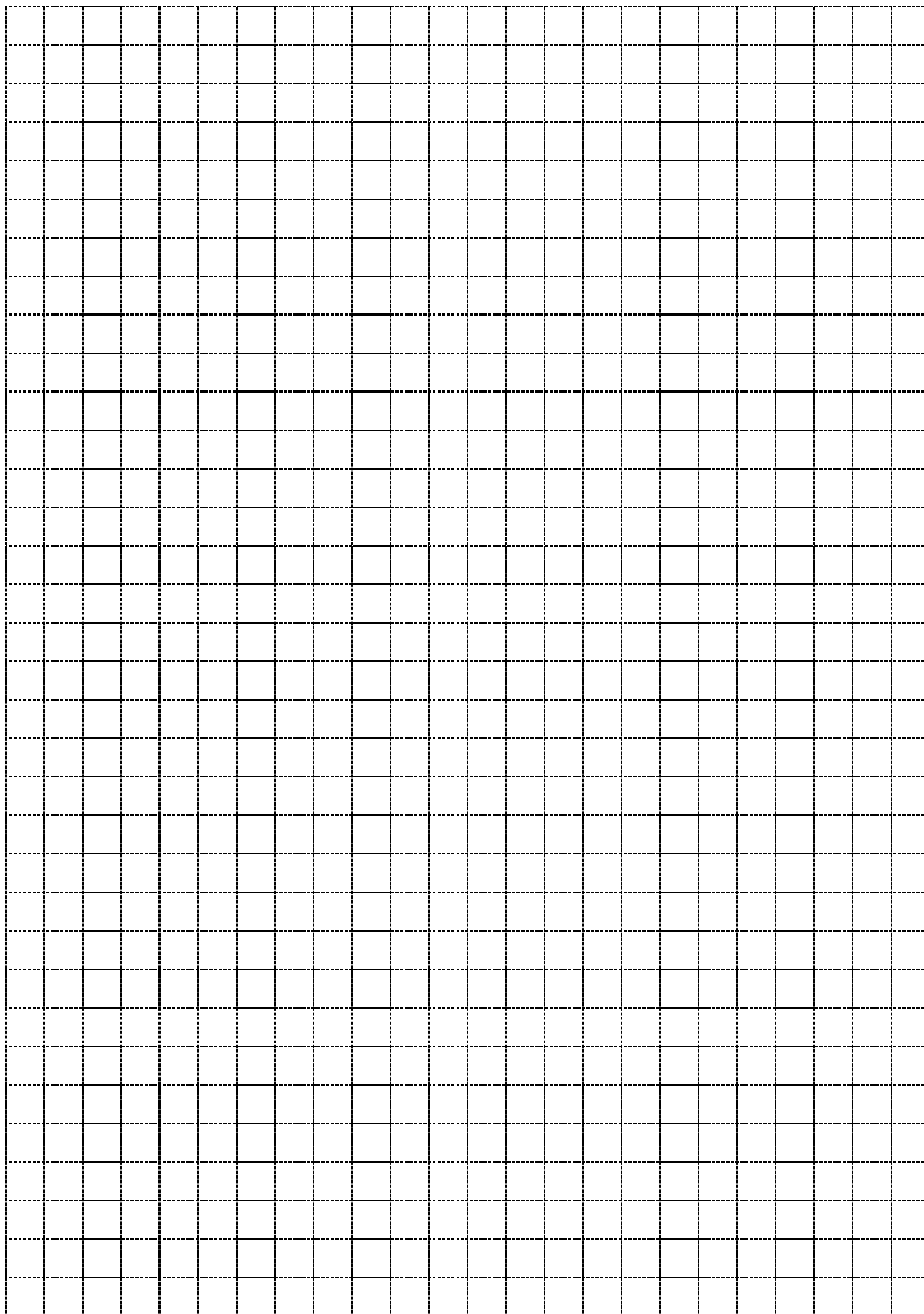


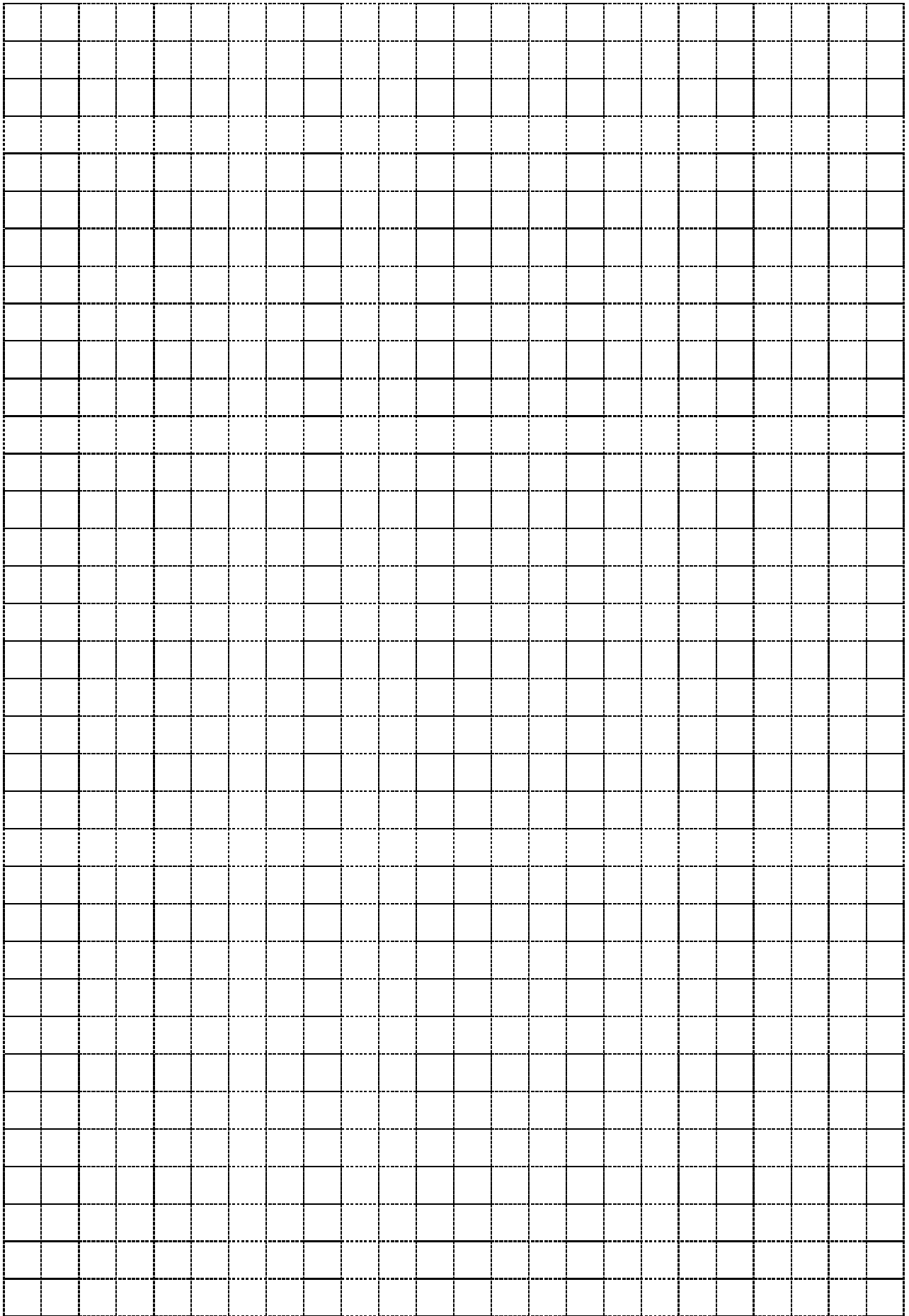


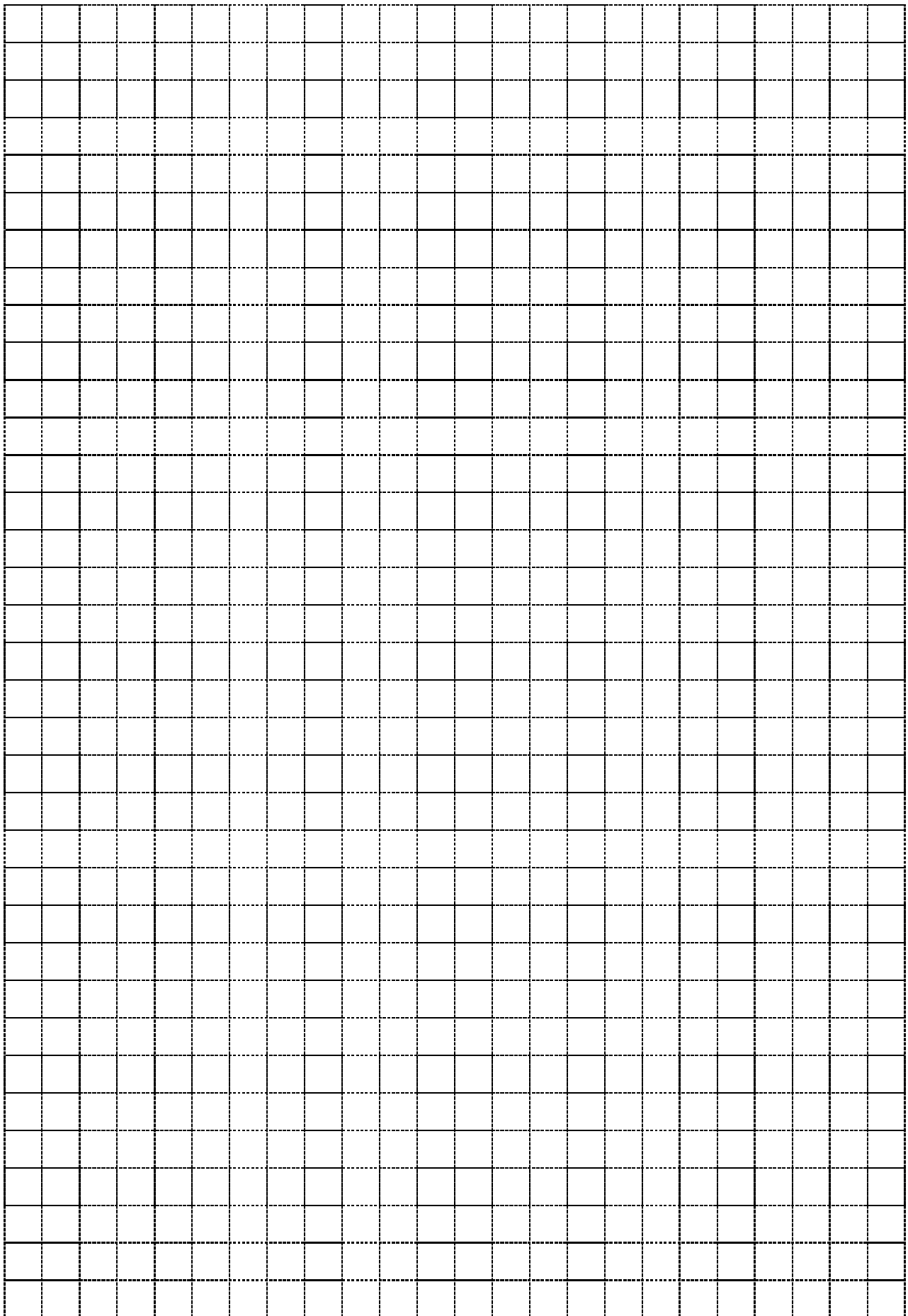




Решение

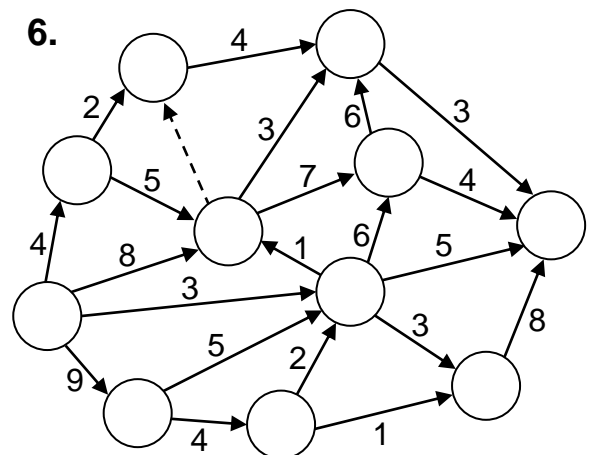
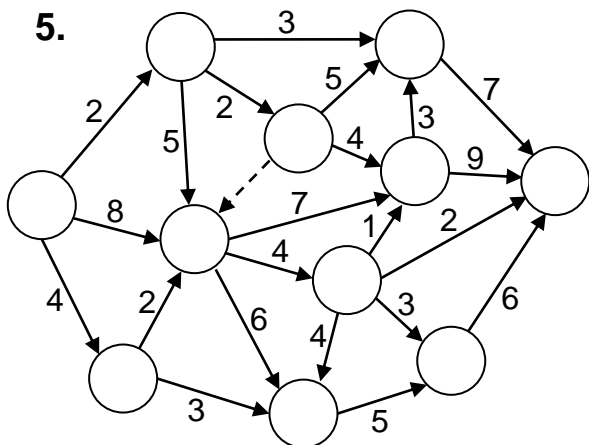
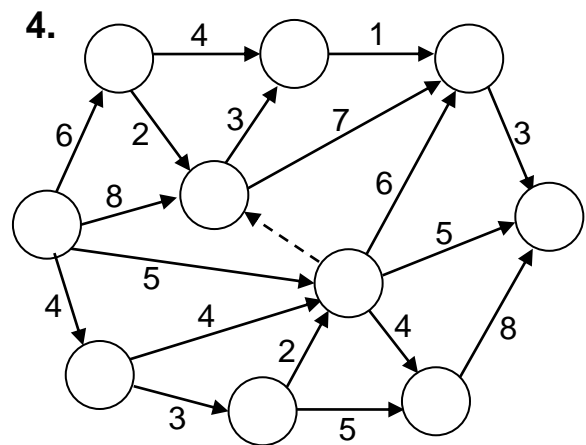
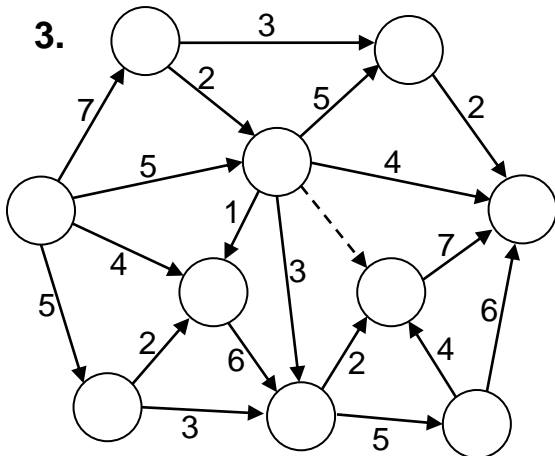
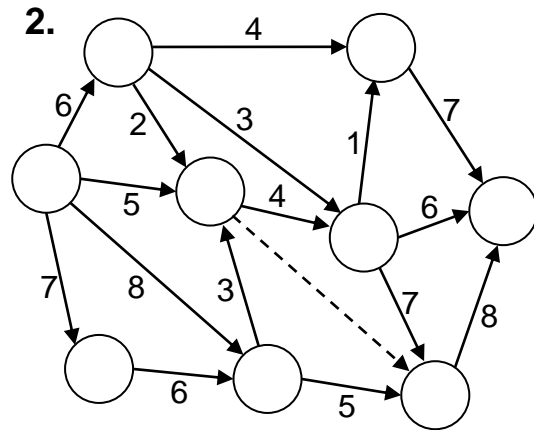
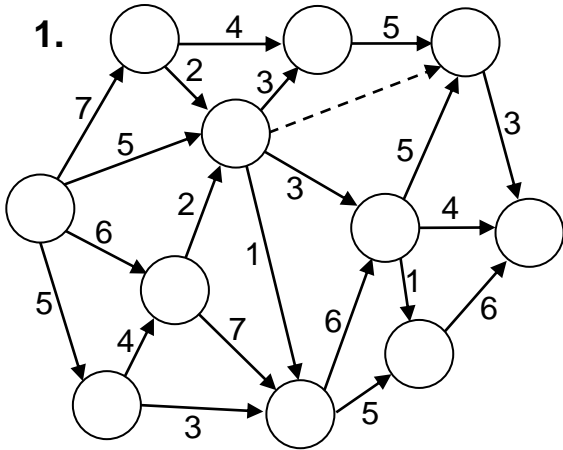


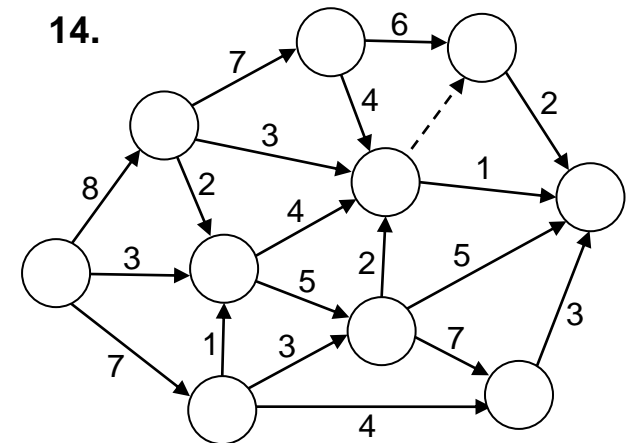
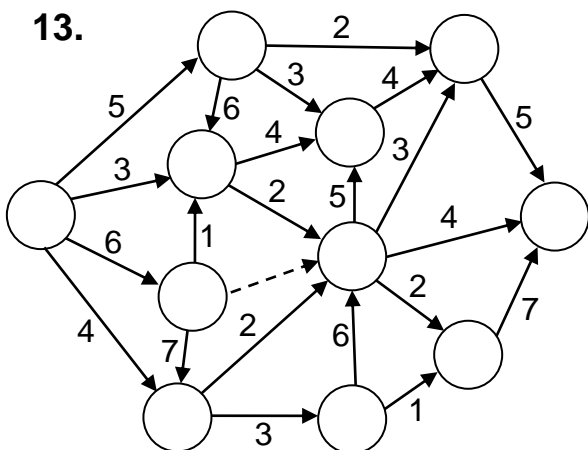
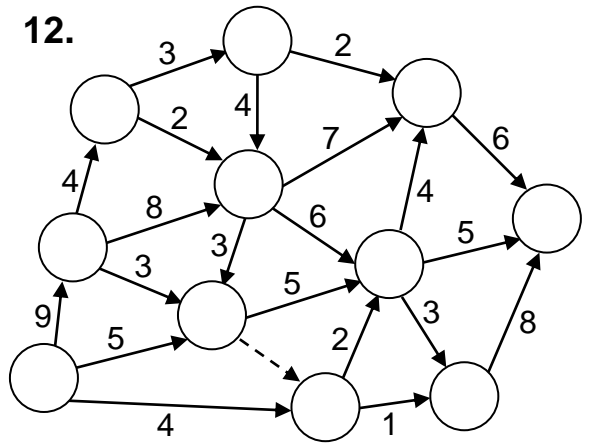
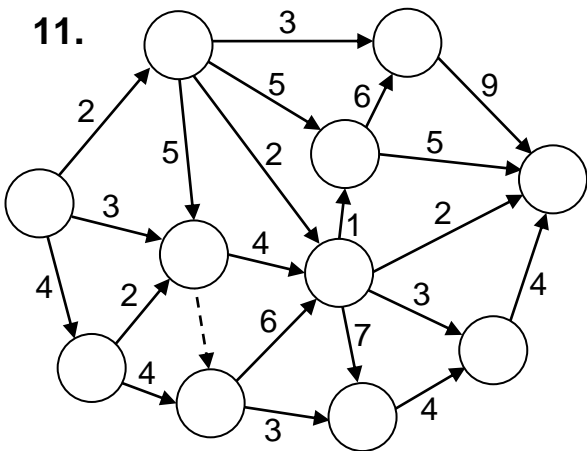
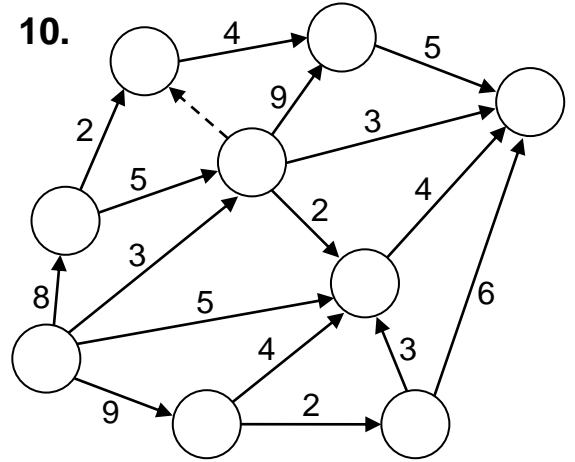
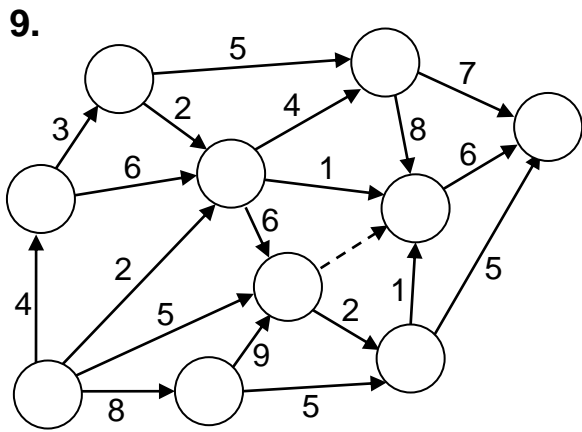
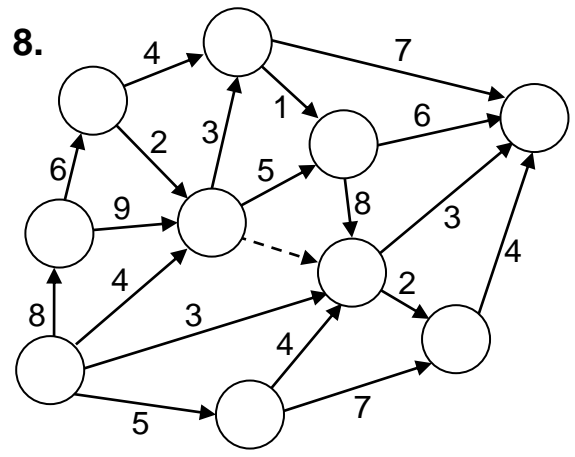
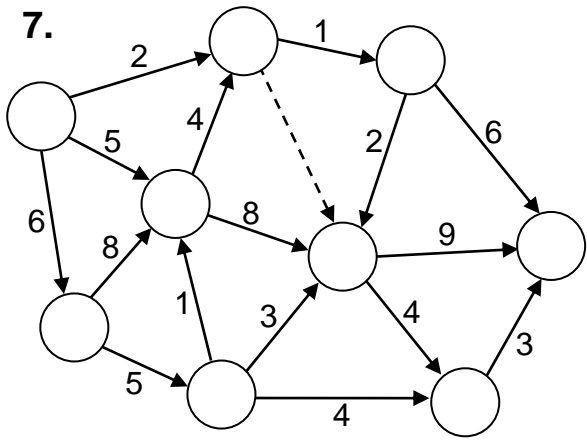




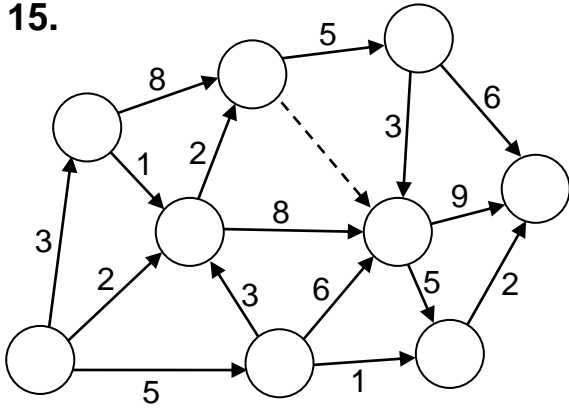
№ 5. Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

- 1) исходное событие I и завершающее событие S ;
- 2) номера вершин в натуральном порядке;
- 3) ранние сроки свершения событий;
- 4) поздние сроки свершения событий;
- 5) резервы времени событий;
- 6) время выполнения комплекса и критический путь.

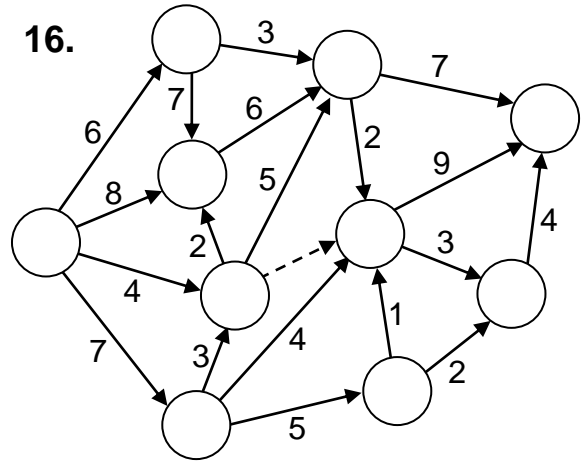




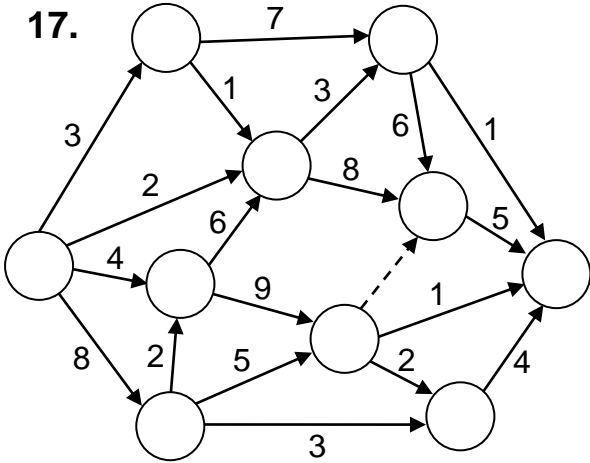
15.



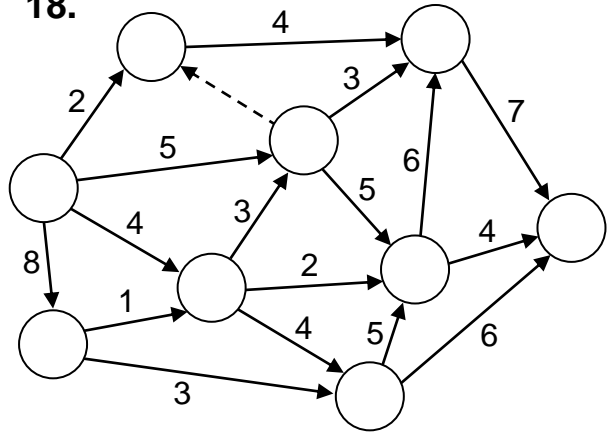
16.



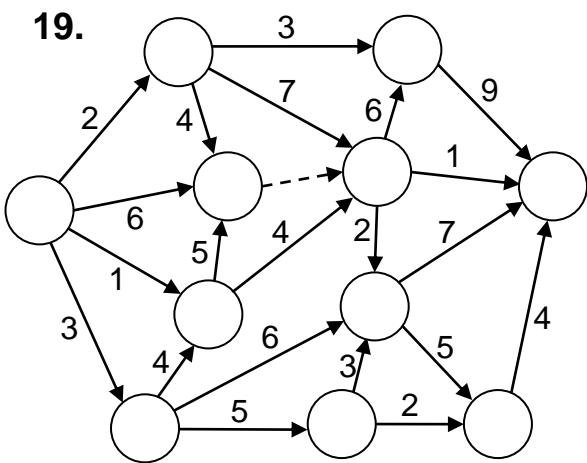
17.



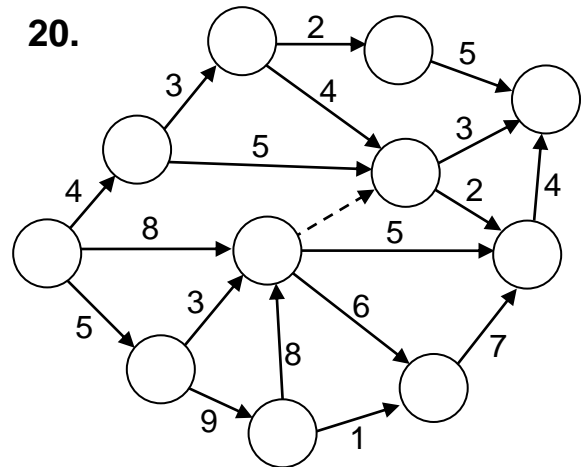
18.



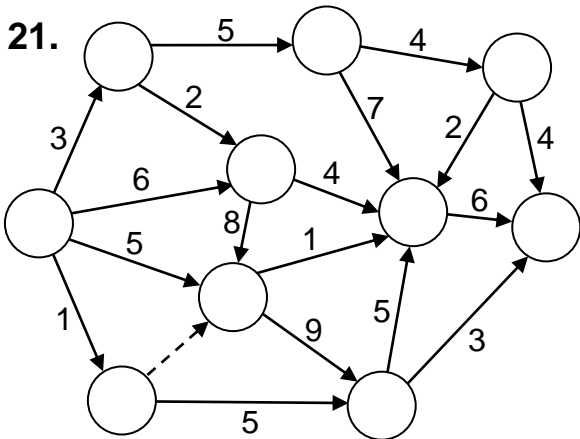
19.



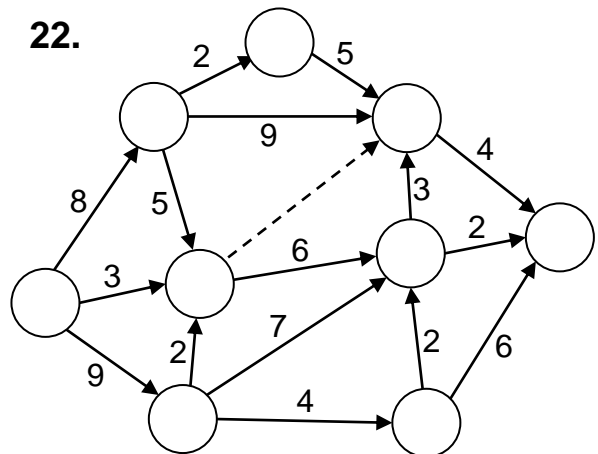
20.



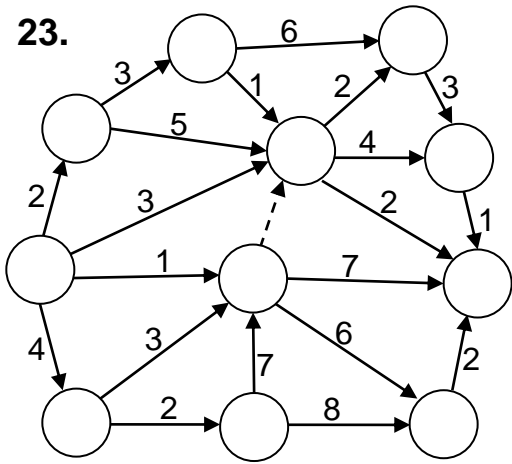
21.



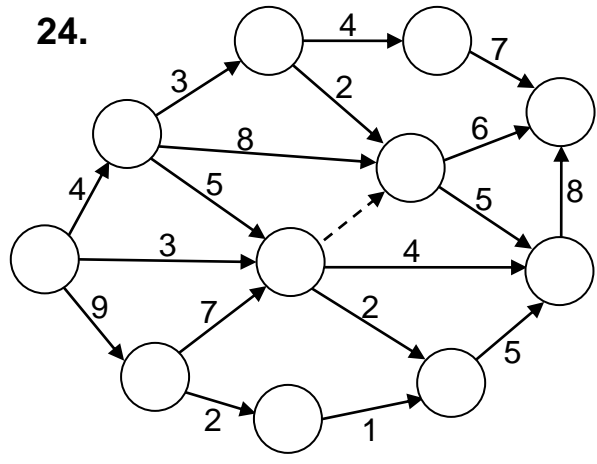
22.



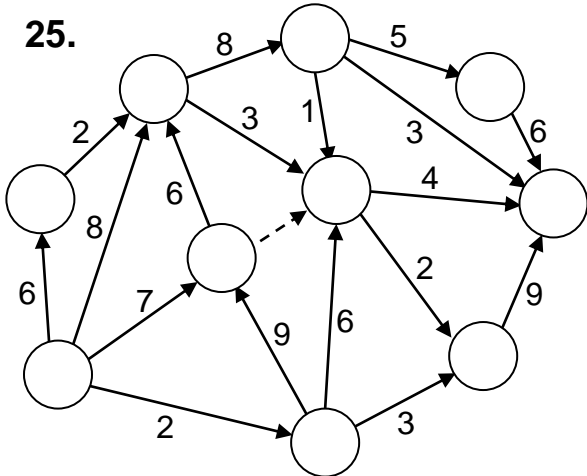
23.



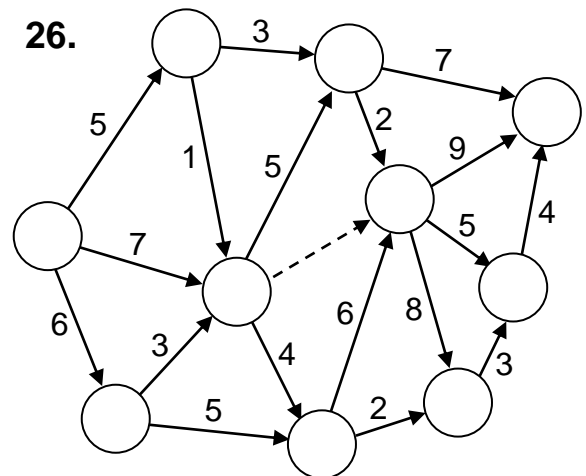
24.



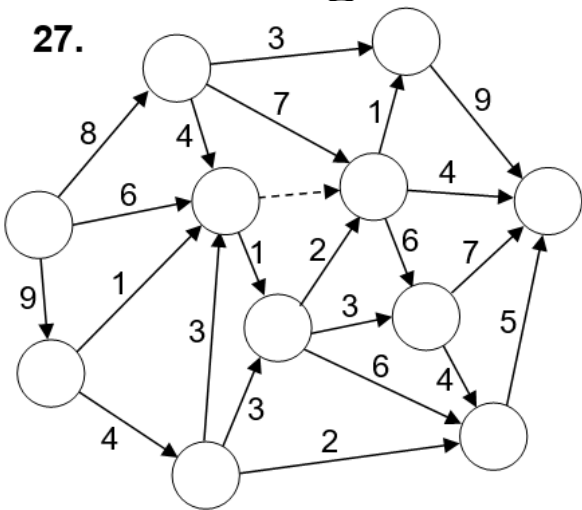
25.



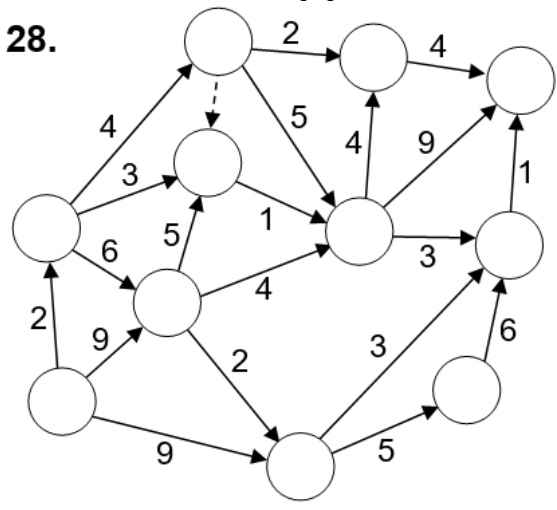
26.



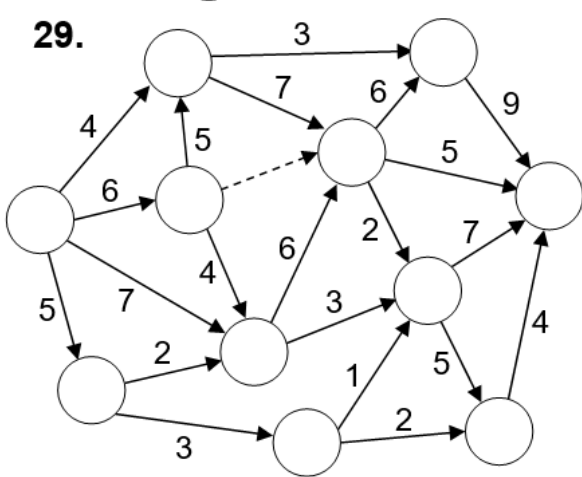
27.



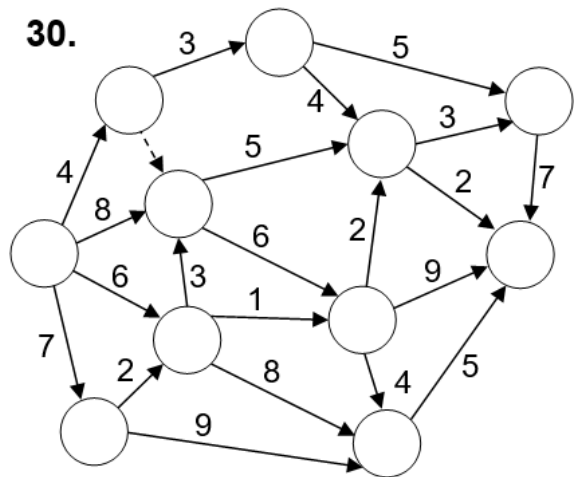
28.



29.



30.



Решение

$$L_{\text{крит}} :$$

$$t_{\text{крит}} =$$

II. Решение типового варианта

№ 1. Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции Z при заданных ограничениях на переменные x, y :

$$Z = x + 2y$$

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12, \\ 7x - 2y \leq 42, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Неравенства системы ограничений задают в прямоугольной системе координат Oxy полуплоскости, границами которых являются прямые $l_1: 3x + 4y = 12$, $l_2: 7x - 2y = 42$, $l_3: -x + 4y = 20$ и координатные оси.

Построим указанные прямые по двум точкам:

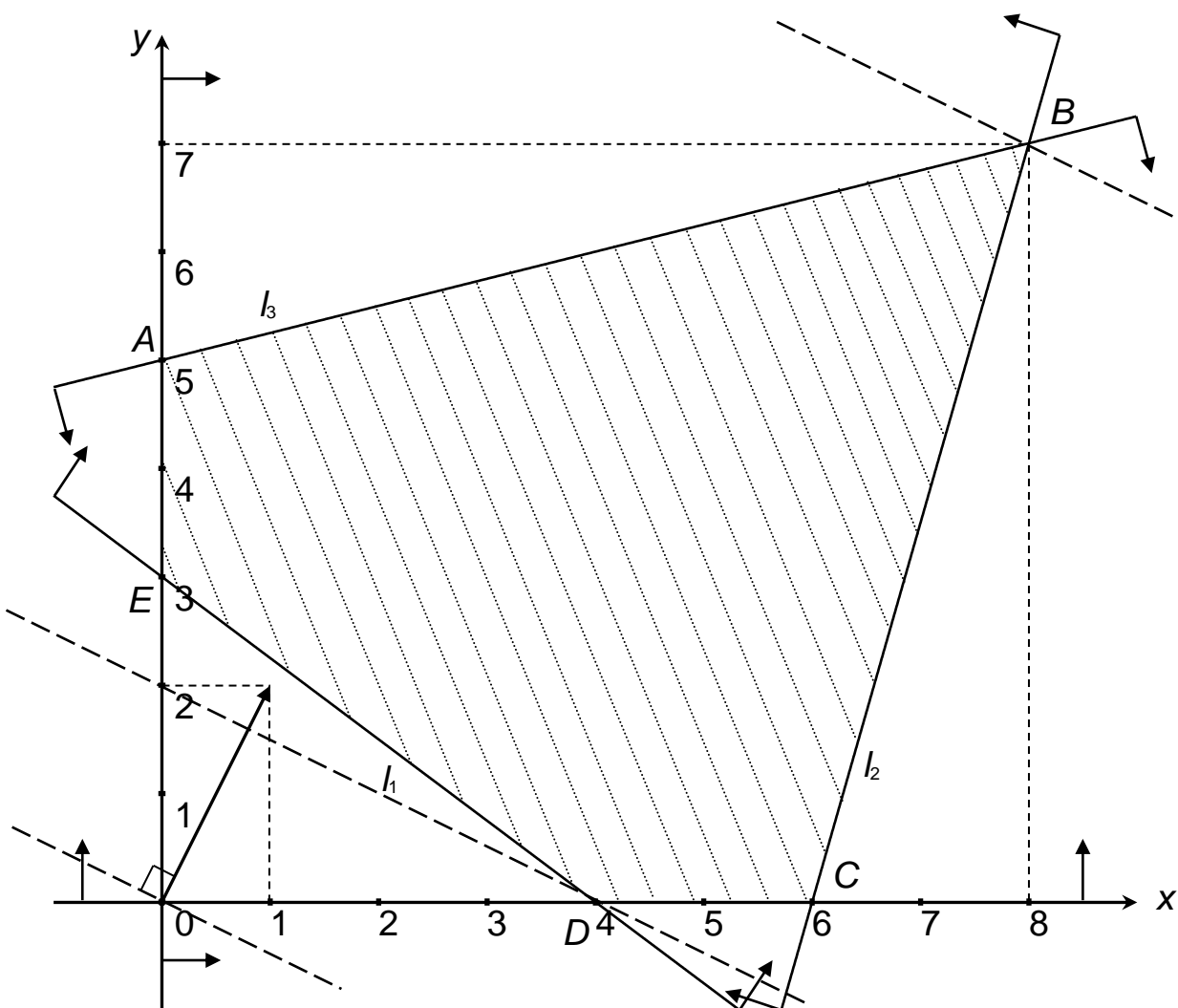
$$l_1: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \quad l_2: \begin{array}{c|c|c} x & 6 & 8 \\ \hline y & 0 & 7 \end{array} \quad l_3: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 5 & 6 \end{array}$$

Каждая из прямых разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Чтобы определить ту полуплоскость, которая содержит область допустимых решений задачи, достаточно подставить в соответствующее неравенство координаты любой точки, не лежащей на прямой. Если получится верное неравенство, то укажем стрелками на полуплоскость, содержащую эту точку. Иначе укажем на другую полуплоскость.

Заметим, что точка $O(0;0)$ не лежит ни на одной из этих прямых. Подставим ее координаты в неравенство $3x + 4y \geq 12$, соответствующее прямой l_1 : $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 12 \Leftrightarrow 0 \geq 12$. Поскольку получили неверное неравенство, то отметим полуплоскость, не содержащую точку $O(0;0)$. Подставим координаты точки $O(0;0)$ в неравенство $7x - 2y \leq 42$, соответствующее прямой l_2 : $7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 42 \Leftrightarrow 0 \leq 42$. Так как получили верное неравенство, то отметим полуплоскость, содержащую точку O . Подставляя координаты точки $O(0;0)$ в неравенство $-x + 4y \leq 20$, соответствующее прямой l_3 , получим $-0 + 4 \cdot 0 \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq 20$. Поэтому также отметим полуплоскость, содержащую точку O .

Наконец, условия неотрицательности $x \geq 0, y \geq 0$ задают полуплоскости, ограниченные координатными осями.

Общей частью отмеченных полуплоскостей является выпуклый пятиугольник $ABCDE$, который и образует область допустимых решений данной задачи.



Направления возрастания и убывания целевой функции Z определим с помощью вектора $\text{grad } Z = (Z'_x; Z'_y)$. Вектор градиента $\text{grad } Z$ показывает направление наискорейшего возрастания, а вектор антиградиента $-\text{grad } Z$ – направление наискорейшего убывания целевой функции Z . Находим вектор $\text{grad } Z = (1; 2)$ и откладываем его от начала координат (при этом конец данного вектора будет находиться в точке с координатами $(1; 2)$). Перпендикулярно вектору градиента строим линию уровня (например, проводя ее через начало координат).

Будем перемещать линию уровня в направлении вектора $\text{grad } Z$ до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку максимума B , координаты которой находим как решение системы уравнений прямых l_2 и l_3 , проходящих

$$\text{через эту точку: } \begin{cases} 7x - 2y = 42, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 4y = 84, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 104, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 7. \end{cases}$$

Таким образом, $\max Z = Z(8;7) = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 22$.

Далее будем перемещать линию уровня в противоположном направлении до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку минимума D , которая является точкой пересечения прямой l_1 с осью Ox . Найдем координаты

$$\text{этой точки: } \begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\min Z = Z(4;0) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4$.

Ответ: $\min Z = Z(4;0) = 4$; $\max Z = Z(8;7) = 22$.

№ 2. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Перейдем к канонической форме записи задачи, добавив к левым частям первых трех неравенств системы ограничений так называемые *балансовые* неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5 . Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (2)$$

Говорят, что ограничение задачи имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным 1, а в остальные ограничения – с коэффициентом, равным 0. Эта переменная называется *предпочтительной*. В нашем случае предпочтительными являются переменные x_3, x_4, x_5 .

Назовем предпочтительные переменные *базисными*, а остальные – *свободными*. Найдем начальный опорный план задачи, приравняв свободные переменные к нулю и выражая базисные из ограничений-равенств: $X^0 = (0; 0; 3; 9; 8)$.

Дальнейшие рассуждения будем вести с использованием симплексных таблиц.

№	БП	C_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	C/O
				9	6	0	0	0	
0	x_3	0	3	-1	1	1	0	0	–
	x_4	0	9	1	2	0	1	0	9/1=9
	x_5	0	8	2	-1	0	0	1	8/2=4
	Δ_j		$Z(X^0) = 0$	-9	-6	0	0	0	
1	x_3	0	7	0	0,5	1	0	0,5	7/0,5=14
	x_4	0	5	0	2,5	0	1	-0,5	5/2,5=2
	x_1	9	4	1	-0,5	0	0	0,5	–
	Δ_j		$Z(X^1) = 36$	0	-10,5	0	0	4,5	
2	x_3	0	6	0	0	1	-0,2	0,6	
	x_2	6	2	0	1	0	0,4	-0,2	
	x_1	9	5	1	0	0	0,2	0,4	
	Δ_j		$Z(X^2) = 57$	0	0	0	4,2	2,4	

Будем использовать следующие обозначения: БП – столбец базисных переменных; C_B – столбец коэффициентов при базисных переменных целевой функции (1); A_0 – столбец решений; A_j ($j = \overline{1,5}$) – столбцы коэффициентов при переменной x_j в уравнениях системы ограничений; Δ_j ($j = \overline{0,5}$) – индексные оценки (образуют индексную строку); C/O – столбец симплексных отношений.

Заполним симплексную таблицу для нулевой итерации:

В столбцах 5 – 9 в строке под переменными задачи записываем их коэффициенты из целевой функции (1), а ниже (в строках 2, 3, 4) – соответствующие коэффициенты из уравнений системы ограничений (2). Базисные переменные с их коэффициентами из целевой функции дублируем во 2-м и 3-м столбцах. В 4-м столбце записываем правые части равенств системы ограничений.

Заполним элементы индексной строки. В 4-м столбце записываем значение целевой функции в начальном опорном плане как сумму произведений элементов 3-го и 4-го столбцов:

$$\Delta_0 = Z(X^0) = C_B \cdot A_0 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 8 = 0.$$

Индексную оценку переменной x_1 находим как сумму произведений элементов 3-го и 5-го столбцов минус соответствующий x_1 коэффициент целевой функции, записанный выше в 1-й строке:

$$\Delta_1 = C_B \cdot A_1 - c_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 9 = -9.$$

Аналогичным образом находим индексные оценки других переменных:

$$\Delta_2 = C_B \cdot A_2 - c_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 6 = -6;$$

$$\Delta_3 = C_B \cdot A_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = C_B \cdot A_4 - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_5 = C_B \cdot A_5 - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

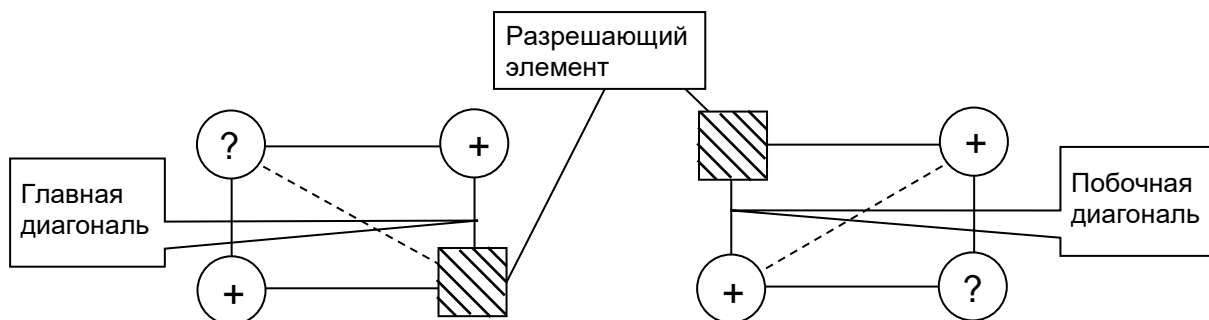
При решении задачи на максимум опорный план является оптимальным, если все индексные оценки – неотрицательны ($\Delta_j \geq 0$ ($j = \overline{1,5}$)). При решении задачи на минимум условием оптимальности опорного плана является неположительность индексных оценок ($\Delta_j \leq 0$ ($j = \overline{1,5}$)). Наш начальный план максимальным не является, поскольку $\Delta_1 < 0$ и $\Delta_2 < 0$. Выберем наибольшую по модулю «плохую» оценку $\Delta_1 = -9$ и назовем соответствующий ей 5-й столбец *разрешающим*.

Переменную x_1 будем вводить в базис вместо одной из базисных переменных начального плана. Для определения выводимой из базиса переменной разделим на положительные элементы разрешающего столбца соответствующие элементы 4-го столбца A_0 . Полученные частные запишем в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее: $\theta = \min\{9; 4\} = 4$. Это число соответствует переменной x_5 , соответствующую строку назовем *разрешающей*, а число 2, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, назовем *разрешающим элементом*. Таким образом, переменная x_1 заменит в базисе переменную x_5 . Базисными становятся элементы x_1, x_3, x_4 , а свободными – x_2 и x_5 .

Заполним симплексную таблицу для первой итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной x_5 запишем переменную x_1 , а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 9 из целевой функции. Другие элементы этих столбцов оставим без изменений. Далее разделим элементы разрешающей строки (столбцы 4 – 9) нулевой итерации на разрешающий элемент и запишем полученные частные в соответствующих ячейках новой таблицы. Запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая Δ_1). Остальные элементы таблицы получим с помощью схематического правила (*правила прямоугольника*):

элемент (?) новой итерации есть разность произведений элементов предыдущей итерации на главной и на побочной диагоналях, деленная на разрешающий элемент:



Столбец A_0 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{3 \cdot 2 - (-1) \cdot 8}{2} = 7;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{9 \cdot 2 - 1 \cdot 8}{2} = 5.$$

Столбец A_2 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)}{2} = 0,5;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2} = 2,5.$$

Столбец A_3 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0}{2} = 1;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2} = 0.$$

Столбец A_4 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 0}{2} = 0;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2} = 1.$$

Столбец A_5 :

$$1\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1}{2} = 0,5;$$

$$2\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2} = -0,5.$$

Элементы индексной строки можно находить тем же способом, что и в нулевой итерации, а можно воспользоваться правилом прямоугольника:

$$\Delta_0 = Z(X^1) = \frac{0 \cdot 2 - 8 \cdot (-9)}{2} = 36;$$

$$\Delta_2 = \frac{-6 \cdot 2 - (-1) \cdot (-9)}{2} = -10,5; \quad \Delta_3 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot (-9)}{2} = 0;$$

$$\Delta_4 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot (-9)}{2} = 0; \quad \Delta_5 = \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot (-9)}{2} = 4,5.$$

Поскольку $\Delta_2 < 0$, то опорный план $X^1 = (4; 0; 7; 5; 0)$ также не является оптимальным. Единственная отрицательная индексная оценка определяет в качестве разрешающего 6-й столбец. Разделим элементы 4-го столбца A_0 на соответствующие элементы разрешающего столбца, запишем положительные результаты в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее: $\theta = \min\{14; 2\} = 2$. Это число соответствует переменной x_4 , поэтому 2-я строка таблицы первой итерации будет разрешающей, а число 2,5, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, будет разрешающим элементом.

Итак, переменная x_2 заменит в базисе переменную x_4 . Базисными становятся элементы x_1, x_2, x_3 , а свободными – x_4 и x_5 .

Заполним симплексную таблицу для второй итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной x_4 запишем переменную x_2 , а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 6 из целевой функции. Далее разделим элементы разрешающей строки первой итерации на разрешающий элемент, заполнив строку новой таблицы, и запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая Δ_2). Остальные элементы таблицы (включая элементы индексной строки) получим с помощью правила прямоугольника:

Столбец A_0 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{7 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 5}{2,5} = 6; \quad \text{3-й элемент: } \frac{4 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 5}{2,5} = 5.$$

Столбец A_1 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 0}{2,5} = 0; \quad \text{3-й элемент: } \frac{1 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0}{2,5} = 1.$$

Столбец A_3 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{1 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 0}{2,5} = 1; \quad \text{3-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0}{2,5} = 0.$$

Столбец A_4 :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 1}{2,5} = -0,2; \quad \text{3-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 1}{2,5} = 1.$$

Столбец A_5 :

$$\begin{aligned} \text{1-й элемент: } & \frac{0,5 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0,5}{2,5} = 0,6; \\ \text{3-й элемент: } & \frac{0,5 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot (-0,5)}{2,5} = 0,4. \end{aligned}$$

$$\text{Индексная строка: } \Delta_0 = Z(X^2) = \frac{36 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 5}{2,5} = 57;$$

$$\Delta_1 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 0}{2,5} = 0; \quad \Delta_3 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 0}{2,5} = 0;$$

$$\Delta_4 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 1}{2,5} = 4,2; \quad \Delta_5 = \frac{4,5 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot (-0,5)}{2,5} = 2,4.$$

Так как все $\Delta_j \geq 0$ ($j = \overline{1,5}$), то опорный план $X^2 = (5; 2; 6; 0; 0)$ является оптимальным. Оптимальным планом исходной задачи является план $X^* = (5; 2)$ и $\max Z = Z(X^*) = 57$.

Ответ: $\max Z = Z(5; 2) = 57$.

№ 3. У поставщиков A_i имеется некоторая однородная продукция в количествах a_i , которую нужно перевезти потребителям B_j в количествах b_j по ценам c_{ij} денежных единиц за перевозку единицы продукции от A_i к B_j . Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки и полностью удовлетворяющий спрос потребителей. Начальный опорный план составить методом северо-западного угла.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	1	75
A_2	4	5	7	3	95
A_3	3	1	3	5	120
b_j	100	60	70	60	290

Решение

Составим начальный опорный план задачи методом северо-западного угла.

Опорный план транспортной задачи имеет $n+m-1=3+4-1=6$ базисных переменных, которые записываются в соответствующие внутренние клетки таблицы. Остальные клетки свободных переменных, равных нулю, оставляют пустыми. Согласно методу северо-западного угла, вначале определяем $x_{11} = \min(a_1; b_1) = \min(100; 75) = 75$. При этом уменьшаем на 75 единиц спрос 1-го потребителя и вычеркиваем запас 1-го поставщика (остальные клетки в первой строке будут свободными). Получим таблицу, в верхних левых углах внутренних клетках которой мелким шрифтом записаны стоимости c_{ij} .

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 75	3	2	1	75 0
A_2	4	5	7	3	95
A_3	3	1	3	5	120
b_j	100 25	60	70	60	290

В оставшейся части таблицы «северо-западная» клетка расположена в 1-м столбце и во 2-й строке. Аналогично находим соответствующий ей минимум оставшихся запаса и спроса: $x_{21} = \min(a_2; b_1) = \min(25; 95) = 25$. Значит, спрос 1-го потребителя удовлетворен, и остальные клетки 1-го столбца будут свободными. Получим следующее:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 75	3	2	1	75 0
A_2	4 25	5	7	3	95 70
A_3	3	1	3	5	120
b_j	100 25 0	60	70	60	290

Следующая «северо-западная» клетка расположена во 2-м столбце и во 2-й строке. Для нее $x_{22} = \min(a_2; b_2) = \min(70; 60) = 60$. При этом спрос 2-го потребителя будет удовлетворен, поэтому оставшаяся клетка 2-го столбца окажется свободной:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	1	75 0
	75				
A_2	4	5	7	3	95 70 10
	25	60			
A_3	3	1	3	5	120
b_j	100	60	70	60	290
	25				
	0	0			

Продолжая аналогично, получим таблицу перевозок с первоначальным планом X^0 :

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 75	3	2	1	75 0
A_2	4 25	5 60	7 10	3	95 70 10 0
A_3	3	1	3 60	5 60	120 60 0
b_j	100 25 0	60 0	70 60 0	60 0	290

По плану X^0 осуществляются следующие перевозки: от A_1 к B_1 – 75 единиц груза, от A_2 к B_1 – 25 единиц, к B_2 – 60 единиц и к B_3 – 10 единиц груза, от A_3 к B_3 и к B_4 – по 60 единиц груза. Общая стоимость таких перевозок составит $f(X^0) = 75 \cdot 4 + 25 \cdot 4 + 60 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 60 \cdot 3 + 60 \cdot 5 = 1250$ денежных единиц.

Для проверки на оптимальность полученного опорного плана применим так называемый *метод потенциалов*. Каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j приписываются соответственно числа u_i и v_j , называемые их *потенциалами*.

Для базисных (занятых) клеток рассматриваемого опорного плана должны выполняться равенства $u_i + v_j = c_{ij}$. В нашем случае получим систему:

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 75	3	2	1	$u_1 = 0$
A_2	4 25	5 60	7 10	3	$u_2 = 0$
A_3	3	1	3 60	5 60	$u_3 = -4$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = 7$	$v_4 = 9$	

Так как число потенциалов на единицу меньше, чем число уравнений полученной системы, то один из них выберем произвольным образом, например, $u_1 = 0$. Тогда из системы последовательно получим: $v_1 = 4$, $u_2 = 0$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$, $u_3 = -4$, $v_4 = 9$.

Далее для всех свободных (не занятых) клеток подсчитаем оценки $V_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если все $V_{ij} \leq 0$, то опорный план оптимален, иначе можно перейти к новому опорному плану с меньшим значением целевой функции.

$$\begin{aligned}
 V_{12} &= 0 + 5 - 3 = 2, \\
 V_{13} &= 0 + 7 - 2 = 5, \\
 V_{14} &= 0 + 9 - 1 = 8, \quad (\max) \\
 V_{24} &= 0 + 9 - 3 = 6, \\
 V_{31} &= -4 + 4 - 3 = -3, \\
 V_{32} &= -4 + 5 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

В нашем случае

Так как среди оценок имеются положительные, то план X^0 не является оптимальным.

Для перехода к новому опорному плану введем перевозку, соответствующую наибольшей из вычисленных оценок $V_{14} = 8$, в число базисных перевозок. Построим *цикл пересчета* свободной клетки (1;4), который представляет собой замкнутую ломаную, одна вершина которой лежит в выбранной, а остальные – в базисных клетках (соседние звенья ломаной должны быть взаимно перпендикулярны). При этом вершинам цикла поочередно приписываются знаки «плюс» или «минус», начиная со знака «плюс» у выбранной свободной клетки:

X^0	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	4 – 75	3	2	1 +	0
A_2	4 + 25	5	7 – 10	3	0
A_3	3	1	3 + 60	5 – 60	-4
v_j	4	5	7	9	

Если в пределах цикла в клетках со знаком «плюс» добавить, а из клеток со знаком «минус» отнять одно и то же число, то получим допустимый план перевозок. Наибольшее количество продукции, которое мы можем переместить из «отрицательных» клеток в «положительные», равно наименьшей из перевозок, стоящих в «отрицательных» клетках, то есть величине $(75; 10; 60) = 10 \text{ min}$. Поэтому в клетках со знаком «плюс» добавляем эту величину, а со знаком «минус» – вычитаем. В результате получили новый опорный план X^1 , в котором клетка (1;4) стала базисной, а клетка (2;3) – свободной:

X^1	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	4 65	3	2	1 10	0
A_2	4 35	5 60	7	3	0
A_3	3	1	3 70	5 50	-4
v_j	4	5	7	9	

Вычислим общую стоимость полученных перевозок:

$$f(X^1) = 65 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 35 \cdot 4 + 60 \cdot 5 + 70 \cdot 3 + 50 \cdot 5 = 1170 \text{ денежных единиц.}$$

Заметим, что изменение общей стоимости перевозок по сравнению с планом X^0 составило $1250 - 1170 = 80 = \Delta_{14} \cdot 10$ денежных единиц.

Контроль общего объема перевозок: $65 + 10 + 35 + 60 + 70 + 50 = 290$.

Проверим полученный план X^1 на оптимальность, для чего снова применим метод потенциалов (как и ранее, положим в системе $u_1 = 0$):

X^1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 - 65	3	2	1 + 10	$u_1 = 0$
A_2	4 + 35	5 - 60	7	3	$u_2 = 0$
A_3	3	1 +	3 70	5 - 50	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = -1$	$v_4 = 1$	

Найдем оценки свободных клеток:

$$V_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$$

$$V_{13} = 0 - 1 - 2 = -3,$$

$$V_{23} = 0 - 1 - 7 = -8,$$

$$V_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$$

$$V_{31} = 4 + 4 - 3 = 5,$$

$$V_{32} = 4 + 5 - 1 = 8. \text{ (max)}$$

Поскольку среди оценок имеются положительные, то план X^1 также не является оптимальным. Построим цикл пересчета для клетки (3;2) (см. последнюю таблицу) и переместим в пределах цикла из «отрицательных» в «положительные» клетки $\min(65; 60; 50) = 50$ единиц продукции. В результате получим опорный план X^2 , для которого общая стоимость перевозок составит $f(X^2) = 15 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 85 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 1 + 70 \cdot 3 = 770$ денежных единиц.

Для нового плана находим потенциалы (будем их записывать сразу в таблицу) и вычисляем оценки свободных клеток:

X^2	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 - 15	3	2 +	1 60	0
A_2	4 + 85	5 - 10	7	3	0
A_3	3	1 + 50	3 - 70	5	-4
v_j	4	5	7	1	

$$V_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$$

$$V_{13} = 0 + 7 - 2 = 5, \text{ (max)}$$

$$V_{23} = 0 + 7 - 7 = 0,$$

$$V_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$$

$$V_{31} = -4 + 4 - 3 = -3,$$

$$V_{34} = -4 + 1 - 5 = -8.$$

Контроль: $15 + 60 + 85 + 10 + 70 + 50 = 290$.

Поскольку план X^2 не является оптимальным, то составляем новый цикл, отталкиваясь от ячейки (1;3). В результате получим опорный план X^3 , для которого $f(X^3) = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 95 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 60 \cdot 3 = 720$. Этот план снова проверяем на оптимальность.

X^3	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 - 5	3	2 + 10	1 60	0
A_2	4 95	5	7	3	0
A_3	3 +	1 60	3 - 60	5	1
v_j	4	0	2	1	

$$\begin{aligned} V_{12} &= 0 + 0 - 3 = -3, \\ V_{22} &= 0 + 0 - 5 = -5, \\ V_{23} &= 0 + 2 - 7 = -5, \\ V_{24} &= 0 + 1 - 3 = -2, \\ V_{31} &= 1 + 4 - 3 = 2, \quad (\max) \\ V_{34} &= 1 + 1 - 5 = -3. \end{aligned}$$

Контроль: $5 + 10 + 60 + 95 + 60 + 60 = 290$.

Видим, что план X^3 также не оптимален, поэтому перейдем к новому опорному плану X^4 :

X^4	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4	3	2 15	1 60	0
A_2	4 95	5	7	3	2
A_3	3 5	1 60	3 55	5	1
v_j	2	0	2	1	

$$\begin{aligned} V_{11} &= 0 + 2 - 4 = -2, \\ V_{12} &= 0 + 0 - 3 = -3, \\ V_{22} &= 2 + 0 - 5 = -3, \\ V_{23} &= 2 + 2 - 7 = -3, \\ V_{24} &= 2 + 1 - 3 = 0, \\ V_{34} &= 1 + 1 - 5 = -3. \end{aligned}$$

Контроль: $15 + 60 + 95 + 5 + 60 + 55 = 290$.

Поскольку все $V_{ij} \leq 0$, то план $X^* = X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 \\ 95 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 55 & 0 \end{bmatrix}$ оптимален

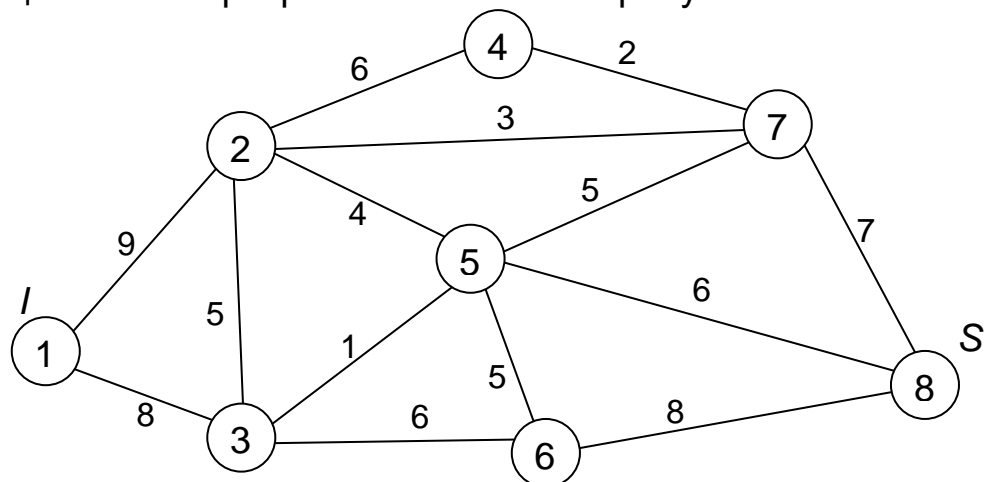
и обеспечивает минимум стоимости всех перевозок:

$$f_{\min} = f(X^*) = 15 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 95 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 60 \cdot 1 + 55 \cdot 3 = 710 \text{ денежных единиц.}$$

По этому плану следует перевезти от A_1 к B_3 15 единиц продукции, от A_1 к B_4 – 60 единиц, от A_2 к B_1 – 95 единиц, от A_3 к B_1 – 5 единиц, от A_3 к B_2 – 60 единиц и от A_3 к B_3 – 55 единиц.

Ответ: $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 \\ 95 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 55 & 0 \end{bmatrix}; f_{\min} = f(X^*) = 710.$

№ 4. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S . Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Решение

Вершина 1 (I) является *истоком*, а вершина 8 (S) – *стоком* данной сети. Максимальное количество r_{ij} вещества (груза, информации и т. п.), которое может пропустить за единицу времени ребро $(i; j)$, называется его *пропускной способностью*. По условию задачи $r_{ij} = r_{ji}$, например, $r_{13} = r_{31} = 8$, $r_{35} = r_{53} = 1$ и т. д. При этом полагают все $r_{ii} = 0$.

Пропускные способности сети запишем в квадратной матрице R 8-го порядка (порядок равен количеству вершин). Для наглядности клетки с нулевыми пропускными способностями оставим пустыми.

R	1	2	3	4	5	6	7	8
1		9	8					
2	9		5	6	4		3	
3	8	5			1	6		
4		6					2	
5		4	1			5	5	6
6			6		5			8
7		3		2	5			7
8					6	8	7	

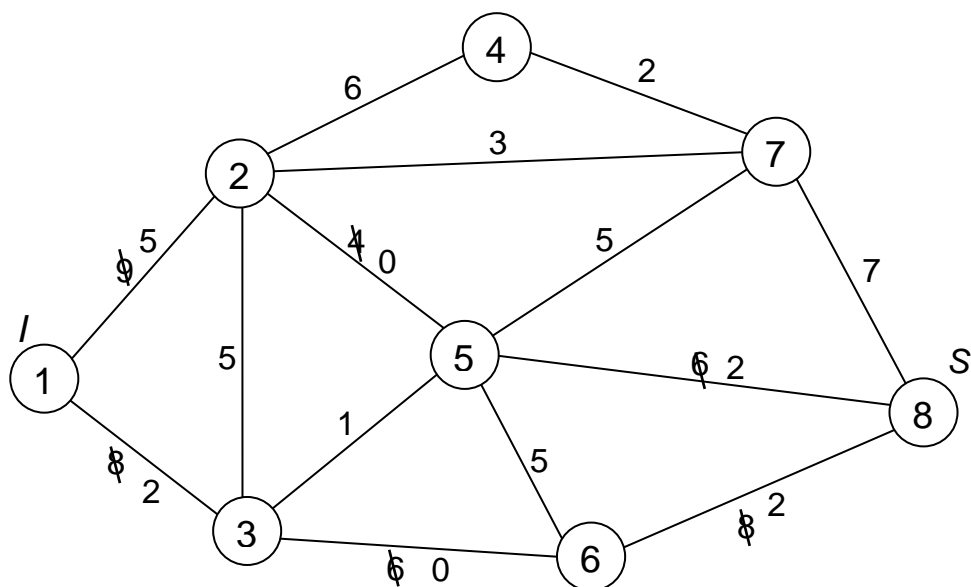
Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро $(i; j)$ в единицу времени, называется *потоком по ребру $(i; j)$* . Считается, что $x_{ij} = -x_{ji}$. Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем ребрам сети называют *потоком по сети*, а функция $f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}$ (общее количество вещества, выте-кающее из истока, и общее количество, втекающее в сток) называется *мощностью потока* на сети. Ребро $(i; j)$ называется *ненасыщенным*, если $x_{ij} < r_{ij}$, и *насыщенным*, если $x_{ij} = r_{ij}$.

Сформируем на сети начальный поток X^0 . Будем составлять пути из I в S по ненасыщенным ребрам. При этом будем следить, чтобы потоки формировались в одном направлении.

Рассмотрим путь $1 - 3 - 6 - 8$. Так как $\min(8; 6; 8) = 6$, то по этому пути пропустим 6 ед. вещества. Ребро $(3; 6)$ станет насыщенным.

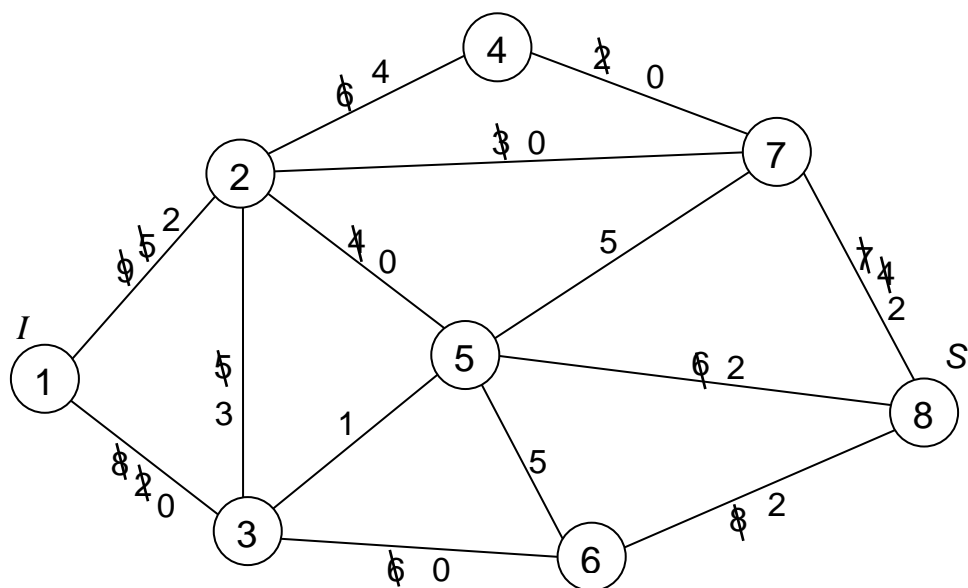
Для пути $1 - 2 - 5 - 8$ $\min(9; 4; 6) = 4$, поэтому пропустим по данному пути 4 ед. вещества. Ребро $(2; 5)$ – насыщенное.

Будем отмечать резервы пропускных способностей ребер на сети, перечеркивая «старые» значения пропускных способностей:



Далее пропустим по пути $1-2-7-8$ $\min(5; 3; 7) = 3$ ед. вещества, а по пути $1-3-2-4-7-8$ $\min(2; 5; 6; 2; 4) = 2$ ед. При этом ребра $(2; 7)$ и $(1; 3)$ станут насыщенными.

Отообразим изменения на сети.



Пути, которые формируют начальный поток X^0 , можно находить до тех пор, пока существует проход по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Получаем следующий начальный поток X^0 (в скобках будем указывать количество вещества, пропускаемого по данному пути):

$$\begin{aligned} &1 - 3 - 6 - 8 \quad (6) \\ &1 - 2 - 5 - 8 \quad (4) \\ &1 - 2 - 7 - 8 \quad (3) \\ &1 - 3 - 2 - 4 - 7 - 8 \quad (2) \end{aligned}$$

Найдем мощность потока X^0 : $f(X^0) = 6 + 4 + 3 + 2 = 15$ ед.

Запишем поток X^0 в виде матрицы:

X^0	1	2	3	4	5	6	7	8
1		7	8					
2	-7		-2	2	4		3	
3	-8	2				6		
4		-2					2	
5		-4						4
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-4	-6	-5	

Например, через ребро (1;3) проходит $6 + 2 = 8$ единиц. Значит, в клетку (1;3) матрицы X^0 записываем $x_{13} = 8$, а в клетку (3;1) – $x_{31} = -8$. Через ребро (5;8) проходит 4 единицы, поэтому в клетку (5;8) записываем $x_{58} = 4$, а в клетку (8;5) – $x_{85} = -4$. И т.д.

Составляем матрицу $R - X^0$, элементы которой $r_{ij} - x_{ij}$ позволяют судить о насыщенности ребер сети:

$$r_{ij} - x_{ij} = \begin{cases} = 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ насыщено,} \\ \neq 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ ненасыщено.} \end{cases}$$

$R - X^0$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2						
2	16		7	4				
3	16	3			1			
4		8						
5		8	1			5	5	2
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					10	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Для этого просматриваем 1-ю строку матрицы $R - X^0$. Из вершины 1 по ненасыщенному ребру можно попасть только в вершину 2. Из вершины 2 – в вершины 1 (которую мы игнорируем, так как она уже рассматривалась), 3 и 4. Из вершины 3 можно попасть лишь в вершину

5, а из нее – в вершину 8. В итоге получаем следующий список вершин, достижимых из истока по путям, состоящим из ненасыщенных ребер:

- 1: 2
- 2: 3, 4
- 3: 5
- 5: 8

Так как сток находится в этом списке, то начальный поток не является максимальным и его можно улучшить.

Получили путь $1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{7} 3 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{2} 8$. $1-2-3-5-8$ Находим величину $\Delta = \min(2; 7; 1; 2) = 1$, на которую нужно увеличить поток по ребрам (1;2), (2;3), (3;5) и (5;8), чтобы получить более мощный поток.

В результате получим поток X^1 , мощность которого равна $f(X^1) = f(X^0) + \Delta = 15 + 1 = 16$.

X^1	1	2	3	4	5	6	7	8
1		8	8					
2	-8		-1	2	4		3	
3	-8	1			1	6		
4		-2					2	
5		-4	-1					5
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-5	-6	-5	

Проверим этот поток на максимальность, для чего найдем матрицу $R - X^1$:

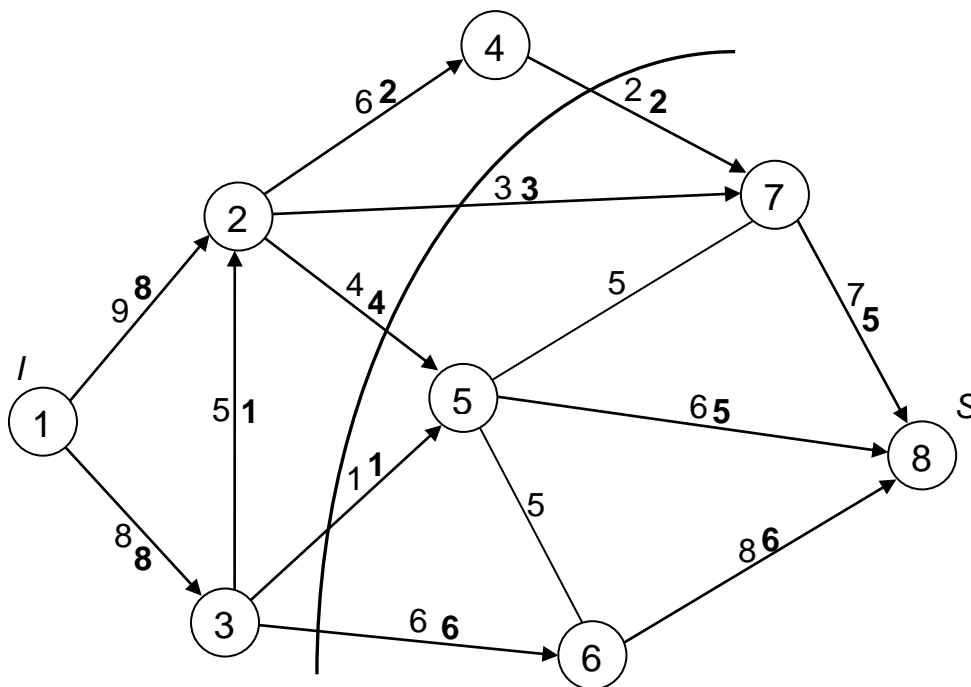
$R - X^1$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1						
2	17		6	4				
3	16	4						
4		8						
5		8	2			5	5	1
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					11	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток:

- 1: 2
- 2: 3, 4
- 3: ×
- 4: ×

Такого пути нет, поэтому поток $X^* = X^1$ – максимальный и его мощность равна $f_{\max} = f(X^*) = 16$.

Нанесем этот поток на сеть с указанием величин (выделим полужирным) и направления потоков по отдельным ребрам:



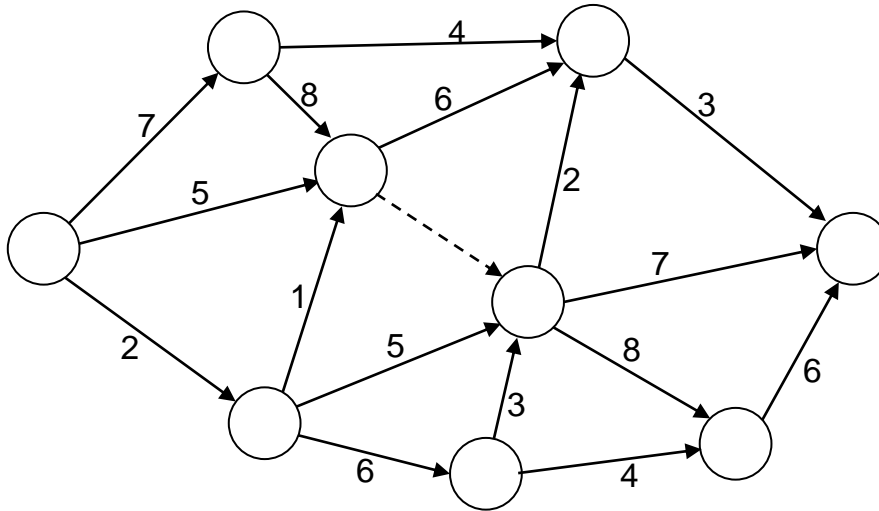
Проверим правильность построенного максимального потока с помощью теоремы Форда - Фалкерсона, согласно которой максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего исток от стока.

Ребра (4;7), (2;7), (2;5), (3;5), (3;6), очевидно, образуют искомый разрез, так как пропускная способность ребер разреза равна $r_{47} + r_{27} + r_{25} + r_{35} + r_{36} = 2 + 3 + 4 + 1 + 6 = 16$ ед., что совпадает с максимальной мощностью на сети. Значит, максимальный поток построен верно.

Ответ: $X^* =$
$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -6 & -5 & 0 \end{bmatrix}; f_{\max} = f(X^*) = 16.$$

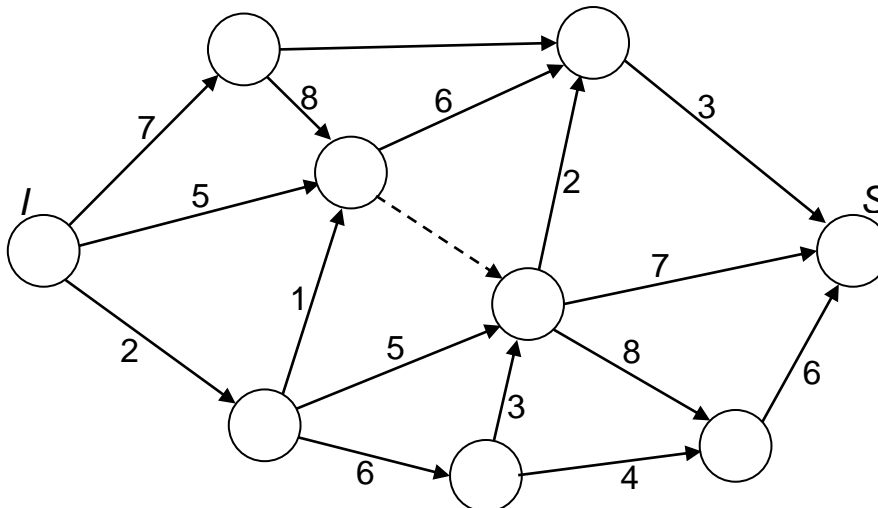
№ 5. Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

- 1) исходное событие I и завершающее событие S ;
- 2) номера вершин в натуральном порядке;
- 3) ранние сроки свершения событий;
- 4) поздние сроки свершения событий;
- 5) резервы времени событий;
- 6) время выполнения комплекса и критический путь.

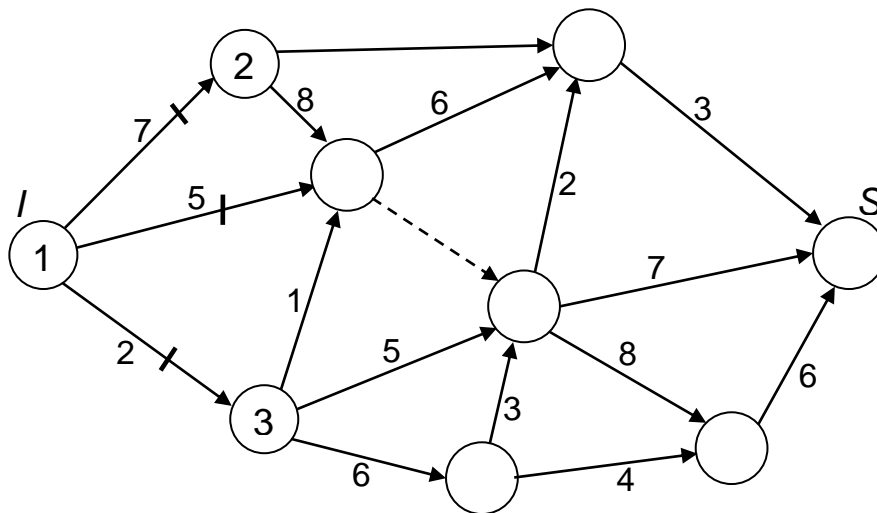


Решение

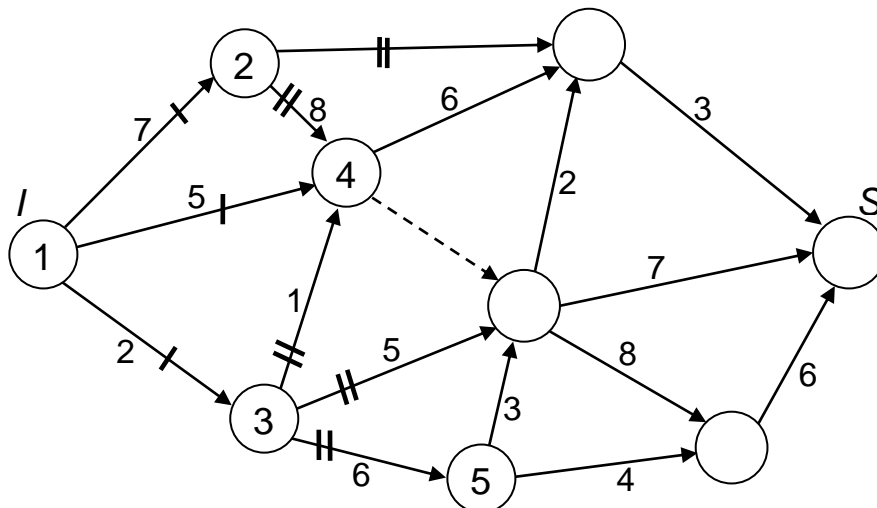
1. *Исходным событием I является первое слева событие как не имеющее предшествующих вершин, а завершающим событием S является последнее правое как не имеющее последующих вершин:*



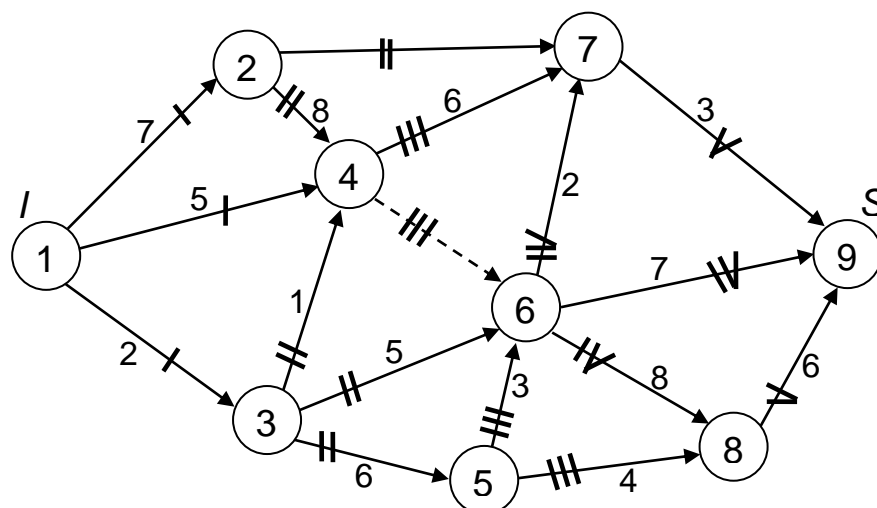
2. *Нумерация вершин начинается с присвоения номера 1 исходному событию I . На первом шаге зачеркнем все работы, начинающиеся в этой вершине (одной чертой) и будем считать, что они выполнены. Продолжим нумерацию тех вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ. Это будут вершины 2 и 3. Назовем их *вершинами первого уровня*:*



На втором шаге зачеркнем двумя чертами работы, начинающиеся в вершинах первого уровня, и аналогично продолжаем нумерацию вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ (опять же считая выполненными все вычеркнутые работы). Это будут вершины 4 и 5 – вершины второго уровня:

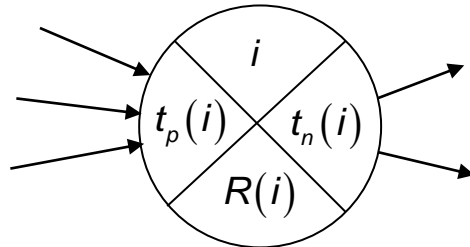


Продолжая аналогично, получим нумерацию вершин в натуральном порядке. Номер вершины начала любой из работ меньше номера вершины ее окончания.



Из вершины 4 в вершину 6 идет пунктирная линия. Это означает, что 6-я работа наступает после 4-й с нулевыми затратами времени.

3. Для дальнейшей работы с графом каждую вершину разобьем на четыре части. В верхней части указывается номер события i , в левой – ранний срок $t_p(i)$ свершения события i , в правой – поздний срок $t_n(i)$ свершения события i , в нижней – резерв $R(i)$ времени этого события.



Сначала рассчитываются ранние сроки свершения событий (для события I его полагают равным 0). Для остальных событий (в порядке возрастания номеров) эти сроки подсчитываются по формуле

$$t_p(j) = \max_{(i;j) \in U_j^+} [t_p(i) + t(i;j)],$$

где U_j^+ – множество работ, входящих в j -е событие; $t_p(i)$ – ранний срок наступления начального события работы $(i;j)$ с продолжительностью $t(i;j)$.

Ранний срок $t_p(i)$ свершения события i – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

В нашем случае будем иметь:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1;2) = 0 + 7 = 7;$$

$$t_p(3) = t_p(1) + t(1;3) = 0 + 2 = 2;$$

$$\begin{aligned} t_p(4) &= \max(t_p(2) + t(2;4); t_p(1) + t(1;4); t_p(3) + t(3;4)) = \\ &= \max(7 + 8; 0 + 5; 2 + 1) = \max(15; 5; 3) = 15; \end{aligned}$$

$$t_p(5) = t_p(3) + t(3;5) = 2 + 6 = 8;$$

$$\begin{aligned} t_p(6) &= \max(t_p(4) + t(4;6); t_p(3) + t(3;6); t_p(5) + t(5;6)) = \\ &= \max(15 + 0; 2 + 5; 8 + 3) = \max(15; 7; 11) = 15; \end{aligned}$$

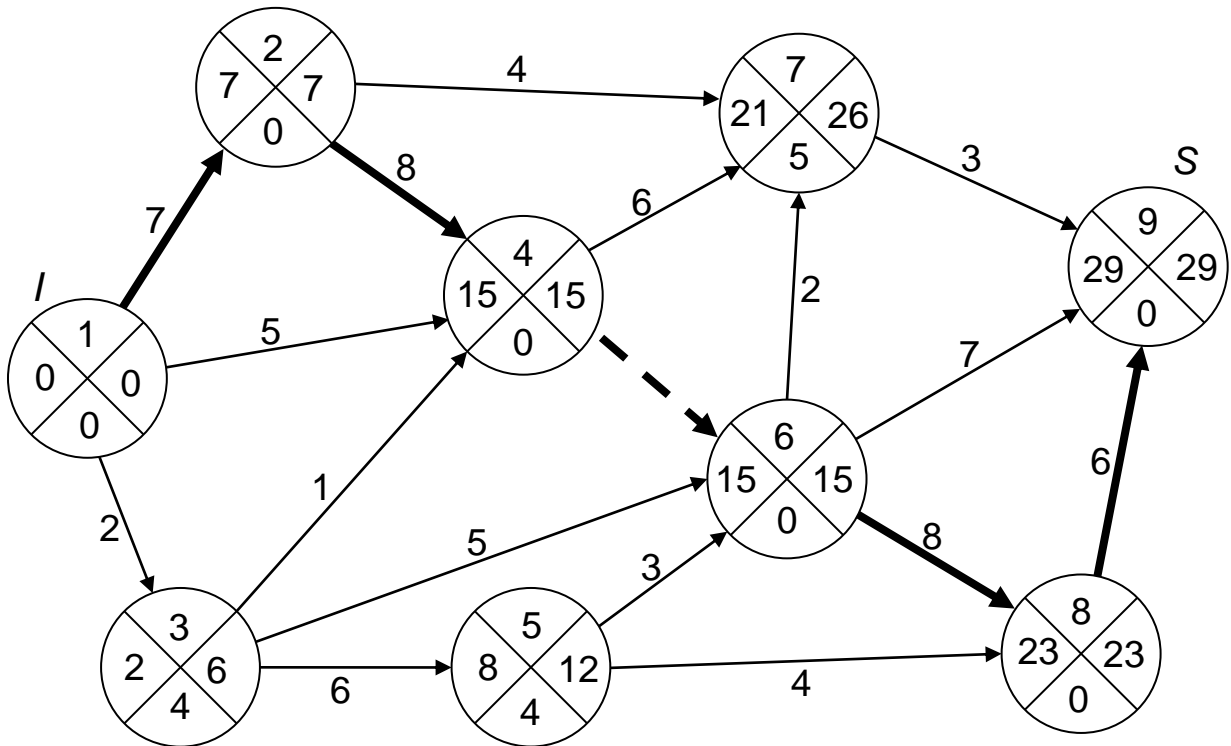
$$\begin{aligned} t_p(7) &= \max(t_p(2) + t(2;7); t_p(4) + t(4;7); t_p(6) + t(6;7)) = \\ &= \max(7 + 4; 15 + 6; 15 + 2) = \max(11; 21; 17) = 21; \end{aligned}$$

$$t_p(8) = \max(t_p(6) + t(6;8); t_p(5) + t(5;8)) = \max(15 + 8; 8 + 4) = \max(23; 12) = 23;$$

$$t_p(9) = \max(t_p(7) + t(7;9); t_p(6) + t(6;9); t_p(8) + t(8;9)) = \\ = \max(21 + 3; 15 + 7; 23 + 6) = \max(24; 22; 29) = 29.$$

В итоге получено число $t_{крит} = 29$ – минимальное время, за которое можно выполнить весь комплекс работ.

4. Найдем поздние сроки свершения событий.



Считается, что поздний срок свершения завершающего события равен критическому сроку: $t_n(9) = t_p(9) = t_{крит} = 29$. Затем, в порядке убывания вершин, поздние сроки свершения событий находим по формуле:

$$t_n(i) = \min_{(i;j) \in U_i^-} [t_n(j) - t(i;j)],$$

где U_i^- – множество работ, выходящих из i -го события, а $t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы $(i; j)$.

Поздний срок $t_n(i)$ наступления i -го события – это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае будем иметь:

$$t_n(8) = t_n(9) - t(8;9) = 29 - 6 = 23;$$

$$t_n(7) = t_n(9) - t(7;9) = 29 - 3 = 26;$$

$$t_n(6) = \min(t_n(7) - t(6;7); t_n(9) - t(6;9); t_n(8) - t(6;8)) = \\ = \min(26 - 2; 29 - 7; 23 - 8) = \min(24; 22; 15) = 15;$$

$$t_n(5) = \min(t_n(6) - t(5;6); t_n(8) - t(5;8)) = \min(15 - 3; 23 - 4) = \min(12; 19) = 12;$$

$$t_n(4) = \min(t_n(7) - t(4;7); t_n(6) - t(4;6)) = \min(26 - 6; 15 - 0) = \min(20; 15) = 15;$$

$$t_n(3) = \min(t_n(4) - t(3;4); t_n(6) - t(3;6); t_n(5) - t(3;5)) = \\ = \min(15 - 1; 15 - 5; 12 - 6) = \min(14; 10; 6) = 6;$$

$$t_n(2) = \min(t_n(7) - t(2;7); t_n(4) - t(2;4)) = \min(26 - 4; 15 - 8) = \min(22; 7) = 7;$$

$$t_n(1) = \min(t_n(2) - t(1;2); t_n(4) - t(1;4); t_n(3) - t(1;3)) = \\ = \min(7 - 7; 15 - 5; 6 - 2) = \min(0; 10; 4) = 0.$$

5. Резервы времени событий найдем по формуле

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

и внесем их в нижние четверти вершин:

$$R(1) = 0 - 0 = 0; \quad R(2) = 7 - 7 = 0; \quad R(3) = 6 - 2 = 4; \\ R(4) = 15 - 15 = 0; \quad R(5) = 12 - 8 = 4; \quad R(6) = 15 - 15 = 0; \\ R(7) = 26 - 21 = 5; \quad R(8) = 23 - 23 = 0; \quad R(9) = 29 - 29 = 0.$$

6. Ранее было найдено время выполнения комплекса: $t_{крит} = 29$.

Для работ критического пути все резервы времени равны 0, поэтому критическим является путь $L_{крит} : 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 9$ (выделен на графе).

Ответ: $L_{крит} : 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 9$; $t_{крит} = 29$.

Литература

1. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование : учеб. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 352 с.
2. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование : учеб. пособие / А. В. Кузнецов [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова и Р. А. Рутковского. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2021. – 448 с.
3. Кузьмина, Е. В. Элементы математического программирования : практикум по высшей математике для студентов технических специальностей : в 8 ч. / Е. В. Кузьмина, Л. Т. Мороз. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2007. – Ч. 6. – 45 с.
4. Юхимук, Т. Ю. Математическое программирование : метод. рекомендации / Т. Ю. Юхимук, М. М. Юхимук, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2019. – 44 с.
5. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» для студентов экономических специальностей / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2000. – 91 с.
6. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2005. – 92 с.
7. Гладкий, И. И. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / И. И. Гладкий, С. Т. Гусева, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2011. – 32 с.
8. Махнист, Л. П. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : практикум для студентов экономических специальностей / Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, И. И. Гладкий. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2016. – 84 с.

Содержание

Практические задания.....	3
Решение типового варианта.....	31
Литература.....	54

Учебное издание

Составители:

*Юхимук Татьяна Юрьевна,
Юхимук Михаил Михайлович,
Махнист Леонид Петрович*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рабочая тетрадь

Ответственный за выпуск: Юхимук М. М.

Редактор: Винник Н. С.

Компьютерная верстка: Горбач А. А.

Корректор: Дударук С. А.

Подписано в печать 27.04.2024 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 3,75. Уч. изд. л. 3,49. Заказ № 506. Тираж 30 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
Распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= 0 + 5 - 3 = 2 \\ \Delta_{13} &= 0 + 7 - 2 = 5 \\ \Delta_{14} &= 0 + 9 - 1 = 8 \\ \Delta_{24} &= 0 + 9 - 3 = 6 \\ \Delta_{31} &= -4 + 4 - 3 = -3 \\ \Delta_{32} &= -4 + 5 - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= 0 + 5 - 3 = 2 \\ \Delta_{13} &= 0 + 7 - 2 = 5 \\ \Delta_{14} &= 0 + 9 - 1 = 8 \\ \Delta_{24} &= 0 + 9 - 3 = 6 \\ \Delta_{31} &= -4 + 4 - 3 = -3 \\ \Delta_{32} &= -4 + 5 - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= 0 + 5 - 3 = 2 \\ \Delta_{13} &= 0 + 7 - 2 = 5 \\ \Delta_{14} &= 0 + 9 - 1 = 8 \\ \Delta_{24} &= 0 + 9 - 3 = 6 \\ \Delta_{31} &= -4 + 4 - 3 = -3 \\ \Delta_{32} &= -4 + 5 - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= 0 + 5 - 3 = 2 \\ \Delta_{13} &= 0 + 7 - 2 = 5 \\ \Delta_{14} &= 0 + 9 - 1 = 8 \\ \Delta_{24} &= 0 + 9 - 3 = 6 \\ \Delta_{31} &= -4 + 4 - 3 = -3 \\ \Delta_{32} &= -4 + 5 - 1 = 0\end{aligned}$$